1. Cours 7: Espaces vectoriels

Loi de composition externe: *Soit* $(K, +, \cdot)$ *un corps commutatif.*

On appelle loi de composition externe sur un ensemble $E \neq \varnothing$, *à coefficients dans* K, *toute application* $\bullet$ *de* $K \times E$ *dans* E.

* *L'image* $\bullet(\alpha, x)$ *est souvent notée* $\alpha \bullet x$ *(ou* αx *s'il n'y a pas de confusion)*

* *La loi* $\bullet$ *est aussi appelée multiplication par un scalaire.*

Exemples:

1) L'application $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, définie par $\alpha \bullet z = \alpha z$, est une loi de composition externe sur $\mathbb{C}$ à coefficients dans$\mathbb{R}$.

2)L'application $\bullet$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie par $\alpha \bullet (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ est une loi de composition externe sur $\mathbb{R}^n$, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
L'application $\bullet$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, définie par $\alpha \bullet f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} : (\alpha \bullet f)(x) = \alpha f(x)$, est une loi de composition externe sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque: La multiplication $\cdot_K$ du corps K est une loi de composition interne et externe en même temps.($\cdot_K : K \times K \to K$).

1.1. Structure d'espace vectoriel

Définition: *Soit* K *un corps commutatif.*
On appelle espace vectoriel sur K *(ou* K*-espace vectoriel) tout ensemble non vide* $E \neq \varnothing$ *muni d'une loi de composition interne* $+$ *et d'une loi de composition externe* $\bullet$ *à coefficients dans* K, *vérifiant:*
1) $(E, +)$ *est un groupe commutatif.*
2) Pour tous $\alpha, \beta \in K$ *et tous* $x, y \in E$:
$\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$
$(\alpha +_K \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$
$(\alpha \cdot_K \beta) \bullet x = \alpha \bullet (\beta \bullet x)$
$1_K \bullet x = x$ *(où* 1_K *est l'élément unité du corps* K*)*

Remarques:
1) Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (respectivement sur $\mathbb{C}$) est appelé espace vectoriel réel (respectivement complexe).
2) Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés vecteurs et ceux du corps K sont appelés scalaires.

Exemples:

1) Tout corps commutatif K est un espace vectoriel sur lui même.
$\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, pour l'addition et la multiplication usuelles de $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, pour l'addition et la multiplication usuelles de $\mathbb{C}$.

2) L'ensemble $\mathbb{C}$, avec l'addition usuelle $+$ et de la multiplication par un réel $\bullet$, définie par $\alpha \bullet z = \alpha z$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3) Dans $\mathbb{R}^n$, on définit la loi interne $+$ et la loi externe $\bullet$ par:
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$
$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
$\alpha \bullet (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$
Avec ces lois, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel.

4) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on définit la loi interne $+$ et la loi externe $\bullet$ par:
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous f, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
$$\begin{array}{l} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\alpha \bullet f)(x) = \alpha f(x) \end{array} \text{, pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
Avec ces lois $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

5) L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps commutatif K muni de l'addition $+$ et la multiplication par un scalaire de K est un espace vectoriel sur K.

Théorème: *Soit E un K-espace vectoriel, alors pour tous $x, y \in E$, et tous $\alpha, \beta \in K$, on a:*
1) $0_K \bullet x = 0_E = \alpha \bullet 0_E$
2) $\alpha \bullet (-x) = -(\alpha \bullet x) = (-\alpha) \bullet x$
3) $\alpha \bullet (x - y) = \alpha \bullet x - \alpha \bullet y$ *et* $(\alpha - \beta) \bullet x = \alpha \bullet x - \beta \bullet x$
4) Si $\alpha \bullet x = 0_E$, *alors* $\alpha = 0_K$ *ou* $x = 0_E$

Preuve:

1) $$\begin{aligned} 0_E &= (0_K \bullet x) - (0_K \bullet x) = ((0_K + 0_K) \bullet x) - (0_K \bullet x) \\ &= (0_K \bullet x) + (0_K \bullet x) - (0_K \bullet x) = (0_K \bullet x) \\ 0_E &= (\alpha \bullet 0_E) - (\alpha \bullet 0_E) = (\alpha \bullet (0_E + 0_E)) - (\alpha \bullet 0_E) \\ &= (\alpha \bullet 0_E) + (\alpha \bullet 0_E) - (\alpha \bullet 0_E) = (\alpha \bullet 0_E) \end{aligned}$$

2) $\alpha \bullet x + \alpha \bullet (-x) = \alpha \bullet (x + (-x)) = \alpha \bullet 0_E = 0_E$, alors $\alpha \bullet (-x) = -(\alpha \bullet x)$, de la même façon, $\alpha \bullet x + (-\alpha) \bullet x = (\alpha + (-\alpha)) \bullet x = 0_K \bullet x = 0_E$, alors

$(-\alpha) \bullet x = -(\alpha \bullet x)$
3) $\alpha \bullet (x - y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet (-y) = \alpha \bullet x - \alpha \bullet y$
 et $(\alpha - \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + (-\beta) \bullet x = \alpha \bullet x - \beta \bullet x$
4) Si $\alpha \bullet x = 0_E$, alors, ou bien $\alpha = 0$, ou bien $\alpha \neq 0$ et dans ce cas α est inversible dans K, par conséquent $\alpha^{-1} \bullet (\alpha \bullet x) = \alpha^{-1} \bullet 0_E$
 d'où $x = 1 \bullet x = (\alpha^{-1} \cdot_K \alpha) \bullet x = \alpha^{-1} \bullet (\alpha \bullet x) = 0_E$ ■

1.2. Sous espace vectoriel

Définition: *On appelle sous espace vectoriel d'un K-espace vectoriel E, toute partie non vide F de E qui est elle même un K-espace vectoriel pour les lois interne $+$ et externe $\bullet$ restreintes à F.*

Proposition: *Une partie F de E est un sous espace vectoriel d'un K-espace vectoriel E, ssi*
i) $0_E \in F$
ii) $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in F :\ \ x - y \in F$ *et* $\alpha \bullet x \in F$

Preuve: a) Supposons que F est un sous espace vectoriel de E pour les lois restreintes et montrons les assertions i) et ii).

La loi externe de E restreinte à F est une loi externe sur F, donc pour tout $\alpha \in K$ et tout $x \in F$ on a: $\alpha \bullet x \in F$. Pour la loi interne $+$; $(F, +)$ est un groupe commutatif, donc un sous groupe de E, donc $0_E \in F$ et pour tous x et y dans F, on a $x - y \in F$ (**voir cours 4**).

b) Supposons que F vérifie les assertions i) et ii) et montrons que F est un sous espace vectoriel de E.

D'après i) et ii), $(F, +)$ est un sous groupe du groupe $(E, +)$ (**voir cours 4**) qui est commutatif.

L'assertion ii) montre que la loi externe $\bullet$ de E induit une loi externe sur F et l'assertion 2) de la définition des espaces vectoriels est trivialement par les éléments de F.**.** Par conséquent F est un espace vectoriel pour les lois restreintes de E, c'est à dire un sous espace vectoriel de E. ■

Corollaire: *Une partie F de E est un sous espace vectoriel du K-espace vectoriel E, ssi*
i') $0_E \in F$
ii') $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in F :\ \ \alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F$

Preuve: a) Supposons que i') et ii') sont vérifiées et montrons que i) et ii) sont vérifiées.

F vérifie *ii')*, alors en choisissant $(\alpha, \beta) = (1_K, -1_K)$ ensuite $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0_K)$, on obtient l'assertion ii) de la proposition précédente.

b) Inversement, Supposons que i) et ii) sont vérifiées et montrons que i') et ii') sont vérifiées.

si F vérifie l'assertion ii) de la proposition précédente, alors pour tous $\alpha, \beta \in K$ et tous $x, y \in F$, on a $\alpha \bullet x \in F$ et $(-\beta) \bullet y \in F$ d'où $\alpha \bullet x - (-\beta) \bullet y \in F$. C'est à dire $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F$ ■

Exemples :

1) L'ensemble $F = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. En effet: $0 + 0 + ... + 0 = 0$, alors $0_{\mathbb{R}^n} = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n \ zéros} \right) \in F$

et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in F$, on a
$\alpha (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta (y_1, y_2, ..., y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, ..., \alpha x_n + \beta y_n)$ et
$(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + .. + (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha (x_1 + x_2 + .. + x_n) + \beta (y_1 + y_2 + .. + y_n) = 0,$
donc $\alpha (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta (y_1, y_2, ..., y_n) \in F$.

2) L'ensemble $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet: La fonction nulle $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est continue, alors $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et toutes $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $\alpha f + \beta g$ est une fonction continue, donc $\alpha f + \beta g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1.2.1. Parties libres, parties liées, parties génératrices et bases

Définitions: *Soit E un K-espace vectoriel et $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une partie finie non vide de E.*
1) *La partie A est dite libre si*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K : (\lambda_1 \bullet a_1 + \lambda_2 \bullet a_2 + ... + \lambda_p \bullet a_p = 0) \Rightarrow (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge ... \wedge \lambda_p = 0)$$

(On dit aussi que les vecteurs $a_1, a_2, ..., a_p$ sont linéairement indépendants)
2) *La partie A de E est dite liée si elle n'est pas libre.*
3) *La partie A est dite partie génératrice de E si*

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K : x = \lambda_1 \bullet a_1 + \lambda_2 \bullet a_2 + ... + \lambda_p \bullet a_p$$

(On dit aussi que E est engendré par A et on ecrit $E = Gr(A)$ ou $E = \langle a_1, a_2, ..., a_p \rangle$*)*

4) L'espace E est dit de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.
5) *La partie A est dite base de E si elle est libre et génératrice de E.*

On a, par convention: La partie vide $\varnothing$ est libre, et elle est génératrice de l'espace $E = \{0\}$.

Exemples :

1) La partie $A = \{1, i\}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est une base, car elle est libre et génératrice.
En effet: Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
$\lambda_1 \bullet 1 + \lambda_2 \bullet i = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0)$
et soit $z \in \mathbb{C}$, Il suffit de prendre $\lambda_1 = \mathrm{Re}\,(z) \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = \mathrm{Im}\,(z) \in \mathbb{R}$
On a $z = \lambda_2 + \lambda_2 i$ (Comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}$).

La partie $B = \{1\}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ car elle est libre et génératrice.
En effet: Soit $\lambda_1 \in \mathbb{C}$,
$\lambda_1 \bullet 1 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = 0)$
et soit $z \in \mathbb{C}$, Il suffit de prendre $\lambda_1 = z \in \mathbb{C}$.
On a $z = z \bullet 1 = \lambda_1 \bullet 1$ (Comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$).

2) Soient dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.
La partie $A = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (appelée base canonique), car elle est libre et génératrice.

En effet: Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bullet e_1 + \lambda_2 \bullet e_2 + ... + \lambda_n \bullet e_n = 0 \quad &\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

et soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, Il suffit de prendre $\lambda_1 = x_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = x_2 \in \mathbb{R}$,...,$\lambda_n = x_n \in \mathbb{R}$
On a $(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$.

3) La partie $A = \{(1, 2, -1), (3, 0, 1), (0, -6, 4)\}$ est liée dans $\mathbb{R}^3$.
En effet: Il suffit de prendre $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 1$
On a $\lambda_1 (1, 2, -1) + \lambda_2 (3, 0, 1) + \lambda_3 (0, -6, 4) = 0 \wedge (\lambda_1 \neq 0)$.

4) La partie $A = \{1, X, X^2, X^3\}$ est une base du K-espace $K_3[X]$ des polynômes de degré au plus 3 à coefficients dans K.
En effet: Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$

$\lambda_1.1+\lambda_2X+\lambda_3X^2+\lambda_4X^3=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$,
Soit $P\in K_3[X]$, il existe $a_1,a_2,a_3,a_4\in K$ tels que $P=a_1.1+a_2X+a_3X^2+a_4X^3$

5) $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x+y-2z+t=0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Soit $(x,y,z,t)\in F$, alors
$x+y-2z+t=0 \Leftrightarrow x=-y+2z-t$, donc
$$\begin{aligned}(x,y,z,t)&=(-y+2z-t,y,z,t)\\&=y(-1,1,0,0)+z(2,0,1,0)+t(-1,0,0,1)\ \text{ avec }\ y,z,t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$
donc $A=\{(-1,1,0,0),(2,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ est une partie génératrice de F.

6) Le sous espace F_1 de $\mathbb{R}^3$, engendré par $A_1=\{(0,-1,2),(1,1,1)\}$ est donné par
$$\begin{aligned}F_1&=\{\lambda_1(0,-1,2)+\lambda_2(1,1,1)\ /\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\\&=\{(\lambda_2,-\lambda_1+\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2)\ /\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\\&=\{(x,y,z)\ /x=\lambda_2,\ y=-\lambda_1+\lambda_2,\ z=2\lambda_1+\lambda_2 \text{ et } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\}\\&=\{(x,y,z)\ /\ z-x=2(x-y)\ \text{ et } y,x\in\mathbb{R}\}\\&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z-3x+2y=0\}\end{aligned}$$
Théorème: *Soit $A=\{a_1,a_2,...,a_p\}$ une partie finie d'un K-espace vectoriel E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) *A est une base de E*
2) *A est une partie libre maximale*[1] *de E*
3) *A est une partie génératrice minimale*[2] *de E*
4) *Tout $x\in E$ s'écrit de façon unique $x=x_1a_1+x_2a_2+...+x_pa_p$ avec $x_1,x_2,...,x_p\in K$*

Preuve: Dans le cas où $A=\varnothing$, c'est à dire $E=\{0\}$, l'équivalence des assertions est assurée par les conventions déjà faites.

Supposons dans la suite de la preuve que $A\neq\varnothing$.
a) Montrons que 1) $\Rightarrow$ 2)
Supposons que A est une base de E,et soit $B\subset E$ telle que $A\subset B$.
Si $B\neq A$, alors il existe $x\in B$ et $x\notin A$ et comme A est une base elle est génératrice de E, donc $x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+...+\lambda_pa_p$ avec $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p\in K$, ainsi $0=-x+\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+...+\lambda_pa_p$ qui présente une combinaison nulle des éléments de B avec des coefficients non tous nuls, donc B est liée. Par conséquent la seule partie libre contenant A est A. Alors A est une partie libre maximale.
b) Montrons que 2) $\Rightarrow$ 3)
Supposons que A est une partie libre maximale et soit $x\in E$, alors ou bien $x\in A$ et il s'écrit comme combinaison $x=a_i=0.a_1+...+1.a_i+...+0.a_p$, ou bien $x\notin A$

[1] Maximale, pour l'orde de l'inclusion
[2] Minimale, pour l'orde de l'inclusion

et dans ce cas la partie $A\cup\{x\}$ est liée (car A est libre maximale), donc il existe des scalaires $\lambda_0 \neq 0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ de K vérifiants $\lambda_0 x+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_p a_p = 0$, alors x s'écrit comme combinaison $x = -(\lambda_0)^{-1}\lambda_1 a_1 - (\lambda_0)^{-1}\lambda_2 a_2 - ... - (\lambda_0)^{-1}\lambda_p a_p$. Dans les deux cas x s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de A, alors A est une partie génératrice. Pour montrer qu'elle est génératrice minimale, étudions la partie $A' = \{a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_p\}$ qui est égale à A privé de a_i. L'élément a_i ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de A' (sinon A sera liée) et par conséquent A' n'est pas génératrice, donc A est une partie génératrice minimale.

c) Montrons que 3) $\Rightarrow$ 4)

Supposons que A est une partie génératrice minimale et soit $x = x_1a_1+x_2a_2+...+x_pa_p = x'_1a_1+x'_2a_2+...+x'_pa_p$, alors $(x_1-x'_1)\,a_1+(x_2-x'_2)\,a_2+...+\left(x_p-x'_p\right)a_p = 0$ et si l'un des $x_i - x'_i \neq 0$ on peut écrire $a_i = (x_i-x'_i)^{-1}(x_1-x'_1)\,a_1 + ... + (x_i-x'_i)^{-1}\left(x_{i-1}-x'_{i-1}\right)a_{i-1}+(x_i-x'_i)^{-1}\left(x_{i+1}-x'_{i+1}\right)a_{i+1}+...+(x_i-x'_i)^{-1}\left(x_p-x'_p\right)a_p$ qui signifie que $A' = \{a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_p\}$ est une partie génératrice, ce qui contredit le fait que A est une partie génératrice minimale. Par conséquent tous les $x_i - x'_i$ sont nuls, alors l'écriture $x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p$ est unique.

d) Montrons que 4) $\Rightarrow$ 1)

Supposons que tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p$, alors A est une partie génératrice et puisque $0 = 0.a_1 + 0.a_2 + ... + 0.a_p$ est une écriture unique, alors $0 = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_p = 0$ ce qui signifie que A est libre. Par suite A est une base de E ■

Corollaire: *Soient L et G deux parties finies d'un K-espace vectoriel E telles que L est libre, G est génératrice et $L \subset G$, alors il existe une base A de E telle que $L \subset A \subset G$*

Preuve: Considérons l'ensemble $\mathcal{A} = \{\mathcal{L} \text{ telle que } L \subset \mathcal{L} \subset G \text{ et } \mathcal{L} \text{ est génératrice}\}$. Puisque G est finie, $\mathcal{A}$ est aussi fini, alors il a au moins[3] un élément minimal A pour l'inclusion. A est donc partie génératrice telle que $L \subset A$.

Posons $L = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ et $A - L = \{a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_p\}$, et soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K$ tels que $\lambda_1 \bullet a_1 + \lambda_2 \bullet a_2 + ... + \lambda_p \bullet a_p = 0$.

Supposons que $\lambda_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{r+2, r+3, ..., p\}$, alors $a_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}\bullet a_1+...+\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\bullet a_{i-1}+\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\bullet a_{i+1}+...+\frac{\lambda_p}{\lambda_i}\bullet a_p$. Ainsi $A-\{a_i\}$ est génératrice avec $L \subset A - \{a_i\}$, c'est à dire $A - \{a_i\} \in \mathcal{A}$. Ceci contredit la minimalité de A dans $\mathcal{A}$.

Par conséquent $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{r+2, r+3, ..., p\}$.

[3] Si un ensemble ordonné n'admet pas d'élément minimal il est infini.

Après substitution, on obtient, $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, car L est libre.
Par suite A est libre, donc c'est une base de E avec $L \subset A \subset G$. $\blacksquare$

Corollaire: (Théorème de la base incomplète): *Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie et L une partie libre finie de E, alors il existe une base A de E telle que $L \subset A$.*

Preuve: E est engendré par une partie finie G, alors $L \cup G$ est une partie génératrice finie contenant la partie libre L, donc il existe une base A de E telle que $L \subset A$ $\blacksquare$

Corollaire: *Tout K-espace vectoriel E de dimension finie admet une base.*

Preuve: Si $E = \{0\}$ alors E admet, par convention, $\varnothing$ comme base .
S'il existe $a \in E$ et $a \neq 0$, alors la partie $\{a\}$ est libre dans E, donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base A de E telle que $\{a\} \subset A$. $\blacksquare$

1.3. Dimension et composantes

Définitions: *Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une base d'un K-espace vectoriel E.*
1) *La dimension de E sur K, notée $\dim_K E$, est le nombre des éléments de A.*
2) *Si $A \neq \varnothing$, alors le $p-$uplet unique $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de K^p, vérifiant $x = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_pa_p$, est appelé composantes de x dans la base A.*

Remarque :
1) La dimension d'un espace E ne dépend pas du choix de la base, car toutes les bases de E ont le même cardinal.
2) Si $E = \{0\}$, alors $A = \varnothing$, donc $\dim_K E = 0$.

Exemples :
1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, car $\{1, i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Dans cette base (x, y) sont les composantes du complexe $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.
par contre $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ car $\{1\}$ est une base de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
Dans cette base $(x + iy)$ est la seule composante du complexe $x + iy$.

2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, car $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Dans cette base $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les composantes de $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Théorème: *Soit F un sous espace d'un K-espace vectoriel E de dimension finie. Alors:*

1) F est de dimension finie et $\dim_K F \leq \dim_K E$.
2) $F = E$ si et seulement si $\dim_K F = \dim_K E$

Preuve: 1) Si $\dim_K E = n$, alors toute partie de $n+1$ éléments de F est liée (sinon on peut trouver une base de E contenant plus de $n+1$ éléments ce qui implique que $n+1 \leq \dim_K E = n$, qui est absurde), donc $\dim_K F < n+1$, c'est à dire $\dim_K F \leq n = \dim_K E$.

2) Supposons que $\dim_K F = \dim_K E = n$, alors une base B_F du sous espace F est une partie libre contenant n éléments de E, donc elle est libre et maximale dans E (sinon $n+1 \leq \dim_K E = n$), alors B_F est une base de E, donc E est engendré par des éléments de F et par conséquent $E \subset F$ ce qui donne l'égalité $E = F$.
Si $E = F$, il est clair que $\dim_K F = \dim_K E$. ■

1.4. Sommes directes et sous espaces supplémentaires

Théorème: *Si F_1* et *F_2 sont deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E, alors $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont deux sous espaces vectoriels de E.*
De plus, si E est de dimension finie alors,

$$\dim_K (F_1 + F_2) = \dim_K F_1 + \dim_K F_2 - \dim_K (F_1 \cap F_2)$$

Preuve: 1) On a $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, alors $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.
2) Si x, $y \in F_1+F_2$ et $\alpha, \beta \in K$, alors $x = x_1+x_2$ et $y = y_1+y_2$ avec $x_1, y_1 \in F_1$ et $x_2, y_2 \in F_2$.
On a $\alpha\bullet x+\beta\bullet y = \alpha\bullet(x_1 + x_2)+\beta\bullet(y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha \bullet x_1 + \beta \bullet y_1)}_{\in F_1}+\underbrace{(\alpha \bullet x_2 + \beta \bullet y_2)}_{\in F_2}$
, donc $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_1 + F_2$. Par suite $F_1 + F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
1') On a $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, alors $0_E \in F_1 \cap F_2$.
2') Si x, $y \in F_1 \cap F_2$ et $\alpha, \beta \in K$, alors x, $y \in F_1$ et x, $y \in F_2$.
donc $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_1$ car F_1 est un sous espace vectoriel de E
et $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_2$ car F_2 est un sous espace vectoriel de E
D'où $\alpha \bullet x + \beta \bullet y \in F_1 \cap F_2$.
Par suite $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de E.
3) On sait que $F_1 \cap F_2$ est un sous espace vectoriel de F_1 et de F_2 et si E est de dimension finie, ces espaces sont de dimensions finies.
Soit $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ une base de $F_1 \cap F_2$ qu'on peut être compléter par $\{a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_m\}$ pour avoir une base de F_1 et par $\left\{a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ pour avoir une base de F_2.
Soit $x \in F_1 + F_2$, alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Ainsi, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, ..., \alpha_m \in K$ et il existe $\lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_p, \alpha'_{p+1}, \alpha'_{p+2}, ..., \alpha'_s \in K$ tels que

$$\begin{aligned} x &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_p a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + \alpha_{p+2} a_{p+2} + .. + \alpha_m a_m) \\ &\quad + \left(\lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_2 + ... + \lambda'_p a_p + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + \alpha'_{p+2} a'_{p+2} + .. + \alpha'_s a'_s\right) \\ &= (\lambda_1 + \lambda'_1)\, a_1 + (\lambda_2 + \lambda'_2)\, a_2 + ... + \left(\lambda_p + \lambda'_p\right) a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + \alpha_{p+2} a_{p+2} + .. + \alpha_m a_m \\ &\qquad + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + \alpha'_{p+2} a'_{p+2} + .. + \alpha'_s a'_s \end{aligned}$$

D'où $\left\{a_1, a_2, ..., a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_m, a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ est une partie génératrice de $F_1 + F_2$.
Soit maintenant, $\lambda_1, ..., \lambda_p, \alpha_{p+1}, ..., \alpha_m, \alpha'_{p+1}, ..., \alpha'_s \in K$.
Supposons que

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + .. + \alpha_m a_m + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s = 0 \qquad (\#)$$

Alors $-\left(\alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s\right) = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p + \alpha_{p+1} a_{p+1} + .. + \alpha_m a_m \in F_1$
Mais $-\left(\alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s\right) \in F_1 \cap F_2$, donc il existe $\gamma_1, ..., \gamma_p \in K$ tel que

$$-\left(\alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s\right) = \gamma_1 a_1 + ... + \gamma_p a_p$$

c.à.d: $\gamma_1 a_1 + ... + \gamma_p a_p + \alpha'_{p+1} a'_{p+1} + .. + \alpha'_s a'_s = 0$, mais $\left\{a_1, a_2, ..., a_p, a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ est une base de F_2, alors $\gamma_1 = ... = \gamma_p = \alpha'_{p+1} = .. = \alpha'_s = 0$, en particulier $\alpha'_{p+1} = .. = \alpha'_s = 0$.
De la même façon on montre que $\alpha_{p+1} = .. = \alpha_m = 0$.
En remplaçant dans (#), on obtient $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_p a_p = 0$ et comme $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ est une base de $F_1 \cap F_2$, alors $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.
On a montrer que $(\#) \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = \alpha_{p+1} = .. = \alpha_m \alpha'_{p+1} = .. = \alpha'_s = 0$.
Par suite $\left\{a_1, a_2, ..., a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_m, a'_{p+1}, a'_{p+2}, ..., a'_s\right\}$ est libre, donc une base de $F_1 + F_2$, ainsi:

$$\begin{aligned} \dim_K (F_1 + F_2) &= p + (m - p) + (s - p) = m + s - p \\ &= \dim_K F_1 + \dim_K F_2 - \dim_K (F_1 \cap F_2) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Définitions: *Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E.*
1) *La somme $F_1 + F_2$ est dite directe, si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et on écrit dans ce cas $F_1 \oplus F_2$ au lieu de $F_1 + F_2$*
2) *Les sous espaces F_1 et F_2 sont dits supplémentaires si leur somme est directe et $E = F_1 \oplus F_2$.*

Exemples:
1) Les ensembles $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; et comme $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, alors leur somme est directe et on peut écrire $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$.

On sait que $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$, alors $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont deux sous espaces supplémentaires dans $\mathbb{C}$.

2) Les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = y = 0\}$ sont des sous espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. En effet: $(x, y, z) \in F \cap F' \Leftrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ x = y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$
donc $F \cap F' = \{0\}$, alors la somme est directe, donc $F + F' = F \oplus F'$.
Soit $(x, y, z) \in F$.

$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y\,(-1, 1, 0) + z\,(-1, 0, 1)$

Il est facile de montrer que $\{(-1, 1, 0)\, , (-1, 0, 1)\}$ est une base de F, donc $\dim_K F = 2$.
Soit $(x, y, z) \in F'$.

$(x, y, z) = (0, 0, z) = z\,(0, 0, 1)$

Il est facile de montrer que $\{(0, 0, 1)\}$ est une base de F', $\dim_K F' = 1$.
Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}}(F + F') = \dim_{\mathbb{R}} F + \dim_{\mathbb{R}} F' - \dim_{\mathbb{R}}(F \cap F') = 2 + 1 - 0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$
et puisque $F + F'$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors $F + F' = \mathbb{R}^3$.
et comme $F \oplus F' = F + F' = \mathbb{R}^3$, alors F et F' sont des sous espaces supplémentaires l'un de l'autre.

Proposition: *Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E*
La somme $F_1 + F_2$ est directe si, et seulement si, tout $x \in F_1 + F_2$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.

Preuve: Supposons que la somme est directe, et $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ avec $x_1, x_1' \in F_1$ et $x_2, x_2' \in F_2$, alors $x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$, c'est à dire $x_1 = x_1'$ et $x_2' = x_2$, d'où l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$

Inversement, supposons l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$, alors $x = x_1 + x_2 \in F_1 \cap F_2$ permet d'écrire $0 = \underbrace{(x_1 - x)}_{\in F_1} + x_2 = x_1 + \underbrace{(x_2 - x)}_{\in F_2}$,qui est normalement l'écriture unique $0 = 0 + 0$ alors, $x_1 - x = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_2 - x = 0$ donc $x = x_1 + x_2 = 0$. Par conséquent $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et la somme est directe. ■