CHAPITRE 3

Continuité.

Ce chapitre sera bref. Nous y décrirons la notion de continuité pour les fonctions de plusieurs variables. Beaucoup de résultats sur les fonctions de plusieurs variables ne sont vérifiés qu'avec l'hypothèse que celles-ci et leurs dérivées partielles soient continues. Nous rappellerons premièrement la définition de continuité pour les fonctions d'une variable. Après ce rappel, nous définirons la notion de limite dans le contexte des fonctions de plusieurs variables, ainsi que la continuité.

Soient $f(x)$, une fonction d'une variable x définie sur le domaine D et $a \in D$. Alors

$$f \text{ est continue au point } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si f n'est pas continue à $x = a$, on dit que f est discontinue à $x = a$. En d'autres mots, si f est continue à $x = a$, alors $f(a)$ est définie et lorsque x approche a, alors $f(x)$ approche $f(a)$. De façon très imprécise, on peut dire que f n'a pas de saut, de trou à $x = a$. Ci-dessous nous avons tracé les graphes de fonctions discontinues dans la figure 3.1. Si f est continue à chacun des points du domaine D, on dit alors que f est continue sur D.

Graphes de fonctions discontinues

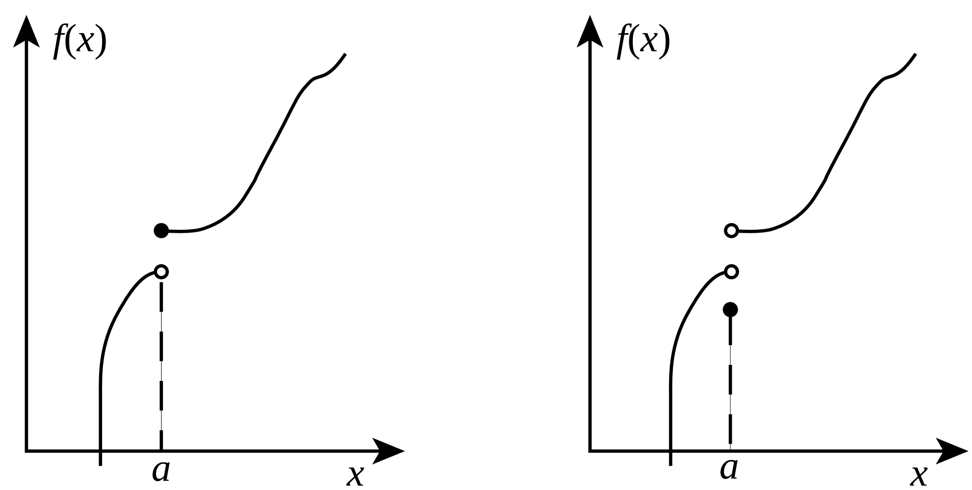

figure 3.1

Soient $f(x, y)$, une fonction de deux variables définie sur le domaine D et $(a, b) \in D$. Nous allons maintenant définir ce qu'est la limite de $f(x, y)$ si (x, y) approche (a, b). On dit que L est la limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) approche (a, b) et qu'on note

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$$

si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ (qui dépend de (a, b) et de ϵ) tel que, pour tout point $(x, y) \in D$ et satisfaisant la condition suivante: $\max\{|x - a|, |y - b|\} < \delta$, alors nous avons $|f(x, y) - L| < \epsilon$. Nous avons représenté ceci à la figure 3.2. Ainsi $f(x, y)$ approche L lorsque (x, y) approche (a, b) peu importe la direction. Noter que la limite n'existe pas toujours.

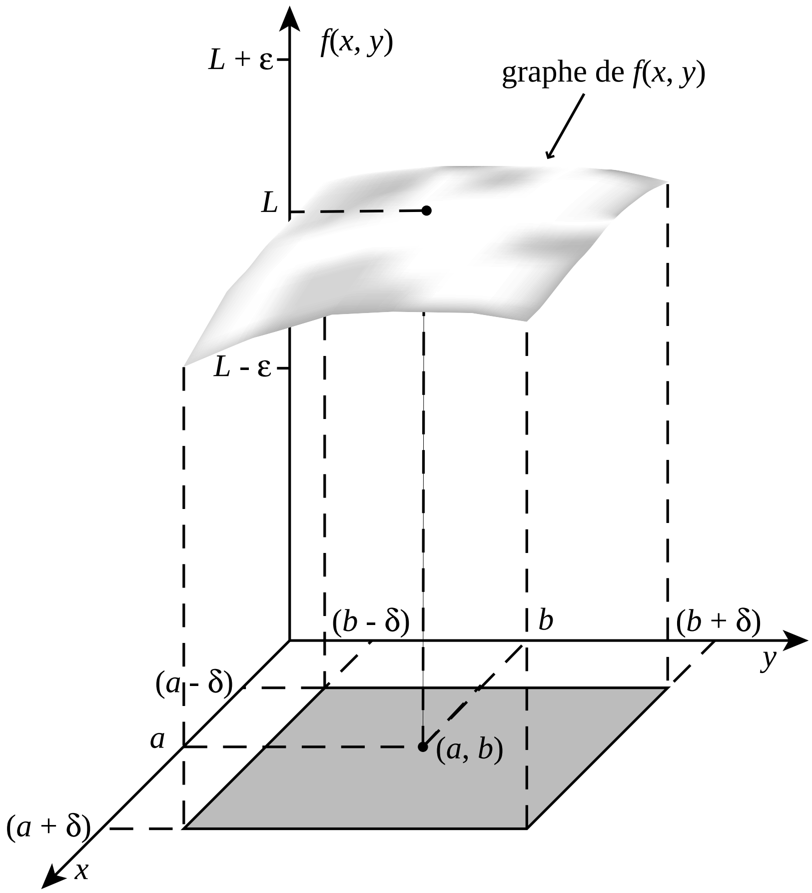

figure 3.2

Exemples 3.1:
a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0$.
b) Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y/(x^4+y^2) & \text{si } y \neq 0; \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Car nous avons que, sur l'axe des x, $f(x,y) = f(x,0) = 0$; alors que sur la parabole $y = x^2$ pour $x \neq 0$, $f(x,y) = f(x,x^2) = 1/2$.

Soient $f(x,y)$, une fonction à deux variables définie sur le domaine D et (a,b), un point de D. On dit que la fonction $f(x,y)$ est continue au point (a,b) si et seulement si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Si une fonction $f(x,y)$ est continue à chacun des points $(a,b) \in D$, on dit alors que f est continue sur D.

Proposition 3.1:
a) Soient $f(x,y)$ et $g(x,y)$, deux fonctions continues au point $(x,y) = (a,b)$, c et d, deux nombres réels. Alors:
$cf(x,y) + dg(x,y)$, $f(x,y)g(x,y)$ et $f(x,y)/g(x,y)$ (si $g(a,b) \neq 0$) sont des fonctions continues à $(x,y) = (a,b)$.
b) La composition des fonctions continues est continue.

La plupart des fonctions rencontrées dans ce cours seront continues. Les polynômes, les fonctions cosinus, sinus et exponentielles sont continues. Les fonctions $\log_b(x), \ln(x)$ sont continues pour $x > 0$.

Exemples 3.2:

a) $x^2y + 2x^3y + x + 5y$, $\quad e^{x+2y}$, $\quad \sin(y + \cos(xy))$ sont des fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$.

b) $(x^2 + y^2)^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Nous allons maintenant définir les notions de limite et continuité pour une fonction de n variables. Soient $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction de n variables définie sur le domaine D et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. On dira que le nombre réel L est la limite de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lorsque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ approche $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et qu'on note

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L$$

si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ (dépendant de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et de ϵ) tel que, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ et satisfaisant: $\max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \ldots, |x_n - a_n|\} < \delta$, nous avons $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \epsilon$.

Ainsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ approche L lorsque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ approche $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ peu importe la direction. Noter que la limite n'existe pas toujours.

Soient $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, une fonction à n variables définie sur le domaine D et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. On dira que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si et seulement si

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

La proposition 3.1 est aussi valable pour les fonctions à n variables.

$\star \quad \star \quad \star$

Exercice 3.1:

Pour chacune des fonctions suivantes $f(x, y)$, calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ et indiquer si f est continue à $(0, 0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (xy)^2/((xy)^2 + (x+y)^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Exercice 3.2:

Etudier la continuité sur $\mathbf{R}^2$ des fonctions $f(x, y)$ suivantes telles que $f(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, nous ayions

$$\text{a) } f(x,y) = \frac{(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)}, \qquad \text{b) } f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2 + y^2)}, \qquad \text{c) } f(x,y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)}, \qquad \text{d) } f(x,y) = \frac{x^3 y}{(x^4 + y^2)}.$$

Exercice 3.3:

Etudier la continuité et l'existence des dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^3 - y^3)/(x^2 + y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 3.4:

Indiquer si chacune des fonctions f ci-dessous est continue à l'origine $(0,0)$ et calculer les dérivées partielles suivantes: $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ et $f_{xx}(0,0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} (x^3+2xy^2)/(3x^2+4y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)/(x-y), & \text{si } x \neq y; \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$

Exercice 3.5:

Soit la fonction $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^4-y^3)/(x^2+2y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-ce que la fonction f est continue à l'origine $(0,0)$?

Exercice 3.6 (†):

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$. Pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, posons $F(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^2$

b) Déterminer les dérivées partielles F_x et F_y.

Exercice 3.7 (†):

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, une fonction réelle d'une variable réelle. Montrer que la fonction $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $F(x,y) = f(x)$ est continue au point $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ si et seulement si f est continue au point $a \in \mathbf{R}$.