REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité :[Analyse Fonctionnelle et Applications]

Par :

BOUGHOUFALA. Oussama.

BOUKHTACHE. Hichem zakaria.

GUERNOUG. Sabrina.

KAMLA. Nour el houda.

Sur le thème

Quelques inégalités du type de Gruss pour l'opérateur intégral fractionnaire de Saigo.

Soutenu publiquement le14/07 /2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mr.SENOUCI Abdelkader	Pr	Université Tiaret	Président
Mr.SOFRANI Mohammed	MAA	Université Tiaret	Encadreur
Mr.SOUID Mohammed said	MCA	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études

À

A mes chères sœurs♡Hafidha♡Souria♡chames♡ pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral A mes chers frères♡Yazid♡Newar♡Toufik♡Younes et toute ma famille♡GUERNOUG♡ KALKAL♡ pour leur appui et leur encouragement,

À

Tous Les Enseignants
du département de Mathématique qui ont contribué à mon formation ♡

À

Tous Mes Amis
surtout ♡ soumia ♡ khaira ♡nora♡fatima ♡ amel ♡nasura♡ahlam♡chahra♡khadidja♡jihan♡katia♡hoda♡Amina pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire

♡ Sabrina♡

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

Mes chérs parents pour leur soutien leur patience, leu,
et leurs encouragements durent mon parcours univercity.

À

Mes fréres ,ainsi ma famille ♡ BOUKHTACHE♡

À

Mes Amis

À

Tous Les professeurs
que soit du primaire, du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Hichem

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

qui n'aura jamais pu voirle joursans mes chers parents,pour tous leurs sacrifices,leur amour ,leur tendresse, leur soutien et leur priéres tout ou long de mes études

À

mes soeurs♡ Hadjer♡ Mokhtaria♡ fadhila ♡ nesayba♡ et mes chers fréres ♡naceur ♡youcef♡mehamed ♡ et a toute ma famille ♡KAMLA♡pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire
qu'ils trouvent ici l'expression de notre gratude ♡

À

mes amis particuliérement ♡ Nesrine ♡sabrina♡kaouther♡amina♡khadidja♡katia♡jihan♡kheira ♡nasura♡nora♡fitchu♡marwa♡ ,pour leur encouragements ,et a tous ceux qu'on aime

À

Tous A tous nos enseignants
A tous le personnel du départemnt Mathématique
A toutes les personnes qui nous ont apporté leur 'aide

♡ Hoda ♡

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

Mes chérs parents pour leur soutien leur patience, leu,
et leurs encouragements durent mon parcours univercity.

À

Mes fréres ,ainsi ma famille ♡ BOUGHOUFALA♡AMAIRI♡

À

Mes Amis

À

Tous Les professeurs
que soit du primaire, du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Ousamma

Remerciements

Avant tout, on remercie ALLAH,le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce travail

Nous tiens à exprimer toutes mes reconnaissances à mon Encadreur, M. Sofrani Mohamed , pour avoir dirigé ce travail avec obnégation et disponibilité. Ces conseils m'ont été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce mémoire.

Nous adressons mes plus vifs remerciements à :M. SENOUCI Abdelkader, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de mon mémoire.

Des remerciements vont de même à M. SOUID Mohammed said qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de soutenance de mon mémoire.

nous ne peux pas oublions de remercier mes parents pour leurs soutiens, leurs son aides et patience m'ont été, tout au long de ma vie et de mes études, un réconfort et un encouragement sur tout dans les moments opportuns Sans oublier aussi tous les membres de ma famille en particulier : mes sœurs, mes frères, et tous mes proches

Enfin, Nous adressons mes remerciements à tous mes collègues et tous mes amis qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

Table des matières

INTRODUCTION

L'inégalité de Gruss est une inégalité qui établit un lien entre l'intégrale du produit de deux fonctions et le produit des intégrales des deux fonctions.

En 1935, Gruss a prouvé l'inégalité intégrale classique (voir[1, 2]) suivante :

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(P-p)$$

où $m \leq f(x) \leq M, \quad p \leq g \leq P$ avec f, g deux fonctions intégrables sur [a,b].

Dans la dernière décennie, nombreux chercheurs ont fait de nombreu variantes , de généralisations et d'extensions de l'inégalité de Gruss . voir ([1, 4]).

Récemment,plusieurs auteurs ont étudié inégalités intégrales fractionnaires via Caputo, Riemann-Liouville, voir ([3],[5]-[13]) . Certains auteurs ont étudié l'opérateur intégral fractionnaire de Saigo ([14]-[21]).

Dans [11] Dahmani et al a donné l'inégalité l'intégrale fractionnaire suivante en utilisant l'intégrale fractionnaire de R-L :

$$\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I^\alpha fg(t) - I^\alpha f(t)I^\alpha g(t)\right| \leq \left(\frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 (M-m)(P-p)$$

.

Dans la littérature, peu de résultats ont été obtenus sur certains inégalités intégrales fractionnaires en utilisant intégral fractionnaire de Hadamard et opérateur intégral fractionnaire de Saigo dans [17],[18],[22]-[25]. notre objectif dans ce mémoire est présenter de nouveaux résultats en utilisant l'intégrale fractionnaire de Saigo.

Dans ce travaill en considére quelques inégalités du type Gruss pour l'opérateur intégrale fractionnaire de Saigo le mémoire comprend une introduction

et trois chapitres et une conclusion et une bibiographie
Au premier chapitre en étudie préliminaire,définitions des espaces fonctionnels et quelques inégalités Holder ,inégalité intégrale de Cauchy Schwartz .

le deuxième chapitre est composée de fonction spécifique gamma ,Béta et hypergéometrique et quelque proprieté intégrale et drivées fractionnaire de R-L .

Dans le troisième chapitre sont données quelques nouvelles ingalités intégrales de type gruss on utilise l'intégrale fractionnaires de Saigo, avec deux constantes et deux variables .

Chapitre 1

Préliminaire

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace des fonctions intégrales

Définition 1.1.1. *Soient $\Omega = (a, b)(\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini dans $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$*

1. *pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^P(\Omega)$ et l'espace des classes de fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$$

2. *pour $p = \infty$,l'espace $L^\infty(\Omega)$est l'espace des classes de fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω*

Théorème 1.1.1. *Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$*

1. *pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = inf\{M \geq 0 : \ |f(x)| \leq M \ \ p.p \, sur \, \Omega\}$$

1.1.2 Inégalité de Hölder

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p, q < \infty$,telles que $q = \frac{p}{p-1}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on a l'inégalité :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_\Omega |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

cette inégalité se généralise en considérant les réels $p_j > 1$ donc la somme des inverses est égale 1 :

$$\forall f_j \in L^{p_j}(\Omega), \int_\Omega |\Pi f_j(x)|dx \leq \Pi \left(\int_\Omega |f_j(x)|^{p_j} dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

Théorème 1.1.2. *(inégalité de Cauchy Schwartz intégrable) Soient $f, g \in (C([a,b], \mathbb{R}))^2$ alors :*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.3 Espace des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.1.2. *(voir [26])*
Soit $\Omega = [a,b](-\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $n \in \mathbb{N} = 0, 1, ...$ on désigne par $\mathbb{C}^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivé d'ordre inférieur ou égale à continues sur Ω,muni de la norme :

$$\|f\|_{c^n} := \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}(x)\right\| := \sum_{k=0}^{n} max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0, \mathbb{C}^O(\Omega) = \mathbb{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C := max_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Définition 1.1.3. *(voir[26])*
Soit $\Omega = [a,b](-\infty < a < b < +\infty)$un intervalle fini. on désigne par$AC([a,b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrable , c'est à dire :

$$AC([a,b]) = \{f/\exists\varphi \in L^1([a,b]) : \ \ f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt\}$$

et on appelle AC([a,b])l'espace des fonctions absolument continues sur [a,b]

Définition 1.1.4. *(voir[26])*
pour $n \in \mathbb{N} = 0, 1, ...,$ *on désigne par* $AC^n([a,b])$*l'espace des fonctions* f *ayant des drivée jusqu'à l'ordre* $(n-1)$*continue sur [a,b] telles que* $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$*c'est à dire*

$$AC^n([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C}\} \ \ et \ \ f^{(n-1)} \in AC([a,b])$$

En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$

1.1.4 Espace des fonction continues avec poids

$C_\lambda([a.b])$

Définition 1.1.5. *(voir[26])*
soit $\Omega = [a,b]$ *un intervalle fini et* $\lambda \in C (0 \leq \Re(\lambda) < 1)$
On désigne par $C_\lambda([a,b])$*l'espace des fonction f définies sur [a,b] telles que la fonction* $(x-a)^\lambda f(x) \in C([a,b])$ *c'est à dire*

$$C_\lambda([a,b]) = \{f :]a,b] \to C, (.-a)^\lambda f(.) \in C([a,b])\} \tag{1.1}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\lambda} = \|(x-a)^\lambda f(x)\|_C = max_{x\in\Omega} |(x-a)\lambda f(x)| \tag{1.2}$$

l'espace $c_\lambda([a,b])$ *est appelé l'espace des fonctions continues avec poids en particulier,*$C_0([a,b]) = C([a,b])$

Définition 1.1.6. *Une fonction réelle f(t),t* ≥ 0 *est dite dans l'espace* C_μ *,*$\mu \in \mathbb{R}$ *s'il existe un nombre réel* $p > \mu$ *tel que* $f(t) = t^p f_1(t)$*, où*$f_1(t) \in C([0,\infty])$

Définition 1.1.7. *Une fonction f(t),t* ≥ 0 *est dite dans l'espace* $C_\mu^n \in \mathbb{R}$*, si* $f^{(n)} \in C_\mu$

1.1.5 Théoreme de fubini

Soient $\Omega_1 = [a,b], \Omega_2 = [c,d]$,$-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $-\infty \leq c < d \leq +\infty$, f(x,y) une fonction définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ mesurable . si au moins l'une des intégrales suivantes converge absolument :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)dxdy \tag{1.3}$$

alors elles coïncident

Formule de Dirichlet

Comme cas particulier on a l'égalité suivante avec comme hypothèse la convergence absolue au moins de l'une des deux intégrales ,alors

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx \tag{1.4}$$

Chapitre 2

Fonctions Spécifiques

Dans ce chapitre,nous rappelons certaines notions fondamentales théoriques et des relations concernant quelques fonctions spéciales [32] qui seront nécessaires pour les prochains chapitres . Parmi ces fonctions , on en trouve un grand nombre qui sont des solution d'équations différentielles du second ordre.
Plus spécifiquement , nous allons rappeler quelques définitions , propriétés, notations et résultats des fonctions hypergéométriques [[29],[30],[31] ,[33],[34],[35]], par l'intermédiaire de la fonction Gamma Γ[[32]]

2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 2.1.1. *pour* $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$ *, la fonction Gamma d'Euler est définie par :*

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt & si\ Re(z) > 0 \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z} & si\ Re(z) \leq 0,\ z \neq 0, -1, -2, -3, ... \end{cases}$$

Propriétés 2.1.1. *1. pour* $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 (\ln(\frac{1}{t})^{z-1}dt$$

2. pour $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, -3, ...\}$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

3. pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

4. pour $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$$

5. *pour* $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)(z+3)....(z+n)}$$

6. *pour* $z \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,-3,...\}$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

avec

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{K} - \ln(n)\right) \approx 0,5772156649$$

(constante d'Euler)

7. *la fonction Gamma d'Euler est analytique* $z \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,-3,....\}$
8. *pour* $z \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,-3,...\}$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

et

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

9. $$\Gamma(0^+) = +\infty$$

10. $$\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 1$$

11. $$x! = \Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty}\frac{k!k^x}{(x+1)....(x+k)}\ , x \in \mathbb{R}, x \neq -1,-2,-3,....,-k$$

Définition 2.1.2. *pour tout* x *tel que* $(-n < x < -n+1)$, $n = 1,2,3,....$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)....(x+n-1)}$$

2.2 Fonction Bêta

Définition 2.2.1. *pour* $Re(z), Re(w) > 0$ *, la fonction Bêta est définie par :*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

Propriétés 2.2.1. *1. pour $z, w \in \mathbb{C}$*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

2.

$$B(z+1,w+1) = \int_0^1 t^z(1-t)^w dt$$

3. la fonction Béta vérifie les identités suivantes :

(a)

$$B(z,w) = B(w,z)$$

(b)

$$B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1)$$

(c)

$$B(z,w+1) = \frac{w}{z}B(z+1,w) = \frac{w}{z+w}B(z,w)$$

4.

$$B(z,w) = \int_0^\infty \frac{tz-1}{(1+t)^{z+w}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}$$

2.3 Fonctions Hypergéométriques de Gauss

Gauss a donné le nom de série hypergéométrique , á la série :

$$1 + \frac{ab}{c.1}z + \frac{a(a+1).b(b+1)}{c(c+1).1.2}z^2 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

avec a, b et c sont des paramètres, et le quatrième z est la variable . que l'on note par $F(a,b;c;z)ou(\,_2F_1(a,b,c;z))$ qui converge pour $|z| < 1$.
le symbole $(d)_n$ est la notation de pochhammer , où d désigne un nombre quelconque et n un entier positif ou nul .Il a le sens suivant :

$$(d)_n = \frac{\Gamma(d+n)}{\Gamma(d)} = d(d+1)(d+2)...(d+n-1)$$

et en particulier :

$$(d)_0 = 1$$

$$(1)_n = 1.2.3....n = n!$$

ces quatre quantités pouvant d'ailleurs prendre des valeurs complexes .

Définition 2.3.1. *La fonction hypergéométrique de Gauss [36, 37]est définie par :*

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2.1}$$

elle converge pour $|z| < 1$ *où* $a, b \in C$ *et* $c \notin Z^-$
Ses dérivées [30] satisfont la relation :

$$\frac{d^n}{dx^n} F(a,b;c;z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z) \tag{2.2}$$

Remarque 2.3.1. *Si a ou b est un entier négatif , la série hypergéométrique est polynôme de dégré* n *et* $n \in N$

$$F(-n,b;c;z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i (C_i^n)(b)_i{}^i}{z}$$

$$F(a,-n;c;z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i ()(a)_i i^i}{z}$$

par exemple ,on suppose que $a = -2$ *;on obtient alors la série :*

$$F(-2,b;c;z) = 1 + \frac{(-2)b}{c} \frac{z}{1!} + \frac{(-2)(-1)(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + ...$$

ainsi

$$F(-2,b;c;z) = 1 - \frac{(-2)b}{c} z + \frac{(b(b+1)}{c(c+1)} z^2$$

Propriété 2.3.1. *1/- On observe que* $F(a,b;c;z)$ *est symétrique par rapport aux paramètres a et b :*

$$F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$$

2/- On considère :

$$F(a,b;c;z) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \qquad telleque \quad C_0 = 1$$

Le rapport d'un terme au précédent étant égal á :$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{(a+k)(b+k)}{(c+k)(k+1)}$.

Équation différentielle de Gauss :
La fonction hypergéométrique de Gauss ,est définie comme étant la solution de l'équation différentielle(appelée équation de Gauss)linéaire du second ordre suivante :

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{dw}{dz} - abw = 0, \tag{2.3}$$

où w est la fonction inconnue ,z désigne la variable eta, b et c sont des constantes précis.
Si $c, a-b$ et $c-a-b$ ne sont pas entiers négatifs,la solution générale de cette équation est :

$$w = AF(a,b,c;z) + Bz^{1-c}F(a-c+1, b-c-1, 2-c; z) \tag{2.4}$$

Les A et B désigne des constantes arbitraires
Solution au niveau des points singuliers
L'équation de Gauss2.3 possède comme points singuliers réguliers, les trois points :

$$0, 1, \infty$$

On cherche à déterminer des séries vérifiant formellement cette équation[2], donc :

- Autour du point $z = 0$, deux solutions sont indépendantes ,si c n'est pas un nombre entier :

$$_2F_1(a,b;c;z),$$
$$et$$
$$z^{1-c}.{_2F_1}\left(1+a-c, 1+b-c; 2-c; z\right)$$

- Autour de $z = 1$, si $c-a-b$ n'est pas un entier ,on a deux solution indépendentes :
$$_2F_1(a,b;1+a+b-c;1-z),$$

$$et$$

$$(1-z)^{c-a-b}{_2F_1}(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z)$$

.
- autour de $z = \infty$ si $a-b$ n'est pas entier ,on a deux solutions indépendentes :
$$z^{-a}{_2F_1}(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1})$$
$$et$$
$$z^{-b}{_2F_1}(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}).$$

Remarque 2.3.2. *1/ Toute équation différentielle du second ordre avec trois points singuliers réguliers peut se ramener,grace à un changment de variable ,à une équation différentielle hypergéométrique de Gauss.*

2/ Dans le cas ou a,b ou c sont des entiers, on peut réduire la fonction hypergéométrique à une fonction transcendante plus simple.

3/ Si c est egal un entier, la solution hypergéométrique de l'équation contient des termes logarithmiques.

Cas particuliers des fonctions de gauss

Voici, quelques propriétés de fonction qui sont des cas particuliers des séries hypergéométrique[36, 37]

a/ $F(a,b,b;z) = (1-z)^{-a}$

b/ $F(1,1,2;z) = -\frac{ln(1-z)}{z}$

c/ $F(1,1,2;-z) = \log(1+z)$

d/ $F(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};z^2) = \frac{1}{2z}log\frac{(1+z)}{(1-z)}$

e/ $F(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};-z^2) = \frac{arctanz}{z}$

2.3.1 Fonctions Hypergéométriques généralisées

les fonctions Hypergéométriques généralisées sont définies de la maniére suivante :

$$_pF_q(a_1,a_2,...,a_p,b_1,b_2,...b_q;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{2.5}$$

oú, on a utilisé la notation de pochhamer

$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$

On va commencer par introduire les deux plus importantes approches de calcul fractionnaire :au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo .y compris, quelques unes de leur propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

2.4 Analyse et calcul fractionnaire

2.4.1 Intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$, selon l'approche de Riemann-Liouville généralise la célébre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n fois :

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_n} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Définition 2.4.1. *([26, 27]) soit $f \in L^1([a,b])$ .L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ notée $I_a^\alpha f$ est définie par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \; x > a \tag{2.6}$$

où$\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma .

Théorème 2.4.1. *([26, 27]) Si $f \in L^1([a,b])$.*
Alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$
Dédémonstration : En introduisant la définition 2.6 puis an utilisant le théoréme de Fubini , on trouve :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |(I_a^\alpha f)(x)| dx \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt dx \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| \, (b-t)^\alpha dt \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| \, dt < \infty
\end{aligned}$$

Exemple 2.4.1. *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$,alors :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \tag{2.7}$$

En effectuant le changement de variable
$t = a + (x-a)y \; (0 \leq 1)$
alors
2.7 devient

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1} [x+(x-a)y-x]^\beta (x-a) dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\
&= \frac{(x-a)^{a+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta+1} dy
\end{aligned}$$

D'après la relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma on a :

$$\begin{aligned}
(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$(I_a^\alpha (t-a)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta} \tag{2.8}$$

Exemple 2.4.2. *soit $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > -1$ on a*

$$(I_0^\alpha f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t)^\beta (x-t)^{a-1} dt \tag{2.9}$$

En posant : $t = xu$,2.9 devient

$$I^\alpha f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (xu)^\beta (1-u)^{a-1} x du$$

En utilisant la relation entre la fonction Bêta et la fonction Gamma on a :

$$\begin{aligned}
I^\alpha f(x)) &= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (u)^\beta (1-u)^{a-1} du \\
&= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (u)^\beta (1-u)^{a-1} du \\
&= \frac{x^{\beta+a}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Proposition 2.4.1. *([26, 27]) soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$),pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$*
on a :

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta (I_a^\alpha f)$$

pour presque toute $x \in [a, b[$ .Si de plus $f \in \mathbf{C}([a,b])$,alors cette identité est vraie pour tout $x \in [a,b]$

Preuve . Supposons d'abord que $f \in L^1([a,b])$,ona :

$$\left[I_a^\alpha (I_a^\beta f)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I_a^\beta f)(s) ds$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt ds$$

En vertu du théoréme ,les intégrales figurant dans l'inégalité précédente existent pour presque tout $x \in [a,b]$, et le théoréme de Fubini permet donc d'écrire :

$$\left[I_a^\alpha(I_a^\beta f)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) \left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} ds\right] dt$$

En effectuant le changement de variable $s = t + (x-t)y (0 \leq y \leq 1)$ on obtient

$$\left[I_a^\alpha(I_a^\beta f)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}(y)^{\beta-1} dydt$$

Enfin ,d'prés la relation entre la fonction bêta et la fonction gamma on a :

$$\left[I_a^\alpha(I_a^\beta f)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\Gamma(\beta)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt = \left(I_a^{\alpha+\beta} f\right)(x)$$

Supposons maintenant que $f \in \mathbf{C}([a,b])$,alors (d'aprés les théorémes sur les intégrales dépendant de paramètres)$I_a^\beta \in \mathbf{C}([a,b])$, et par suite $I_a^{\alpha+\beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f \in ([a,b])$

Ainsi ,d'après ce qui précède ,les deux fonctions continues $I_a^{\alpha+\beta} f, I_a^\alpha I_a^\beta f$ coïncident presque partout sur [a,b],elles doivent donc coïncider partout sur[a,b].

■

Le théoréme suivante fournit un résultat concernant l'inversion de la limite et de l'intégrale fractionnaire

Théorème 2.4.2. *Soient $\alpha > 0$ et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur [a,b].Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :*

$$\left[I_a^\alpha(\lim_{k\to+\infty} f_k)\right](x) = \lim_{k\to+\infty} (I_a^\alpha f_k)(x)$$

Démonstration : Soit$f_k \to f$ simplement convergente et

$$\begin{aligned}
&|I_a^\alpha f_k(x) - I_a^\alpha f(x)| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)| (x-t)^{\alpha-1} dt\right| \\
&\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\alpha}(x-a)^\alpha \\
&\leq \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_k - f\|_\infty \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} |f_k - f|_\infty (b-a)^\alpha \to 0
\end{aligned}$$

2.4.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.4.2. *voir([[28]]). Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. les dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville $D^{\alpha}_{a^+}f$ et $D^{\alpha}_{b^-}f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(Re(\alpha) > 0)$ sont définies par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}f(x) &= (\frac{d}{dx})^n(I^{n-\alpha}_{a^+}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n = [Re(\alpha)]+1; x > a \end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b^-}f(x) &= (-\frac{d}{dx})^n(I^{n-\alpha}_{b^-}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-\frac{d}{dx})^n\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \; n = [Re(\alpha)]+1; x < b \end{aligned} \tag{2.11}$$

respectivement, où$[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Remarque 2.4.1. *On remarque que :*

1. *si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, alors $n = m+1$. Donc , on utilisant 2.10 et 2.11 , on obtient les propriétés suivantes :*
   (a) $D^0_{a^+}f(x) = D^0_{b^-}f(x) = f(x)$
   (b) $D^m_{a^+}f(x) = f^{(m)}(x)$
   (c) $D^m_{b^-}f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x)$ Ou$f^m(x)$est la dérivée usuelle de f d'ordre m
2. *si $0 < Re(\alpha) < 1$,$n = 1$.donc,2.10 et 2.11devient :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \; x > a \\ D^{\alpha}_{b^-} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \; x < b \end{aligned}$$

3. *si $\alpha \in \mathbb{R}_+$,alors $n = [\alpha]+1$, Donc2.10 et 2.11devient :*

$$D^{\alpha}_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha]+1; \; x > a \tag{2.12}$$

$$D^{\alpha}_{b^-} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dx}\right)\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \; n = [\alpha]+1 \; x < b \tag{2.13}$$

4. *si $0 < \alpha < 1$,alors $n = 1$.Donc ,2.12 et 2.13 devient :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \; x > a \\ D^{\alpha}_{b^-} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \; x < b \end{aligned}$$

$$D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},\ x > a$$
$$D_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}},\ x < b$$

Propriétés 2.4.1. *(voir [[28]]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$,et $a, b \in \mathbb{R}$ Nous avons :*

1. $D_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}$
2. $D_{b^-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}$

2.4.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 2.4.3. *voir([[28]]) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)]+1$ et $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a,b]$ Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par :*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2.14}$$

et

$$^{c}D_{b^-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \tag{2.15}$$

Propriétés 2.4.2. *on a*

1. *Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires c'est à dire :*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(^{c}D_{a^+}^{\alpha} f)s(x) + \mu(^{c}D_{a^+}^{\alpha} g)(x) \tag{2.16}$$

et

$$^{c}D_{b^-}^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(^{c}D_{b^-}^{\alpha} f)s(x) + \mu(^{c}D_{b^-}^{\alpha} g)(x) \tag{2.17}$$

2. *Les relations entre les dérivées au sens de Caputo 2.14 et 2.15 les dérivées au sens de Riemann-Liouville2.10,2.11 sont données par :*

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = D_{a^+}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k-0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \tag{2.18}$$

et

$$^{c}D_{b^-}^{\alpha} f(x) = D_{b^-}^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k-0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-b)^k\right] \tag{2.19}$$

Chapitre 3

Quelques nouvelles inégalités intégrales de type Gruss

On considère l'inégalité de Gruss :

1. **Inégalité intégrale de Gruss au sens classique** (voir[1, 2]) :

   Soient f et g deux fonctions dêfinies et intégrables sur $[a, b]$, telle que pour des réels P, P, M, m vérifiés les conditions

   $$m \leq f(x) \leq M \qquad p \leq g(x) \leq P \tag{3.1}$$

   avec $x \in [a, b]$ alors :

   $$|T(f, g)| \leq \frac{1}{4}(M - m)(P - p) \tag{3.2}$$

   où
   $$T(f, g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b fg - \frac{1}{b-a}\int_a^b f \frac{1}{b-a}\int_a^b g$$

   preuve voir ([1])

2. **Inégalité intégrale de Gruss au sens R-L** : Soient f et g deux fonctions intégrables sur [a,b] vérifié les conditions 3.1.
   Alors $\forall x \in [a, b]$:

   $$\left|\frac{(b-a)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} I^\alpha f(x)g(x) - I^\alpha f(x) I^\alpha g(x)\right| \leq \big(\frac{(b-a)^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}\big)^2 (M-m)(P-p) \tag{3.3}$$

   preuve voir([11])

3.1 Inégalités du type Gruss pour l'opérateur intégrale fractionnaire de Saigo

Définition 3.1.1. *Soit f est une fonction continue à valeur réelle,l'intégrale fractionnaire de saigo d'ordre α est noté par $I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]$ est défini par :*

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} . \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}) f(t)dt \tag{3.4}$$

oú
$\alpha > 0$,$\beta, \eta \in R$ *et* ${}_2F_1(...)$ *la fonction hypergéométrique de Gauss*

Exemple 3.1.1.

$$f(x) = x^{\mu} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[x^{\mu}] = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+1-\beta+\eta)}{\Gamma(\mu+1-\beta)\Gamma(\mu+1+\alpha+\eta)} x^{\mu-\beta} \tag{3.5}$$

($\alpha > 0, min(\mu, \mu-\beta+\eta) > -1, x > 0$)

Lemme 3.1.1. *Soit f une fonction intégrable sur $[0,\infty)$ est vérifier*

$$m \leq f(x) \leq M$$

,alors pour tout $x > 0, \alpha > max\{0, -\beta\}, \beta < 1, \beta - 1 < \eta < 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)^2 \\ &= \left(M \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right) \\ &. \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} m\right) \\ &- \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} . I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M-f(x))(f(x)-m)] \end{aligned} \tag{3.6}$$

oú :
$I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} . \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}) dt = \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}$

Preuve : Soit

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) - m \leq M - m & ....(1) \\ 0 \leq M - f(x) \leq M - m & ....(2) \end{cases}$$

En multiple (1) et (2) on obtient : $(M - f(x))(f(x) - m) \geq 0$
soient $s, r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&(M - f(s))(f(r) - m) + (M - f(r))(f(s) - m) - (M - f(r))(f(r) - m) \\
&- (M - f(s))(f(s - m)) \\
&= -Mf(r) + Mm + f^2(r) + f^2(s) - f(r)f(s) \\
&+ Mf(r) + mf(s) - mM - mf(s) + mf(r) - mM \\
&- f(r)m - Mf(s) + Mm + Mf(s) - f(r)f(s) = f^2(r) + f^2(s) - 2f(r)f(s)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

On considère :

$$\begin{aligned}
G(x, r) &= \frac{x^{-\alpha-\beta}(x - r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_2F_1(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{r}{s}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x - r)^{\alpha-1}}{x^{\alpha+\beta}} + ...
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La fonction $G(x, r)$ est positive car pour tout $r \in (0, x)$ on multiplie (3.7) par $G(x, r)$ et intégrant par rapport r de 0 à x nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\int_0^x G(x, r)(M - f(s))(f(r) - m)dr + \int_0^x G(x, r)(M - f(r))(f(s) - m)dr \\
&- \int_0^x G(x, r)(M - f(r))(f(r) - m)dr - \int_0^x G(x, r)(M - f(s))(f(s) - m)dr \\
&= \int_0^x G(x, r)f^2(r)dr + \int_0^x G(x, r)f^2(s)dr.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&(M - f(s)) \int_0^x G(x, r)(f(r) - m)dr + (f(s) - m) \int_0^x G(x, r)(M - f(r))dr \\
&- \int_0^x G(x, r)(M - f(r))(f(r) - m)dr - (M - f(s))(f(s) - m) \int_0^x G(x, r)dr \\
&= \int_0^x G(x, r)f^2(r)dr + f^2(s) \int_0^x G(x, r)dr - 2f(s) \int_0^x G(x, r)dr
\end{aligned} \tag{3.10}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
&(M - f(s))(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]) + (f(s) - m)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M - f(x))(f(x) - m)] - (M - f(s))(f(s) - m)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] \\
&= I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] + f^2(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] - 2f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

on multiple 3.11 par $G(x,r)$ et intégrant par rapport s de 0 à x

$$\int_0^x G(x,s)(M-f(s))(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m])ds$$
$$+\int_0^x G(x,s)(f(s)-m)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)])ds$$
$$-\int_0^x G(x,s)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M-f(x))(f(x)-m)]ds$$
$$-\int_0^x (M-f(s))(f(s)-m)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]G(x,s)ds$$
$$=\int_0^x G(x,s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)]+f^2(s)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]-2\int_0^x G(x,s)f(s)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]ds$$
$$\Longrightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]ds\int_0^x (M-f(s)ds)$$
$$+\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]\right)\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\int_0^x G(x,s)(f(s)-m)ds$$
$$-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M-f(s))(f(s)-m)]\int_0^x G(x,s)ds$$
$$-\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)(1+\alpha+\eta)x^\beta}\int_0^x (M-f(s))(f(s)-m)$$
$$=I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)]\int_0^x G(x,s)ds+\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta)(1+\alpha+\eta)x^\beta}\int_0^x f^2(s)G(x,s)ds$$
$$-2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\int_0^x G(x,s)f(s)ds$$
$$\Rightarrow\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right).\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)$$
$$+\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right).\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right)$$
$$-\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M-f(x))(f(x)-m)]$$
$$-\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M-f(x))(f(x)-m)]$$
$$=\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)]-2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]$$
$$\Rightarrow 2\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right)$$
$$-2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M-f(x))(f(x)-m)]\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}$$
$$=2\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)]-2\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right) I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] \\
&+ \left(M\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right) \\
&= \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^(x)]\right)^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

■

Corollaire 3.1.1. *Si $\beta = -\alpha$ on obtient l'intégrale fractionnaire de Rieman -Liouville avec deux constantes :*

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)} I_{0,x}^{\alpha}[f^2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha}[f(x)])^2 \\
&= \left(M\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - I_{0,x}^{\alpha}f(x)\right)\left(I_{0,x}^{\alpha}[f(x)] - m\frac{x^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&- \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I_{0,x}^{\alpha}(M - f(x))(f(x) - m)
\end{aligned}$$

Premier cas :

Théorème 3.1.1. *Soient f et g deux fonctions intégrables, telle que :*
$p \leq g(x) \leq P, \qquad m \leq f(x) \leq M$
alors pour tout $x > 0, \alpha > max\{0, -\beta\}, \beta < 1, \beta - 1 < \eta < 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(fg(x))] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(f(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(g(x)]\right| \\
&\leq \sqrt{T(f,m,M)T(g,p,P)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

oú

$$\begin{aligned}
T(a,b,c) &:= (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[c(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)])(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[b(x)]) \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[ba(x)] \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[b(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] + \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[ca(x)] \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[c(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[a(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[b(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[c(x)] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[bc(x)].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où

Preuve Soient f et g deux fonctions définies sur $[0, \infty)$ satisfaisant les conditions (3.1) sur $[0, \infty)$ on a :

$$H(r,s) := (f(r) - f(s))(g(r) - (g(s)) \qquad ; r, s \in (0, x), x > 0 \tag{3.15}$$

on obtient

$$H(r,s) = f(r)g(r) - f(r)g(s) - f(s)g(r) + f(s)g(s) \tag{3.16}$$

On multiple 3.16 par $G(x,r)$ et en intégrant par rapport r de 0 á x on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^x G(x,r)H(r,s)dr \\
&= \int_0^x G(x,r)f(r)g(r)dr - \int_0^x G(x,r)f(r)g(s)dr \\
&- \int_0^x G(x,r)f(s)g(r)dr + \int_0^x G(x,r)f(s)g(s)dr \\
&\Rightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)] - g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&- f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] + f(s)g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De la même manière on multiple (3.17) par $G(x,s)$,en intégrant par rapport s de 0 à x on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^x G(x,s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)]ds - \int_0^x G(x,s)g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&- \int_0^x G(x,s)f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]ds + \int_0^x G(x,s)g(s)f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] \\
&\Rightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] \\
&\Rightarrow 2\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)]\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta} - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

On applique l'inégalité de Cauchy -Schwartz on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right)^2 \\
&\le \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)]^2 - \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)]\right)^2 \\
&\le \left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]^2\right) \\
&\cdot\left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g^2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]^2\right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

on a $(M - f(t))(f(t) - m) \ge 0$ et $(P - g(t))(g(t) - p)) \ge 0$,alors
$\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(M - f(t))(f(t) - m)] \ge 0$
$\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(P - g(t))(g(t) - p)] \ge 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)^2 \\
&\leq \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right) \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[mf(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[Mf(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[Mm] \\
&\leq \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right) \\
&\leq T(f,M,m)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g^2(x)] - \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right)^2 \\
&\leq \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[P] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right) . \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]\right) \\
&\leq T(g,P,p).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Avec d'après 3.20 et 3.21on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g^2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right)^2 \\
&\leq \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right) . \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right) \\
&. \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[P] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right) . \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]\right) \\
&\Rightarrow \left|\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right| \\
&\leq \sqrt{T(f,M,m)T(g,P,p)}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
T(f,m,M) &= \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right) . \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]\right) \\
T(g,p,P) &= \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[P] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right) . \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]\right)
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.2. *Si la fonction f vérifier la condition (3.1) alors pour tout* $x > 0, \alpha > max\{0, -\beta\}, \psi > max\{0, -\phi\}, \beta < 1, \beta - 1 < \eta < 0, \phi < 1, \phi - 1 <$

$\zeta < 0$,

$$\begin{aligned} &I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[m]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] + I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[M]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[f(x)] \\ &\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[m] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[f(x)] \end{aligned} \tag{3.23}$$

Preuve

$$\begin{aligned} &(M - f(r))(f(s) - m) \geq 0 \\ &Mf(s) - mM - f(r)f(r)f(s) + mf(r) \geq 0 \\ &\Rightarrow Mf(s) + mf(r) \geq Mm + f(r)f(s) \end{aligned} \tag{3.24}$$

On multiple 3.24 par $G(x,r)$ puis intégrant par rapport r, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^x G(x,r)[Mf(s) + mMf(r)]dr \geq \int_0^x G(x,r)[Mm + f(r)f(s)]dr \\ &\Rightarrow Mf(s)\int_0^x G(x,r)dr + m\int_0^x G(x,r)f(r)d(r) \\ &\geq Mm\int_0^x G(x,r)dr + f(s)\int_0^x f(r)G(x,r)dr \\ &\Rightarrow Mf(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] + mI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f(x) \\ &\geq MmI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] + f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \end{aligned} \tag{3.25}$$

,on multiplie 3.25 par
$\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(c)}(x-s)^{c-1}{}_2f_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})$, en intégrant par rapport s de 0 à x
on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^x Mf(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\frac{x-\phi-\psi}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds \\ &+\int_0^x mI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds \\ &\geq \int_0^x MmI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds \\ &+\int_0^x f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds \\ &\Longrightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]\int_0^x \frac{x-\phi-\psi}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds \\ &+mI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\int_0^x \frac{x-\phi-\psi}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})f(s)ds \\ &\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[Mm]\int_0^x \frac{x-\phi-\psi}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds \\ &+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\int_0^x \frac{x-\phi-\psi}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})f(s)ds \\ &\Longrightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[f(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[m] \\ &\geq MmI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[1] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[f(x)] \end{aligned} \tag{3.26}$$

■

Théorème 3.1.3. *Soient f et g deux fonctions intégrables défini sur $[0,\infty[$ vérifiés les condition(3.1) . pour tout $x>0, \psi > max\{0,-\phi\}, \alpha > \{0,-\beta\}, \beta < 1, \beta-1<\eta, \phi<1, \phi-1<\zeta<0$, les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned}
&(a)\ \ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\eta}[g(x)]\\
&(b)\ \ I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[m]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[P]I_{0,x}^{\psi,\phi,\eta}[g(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[m]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[P] + I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\\
&(c)\ \ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[P] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)].\\
&\geq I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] + I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[P].I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)].\\
&(d)\ \ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M].I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[p] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)].I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M].I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)] + I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[p]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Preuve preuve(a) : on a

$$\begin{aligned}
&(M-f(r))(g(s)-p)) \geq 0\\
&Mg(s) - Mp - f(r)g(s) + pf(r) \geq 0\\
&\Rightarrow Mg(s) + pf(r) \geq Mp + f(r)g(s)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

On multiple 3.28 par $G(x,r)$et intégrant par r

$$\begin{aligned}
&Mg(s)\int_0^x G(x,r)dr + m\int_0^x G(x,r)f(r)dr\\
&\geq Mm\int_0^x G(x,r)dr + g(s)\int_0^x G(x,r)f(r)dr\\
&\Rightarrow g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M] + pI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[Mp] + g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

On multiple 3.29 par :$\Big(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\Big)$ puis intégrant par rapport s on obtient :

$$\begin{aligned}
&I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}\int_0^x g(s)(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})ds\\
&+pI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}\int_0^x g(s)(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})ds\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[Mp]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}\int_0^x (x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})ds\\
&+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}+\int_0^x (x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})ds\\
&\Rightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[g(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[p]\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[M]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[p] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[g(x)]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

On obtient :

$$p\frac{\Gamma(1-\phi+\zeta)}{\Gamma(1-\phi)\Gamma(1+\varphi+\zeta)x^{\beta}}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]+M\frac{\Gamma(1-\beta+\zeta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\zeta)x^{\beta}}I_{0,x}^{\phi,\psi,\eta}[g(x)]$$
$$\geq pM\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)\Gamma(1-\psi+\zeta)}{\Gamma(1-\beta)(1+\alpha+\eta)\Gamma(1-\psi)\Gamma(1+\psi+\zeta)x^{\beta+\psi}}+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[g(x)] \tag{3.31}$$

preuve(b) :

$$\begin{aligned}&(P-g(r))(f(s)-m)\geq 0\\&\Longrightarrow Pf(s)-mp-g(r)f(s)+mg(r)\geq 0\\&\Longrightarrow Pf(s)+mg(r)\geq mp+g(r)f(s)\end{aligned} \tag{3.32}$$

En multipliant 3.31 par $G(x,s)$et intégrant par rapport r

$$\begin{aligned}&\int_0^x (G(x,r)pf(s)+mg(r))dr\geq\int_0^x (G(x,r)mp+g(r)f(s)dr\\&\Longrightarrow pf(s)\int_0^x G(x,r)dr+m\int_0^x g(r)G(x,r)dr\\&\geq mp\int_0^x G(x,r)dr+f(s)\int_0^x g(r)G(x,r)dr\\&\Longrightarrow f(s)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]+m(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\\&\geq (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[mp]+f(s)(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\end{aligned} \tag{3.33}$$

En multipliant 3.34 par $\frac{x^{-\psi-\phi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\psi-1}{}_2f_1(\psi+\phi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})$ et intégrant par rapport s

$$\begin{aligned}&\int_0^x f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[p]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\psi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds\\&+\int_0^x mI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\frac{x^{-\psi-\phi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\psi-1}{}_2F_1(\psi+\phi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds\\&\geq\int_0^x f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[mp]\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\psi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds\\&+\int_0^x f(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\frac{x^{-\psi-\phi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\psi-1}{}_2F_1(\phi+\psi;-\zeta;\phi;1-\frac{s}{x})ds\\&\Longrightarrow I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[P]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[f(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[m]\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[mP]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[1]\\&+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]\\&\Longrightarrow P\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}I_{0,x}^{\phi,\psi,\zeta}[f(x)]\\&+m\frac{\Gamma(1-\psi+\zeta)}{\Gamma(1-\psi)\Gamma(1+\phi+\eta)x^{\psi}}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\\&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[m]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[1]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]\end{aligned} \tag{3.34}$$

preuve (c) :

$$\begin{aligned} &(M - f(r))(g(s) - P) \leq 0 \\ &Mg(s) - pM - f(r)g(s) + Pf(r) \leq 0 \\ &pM + f(r)g(s) \geq Mg(s) + Pf(r) \end{aligned} \tag{3.35}$$

on multiple 3.35 par $G(x,r)$ puis intégrant par rapport r on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^x G(x,r)(PM + f(r)g(s))dr \geq \int_0^x G(x,r)(Mg(s) + Pf(r))dr \\ &\Rightarrow PM \int_0^x G(x,r)dr + g(s) \int_0^x G(x,r)f(r)dr \\ &\geq Mg(s) \int_0^x G(x,r)dr + P \int_0^x G(x,r)f(r)dr \\ &\Rightarrow pMI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] + g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\ &\geq Mg(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] + PI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \end{aligned} \tag{3.36}$$

Et en multiple3.36 par $\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)$ et intégrant par rapport s on obtient :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_0^x \left(PMI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1] + g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &\geq \left(\int_0^x Mg(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\right)\left(\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &+ \int_0^x pI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[f(x)]\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &\Rightarrow \left(PMI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\right)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\varPhi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\int_0^x g(s)\left(\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &\geq MI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\int_0^x g(s)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &+ PI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[f(x)]\left(\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds \\ &\Rightarrow pM\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)\Gamma(1-\psi+\zeta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\phi)\Gamma(1+\psi+\zeta)x^{\beta}x^{\phi}} + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)] \\ &\geq M\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)] + PI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\frac{\Gamma(1-\psi+\zeta)}{\Gamma(1+\psi)\Gamma(1+\psi+\zeta)x^{\phi}} \end{aligned} \tag{3.37}$$

preuve (d) :

$$\begin{aligned}&(m-f(r))(g(s)-p)\leq 0\\&mg(s)-pm-f(r)g(s)+pf(r)\leq 0\\&pm+f(r)g(s)\geq mg(s)+pf(r)\end{aligned}\tag{3.38}$$

On multiple3.38 par G(x,r) et intégrant par rapport r on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_0^x G(x,r)(pm+f(r)g(s))dr\geq\int_0^x G(x,r)(mg(s)+pf(r))dr\\&\Rightarrow pM\int_0^x G(x,r)dr+g(s)\int_0^x G(x,r)f(r)dr\\&\geq Mg(s)\int_0^x G(x,r)dr+p\int_0^x G(x,r)f(r)dr\\&\Rightarrow pmI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]+g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\\&\geq mg(s)I_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[1]+pI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[f(x)]\end{aligned}\tag{3.39}$$

On multiple3.39 par$\left(\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\Phi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)$ et intégrant par rapport s on obtient :

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\int_0^x\left(pMI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[1]+g(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&\geq\left(\int_0^x Mg(s)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\right)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\Phi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&+\int_0^x pI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[f(x)]\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&\Rightarrow\left(pmI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[1]\right)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\int_0^x g(s)\left(\frac{x^{-\phi-\psi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\Phi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&\geq MI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[1]\int_0^x g(s)\left(\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&+pI_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[f(x)]\left(\frac{x^{-\phi-\varphi}}{\Gamma(\phi)}(x-s)^{\phi-1}{}_2F_1(\phi+\psi,-\zeta;1-\frac{s}{x})\right)ds\\&\Rightarrow pm\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)\Gamma(1-\psi+\zeta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\phi)\Gamma(1+\psi+\zeta)x^{\beta}x^{\phi}}+I_{\alpha,\beta,\eta}^{0,x}[f(x)]I_{0,x}^{\psi,\phi,\zeta}[g(x)]\\&\geq m\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]+pI_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\frac{\Gamma(1-\psi+\zeta)}{\Gamma(1+\psi)\Gamma(1+\psi+\zeta)x^{\phi}}\end{aligned}\tag{3.40}$$

■

Deuxième cas :
Dans ce cas on considére quatres fonctions f_1, f_2, g_1et g_2 intégrable sur [0,∞[

telles que

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \qquad \forall x \in [0, \infty[\tag{3.41}$$

(A_2) deux fonctions intégrable $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sur [0,∞[telles que

$$g_1(x) \leq g(x) \leq g_2(x) \qquad \forall x \in [0, \infty[\tag{3.42}$$

Lemme 3.1.2. *Soit la fonction f vérifié la condition (3.41) , alors ,pour tout x>0,$\alpha > max\{0-\beta\}, \beta < 1, \beta - 1 < \eta < 0$, l'égalité est vérifié :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)])^2 \\
&= (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)]).(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta} f_1(x)]) \\
&- \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}.[(f_2(x) - f(x))(f(x) - f_1(x))] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2 f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] \\
&- \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x) f_2(x)]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Preuve pour tout $\sigma, \rho > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&(f_1(\sigma) - f(\sigma))(f(\rho) - f_1(\rho)) + (f_2(\rho) - f(\rho))(f(\sigma) - f_1(\sigma)) \\
&- (f_2(\rho) - f(\rho))(f(\rho) - f_1(\rho)) - (f_2(\sigma) - f(\sigma))(f(\sigma) - f_1(\sigma)) \\
&= u^2(\rho) + f^2(\sigma) - 2f(\sigma)f(\rho) + f_2(\sigma)u(\rho) + f_1(\rho)f(\sigma) - f_1(\rho)f_2(\sigma) \\
&+ f_1(\rho)f(\sigma) + f_1(\sigma)f(\rho) - f_1(\sigma)f_2(\rho) - f_2(\rho)f(\rho) + f_1(\rho)f_2(\rho) - f_1(\rho)f(\rho) \\
&- f_2(\sigma)u(\rho) + f_1(\sigma)f_2(\sigma) - f_1(\sigma)u(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

considère

$$\begin{aligned}
G(x,\rho) &= \frac{x^{-\alpha-\beta}(x-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_2F_1(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{\rho}{x}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x-\rho)^{\alpha-1}}{x^{\alpha+\beta}} + \frac{(\alpha+\beta)(-\eta)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(x-\rho)^{\alpha}}{x^{\alpha+\beta+1}} \\
&+ \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(-\eta)(-\eta+1)}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{(x-\rho)^{\alpha+1}}{x^{\alpha+\beta+2}} \\
&+ ...., \\
&(\rho \in (0,x);\ x > 0).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

On multiple 3.45 par $G(x,\rho)$ et intègre par rapport à ρ de 0 á x on obtient :

$$\begin{aligned}
&(f_2(\sigma)-f(\sigma))(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]-(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)])\\
&+(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)])(f(\sigma)-f_1(\sigma))\\
&-(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(f_2(x)-f(x))(f(x)-f_1(x)]\\
&-\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}(f_2(\sigma)-f(\sigma))(f(\sigma)-f_1(\sigma))\\
&=I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)]+f^2(\sigma)\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}\\
&-2u(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]+f_2(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\\
&+u(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]-f_2(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]\\
&+f(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]+f_1(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\\
&-f_1(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2f(x)]\\
&+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1f_2(x)]-I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1f(x)]\\
&-f_2(\sigma)u(\sigma)\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}\\
&+f_1(\sigma)f_2(\sigma)\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}\\
&-f_1(\sigma)f(\sigma)\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}
\end{aligned}\tag{3.46}$$

on multiple 3.46 par $G(x,\rho)$, puis intégrant par rapport à ρ de 0 àx, on a

$$
\begin{aligned}
&(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]) \\
&.I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]) \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]) \\
&.I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]) \\
&- \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}.[(f_2(x) - f(x))(f(x) - f_1(x))] \\
&- \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}.[(f_2(x) - f(x))(f(x) - f_1(x))] \\
&= I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&- 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] I_{0,x}^{\alpha\beta\eta}[f(x)] \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]) \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]) \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2 f(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 f_2(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 f(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2 f(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 f_2(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 u(x)] \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

implique que

$$\begin{aligned}
&2(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]).(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]) \\
&- 2\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}.[f_2(x) - f(x)(f(x) - f_1(x))] \\
&= 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)]\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&= -2(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)])^2 + 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] - 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] \\
&- 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2u(x)]\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&+ 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1f_2(x)]\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} \\
&- 2I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1f(x)]\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

■

Théorème 3.1.4. *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,+\infty)$, vérifiés les conditions (3.41),(3.42), alors pour tout $x > 0, \alpha > max\{0,-\beta\}, \beta < 1, \beta - 1 < \eta < 0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(fg(x))] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(g(x)]\right| \\
&\leq \sqrt{T(f,f_1(x),f_2(x))T(g,g_1(x),g_2(x))}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Preuve On note par $H(\rho,\sigma)$ l'égalité

$$H(\rho,\sigma) := (f(\rho) - f(\sigma))(g(\rho) - (g(\sigma)) \qquad ; \rho,\sigma \in (0,x), x > 0 \tag{3.50}$$

il s'ensuit que

$$H(\rho,\sigma) := f(\rho)g(\rho) - f(\rho)g(\sigma) - f(\sigma)g(\rho) + f(\sigma)g(\sigma) \tag{3.51}$$

on multiple 3.43 par $G(x,\rho)$ qui est défini par 3.11 et est positif car pour tout $\rho \in (0,x)(x > 0)$. identité par rapport àρde 0 à x, nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} {}_2F_1(\alpha+\beta,\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x})H(\rho.\sigma)d\rho \\
&= I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)] - f(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f(x)] - f(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] + f(\sigma)g(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

On multiple 3.52 par $G(x,\rho)$ puis intégrant par rapport à σ de 0 à x, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{-\alpha-\beta}x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}(x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\big(\alpha+\beta,\eta;\alpha;1-\frac{\sigma}{x}\big)H(\rho,\sigma)d\rho d\sigma\\
&= 2\big(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[(fg(x))]\\
&- I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\big)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

d'aprés l'inégalité de Cauchy -Schwartz à 3.53, on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[fg(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\right)^2\\
&\leq \left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)])^2\right)\\
&\times \left(\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g^2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)])^2\right)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

puisque $(f_1(x)-f(t))(f(t)-f_1(x)) \geq 0$ et $(g_2(x)-g(t))(g(t)-g_1(x)) \geq 0$,on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}.[(f_2(x)-f(t))(f(t)-f_1(x)] \geq 0\\
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^\beta}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}.[(g_2(x)-g(t))(g(t)-g_1(x)] \geq 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right)^2 \\
&\leq \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right).I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2 f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] - \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1 f_2(x)] \\
&= T\left(f, f_1, f_2\right), \\
&\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f^2(x)] - (I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)])^2 \\
&\leq \left(I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_2(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\right).I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_1(x)] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_1 u(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_2 f(x)] - I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_2(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] \\
&+ I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_2(x)] - \frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}} I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_1 g_2(x)] \\
&= T(g, g_1, g_2)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

en combinant3.55 et3.56 on obtient l'inégalité requise3.40 ■

Théorème 3.1.5. *Soit que f est une fonction intégrable définie sur $[0,\infty[$ et la condition (3.41) , alors pour tout $x>0, \alpha > max\{0,-\beta\}, \varsigma > max\{0,-\tau\}, \beta < 1, \beta-1<\eta<0, f<1, \tau-1<\zeta<0$,*

$$\begin{aligned}
&I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f_1(x)] I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[u(x)] \\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)] I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\tau\zeta}[f_1(x)] + I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)] I_{0,x}^{\tau,\varsigma\zeta}[f(x)]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Preuve Pour tout
$\rho, \sigma \geq 0$,on a

$$\begin{aligned}
&(f_2(\rho) - f(\rho))(f(\sigma) - f_1(\sigma)) \geq 0 \\
&\Longrightarrow f_2(\rho)f(\sigma) - f_2(\rho)f_1(\sigma) - f(\rho)f(\sigma) + f(\rho)f_1(\sigma) \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

implique que

$$f_2(\rho)u(\sigma) + f(rho)f_1(\sigma) \geq f_2(\rho)f_1(\sigma) + f(\rho)f(\rho) \tag{3.59}$$

On multiple 3.59 par $G(x,r)$ et intégré par rapport ρ de 0 á x

$$\begin{aligned}
&f(\sigma)\frac{x^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-p)^{\alpha-1}{}_2F_1\big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x}\big)f_2(\rho)d\rho \\
&+f_1(\rho)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}{}_2F_1\big(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x}\big)u(\rho)d\rho \\
&\geq f_1(\rho)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}{}_2F_1(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x})f_2(\rho)d\rho.u(\rho)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

implique

$$f(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]+f_1(x)(\rho)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)]\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\tau\zeta}[f_1(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\tau,\upsilon\zeta}[f(x)] \tag{3.61}$$

en multipliant 3.61 par $x^{-\psi-\phi}/\Gamma(\psi))(x-\sigma)^{\psi-1}{}_2F_1(\psi+\phi,-\zeta;\psi;1-\sigma/x)\sigma\in(0,x),x>0)$,qui reste positif, intégrant alors l'identité résultante par rapport à ρ de 0 à x, nous avons

$$\begin{aligned}
&I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]\frac{x^{-g-f}}{\Gamma(\varsigma)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\varsigma+\tau,-\zeta;\varsigma;1-\frac{\sigma}{x}\right)u(\sigma)d\sigma \\
&I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)]\frac{x^{-\varsigma-\tau}}{\Gamma(\varsigma)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\varsigma+\tau,-\zeta;\varsigma;1-\frac{\sigma}{x}\right)f_1(\sigma)d\sigma \\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]\frac{x^{-\varsigma-\tau}}{\Gamma(\varsigma)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\varsigma+\tau,-\zeta;\varsigma;1-\frac{\sigma}{x}\right)f_1(\sigma)d\sigma \\
&I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)]\frac{x^{-\varsigma-\tau}}{\Gamma(\varsigma)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\varsigma+\tau,-\zeta;\varsigma;1-\frac{\sigma}{x}\right)u(\sigma)d\sigma
\end{aligned} \tag{3.62}$$

donne l'inégalité (3.57) ■

Corollaire 3.1.2. *: Si f vérifié la condition(3.1) pour $x>0,\alpha>max\{0,-\tau\},\beta<1,\beta-1<\eta,\tau<1,\tau-1<\zeta<0,$*

$$\begin{aligned}
&m\frac{\Gamma(1-\tau+\zeta)}{\Gamma(1-\tau)\Gamma(1+\varsigma+\zeta)x^{\tau}}I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f(x) \\
&+m\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)x^{\beta}}I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f(x)] \\
&\geq mM\frac{\Gamma(1-\beta+\eta)(\Gamma(1-\tau+\zeta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\alpha+\eta)\Gamma(1-f)\Gamma(1+\varsigma+\zeta)x^{\beta}x^{\tau}} \\
&+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f(x)].
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Théorème 3.1.6. *soient f,g deux fonctions intégrables vérifié les conditions(3.41) et (3.42),alors pour tout $x>0,\alpha>max\{0,-\beta\},\tau\beta<1,\beta-1<\eta,\tau<1,\tau-1<\zeta<0$ vérifié les inégalités*

$$\begin{aligned}
&(a_1)\quad I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[G_1(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g_1(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g(x)]\\
&(b')\quad I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f_1(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[v(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_2(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f_1(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g_2(x)]+I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[u(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[g(x)]\\
&(c_1)\quad I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g_2(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g(x)]+I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g_2(x)]I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]\\
&(d')\quad I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f_1(x)]+I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\eta}[g(x)]\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_1(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[g(x)]+I_{0,x}^{f,\zeta}[f_1(x)]I_{0,x}^{\varsigma,\tau,\zeta}[f(x)]
\end{aligned}\tag{3.64}$$

Preuve Montrer (a), nous utilisons des conditions (A_1)et (A_2),pour tous $x \in [0,\infty[$;on a

$$(f_2(\rho)) - f(\rho))(g(\sigma - f_1(\sigma))) \geq 0 \tag{3.65}$$

ce qui implique que

$$f_2(\rho)g(\sigma) + f(\rho)f_1(\sigma) \geq f_2(\rho)f_1(\sigma) + f(\rho)f(\sigma) \tag{3.66}$$

On multiple 3.66par $G(x,\rho)$, $\rho \in (0,x)(x>0)$, Puis en intégrant le identité résultante par rapport à ρ de 0 à x,on a

$$\begin{aligned}
&g(\sigma)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x}\right)f_2(\rho)d\rho\\
&+f_1(\sigma)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x}\right)u(\rho)d\rho\\
&\leq f_1(\sigma)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x}\right)f_2(\rho)d\rho\\
&.g(\sigma)\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{\rho}{x}\right)f(\rho)d\rho
\end{aligned}\tag{3.67}$$

Donc,

$$g(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f_2(x)+f_1(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f(x) \leq f_1(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f_2(x)+g(\sigma)I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}f(x) \tag{3.68}$$

en multiple 3.68 par$(x^{-\varsigma+\tau}/\Gamma(g))\,(x-\sigma)^{g-1}{}_2F_1\,(\varsigma+\tau,-\zeta;;1-\sigma/x)(\sigma \in (0,x), x > 0)$, qui reste positif, alors en intégrant l'identité résultante par rapport à ρ de 0 à x, on a

$$\begin{aligned}
&I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x]\frac{x^{-g-f}}{\Gamma(g)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(g+f,-\zeta;g;1-\frac{\sigma}{x}\right)v(\sigma)d\sigma\\
&.I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)]\frac{x^{-g-f}}{\Gamma(g)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(g+f,-\zeta;g;1-\frac{\sigma}{x}\right)f_1(\sigma)d\sigma\\
&\geq I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[f_2(x)]\frac{x^{-g-f}}{\Gamma(g)}.\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(g+f,-\zeta;g;1-\frac{\sigma}{x}\right)f_1(\sigma)d\sigma\\
&.I_{0,x}^{\alpha,\beta,\eta}[u(x)]\frac{x^{-g-f}}{\Gamma(g)}\int_0^x (x-\sigma)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(g+f,-\zeta;g;1-\frac{\sigma}{x}\right)v(\sigma)d\sigma
\end{aligned}\tag{3.69}$$

cela donne l'inégalité (a_1) .En utilisant la condition suivante, nous prouvons (b_1) - (d_1)

$$\begin{array}{l} (g_2(\rho) - g(\rho))\,(f(\sigma) - f_1(\sigma)) \geq 0 \\ (f_2(\rho) - f(\rho))\,(g(\sigma) - g_2(\sigma)) \leq 0 \\ (f_2(\rho) - u(\rho))\,(g(\sigma) - g_1(\sigma)) \leq 0 \end{array} \tag{3.70}$$

■

Conclusion

Il est à noter que les résultats apportent quelques contributions à la théorie des inégalités intégrales et du calcul fractionnaire.en plus, il devraient on conduire à certaines applications pour établir l'unicité des solutions dans les équations différentielles fractionnaires.

Bibliographie

[1] G.Gruss"Uber das Maximun des absoluten Betrages von$(1/(b-a))\int_a^b f(x)g(x)dx - (1/(b-a)^2)\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$, Mathématique Zeitschrift,vol.39,no.1,pp.,215-226,1935

[2] Y.Miao,F.Han and J.Mu"A new Ostrowski-Gruss type inequality",Kragujevac Journal of Mathématics, vol.37,no.2,pp. 307-317,2013

[3] Elezovic, N and Marangunic, LJ and Pecaric, J", journal of Mathematical. I inequalities,vol.1,no2,article12,2004

[4] Zhu, Chaowu and Yang, Wengui and Zhao, Qingbo"Some new fractional q-integral Grüss-type inequalities and other inequalities",Journal of Inequalities and Applications,vol.2012,article299,2012

[5] Belarbi, Soumia and Dahmani, Zoubir"On some new fractional integral inequalities",Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,vol.10,article86,no.3,5 pages,2009

[6] Z. Dahmani, "On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration," Annals of Functional Analysis, vol. 1, no. 1, pp. 51–58, 2010.

[7] Z. Dahmani, "New inequalities in fractional integrals," International Journal of Nonlinear Science , vol. 9, no. 4, pp. 493–497, 2010.

[8] Z. Dahmani, "The Riemann-Liouville operator to generate some new inequalities," International Journal of Nonlinear Science, vol. 12, no. 4, pp. 452–455, 2011.

[9] Z. Dahmani, "Some results associated with fractional integrals involving the extended Chebyshev functional," Acta Universi- tatis Apulensis : Mathematics : Informatics, no. 27, pp. 217–224, 2011.

[10] Z. Dahmani and A. Benzidane,"New inequalities using frac tional q-integrals theory," Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, vol. 4, no. 1, pp. 190–196, 2012.

[11] Z. Dahmani, L. Tabharit, and S. Taf, "New generalisations of Gruss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals," Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, vol. 2, no. 3, pp. 92–99, 2010.

[12] Z. Denton and A. S. Vatsala,"Fractional integral inequalities and applications," Computers Mathematics with Applications, vol. 59, no. 3, pp. 1087–1094, 2010.

[13] Yang, Wengui"Some new fractional quantum integral inequalities",Applied Mathematics Letters,vol.25,no.6,pp963-969,2012

[14] Kiryakova, Virginia"On two Saigo's fractional integral operators in the class of univalent functions",Fractional Calculus and Applied Analysis,vol.9,no.2,pp159-176,2006

[15] V. S. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applica- tions, vol. 301 of Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, 1994.

[16] A. R. Prabhakaran and K. S. Rao, "Saigo operator of fractional integration of hypergeometric functions," International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 81, no. 5, pp. 755–763, 2012.

[17] Purohit, SD and Yadav, RK"On generalized fractional q-integral operators involving the q-Gauss hypergeometric function",Bulletin of Mathematical Analsisand Applications ,vol.2,no.4,pp.35-44,2010

[18] Purohit, SD and Raina, RK"Chebyshev type inequalities for the Saigo fractional integrals and their q-analogues", journal Mathematical Inequalities,vol.7,no.2,pp.239-249,2013.

[19] R. K. Raina, "Solution of Abel-type integral equation involving the APPell hypergeometric function," Integral Transforms and Special Functions, vol. 21, no. 7, pp. 515–522, 2010.

[20] M. Saigo, "A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions," Mathematical Reports of College of General Education : Kyushu University, vol. 11, no. 2, pp. 135–143, 1978.

[21] Virchenko, N and Lisetska, O and Kalla, SL"On some fractional integral operators involving generalized Gauss hypergeometric functions",Applications and Applied Mathematics,vol.5,no10,pp.1418-1427,2010

[22] Chinchane, V and Pachpatte, D"A note on some fractional integral inequalities via Hadamard integral",Journal of Fractional Calculus and Applications,vol.4,no.11,pp.1-5,2013

[23] V. L. Chinchane and D. B. Pachpatte, "On some integral inequal- ities using Hadamard fractional integral," Malaya Journal of Matematik, vol. 1, no. 1, pp. 62–66, 2012.

[24] V. L. Chinchane and D. B. Pachpatte, "Some new integral inequalities using Hadamard fractional integral operator," Advances in Inequalities and Applications, vol. 2014, Article ID 12, 2014.

[25] Chinchane, Vaijanath L and Pachpatte, Deepak B"Some new integral inequalities using Hadamard fractional integral operator",Advances in inequalities and Applications,vol.2014,Article ID12,2014

[26] A.A.A Kilbas ,H.M.Srivastava and J.J Trujillo theory and applications cf fractional different,north holland Matimaticl studies 204,ad van mill ,amsterdam,(2006)

[27] Samko S.G.Kilbas A.A and Mrichev OI (1993)fractional intégrals and derivatives :theory and applications,Gordon and Breach ,New York

[28] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujllo. Elements of Function Theory and Functional Analysis. Bysshaya Shkola, Moscow, 1970.

[29] Appell, Paul and De Fériet, Joseph KampéFonctions hypergéométriques et hypersphériques,paris(1926)

[30] A.w.Babister.Transcendental Functions Satisfying Nonhomogeneous Linear Differential Equations. Collier-macmillan,Ltd.,London,(1967)

[31] J.Barros-Neto and F.Cardoso. Hypergeometricfunctions and the tricomi operator.Adv. Defferential Equations 10 (2005),445-461

[32] ,R.Beals,R,WongS,pecial functions, A Graduate Text,Cambridge university press Cambridge,(2010)

[33] Dutka, JacquesThe early history of the hypergeometric function,Archive for History of Exact Sciences,31(1984),no.1,15-34

[34] I.M.Gelfand and G.E.Shilov.Generalized Functions ,vol.I :properties and Operation,Academic Press,New York ,(1964)

[35] L.J.SalterGeneralized Hypergeometric Functions.Combridge :Combridge University Press(1966)

[36] http ://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric -Function

[37] Wolfram,functions .wolfram.com