Ministère De L'enseignement Superieur Et De La Rechreche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques

présenté par

HAFSAOUI Chaima **LADJEL Fadhila**

REGGADI Achwak **SAHI Oum-Hani**

Spécialité : Mathématique

Option : Annalyse Fonctionnelle et équation différentielle

sujet de Mémoire

Sur les inégalités inverse de Minkowski, Hardy et Hölder

Mémoire de fin D'étude Pour Obtenir

Le diplome de Master

présenter et Soutenue publiquement le 00/00/2021

devant le jury composé de

Bendaoud Abed sid Ahmed	**MCB**	**Président**
Benguessoum Aissa	**MCB**	**Examinateur**
Benaissa Bouharket	**MCB**	**Encadreur**

Remerciement

✓ Nous remercions avant tous ALLAH qui nous a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

✓ Nous tenons à remercier sincèrement **Dr Bouharket Benaissa** non seuleument pour avoir accepté de nous encadré et aussi nous faire profiter de ses connaissance mais aussi pour sa patience et pour le totale confience qu'il nous a accordé .

✓ Nous remercions vivement **Dr Bendaoud Abed sid Ahmed** de l'honneur qu'il nous fait en président ce jury .

✓ Nous remercions également **Dr Benguessoum Aissa** pour l'honneur qu'il fait d'avoir accepeter l'examen de ce travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos famille, nos amies, nos professeurs.

Dédicace

★ *Nous rendons grace à Dieu nous avoir donné le courage et la volonté pour terminer nos études*

★ *À nos très chers parents qui ont toujours été là pour nous*

★ *À nos pères pour leur patience et les efforts qu'ils ont faits pour nous*

★ *À nos mères qui nous soutenez avec tendresse et prier pour nous à chaque pas*

★ *A nos soeurs et nos frére*

★ *Aux personnes qui nous ont toujours aidés et encourager, et toutes nos familles*

★ *À tous nos amis, nos profs, notre encadreur*

Benaissa Bouharket

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter quelques résultats des articles scientifiques internationaux sur les inégalités intégrales inverses de Minkowski, Hardy et Hölder.
Tous les inégalités intégrales étudiées sont considères dans l'espace de Lebesgue L^p, où $0 < p \leq +\infty$. Les techniques utilisées sont les propriétés du calcul intégrale, l'intégration par parties, Théorème de Fubuni, fonctions de poids, les fonctions monotones et les inégalités classiques de Young , Hölder et Minkowski.
Ce **mémoire** est composé de quatre chapitres.

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous donnons des notations et des définitions sur les inégalités de

1. **Young** : les deux versions des inégalités classiques et une nouvelle version connu par l'inégalité intégrale de Young.

2. **Hölder** : les inégalités classiques (pour $0 < p < 1$ et $p \geq 1$).

3. **Minkowski** : les inégalités somes et intégrale.

4. **Hardy** : L'inégalité classique de Hardy.

Le deuxième chapitre est consacré au un résultat sur les inégalités inverses de Minkowski, nous donnons les trois versions cites dans les articles [11], [12] et [1].

Dans **le troisième chapitre** nous présentons un résultat lié aux inégalités inverses de Hardy cites dans les trois articles scientifiques [11], [13] et [1].

Dans **le quatrième chapitre** nous étudions deux résultats sur les inégalités intégrales connus par les inégalités inverses de Hölder, cites dans les deux articles internationaux [11] et [2].

Chapitre 1

Preliminaire

1.1 Définitions et propriétées sur les espaces L^p

Définition 1.1. *(**Les espaces** L^p) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^p(\Omega)$ si*

(1) f est mesurable sur Ω.

(2) $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} < \infty$.

Définition 1.2. *soit $e \subset \Omega$ telle que $mes(e) = 0$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, on définie le sup essentiel et l'inf essentiel comme suite*

- $\sup\limits_{x\in\Omega} ess f(x) = \inf\limits_{|e|=0} \sup\limits_{x\in\Omega\setminus e} f(x)$.
- $\inf\limits_{x\in\Omega} ess f(x) = \sup\limits_{|e|=0} \inf\limits_{x\in\Omega\setminus e} f(x)$.

1. le sup essentiel est aussi appelé sup vraie
2. l'inf essentiel est aussi appellé inf vraie

Définition 1.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$, mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $|\Omega| > 0$. On dit que $f \in L^\infty(\Omega)$ si f est mesurable et*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)| < \infty. \tag{1.1}$$

1.1.1 Théorème de Fubuni

Théorème 1.1. *Soit $f(x,y)$ une fonction intégrable sur $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors pour presque tous les $x \in (a,b)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (c,d), pour presque tous les $y \in (c,d)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (a,b) et :*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x,y)| dx dy = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} |f(x,y)| dy \right) dx = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{b} |f(x,y)| dx \right) dy,$$

si $f(x,y)$ est une fonction mesurable sur $(a,b) \times (c,d)$ et l'une des intégrales est finie, alors toutes les intégrales existent et de plus cette dernière égalité est vérifiée.

1.1.2 Fonction convexe

Définition 1.4. *Soit φ une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. φ est dite convexe sur I si : $\forall x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$:*

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y). \tag{1.2}$$

Remarque 1.1. *φ est dite concave si $-\varphi$ convexe.*

Proposition 1.1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.*
f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.

$$\forall\, x \in I : f''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f \quad \text{est convexe sur } I. \tag{1.3}$$

1.1.3 Fonction de poids

Définition 1.5. *On dit que f est une fonction de poids sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ si seulement si f est une fonction mesurable et positive sur I.*

1.2 Les inégalités intégrales classiques

1.2.1 Quelques propriétés des conjugées :

Soient p et q deux conjugées ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), alors on a

1. $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$, $\frac{1}{p}=\frac{q-1}{q}$
2. $\frac{q}{p}=q-1$, $\frac{p}{q}=p-1$
3. $p=\frac{q}{q-1}$, $q=\frac{p}{p-1}$
4. $p.q=q+p$

1.2.2 L'inégalité classique de Young

L'inégalité de Young (1^{ere} version)

Lemme 1.1. *Soient $a, b \geq 0$ et $p, q \in (1,+\infty)$ où p, q sont conjugées $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q. \tag{1.4}$$

Démonstration. 1. Si $a=0$ ou $b=0$, l'inégalité (1.4) est vérifiée.

2. Si $a, b>0$, on a

$$a.b=\exp(\ln(a.b))=\exp(\ln(a)+\ln(b))=\exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)\right).$$

Comme exp est convexe, on déduit que

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)\right) &\leq \frac{1}{p}\exp\ln(a^p)+\frac{1}{q}\exp\ln(b^q)\\ &\leq \frac{1}{p}\,a^p+\frac{1}{q}\,b^q.\end{aligned}$$

□

L'inégalité de Young (2^{eme} version)

Soient $p,q\in(1,+\infty)$ où p,q sont conjugées, posant le changement de variable $\lambda=\frac{1}{p}$, on résulte que $\lambda\in[0,1]$ et $1-\lambda=\frac{1}{q}$ et on remplace a^p par a et b^q par b, par conséquent on a le Lemme suivant.

Lemme 1.2. *Soient $a,b\geq 0$ et $\lambda\in[0,1]$, alors*

$$a^{\lambda}\,.\,b^{(1-\lambda)}\leq \lambda\,a\,+\,(1-\lambda)\,b. \tag{1.5}$$

Démonstration. soient $a,b\geq 0$, $\lambda\in[0,1]$, et vue que " ln " est une fonction concave sur $(0,+\infty)$, on déduit que

1. si $a=0$ ou $b=0$ avec $\lambda\in]0,1[$, l'inégalité (1.5) est vérifiée.
2. Si $a,b>0$, on a

$$\ln(\lambda\,a+(1-\lambda)\,b)\geq\lambda\,\ln a\,+\,(1-\lambda)\,\ln b,$$

et comme exp est une fonction croissante, alors

$$\begin{aligned}\exp\ln(\lambda a\,+\,(1-\lambda)b) &\geq \exp(\lambda\ln a\,+\,(1-\lambda)\ln b)\\ &\geq \exp\ln a^{\lambda}\,.\,\exp\ln b^{(1-\lambda)},\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^{\lambda}.b^{1-\lambda}.$$

□

1.2.3 L'inégalité intégrale de Young

Théorème 1.2. *Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[0,c] \subseteq \mathbb{R}^+$, où $c > 0$, si $f(0) = 0$, $a \in [0,c]$, $b \in [f(0), f(c)]$ et $f : [0,c] \longrightarrow [f(0), f(c)]$, alors*

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq a\,b\ , \tag{1.6}$$

où f^{-1} désigne la fonction réciproque de f. L'égalité est vérifie si seulement si $b = f(a)$.

Démonstration. on écrit l'inégalité (1.6) sous la forme suivante

$$\int_0^b f^{-1}(x)dx \geq a\,b\, - \int_0^a f(x)dx\,,$$

le deuxième membre de cette inégalité est en fonction de a et d'autre part $f : [0,c] \longrightarrow [f(0), f(c)]$ est une fonction continue et strictement croissante, d'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ est convergente, considérons la fonction g de la variable a sur l'intervalle $[0,c]$ définie par :

$$g(a) = a\,b\, - \int_0^a f(x)dx\,, \quad \text{où } b > 0. \tag{1.7}$$

La dérivée de la fonction g par rapport à la variable a est définie par l'expression suivante

$$g'(a) = b - f(a),$$

donc

- $g'(a) = 0 \Longleftrightarrow b = f(a) \Longleftrightarrow a = f^{-1}(b)$.
- $g'(a) > 0 \Longleftrightarrow f(a) < b \Longleftrightarrow 0 < a < f^{-1}(b)$,

  alors , g est strictement croissante sur $[0, f^{-1}(b)]$.
- $g'(a) < 0 \Longleftrightarrow f(a) > b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) < a < c$,

  par conséquent, g est strictement décroissante sur $[f^{-1}(b), c]$.

On conclut que g admet un maximum au point $a = f^{-1}(b)$, ce qui donne

$$\forall\, a \in [0, c] : \quad g(a) \leq g(f^{-1}(b)), \tag{1.8}$$

en utilisant la formule (1.7) pour calculer $g(f^{-1}(b))$, d'où

$$g(f^{-1}(b)) = b\, f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx.$$

En intégrant par parties l'intégrale au membre droit, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx \;&= [xf(x)]_0^{f^{-1}(b)} - \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx \\ &= b\, f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx, \end{aligned}$$

on résulte que

$$g(f^{-1}(b)) = \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx,$$

on fait le changement de variable $y = f(x)$, on déduit que $x = f^{-1}(y)$ et $dx = \dfrac{1}{f'(x)}.dy \Longrightarrow dy = f'(x)dx$, cela nous donne

$$g(f^{-1}(b)) = \int_{f(0)}^{f(f^{-1}(b))} f^{-1}(y)dy = \int_0^b f^{-1}(x)dx. \tag{1.9}$$

Mettant les égalités (1.7) et (1.9) dans l'inégalité (1.8), on obtient le résultat voulu (1.6). $\square$

Remarque 1.2. *On peut considérer l'inégalité intégrale de Young comme une généralisation de l'inégalité classique de Young.*

Démonstration. soient $a, b \geq 0$ et $p > 1$, si on pose $f(x) = x^{p-1}$ alors on obtient $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$, d'où

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^{p-1}dx = \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a = \frac{a^p}{p},$$

et

$$\int_0^b f^{-1}(x)dx = \int_0^b x^{\frac{p}{p-1}-1}dx = \left(\frac{p-1}{p}\right) x^{\frac{p}{p-1}}\Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

On déduit que

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq a\,b \Longrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq a\,b\,.$$

$\square$

1.2.4 L'inégalité de Hölder

Lemme 1.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$f.g \in L^1 \ \ et \ \int\limits_{\Omega} \left|fg\right|dx \leq \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)}\left\|g\right\|_{L^q(\Omega)}\,. \tag{1.10}$$

Démonstration. pour $1 < p < +\infty$
on prend $a = \dfrac{|f(t)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}$ et $b = \dfrac{|g(t)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}$.

D'aprés l'inégalité de Young (1.4), on a

$$\frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|L^q(\Omega)} \leq \frac{|f(t)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{|g(t)|^q}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}},$$

puis en intégrant par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \frac{|f(t)g(t)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}}\,dt &\leq \int\limits_{\Omega} \frac{|f(t)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}\,dt + \int\limits_{\Omega} \frac{|g(t)|^q}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}\,dt \\
&= \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \int\limits_{\Omega} |f(t)|^p dt + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \int\limits_{\Omega} |g(t)|^q dt \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,
\end{aligned}$$

d'où

$$\int\limits_{\Omega} |f(t)g(t)|\,dt \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \times \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

$\square$

1.2.5 L'inégalité de Minkowski (sommes)

Lemme 1.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable, $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^p(\Omega)$, alors :*

$$\big\|f+g\big\|_{L^p(\Omega)} \leq \big\|f\big\|_{L^p(\Omega)} + \big\|g\big\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.11}$$

Démonstration. d'aprés l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int\limits_{\Omega} |f(x)+g(x)|^p dx \\
&= \int\limits_{\Omega} |f(x)+g(x)|\,|(f(x)+g(x))|^{p-1} dx
\end{aligned}$$

$$\leq \underbrace{\int_{\Omega} |f|\,|(f(x)+g(x))^{p-1}|dx}_{(I)} + \underbrace{\int_{\Omega} |g|\,|(f(x)+g(x))^{p-1}|dx}_{(II)},$$

on va vérifier que $(f+g)^{p-1} \in L^q(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\|(f+g)^{p-1}\|^q_{L^q(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}dx \\
&= \int_{\Omega} (f(x)+g(x))^p dx \\
&= \| f+g \|^p_{L^p(\Omega)} < +\infty,
\end{aligned}$$

car

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } g \in L^p(\Omega) \Longrightarrow (f+g) \in L^p(\Omega),$$

et on déduit que

$$\|(f+g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} = \| f+g \|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega)} = \| f+g \|^{p-1}_{L^p(\Omega)}. \tag{1.12}$$

Utilisant l'égalité (1.12) et l'inégalité de Hölder (1.10), on résulte

$$\begin{aligned}
(I) \;&\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|(f+g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)} \| f+g \|^{p-1}_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(II) \;&\leq \|g\|_{L^p(\Omega)} \|(f+g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} \\
&= \|g\|_{L^p(\Omega)} \| f+g \|^{p-1}_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\|f+g\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq (I) \ + \ (II)\\ &\leq \left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\right) \| \ f+g \ \|^{p-1}_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

ainsi

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|g\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

1.2.6 Inégalité intégrale de Minkowski

Lemme 1.5. *Soient* $1 \leq p < \infty$ *et* $f : (a,b)\times(c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, alors*

$$\left\| \int_c^d f(x,y)\, dy \right\|_{L^p(a,b)\,,x} \leq \int_c^d \|f(x,y)\|_{L^p(a,b)\,,x}\, dy. \tag{1.13}$$

1.2.7 L'inégalité classique de Hardy

Définition 1.6. *Soit* f *une fonction positive mésurable sur* $(0,+\infty)$*, on définit l'opérateur de Hardy, noté* $H_f := (Hf)$ *par*

$$\big(Hf\big)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \tag{1.14}$$

(la valeur moyenne de la fonction f *dans l'intervalle* $(0,x)$*).*

Lemme 1.6. *Soient* $p > 1$ *et* f *une fonction positive mésurable sur* $(0,+\infty)$*, alors on a*

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)dx. \tag{1.15}$$

Démonstration. pour tout $x > 0$, on pose $t = s\,x$, ce qui donne

$$dt = x\,ds, \text{ et } \begin{cases} t = 0 & \Longrightarrow s = 0 \\ t = x & \Longrightarrow s = 1 \end{cases},$$

alors

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^1 f(x\,s)x\,ds = \int_0^1 f(x\,s)\,ds,$$

on utilise l'inégalté intégrale de Minkowski (1.13), on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 f(x\,s)\,ds\right)^p dx \\ &= \left\|\int_0^1 f(x\,s)\,ds\right\|^p_{L^p(0,+\infty),\,x} \\ &\leq \left(\int_0^1 \|f(x\,s)\|_{L^p(0,+\infty),\,x}\,ds\right)^p \\ &= \left(\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f^p(x\,s)dx\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p. \end{aligned}$$

On pose maintenant $s\,x = y$, ce qui donne

$$dx = \frac{1}{s}dy, \text{ et } \begin{cases} x = 0 & \Longrightarrow y = 0 \\ x = +\infty & \Longrightarrow y = +\infty \end{cases},$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx &\leq \left(\int_0^1\left(\int_0^{+\infty} f^p(x\,s)dx\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p \\
&= \left(\int_0^1\left(\int_0^{+\infty} f^p(y)\frac{1}{s}dy\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p \\
&= \left(\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} f^p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} ds\right)^p \\
&= \left(\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}}\, ds\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(y)dy \\
&= \left(\frac{P}{P-1}.\ s^{1-\frac{1}{p}}\Big|_0^1\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(y)dy \\
&= \left(\frac{P}{P-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 2

Les inégalités inverses de Minkowski

En mathématiques, l'inégalité de Minkowski, ainsi nommée en l'honneur de **Hermann Minkowski**, est l'inégalité triangulaire pour la norme des espaces L^p pour $p > 0$, établissant ainsi que ce sont des espaces vectoriels normés. Elle concerne également la norme des espaces de suites l^p. Dans ce chapitre les enoncés des Théorémes suivants 2.1, 2.2 et 2.3 sur les inégalités inverses de Minkowski et leurs preuves ont fait l'objet des publications [11], [12] et [1].

2.1 Résultats principales

En 2012, sulaimani a prouvé l'inégalité intégrale dite inverse de Minkowski [11, Théorème 1.5]

Théorème 2.1. *Soient $p \geq 1$ et f, g deux fonctions strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$ satisfaisants : $\forall x \in [a, b]$*

$$1 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M,$$

alors

$$\frac{M+1}{M-1}\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.1}$$

$$\leq \frac{m+1}{m-1}\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^p dx\right)^{1/p}.$$

En 2013 Banyat Sroysang a donné une généralisation de l'inégalité inverse de Minkowski [12, Théorème 2.2]

Théorème 2.2. *Soient $p \geq 1$ et f, g deux fonctions strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$ satisfaisants : $\forall x \in [a, b]$*

$$0 < c < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M,$$

alors

$$\frac{M+1}{M-c}\left(\int_a^b (f(x)-c\,g(x))^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{1/p} \tag{2.2}$$

$$\leq \frac{m+1}{m-c}\left(\int_a^b (f(x)-c\,g(x))^p dx\right)^{1/p}.$$

En 2020, B. Benaissa a généralisé l'inégalité intégrale dite inverse de Minkowski [1, Théorème 2.1]

Théorème 2.3. *Soient $p \geq 1$, $\alpha > 0$ et f, g deux fonctions strictement* *positive sur l'intervalle* $[a,b]$ *satisfaisants :* $\forall x \in [a,b]$

$$0 < c < m \leq \frac{\alpha\, f(x)}{g(x)} \leq M, \tag{2.3}$$

alors

$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) - c\, g(x))^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{1/p} \tag{2.4}$$

$$\leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)} \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) - c\, g(x))^p dx \right)^{1/p}.$$

Pour prouvé le Théorème 2.3 on va utiliser la proposition suivante :

Proposition 2.1. *[1] Soient* $0 < c < m \leq M$ *et* $\alpha > 0$*, on a*

$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} \leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}. \tag{2.5}$$

Démonstration. on a

$$(c+\alpha)m \leq (c+\alpha)M,$$

alors

$$\alpha m - cM \leq \alpha M - cm,$$

on ajoutant le même nombre $Mm - \alpha c$ aux deux côtes de l'inégalité précédente, on obtient

$$Mm - \alpha c + \alpha m - cM \leq Mm - \alpha c + \alpha M - cm,$$

d'où

$$(M+\alpha)(m-c) \leq (m+\alpha)(M-c),$$

ainsi

$$\frac{M+\alpha}{(M-c)} \leq \frac{m+\alpha}{(m-c)}.$$

multipliant par $\frac{1}{\alpha}$, on trouve

$$\frac{M+\alpha}{\alpha(M-c)} \leq \frac{m+\alpha}{\alpha(m-c)}.$$

$\square$

Démonstration. du **Théorème 2.3**.

D'après l'hypothèse (2.3), on a

$$-\frac{1}{c} < -\frac{1}{m} \leq -\frac{g(x)}{\alpha f(x)} \leq -\frac{1}{M}$$

ce qui fait

$$0 < \frac{1}{c} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{c} - \frac{g(x)}{\alpha f(x)} \leq \frac{1}{c} - \frac{1}{M},$$

on obtient

$$0 < \frac{m-c}{c\,m} \leq \frac{\alpha\, f(x) - c\, g(x)}{c\,\alpha\, f(x)} \leq \frac{M-c}{c\,M},$$

en inversant l'inégalité précédente, ce qui donne

$$0 < \frac{c\,M}{M-c} \leq \frac{c\alpha f(x)}{\alpha\, f(x) - c\, g(x)} \leq \frac{c\,m}{m-c}, \tag{2.6}$$

puisque $f(x) > 0$, on résulte que le nombre $\left[\frac{\alpha\, f(x) - c\, g(x)}{c}\right]$ est strictement positif, et en multipliant (2.6) par ce positif, devient

$$\frac{M}{\alpha(M-c)}(\alpha f(x) - c\, g(x)) \leq f(x) \leq \frac{m}{\alpha(m-c)}(\alpha f(x) - c\, g(x)),$$

et en intégrant sur $[a, b]$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{M}{\alpha(M-c)}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-c\,g(x))^p dx\right)^{1/p} &\leq \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{1/p} \\ \leq \frac{m}{\alpha(m-c)}\left(\int_a^b(\alpha f(x)-c\,g(x))^p dx\right)^{1/p} &.\end{aligned} \tag{2.7}$$

D'une manière analogue, vu l'hypothèse (2.3), on obtient

$$0 < m - c \leq \frac{\alpha\, f(x) - c\, g(x)}{g(x)} \leq M - c,$$

inversant l'inégalité précédente et multipliant par le positif $[\alpha\, f(x) - c\, g(x)]$, ce donne

$$\frac{\alpha f(x) - cg(x)}{M - c} \leq g(x) \leq \frac{\alpha f(x) - cg(x)}{m - c},$$

on intègre sur $[a, b]$, ce qui implique

$$\begin{aligned}\frac{1}{M-c}\left(\int_a^b(\alpha\, f(x)-c\,g(x))^p dx\right)^{1/p} &\leq \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{1/p} \\ \leq \frac{1}{m-c}\left(\int_a^b(\alpha\, f(x)-c\,g(x))^p dx\right)^{1/p} &.\end{aligned} \tag{2.8}$$

□

Par somation sur les inégalités (2.7) et (2.8) , on obtient l'inégalité (2.4).

Remarque 2.1. *Si on pose $\alpha = 1$ dans le Théorème 2.3, on obtient le Théorème 2.2.*

Remarque 2.2. *Si on pose $\alpha = 1$ et $c = 1$ dans le Théorème 2.3, on obtient le Théorème 2.1.*

Chapitre 3

Les inégalités inverses de Hardy

L'inégalité de Hardy est une inégalité en mathématiques, nommée d'aprés G. H. Hardy (**Godfrey Harold Hardy** mathématicien britannique). L'inégalité de Hardy a été publiée et prouvée pour la premiére fois (du moins la version discréte avec une constante moins précise) en 1920 dans une note de Hardy [10]-[9], La formulation originale était sous une forme intégrale légèrement différente de la précédente. Les enoncés des Théorémes suivants 3.1, 3.2 et 3.3 sur les inégalités inverses de Hardy et leurs preuves ont fait l'objet des publications [11], [13] et [1].

3.1 Résultat principale

En 2012, Sulaiman a prouve des inégalités intégrales dites inégalités inverses de Hardy [11, Théorème 3.1].

Théorème 3.1. *Soient* $0 < a < b < +\infty$, $p > 0$ *et* f *une fonction positive mesurable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors

1. *Pour* $p \geq 1$

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx - \int_a^b \left(1-\frac{a}{x}\right)^p f^p(x)dx \tag{3.1}$$

2. *Pour* $0 < p < 1$

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \geq \left(1-\frac{a}{b}\right)^p \int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^p}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{3.2}$$

En 2013, Banyat Sroysang obtient une généralisation des inégalités intégrales précédentes de Hardy, en introduisant un deuxième parametre $q > 0$.[13, Théorème 2.1]

Théorème 3.2. *Soient* $0 < a < b < +\infty$, $p, q > 0$ *et* f *une fonction positive mesurable sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

alors

1. *Pour* $p \geq 1$

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q} - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{x^q} f^p(x)dx \tag{3.3}$$

2. *Pour* $0 < p < 1$

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \geq \frac{(b-a)^p}{b^q}\int_a^b f^p(x)dx - \frac{1}{b^q}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx. \tag{3.4}$$

En 2020, B. Benaissa a généralisé l'inégalité integrale dite inverse de Hardy [1, Théorème 2.2]

Théorème 3.3. *Soient* $0 < a < b < +\infty$, $p > 0$ *et* f, g *deux fonctions positives mesurables sur* $[a, b] \subseteq (0, \infty)$, *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Si g *est croissante sur* $[a, b]$, *alors*

1. *pour* $p \geq 1$

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)} dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{g(x)} dx - \int_a^b \frac{(x-a)^p}{g(x)} f^p(x) dx, \quad (3.5)$$

2. *pour* $0 < p < 1$

$$p \int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)} dx \geq \frac{(b-a)^p}{g(b)} \int_a^b f^p(x) dx - \frac{1}{g(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x) dx. \quad (3.6)$$

Démonstration. 1. Pour $p \geq 1$,

on utilise l'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)dt &\leq \left(\int_a^x f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_a^x f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_a^x f^p(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} (x-a)^{\frac{p-1}{p}}, \end{aligned}$$

on note par $g^{-1}(x) = \frac{1}{g(x)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)} dx &= \int_a^b g^{-1}(x) \left(\int_a^x f(t)dt \right)^p dx \\
&\leq \int_a^b g^{-1}(x) \left[(x-a)^{p-1} \int_a^x f^p(t)dt \right] dx \\
&= \int_a^b \int_a^x g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} f^p(t) dt dx \,.
\end{aligned}$$

D'aprés le Théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)} dx &\leq \int_a^b \int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} f^p(t) dx dt \\
&= \int_a^b f^p(t) \left[\int_t^b (x-a)^{p-1} g^{-1}(x) dx \right] dt, \quad ...(I)
\end{aligned}$$

et comme g est une fonction croissante, on a

$$\forall x \in [t, b] : g^{-1}(x) \leq g^{-1}(t),$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} dx &\leq \int_t^b g^{-1}(t)(x-a)^{p-1} dx \\
&= g^{-1}(t) \int_t^b (x-a)^{p-1} dx \\
&= \frac{1}{p} g^{-1}(t)[(b-a)^p - (t-a)^p]
\end{aligned}$$

et d'aprés l'inégalité (I), on déduit que

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}dx &\leq \frac{1}{p}\int_a^b f^p(t)\left\{g^{-1}(t)[(b-a)^p-(t-a)^p]\right\}dt \\ &= \frac{1}{p}\left[\int_a^b f^p(t)g^{-1}(t)[(b-a)^p-(t-a)^p]dt\right] \\ &= \frac{1}{p}\left[(b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(t)}{g(t)}\,dt - \int_a^b f^p(t)\frac{(t-a)^p}{g(t)}dt\right].\end{aligned}$$

2. Pour $0 < p < 1$

Utilisant l'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et le Théorème de Fubuni, on a

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &\geq \left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

comme $g(x)^{-1} = \dfrac{1}{g(x)}$, et d'aprés l'inégalité précédente, on résulte que

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)}dx &= \int_a^b g^{-1}(x)\left(\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \\ &\geq \int_a^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)dx \\ &= \int_a^b\int_a^x g^{-1}(x)(x-a)^{p-1}f^p(t)dt\,dx\end{aligned}$$

$$= \int_a^b f^p(t) \left(\int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} dx \right) dt, \quad ...(II)$$

par l'hypothèse que g est une fonction croissante, conclut que

$$\forall x \in [t, b] : g^{-1}(x) \geq g^{-1}(b),$$

cela nous donne

$$\begin{aligned} \int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} dx &\geq \int_t^b g^{-1}(b)(x-a)^{p-1} dx \\ &= g^{-1}(b) \int_t^b (x-a)^{p-1} dx \\ &= \frac{1}{p} g^{-1}(b) \left[(b-a)^p - (t-a)^p \right]. \end{aligned}$$

Remplaçant l'intégrale précédent dans l'inégalité (II) , on déduit que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{F^p(x)}{g(x)} dx &\geq \int_a^b f^p(t) \left(\int_t^b g^{-1}(x)(x-a)^{p-1} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{p} g^{-1}(b) \int_a^b f^p(t) \left[(b-a)^p - (t-a)^p \right] dt \\ &= \frac{1}{p} \left[\frac{(b-a)^p}{g(b)} \int_a^b f^p(x) dx - \frac{1}{g(b)} \int_a^b (x-a)^p f^p(x) dx \right]. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 3.1. *Si on remplace $g(x)$ par x^p dans le Théorème 3.3 on obtient le Théorème 3.1.*

Si on pose $g(x) = x^q$ dans le Théorème 3.3 on obtient le Théorème 3.2.

Chapitre 4

Les inégalités inverses de Hölder

En analyse mathématique, l'inégalité de Hölder (**Otto Hölder**), est une inégalité fondamentale dans le calcul en analyse fonctionnelle et un outil indispensable pour l'étude des espaces L^p. L'inégalité inverse de Hölder a été explorée par un certain nombre de scientifiques à travers des articles récents, pour plus de détails voire [2]-[8]. Dans ce chapitre Les enoncés des Théorémes suivants 4.1 et 4.3 sur "les inégalités inverses de Hölder et leurs preuves ont fait l'objet de la publication de B.Benaissa et H.Budak (voir [2]).

4.1 1^{er} résultat principal

Dans tout ce qui suit, $-\infty < a < b < +\infty$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En 2020, B.Benaissa et H.Budak ont prouve le Théorème suivant [2, Théorème 2.1]

Théorème 4.1. *Soient* $\alpha, \beta > 0$, $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* f, g *deux fonctions intégrables strictement positives sur* $[a, b]$, w *est une fonction de poids (mesurable positive) sur* $[a, b]$. *Si*

$$0 < m \leq \frac{f^\alpha(x)}{g^\beta(x)} \leq M, \quad \forall x \in [a, b], \tag{4.1}$$

alors

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^{\beta}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\&\leq\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}}\int_a^b f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x)w(x)dx.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Démonstration. à partir de l'hypothèse (4.1), on a

$$m \leq f^{\alpha}(x)g^{-\beta}(x) \leq M,$$

vu que $\frac{-1}{q} < 0$, on a

$$m^{\frac{-1}{q}} \geq f^{\frac{-\alpha}{q}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \geq M^{\frac{-1}{q}},$$

multipliant par $f^{\alpha}(x)$ l'inégalité précédente, on obtient

$$f^{\alpha}(x)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{q}} \geq f^{\alpha(1-\frac{1}{q})}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \geq f^{\alpha}(x)\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{q}} f^{\alpha}(x) \geq f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{q}} f^{\alpha}(x),$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{q}} f^{\alpha}(x) \geq f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x)\\ f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \geq \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{q}} f^{\alpha}(x)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}f^{\alpha}(x) \geq m^{\frac{1}{q}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x)\\ M^{\frac{1}{q}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \geq f^{\alpha}(x)\end{array}\right. ,$$

on déduit que

$$m^{\frac{1}{q}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \leq f^{\alpha}(x) \leq M^{\frac{1}{q}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x),$$

multipliant la dernière inégalité par $w(x)$ et intégrant sur intervalle $[a,b]$, on résulte que

$$\left(\int_a^b f^{\alpha}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{pq}} \left(\int_a^b f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.3}$$

Maintenant, suite à l'hypothèse (4.1), on obtient

$$m^{\frac{1}{p}} \leq f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{-\beta}{p}}(x) \leq M^{\frac{1}{p}},$$

on multiplie par $g^{\beta}(x)$ l'inégalité précédente, on résulte que

$$m^{\frac{1}{p}}g^{\beta}(x) \leq f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\beta(1-\frac{1}{p})}(x) \leq M^{\frac{1}{p}}g^{\beta}(x),$$

et par suite

$$m^{\frac{1}{p}}g^{\beta}(x) \leq f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x) \leq M^{\frac{1}{p}}g^{\beta}(x),$$

on déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} m^{\frac{1}{p}}g^{\beta}(x) \leq f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{p}}(x) \\ f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{p}}(x) \leq M^{\frac{1}{p}}g^{\beta}(x) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} g^{\beta}(x) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{p}}(x) \\ \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{p}}(x) \leq g^{\beta}(x) \end{array}\right. ,$$

ainsi

$$\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{p}}(x) \leq g^{\beta}(x) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p}} f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{p}}(x),$$

puis en multipliant la dernière inégalité par $w(x)$ et en intégrant sur intervalle $[a, b]$, on résulte que

$$\left(\int_a^b g^{\alpha}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\int_a^b f^{\frac{\alpha}{p}}(x)g^{\frac{\beta}{q}}(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.4}$$

En conclusion, multipliant les inégalités (4.3) et (4.4), on obtient l'inégalité requise (4.2). $\square$

Si on choisit $\alpha = 1,\ \beta = 1$ et $w(x) = 1$ dans le Théorème 4.1, alors le

Théorème 4.1 se réduit au lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soient f, g deux fonctions intégrables strictement positives sur $[a, b]$ et $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si*

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M,$$

alors

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \int_a^b f^{\frac{1}{p}}(x) g^{\frac{1}{q}}(x)dx. \qquad (4.5)$$

Voire ([5], [6] p.126, [8] p.3).

Si on choisit $\alpha = p$, $\beta = q$ et $w(x) = 1$ dans le Théorème 4.1, alors le Théorème 4.1 se réduit au lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soient f, g deux fonctions intégrables strictement positives sur $[a, b]$ et $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si*

$$0 < m \leq \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq M,$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{1}{pq}} \int_a^b f(x)g(x)dx. \qquad (4.6)$$

Voire ([3] p.212, [4] p.9, [7] p.206).

En mettant le changement $m = n^q$ et $M = N^q$, on déduit que

$$0 < m \leq \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq M \iff 0 < n^q \leq \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq N^q$$

$$\iff 0 < n \leq \frac{f^{\frac{p}{q}}(x)}{g(x)} \leq N,$$

alors le Lemme 4.2 se réduit au Corollaire suivant

Corollaire 4.1. *Soient f, g deux fonctions intégrables strictement positives sur $[a, b]$ et $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si*

$$0 < n \leq \frac{f^{p-1}(x)}{g(x)} \leq N,$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{4.7}$$

Voire ([2, Corollaire 2.4]).

En mettant le changement $m = n^p$ et $M = N^p$, on déduit que

$$0 < m \leq \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq M \iff 0 < n^p \leq \frac{f^p(x)}{g^q(x)} \leq N^p$$

$$\iff 0 < n \leq \frac{f(x)}{g^{\frac{q}{p}}(x)} \leq N,$$

alors le Lemme 4.2 se réduit au Corollaire suivant

Corollaire 4.2. *Soient f, g deux fonctions intégrables strictement positives sur $[a,b]$ et $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si*

$$0 < n \leq \frac{f(x)}{g^{q-1}(x)} \leq N,$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{4.8}$$

Voire ([2, Corollaire 2.5]).

4.2 2^{eme} résultat principal

En 2012 Sulaiman a presente une importante inégalité inverse de Hölder ([11, Théorème 2.2])

Théorème 4.2. *Soient f, g deux fonctions positives intégrables satisfaites*

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M, \quad \forall x \in [a,b],$$

soient $p > 0, q > 0$, alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\frac{M}{m} \left(\int_a^b (f(x)g(x))^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (f(x)g(x))^{\frac{q}{2}}dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.9}$$

.

B.Benaissa et H.Budak ont généralise ce résultat par le Théorème suivant ([2, Théorème 2.6]).

Théorème 4.3. *Soient $\alpha, c, p, q, p', q' > 0$ et f, g deux fonctions positives mesurable sur $[a,b]$. Si*

$$0 < c < m \leq \frac{\alpha f(x)}{g(x)} \leq M, \tag{4.10}$$

alors

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{M}{\alpha}(m+c)^{\frac{p'-q'}{p'+q'}}(M+c)^{\frac{q'-p'}{p'+q'}}$$

$$\times \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{2p'}{p'+q'}} \left(\int_a^b (f^{p'}(x)g^{q'}(x))^{\frac{p}{p'+q'}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (f^{p'}(x)g^{q'}(x))^{\frac{q}{p'+q'}}dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.11}$$

Démonstration. en vertu de l'hypothése (4.10), on obtient

$$m + c \leq \frac{\alpha\, f(x) + c\, g(x)}{g(x)} \leq M + c, \tag{4.12}$$

en multipliant l'inégalité (4.12) par $g(x)$, d'où

$$(m+c)g(x) \leq \alpha\, f(x) + c\, g(x) \leq (M+c)g(x)\ ,$$

ceci implique pour tout $q, q' > 0$, on a

$$\begin{cases} (m+c)g(x) \leq \alpha f(x) + cg(x) \\ \alpha\, f(x) + c\, g(x) \leq (M+c)g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+c)^q g^q(x) \leq (\alpha f(x) + cg(x))^q \\ (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^{q'} \leq (M+c)^{q'} g^{q'}(x), \end{cases}$$

on intégre la première inégalité sur lintervale $[a,b]$ et on garde la deuxième inégalité , on déduit que

$$\left(\int_a^b (m+c)^q g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui donne

$$(m+c)\left(\int_a^b g^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.13}$$

et

$$(\alpha\, f(x) + c\, g(x))^{q'} \leq (M+c)^{q'} g^{q'}(x). \tag{4.14}$$

D'autre part, d'aprés l'hypothése (4.10), on a

$$\frac{m}{c} \leq \frac{\alpha\, f(x)}{c\, g(x)} \leq \frac{M}{c},$$

ainsi

$$\frac{c}{M} \leq \frac{c\, g(x)}{\alpha\, f(x)} \leq \frac{c}{m}$$

$$\frac{c}{M} + 1 \leq \frac{c\, g(x)}{\alpha\, f(x)} + 1 \leq \frac{c}{m} + 1,$$

d'où

$$\frac{M+c}{M} \leq \frac{\alpha\, f(x) + c\, g(x)}{\alpha f(x)} \leq \frac{m+c}{m},$$

ce qui implique

$$\frac{\alpha\,(M+c)}{M} f(x) \leq \alpha\, f(x) + c\, g(x) \leq \frac{\alpha\,(m+c)}{m} f(x),$$

on peut écrire , pour tout $p, p' > 0$

$$\begin{cases} \frac{\alpha\,(M+c)}{M} f(x) \leq \alpha\, f(x) + c\, g(x) \\ \alpha\, f(x) + c\, g(x) \leq \frac{\alpha\,(m+c)}{m} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\alpha\,(M+c)}{M}\right)^p f^p(x) \leq (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p \\ (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^{p'} \leq \left(\frac{\alpha\,(m+c)}{m}\right)^{p'} f^{p'}(x), \end{cases}$$

intégrant la première inégalité sur lintervale $[a, b]$ et conservant la deuxième inégalité, on résulte que

$$\left(\int_a^b \left(\frac{\alpha\,(M+c)}{M}\right)^p f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha\,(M+c)}{M}\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (4.15)$$

et

$$(\alpha\, f(x) + c\, g(x))^{p'} \leq \left(\frac{\alpha\,(m+c)}{m}\right)^{p'} f^{p'}(x). \qquad (4.16)$$

En multipliant (4.13) et (4.15), on trouve

$$\frac{\alpha}{M}(M+c)(m+c)\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (4.17)$$

et en multipliant les inégalités (4.14) et (4.16), on conclut

$$(\alpha\, f(x) + c\, g(x))^{p'+q'} \leq \left(\frac{\alpha\,(m+c)}{m}\right)^{p'} (M+c)^{q'} f^{p'}(x) g^{q'}(x),$$

d'ou

$$(\alpha\, f(x) + c\, g(x)) \leq (M+c)^{\frac{q'}{p'+q'}}(\frac{\alpha}{m}(m+c))^{\frac{p'}{p'+q'}} f^{\frac{p'}{p'+q'}}(x) g^{\frac{q'}{p'+q'}}(x),$$

intégrant l'inégalité ci dessus sur lintervale $[a, b]$ pour $p > 0$ et $q > 0$, ce donne

1.

$$\left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$(M+c)^{\frac{q'}{p'+q'}} \left(\frac{\alpha}{m}(m+c)\right)^{\frac{p'}{p'+q'}} \left(\int_a^b \left(g^{q'}(x) f^{p'}(x)\right)^{\frac{p}{p'+q'}} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

2.

$$\left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$(M+c)^{\frac{q'}{p'+q'}} \left(\frac{\alpha}{m}(m+c)\right)^{\frac{p'}{p'+q'}} \left(\int_a^b \left(g^{q'(x)} f^{p'}(x)\right)^{\frac{p}{p'+q'}} dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b (\alpha\, f(x) + c\, g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \\ (M+c)^{\frac{2q'}{p'+q'}} \left(\frac{\alpha}{m}(m+c)\right)^{\frac{2p'}{p'+q'}} & \\ \times \left(\int_a^b (g^{q'}(x) f^{p'}(x))^{\frac{p}{p'+q'}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (g^{q'}(x) f^{p'}(x))^{\frac{p}{p'+q'}} dx\right)^{\frac{1}{p}}.&\end{aligned} \tag{4.18}$$

En vertu des inégalités (4.17) et (4.18), on déduit l'inégalité (4.11). □

Remarque 4.1. *si on prend $p' = q' = \alpha = 1$ dans le Théorème 4.3, on obtient le Théorème 4.2.*

Bibliographie

[1] B. Benaissa, More on reverses of Minkowski's inequalities and Hardy's integral inequalities, Asian-Eur. J. Math. Vol. 13, No. 03, 2050064, (2020).
https ://doi.org/10.1142/S1793557120500643

[2] B. Benaissa, H. Budak, More on reverse Hölder's integral inequality, Korean J. Math. 28 , No. 1, 9-15, (2020).
https ://dx.doi.org/10.11568/kjm.2020.28.1.9

[3] Wing Sum Cheung, Chang-Jian, and Zhao, Hölder's reverse inequality and its applications. Publ. Inst. Math 99.113, 211-216, (2016)

[4] B. Halim and A. Senouci, Some generalizations involving open problems of F. Qi. Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 12, No. 1, (2019)

[5] Xiao-Hua, Liu, On the inverse of Hölder inequality. Math. Practice and Theory 1.1, 84-88, (1990)

[6] Mitrinovic, Dragoslav S., Josip Pecaric, and Arlington M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Vol. 61.p 126-127 Springer Science and Business Media (2013)

[7] Pecaric, Josip, and Charles EM Pearce, On an inverse to the Hölder inequality. Int. J. Mathematics and Mathematical Sciences 20.1, 205-207, (1997)

[8] Saitoh, Saburou, Vu Kim Tuan, and Masahiro Yamamoto, Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems. J. Inequal. Pure Appl. Math 3.5, 80, (2002)

[9] G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus. Messenger Math 57 (1928), 12-16.

[10] G. H. Hardy,Notes on a theorem of Hilbert. Math. Z, 6, 314-317 (1920).

[11] W.T. Sulaiman, Reverses of Minkowski's, Hölder's, and Hardy's integral inequalities, Int. J. Mod. Math. Sci, 1(1), 14-24, (2012).

[12] Banyat. Sroysang, More on Reverses of Minkowski's Integral Inequality, Mathematica Aeterna,Vol. 3, no.**7**, 597-600, (2013).

[13] Banyat. Sroysang, A Generalization of Some Integral Inequalities Similar to Hardy's Inequality, Mathematica Aeterna,Vol. 3, no.**7**, 593-596, (2013).