REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN - TIARET

MEMOIRE

Présenté à :

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles.

Par :

MAHROUZ Mhamed
DAHI Abdelmalek

Sur le thème

Théorèmes du points fixes hybrides dans les algèbres de Banach et applications à certains problèmes non linéaires

Soutenu publiquement le 13/ 09 / 2021 à Tiaret devant le jury composé de :

Mme Sabit Souhila	MCB	Université Tiaret	Présidente
Mr Baghdad Said	MCB	Université Tiaret	Encadreur
Mr Benia Kheireddine	MAA	Université Tiaret	Examinateur

2020-2021

Remerciement

Nous aimions en premier lieu remercier mon dieu "**ALLAH**" qui nos adonné la volonté et le courage pour mener à terminer notre formation de Master et réaliser ce travail.

Nous tenons à présenter tout notre gratitude et mes remerciements à notre rapporteur de mémoire : **Mr. Baghdad Said** prof à l'université Ibn Khaldoun de Tiaret, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement,son support,ses encouragements,sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous adressons également nos remerciements à tout messieurs les membres de jury pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignant du département de mathématique, ont aussi le métrite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique.

Merci à nos camarades de **la promotion 2021** de Mathématiques et nos amis pour leur aider et leur humour .

Aussi, nous adressons nos sincères remerciements à nos parents, et à toute la famille.

Finalement ,Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Merci à tous !

Table des matières

Introduction **5**

1 Préliminaires **7**

1.1 Espaces métriques 7

1.1.1 Topologie des espaces métriques 7

1.1.2 Complétude 11

1.1.3 Compacité 12

1.2 Espaces vectoriels normés 14

1.2.1 Espace de Banach 14

1.2.2 Applications continues 15

1.2.3 Algèbres de Banach 17

1.3 Quelques espaces fonctionnels 19

1.3.1 Espaces des fonctions continues 19

1.3.2 Espaces L^p 21

1.3.3 Théorème Ascoli-Arzèla 25

1.4 Quelques théorèmes du point fixe 26

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach 26

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder 26

1.4.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii 26

2 Théorème du point fixe hybride **28**

Introduction 28

2.1 Préliminaires 28

2.2 Théorème de Dhage 31

2.3 Quelques extensions du théorème de Dhage 33

3 Applications aux équations intégrales non linéaires **36**
Introduction 36
3.1 Équations intégrales non linéaires de Volterra 36
3.1.1 Résultats principaux : 36
3.1.2 Exemple 40
3.2 Équations intégrales non linéaires quadratiques 42
3.2.1 Résultats d'existence 42
3.2.2 Exemple 45

Conclusion **48**

Annexe **49**

Bibliographie **53**

Introduction

Le premier théorème du point fixe hybride dû à Krasnoselskii (1955) qui combine le théorème métrique du point fixe de Banach (1922) avec le théorème topologique du point fixe de Schauder (1930) dans un espace de Banach a plusieurs applications aux équations intégrales non linéaires surtout celles qui sont équivalentes aux équations différentielles perturbées. De nombreuses tentatives ont été faites pour améliorer et affaiblir les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii. L'étude des équations intégrales non linéaires dans les algèbres de Banach a été initiée par Dhage [3] via des théorèmes de point fixe hybride dans les algèbres de Banach [5, 6, 7].

Dans ce mémoire, on a présenté le théorèmes du point fixe hybride de Dhage et quelques extensions avec des applications aux équations intégrales non linéaires. Ce théorème assure l'existence du solution d'une équation donnée par la formule $AxBx = x$ sans la déterminer explicitement où A et B sont des opérateurs sur une algèbre de Banach. D'autre part, on a considéré les équations intégrales quadratiques qui jouent un rôle important dans plusieurs branches de l'analyse fonctionnelle et leurs applications en physique, en économie et dans d'autres domaines, en particulier, ces équations sont souvent applicables également dans la théorie du transfert radiatif, la théorie cinétique des gaz, dans la théorie du transport des neutrons et dans la théorie du trafic.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre : Dans ce chapitre , nous rappelons quelques notions et des définitions de l'analyse fonctionnelle utilisées tout le long de ce mémoire, comme : les espaces métrique, les espaces complets, les espaces de Banach,les applications contractantes, la compacité, théorème d'Ascoli-Arzèla , et quelques théorèmes de point fixe (Banach, Schauder et Krasnoselskii) .

le deuxième chapitre : On va présenter le théorème de Dhage (le point fixe d'une équation sous la forme :

$$x = AxBx \tag{1}$$

telle que A est $\mathcal{P}-$Lipschitzienne , et B est complètement continue .
Ensuite , nous définissons un nouveau concept de les applications P-Lipschitziennes qui est plus faible que les applications D-Lipschitziennes .
par suite , on donnera résultat principal sur le théorème de point fixe des équations sous la forme :

$$x = AxBy + Cx. \tag{2}$$

avec A et C sont $\mathcal{P}-$Lipschitzienne et B est complètement continu.

Enfin, nous donnons quelques remarques importantes liées aux théorèmes de point fixe de Dhage .

Dans le troisième chapitre : On va appliquer le théorème de Dhage pour étudier l'existence de la solution des équations intégrales non linéaires de Volterra de la forme :

$$x(t) = [f(t, x(t))] \left(\int_0^t g(s, x(s))ds \right) \ . \tag{3}$$

pour tout $t \in J$ $(J = [0, a])$, où $f, g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues .
Et des équations intégrales non linéaires quadratiques sous la forme :

$$x(t) = \left[\frac{1}{1 + |x(\theta(t))|} \right] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds \right). \tag{4}$$

pour tout $t \in J$ $(J = [0, 1])$, où $\theta, \eta : J \to J, q : J \to \mathbb{R}$ et $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continus.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentaux, concernant : les espaces métriques, les espaces fonctionnels, les espaces de Banach, les applications continues, théorème d'Ascoli-Arzèla et quelques théorèmes du point fixe, nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Définition 1.1.1. *[10] Soit X un ensemble, on appelle **métrique** ou **distance** toute application $d\ :\ X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $x, y, z \in X$, on ait :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. *(Séparation)*
2. $d(x, y) = d(y, x)$. *(Symétrie)*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. *(Inégalité triangulaire)*

On dit que le couple (X, d) est un espace métrique .

Exemple 1.1.1. *[10] Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ un espace métrique :*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

$$d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|.$$

Propriétés 1.1.1. *[10] Une distance d sur un ensemble X vérifie :*

a) la distance est toujours positive ou nulle :

$$\forall x, y \in X, d(x, y) \geqslant 0.$$

b) La distance entre les distance est plus petite que la distance :

$$\forall x, y, z \in X, |d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z).$$

Proposition 1.1.1. *[12] On dit que deux métriques d_1 et d_2 sur le même ensemble X sont équivalentes s'il existe des constantes $k_1 > 0$ et $k_2 \geq$ telles que :*

$$\forall x, y \in X, d_1(x, y) \leq k_1.d_2(x, y) \text{ et } d_2(x, y) \leq k_2.d_1(x, y) \ .$$

Définition 1.1.2. *[1] Soit $a \in X$ et $r > 0$;*

1. *On appelle **boule ouverte**(respectivement **boule fermée** de centre a et de rayon r, l'ensemble noté $B(a, r)$(respectivement $B_f(a, r)$) défini dans X par :*

$$B(a, r) = \{x \in X / d(x, a) < r\}$$

(respectivement $B_f(a, r) = \{x \in X / d(x, a) \leq r\}$)

2. *On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble noté $S(a, r)$ défini dans X par :*

$$S(a, r) = \{x \in X / d(x, a) = r\}$$

Définition 1.1.3. *[10] Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une **partie** A de X **bornée** s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$,*

$$\forall x \in A, d(x_0, x) \leq r$$

Définition 1.1.4. *[10] : Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Si X est un ensemble on dit qu'une **fonction** $f : X \to Y$ est **bornée** si son image $f(X)$ est bornée. On note $\mathcal{F}_b(X, Y)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, Y) = Y^X$ des fonctions bornées.*

Définition 1.1.5. *[10] Soit X un espace métrique et A une partie de X alors :*
*On appelle **diamètre** de A noté $\sigma(A)$ le nombre défini par*

$$\sigma(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Proposition 1.1.2. *Soient $A, B \subset X$ et $x \in X$ alors :*

1) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) $A \subset B \Rightarrow diam(A) \leqslant diam(B)$.

Définition 1.1.6. *[1] Soit X un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. On appelle* ***topologie sur*** *X toute partie τ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *La réunion de toute famille d'éléments de τ appartient à τ .*
2. *L'intersection de toute famille finie d'éléments de τ appartient à τ .*
3. *L'ensemble vide $\emptyset$ et X appartiennent à τ .*

Le couple (X, τ) est appelé ***espace topologique*** *de support X .Les éléments de τ sont appelés ouverts de $(X; \tau)$ ou de τ . Souvent notés $\mathcal{O}$.*

Définition 1.1.7. *[1] On appelle* ***voisinage*** *d'une partie A de X , toute partie de X qui contient un ouvert contenant A noté $\mathcal{V}(A)$.*
$\mathcal{V}_{(x)}$ désigne l'ensemble des voisinages de (x).

Définition 1.1.8. *[1] Pour qu'une partie A de X soit* ***ouverte****, il faut et il suffit que A soit voisinage de chacun de ses points.*

Si $Y \subset A$ est ouvert pour le sous espace A , Y n'est pas nécessairement ouvert pour X cependant.

Définition 1.1.9. *[1] On dit qu'une partie A de X est* ***fermée*** *si son complémentaire par rapport à X noté $\complement_X^A$, est ouvert.*

Proposition 1.1.3. *[1] Soit $x \in X$, on a les propriétés suivantes :*

i) Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

ii) L'intersection de toute famille finie de voisinage de x est un voisinage de x.

iii) Tout voisinage de x contient x .

Définition 1.1.10. *[1] On appelle* ***base*** *d'une topologie τ toute partie B de τ telle que tout ouvert $\mathcal{O}$ de τ soit la réunion d'une famille des ouverts de B.*

Propriétés 1.1.2. *:*

1. *X et $\emptyset$ sont des fermés.*
2. *Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*
3. *Toute réunion finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Définition 1.1.11. *[15] Soit (E, d) un espace métrique et $A \to E$.* ***L'intérieur*** *de A, noté $\mathring{A}$ est la réunion de tout les ouverts contenus dans A . Les éléments de $\mathring{A}$ sont appelés les points intérieurs de A.*

Remarque 1.1.1. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclut dans A. On en déduit que $A \subset E$ est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

Proposition 1.1.4. *Soit $(E; d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Alors $x \in \mathring{A}$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.*

Définition 1.1.12. *[15] Soit $(E; d)$ un espace métrique et $A \subset E$. **L'adhérence** (on dit aussi la **fermeture** de A) , est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A , on la note $\bar{A}$.*

Remarque 1.1.2. *:*

i) $\bar{A}$ est toujours fermé.

ii) $A \subset \bar{A}$ et $A = \bar{A}$ si et seulement si A est fermé.

iii) Si F est fermé et $A \subset F$, alors $\bar{A} \subset F$.

Proposition 1.1.5. *[15] Soit $(E; d)$ un espace métrique est $A \subset E$. Alors $x \in \bar{A}$ si et seulement si $\forall r > 0;\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 1.1.13. *[15] Si A est une partie de E , la **frontière** de A dans E est l'ensemble $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.*

Définition 1.1.14. *[11] Une partie A de X est dite **dense** dans X si $\overline{A} = X$.*

Exemple 1.1.2. *Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle , l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ et irrationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.15. *On dit que x est un **point d'accumulation** de A si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A - \{x\} \neq \emptyset$.*
On remarque aussi qu'un point d'accumulation est un point adhérent particulier.

Propriété 1.1.1. *[15] On dit qu'un espace topologique (X, τ) est **séparable** s'il admet une partie dénombrable et dense .*

Définition 1.1.16. *[15] On dit que X est **séparé** si pour tout $x, y \in X; x \neq y$, il existe deux ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x, y \in Uy_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$ On dit que les ouverts U_x et U_y séparent les points x et y.*

Exemple 1.1.3. *L'espace topologique discret est séparé car si $x \neq y$ alors $\mathcal{V}_x$ et $\mathcal{V}_y$ sont deux voisinages de x et y disjoints.*

Corollaire 1.1.1. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Définition 1.1.17. *[1] On dit que X est **connexe** si et seulement si les seuls sous-espaces à la fois ouverts et fermés sont X et $\emptyset$, i.e :*

$$A \subset X, A \text{ ouvert et fermé} \Longleftrightarrow A = \emptyset \text{ ou } A = X \ .$$

1.1.2 Complétude

Définition 1.1.18. *[11] On appelle **suite** dans un espace métrique X toute application de $\mathbb{N}$ dans X . Cette suite est notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.19. *[11] Soit (X,d) un espace métrique . On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X **converge** vers un point $l \in X$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.*

Définition 1.1.20. *[1] Une partie F de $(E;d)$ est dite fermée si la limite de toute suite convergente de F appartient à F.*

Définition 1.1.21. *Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace métrique X alors :*
*On appelle sous suite ou **suite extraite** de la suite $(x_n)_n$ la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.*

Définition 1.1.22. *[1] On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) est de **Cauchy** si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.6. *[15] :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque est fausse .*
2. *Si une suite $(x_n)_n$ converge dans un espace métrique X sa limite est unique.*
3. *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*
4. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.*

Exemple 1.1.4. *La suite $(x_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)$ est une suite de Cauchy de $X =]0,1]$ mais ne converge pas dans X.(car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X$).*

Définition 1.1.23. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace métrique .*
Posons $A_n = \{x_k, k \geqslant n\}$ il est évident que la suite $(A_n)_n$ est décroissante .
*$a \in X$ est appelée **valeur d'adhérence** de la suite $(x_n)_n$ si $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$*
$B(a,\varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset$ où $B(a,\varepsilon)$ désigne la boule de centre a et de rayon ε .

Proposition 1.1.7. *Soit a une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ alors il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers a .*

Définition 1.1.24. *[1] Un espace métrique (X,d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans (X,d) est convergente.*

Théorème 1.1.1. *$X \times Y$ est un espace métrique complet si et seulement si X et Y sont des espaces métriques complets.*

Exemple 1.1.5. *$X = \mathbb{R}$ est un espace métrique complet pour la distance usuelle .*

Proposition 1.1.8. *Soit (X, d) un espace métrique :*

1. *Les sous-espaces complets sont les fermés.*
2. *Une intersection quelconque de sous -espaces complets est complète.*
3. *Une union finie de sous-espaces complets de (X, d) est complète .*
4. *Toute partie complète est fermée .*
5. *Dans un espace métrique complet , il y a identité entre les parties fermées et les parties complètes .*

1.1.3 Compacité

Définition 1.1.25. *[15] Soit $(E; d)$ un espace métrique. Une famille d'ensemble $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.*

*Si $J \subset I$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement** de E si et seulement si $\bigcup_{j\in J} A_j = E$.*

Définition 1.1.26. *On dit qu'un espace topologique (X, τ) est **compact** s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini :*

$$\left(X = \bigcup_{i\in I} O_i\right) \Longrightarrow \left(\exists J \subset I, J fini, X = \bigcup_{i\in J} O_i\right).$$

Définition 1.1.27. *Un espace métrique(X, d) est **compact** si seulement si toute suite de points de X admet une valeur d'adhérence (c'est à dire contient une sous -suite convergente).*

Définition 1.1.28. *Un partie A d'un espace métrique (X, d) sera dite **compacte** si l'espace métrique (X, d) est compact.*

Proposition 1.1.9. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X alors : A compacte $\Rightarrow$ quelque soit le recouvrement de A par des ouverts de X , on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Définition 1.1.29. *[1] L'espace métrique (X, d) est dit **pré-compact** (ou totalement borné) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ fini par des ensembles de diamètres inférieurs à ε.*

Définition 1.1.30. *[15] Soient X un espace métrique et $A \subset X$.*
*On dit que A est une **partie pré-compacte** de X si $\forall \varepsilon > 0, A$ peut être recouverte par un nombre fini d'ensemble de diamètre inférieur ou égal à ε .*

Proposition 1.1.10. *[15] Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace métrique X :*

1. *X est compact .*
2. *X est pré-compact et complet .*
3. *Toute suite de X admet une sous suite convergente (on dit que X est **séquentiellement compact**).*

Théorème 1.1.2. *Si X est un espace métrique compact alors de toute suite de X on peut en extraire une sous suite convergente .*

Propriétés 1.1.3. *:*

1. *un compacte est toujours fermé .*
2. *un produit de compacts est un compact.*
3. *L'image d'un compact par une application continue est compact.*
4. *Toute réunion finie de parties compactes de X est une partie compacte*
5. *Toute intersection de parties compactes de X est une partie compacte .*

Proposition 1.1.11. *[12] Soit X un espace topologique compact alors toute partie fermé de X est compacte .*

Définition 1.1.31. *Soient X un espace topologique séparé et A une partie de X . A est **relativement compacte** dans X si $\bar{A}$ est compacte.*

Théorème 1.1.3. *Soit X un espace métrique complet . Une partie $A \subset X$ est relativement compacte si et seulement si elle est pré-compacte .*

Définition 1.1.32. *Soit X et Y deux espaces métriques, et $\Omega \subset X$ un ouvert.*
Une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $\overline{f(\Omega)}$ est compact.
Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.

Proposition 1.1.12. *Une application $f : X \to Y$ est compacte si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

Encore une fois, T est appelé un opérateur **compact** si $T(X)$ est un sous-ensemble compact de X, $T : X \longrightarrow X$ est appelé **totalement borné** si pour tout sous-ensemble borné S de X, $T(S)$ est un ensemble totalement borné de X. De plus, T est dit **complètement continu** s'il est continu et totalement borné.

Notez que chaque opérateur compact est totalement borné, mais l'inverse peut ne pas être vrai ; cependant, deux notions sont équivalentes sur un sous-ensemble borné de X.

1.2 Espaces vectoriels normés

1.2.1 Espace de Banach

Définition 1.2.1. *soit X un ensemble non vide , (+) et ($\cdot$) deux lois de compositions respectivement interne et externe sur X. le triplet $(X,+,\cdot)$ est appelé **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ si les propriétés suivantes sont vérifiés : $\forall x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,*

1. *$(X,+)$ est un groupe abélien .*
2. *$\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.*
3. *$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.*
4. *$(\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta x)$.*

Définition 1.2.2. *[1] On appelle **norme** sur E, toute application p de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in A$, on ait :*

i) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ *(Séparation)*

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$ *(Homogénéité)*

iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y).$ *(Inégalité du triangle)*

On note $p(x) = \|x\|$ ou encore $p(x) = \|x\|_E$; $p(x)$ s'appelle norme de x.

On dit alors le couple(E, p) est un espace vectoriel normeé(e.v.n).

Exemple 1.2.1. *Dans $\mathbb{K}^n$ on a les normes usuelles.*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Remarque 1.2.1. *[1]*

1. *si* $\lambda = 0$*, alors* $(ii) \Longrightarrow p(0) = 0$*.Donc* $i \cup ii$ *équivaut à*
$$p(0) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$
2. *Si on n'impose pas* (i)*, on dit que* p *est une semi-norme.*

Définition 1.2.3. *[13] Deux normes* $\|.\|$ *et* $\|.\|'$ *sur un même espace vectoriel réel ou complexe* $\mathbb{K}$ *sont* ***équivalentes*** *si et seulement s'il existe* $C_1, C_2 > 0$ *tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad C_1\|x\| \leq \|x\|' \leq C_2\|x\|.$$

Théorème 1.2.1. *Soit* X *un espace vectoriel de dimension finie ,* $dimX = n < \infty$ *:*

a) Toutes les normes sont équivalentes .

b) pour toute norme , les compacts sont les fermées bornés .

c) Si $(Y, \|.\|)$ *est un autre* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé (dimension quelconque), toute application linéaire de* X *dans* Y *est continue.*

Proposition 1.2.1. *[1] L'application* $d : (x, y) \to \|x - y\|$ *est une métrique sur* E *invariante par translation (c'est-à-dire* $d(x + a, y + a) = d(x, y)$*). On dit que* d *est la métrique associée à la norme.*

Théorème 1.2.2. ***(Riez)*** *: Dans un espace vectoriel normé de dimension infinie , la boule unité fermée n'est jamais compacte.*

Proposition 1.2.2. *En dimension finie l'espace normé est complet. mais n'est pas nécessairement complet en dimension infinie .*

Définition 1.2.4. *[1] On appelle* ***espace de Banach*** *un espace vectoriel normé complet.*

Corollaire 1.2.1. *Tout e.v.n de dimension finie est un espace de Banach.*

Dans ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2.2 Applications continues

Définition 1.2.5. *[1] Soient* (E_1, d_1) *et* (E_2, d_2) *deux espaces métriques et* $f : E_1 \to E_2$ *une application. On dit que* f *est* ***continue*** *au point* $a \in E_1$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta \text{ tel que } d_1(x, a) \leq \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon\ .$$

Définition 1.2.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques , f une application de X dans Y , on dit que f est continue au point $a \in X$ si et seulement si $f(a)$ est limite de $f(x)$ quand x tend vers a .f est continue sur X si f est continue en tout point de X.*

Définition 1.2.7. *[1] L'application $f : X \to Y$ entre les espaces métriques X et Y est dite **uniformément continue** pour tous x, y dans X si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon\ .$$

Théorème 1.2.3. *[2] Soient X, Y deux espaces métrique et f une application de X dans Y alors :*
Toute fonction f continue sur un espace métrique compacte X et à valeurs dans un espace métrique Y est uniformément continue.

Proposition 1.2.3. *Soient X et X deux espaces métriques , $x_0 \in X$ et f une application de X dans Y alors :*
f continue en $x_0 \Longleftrightarrow f$ transforme toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0 en une suite $(f(x_n)_n)$ qui converge vers $f(x_0)$.

Théorème 1.2.4. *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues respectivement sur X et Y alors $g \circ f : X \to Z$ est une application continue sur X.*

Lemme 1.2.1. *Soient X, Y deux espaces métrique et f une application de X dans Y alors :*
f uniformément continue sur $X \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0 / \forall A \subset X$ et $\sigma(A) \leqslant \alpha \Rightarrow \sigma(f(A)) \leqslant \varepsilon$
où σ désigne le diamètre d'un ensemble.

Corollaire 1.2.2. *Les trois condition ci-dessous sont équivalentes.*

i) $f : X \to Y$ est continue en tout point de X.

ii) pour tout ouvert v de $(Y, d_Y), F^{-1}(v)$ est un ouvert de (X, d_X).

iii) Pour tout fermé w de $(Y, d_Y), F^{-1}(w)$ est un fermé de (X, d_X).

Remarque 1.2.2. *Si f est uniformément continue sur X, alors f est continue sur X. La réciproque est fausse.*

Définition 1.2.8. *[2] Soient X et Y deux espaces topologiques et f une application de X dans Y :*
*On dit que f **homéomorphisme** si f et f^{-1} bijectives et sont des applications continues . (où $f^{-1} : Y \to X$).*

Théorème 1.2.5. *Soit f une bijection continue d'un espace topologique compact X dans un espace topologique séparé Y alors f est un homéomorphisme.*

Définition 1.2.9. *[1] Une application $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ est dite **lipschitzienne** s'il existe une constante $k > 0$ telle que , pour tout $(x, y) \in X^2$*

$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant kd_1(x, y)$$

Remarque 1.2.3. *Toute application lipschitzienne est continue mais la réciproque est fausse.*

Théorème 1.2.6. *Toute application lipschitzienne est continue et en particulier , uniformément continue en ce sens que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que , pour tous $x, y \in X, d_X(x, y) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Définition 1.2.10. *[15] On dit que $f : (E, d) \to (E, d)$ est **contractante** s'il existe $k < 1$ tel que :*

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \ .$$

1.2.3 Algèbres de Banach

Définition 1.2.11. *Un espace vectoriel X s'appelle algèbre , s'il muni d'une troisème opération ,nommée multiplication et satisfait aux axiomes suivants*

1. *$(xy)z = x(yz)$.*
2. *$x(y + z) = xy + xz$; $(y + z)x = yx + zx$.*
3. *$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.*
4. *S'il existe un élément $e \in X$ tel que $ex = xe = x$,quelque soit $x \in X$, on dit que e est unité de l'algèbre X et que X est une algèbre avec* `unité`*.*[1]
5. *Si la multiplication est commutative ,c-à-d si elle satisfait à l'axiome $xy = yx$ on dit que X est algèbre commutative .*

Toutes les algèbres considérées dans ce complètement seront des algèbres sur le corps $\mathbb{C}$ (des nombres complexes).

Définition 1.2.12. *Un espace normé X s'appelle algèbre normé, s'il est une algèbre avec unité qui vérifier en plus des deux axiomes :*

6. *$\|e\| = 1$.*
7. *$\|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$.*

1. l'unité d'une algèbre est toujours unique , car si un élément e' jouissait la propriété $ee' = e = e'$.

Si une algèbre normée X est complète (c-a-d est un espace de Banach), on l'appelle algèbre de Banach .

Une application $F : X \longrightarrow Y$ s'appelle homomorphisme de l'algèbre X dans l'algèbre Y , si elle vérifie les conditions :

$$F(x+y) = Fx + Fy. \tag{1.1}$$
$$F(\alpha x) = \alpha F(x) \tag{1.2}$$
$$F(xy) = Fx.Fy \tag{1.3}$$

Deux algèbres X et Y sont dites isomorphes , s'il existe une application bijective F de X sur Y vérifiant les condition (1.1) et (1.3).

Deux espaces normés X et Y sont dites isométriques , s'il existe une application bijective $F : X \longrightarrow Y$ vérifiant les conditions (1.1) et (1.2) et tel que

$$\|Fx\|_Y = \|x\|_X$$

.

Définition 1.2.13. *Deux algèbres de Banach X et Y sont dites isométriquement isomorphes , s'il existe un isomorphisme d' algèbre $F : X \longrightarrow Y$ qui est en même temps une isométrie de X et Y , considérés comme espaces normés .*

Exemples :

1. Le corps $\mathbb{C}$: Les nombres complexe fournissent le plus simple exemple d'algèbre de Banach si l'on introduit une norme par la formule

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ (z = x + iy).$$

On définit la multiplication de deux complexes dans $\mathbb{C}$ par :
Soit a, a', b, b' quatre réels et $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ les nombres complexes,

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Les nombres complexes forment un corps que l'on note $\mathbb{C}$;pour tous les éléments de C excepte zéro est définir la division , c-à-d l'opérateur inverse de la multiplication. Alors $\mathbb{C}$ est une algèbre normée qui possède la structure de corps .

2. L'algèbre $\mathbb{C}_T$: soit E un espace topologique de Hausdorff compact. Désignons par $\mathbb{C}_T$ l'espace vectoriel constitué par l'ensemble des fonctions complexes continues

$x(t)$ définies sur E muni des opérations habituelles donnant la somme de deux fonctions et le produit d'une fonction par un nombre , ainsi que la norme

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|.$$

L'espace $\mathbb{C}_T$ est fourni par l'espace $\mathbb{C}^n = \{(z_1, ..., z_n)\}$ des vecteurs complexes à n dimensions , c-à-d des fonctions sur un espace de n points . L'addition , la multiplication par un nombre et la multiplication des éléments de $\mathbb{C}^n$ se réalisent en coordonnées , la norme sur C^n est définie par la formule

$$\|z\| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

L'espace $\mathbb{C}_T$ est une algèbre de Banach commutative ayant pour unité la fonction $e(t) = 1$ .la vérification du fait que tous les axiomes sont évidents .

3. L'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions analytiques dans un disque : Désignons par $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions $x(z)$ d'une variable complexes z définies et continues sur le disque $K = \{z : |z| \leq 1\}$ et analytiques à l'intérieure de ce disque .
On définit la multiplication et on introduit une norme par la formole

$$\|x\| = \max_{|z| \leq 1} |x(z)|.$$

Ceci fait de $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative avec unité.

1.3 Quelques espaces fonctionnels

1.3.1 Espaces des fonctions continues

Définition 1.3.1. *Soit X un espace métrique et $\mathbb{K} = \{\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}\}$. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

$$C(X, \mathbb{K}) = \{f : X \mapsto \mathbb{K}, continue\}$$

$$et \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{K}} |f(x)|.$$

Alors $(C(X, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.3.1. *Notons par $(BC)(I)$ l'espace de Banach des fonctions réelles définies et continues sur un intervalle borné et fermé I, muni de la norme :*

$$\|x\| = \max_{t\in I}|x(t)| \ .$$

Et par (BC) l'espace de Banach des fonctions continues bornées définies sur $\mathbb{R}_+$, muni de la norme :

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|.$$

.

Définition 1.3.2. *Le sous - espace de $C(X,\mathbb{K})$ des fonctions qui s'annulent à l'infini est noté par $C_0(X,\mathbb{K})$. En particulier les fonctions de $C_0(X,\mathbb{K})$ sont bornées . On note aussi que si X est compact ,$C_0(X) = C(X)$.*

Convergence uniforme :

Définition 1.3.3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,\mathbb{K})$ et $f : X \mapsto \mathbb{R}$ telle que*

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

*alors $f \in C(X,\mathbb{K})$ **Convergence uniforme** ,i.e.*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|f_n - f\| \leqslant \epsilon.$$

Notons que

$$\|f_n - f\| \leqslant \epsilon \Longleftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon, \forall x \in \mathbb{K}.$$

D'ou la convergence uniforme implique la convergence simple.
La réciproque n'est pas vraie en générale.

Lemme 1.3.1. ***(Dini)*** *Soit X un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,\mathbb{R})$ une suite monotone. Supposons que f_n converge simplement vers $f \in C(X,\mathbb{R})$ Alors la convergence et uniforme.*

Théorème 1.3.1. *Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $C_0(X,\mathbb{K})$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ alors f est continue .*

Théorème 1.3.2. ***(Stone -Weierstrass)*** *Soit X un espace métrique compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $A \subset C(X,\mathbb{K})$ tel que :*

(i) A est un sous-algèbre auto -adjointe (c'est-à-dire , $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$).

(ii) *A contient les fonctions constantes.*

(iii) *A sépare les points de X (c'est-à-dire , pour tous $x, y \in X, x \neq y$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$).*

alors A est dense dans $C(X, \mathbb{K})$ pour la topologie de la norme $\|.\|_\infty$. Autrement dit, pour toute fonction $f \in C(X, \mathbb{K})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge uniformément vers f.

1.3.2 Espaces L^p

Pour $a \geq 1$, on considère

$$L^a = \left\{ x = (x_i)_i \in A^N \textit{ tell que } \sum_{t=0}^{\infty} |x_i^a| < \infty \right\}.$$

L^1 et L^2 sont les espaces les plus importants (usuels).

Proposition 1.3.1. *[1] :*

1. *L'espace L^a est un espace vectoriel de dimension infinie.*
2. *Pour tout $a \geq 1$, l'espace L^a muni de l'application*

$$x \longrightarrow \|x\| = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^a| < \infty \right\}.$$

est un espace de Banach.

Définition 1.3.4. *Étant donné deux points $\{a, b\} \subset E$, on définit le **segment** reliant a à b comme suit :*

$$[a, b] := \{(1 - t)a + tb; t \in [0, 1]\}.$$

Définition 1.3.5. *[18] $C \subset E$ est **convexe** si : $\forall x, y \in C, \forall t \in]0, 1[$*

$$(tx + (1 - t)y) \in C.$$

Exemple 1.3.1. *Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.*

Définition 1.3.6. *[18] Soit C un convexe non vide de X et $f : C \to \mathbb{R}$.*

1- *f est dite **convexe** sur C si $\forall t \in]0, 1[, \forall x, y \in C$.*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

2- *f est dite **strictement convexe** sur C si $\forall t \in]0, 1[, \forall x, y \in C, x \neq y$.*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

*3- f est dite **fortement convexe** sur C s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0,1[, \forall x, y \in C, x \neq y$.*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t)\|x - y\|^2.$$

*On dit aussi que f est α-**convexe.***

Remarque 1.3.2. *:*

1. *α-convexe $\Rightarrow$ strictement convexe $\Rightarrow$ convexe.*
2. *f est α-convexe sur C si et seulement si $f - \frac{1}{2}\alpha\|.\|^2$ est convexe sur C.*

Définition 1.3.7. *[18] Soit P une partie de X , l'intersection de convexes étant convexe , on peut parler du plus petit convexe contenant P , qui est donc l'intersection de tous les convexes contenant P . C'est ce que l'on appelle **l'enveloppe convexe** de P .On la note :*

$$convP := \cap\{C, C \text{ est un convexe contenant } P\}.$$

Définition 1.3.8. *On appelle **combinaison linéaire** de X , un élément x de X de la forme*

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$$

Où $n \in \mathbb{N}^*, t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}$, et les vecteurs $x_i \in X$.

Proposition 1.3.2. *:*

1. *Un ensemble est convexe si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments .*
2. *Si $P \subset X$, alors $convP$ est l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de P :*

$$convP = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, t \geq 0, x_i \in P, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.3.9. *Soit X un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{M} \subset P(\Omega)$ **tribu** (ou σ-**algèbre**) sur X si, c'est satisfait les conditions pour les réunions dénombrables :*

i) $X \in \mathcal{M}$.

ii) Si $A \in \mathcal{M}$, alors $\complement_X^A \in \mathcal{M}$ (où $\complement_X^A$ est complémentaire de A dans X).

iii) Si $A_n \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Lemme 1.3.2. *Soit* $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ *une famille quelconque de tribu sur* X *. Alors* $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ *est encore une tribu sur* X*.*

Définition 1.3.10. *Les éléments de* $\mathcal{M}$ *sont appelés les parties mesurables de* X *. On dit que* $(X, \mathcal{M})$ *est un* ***espace mesurable*** *.*

Définition 1.3.11. *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *un espace mesurable .*
On appelle ***mesure(mesure positive)*** *sur* X *une application* $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$ *.*
2. *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *est une suite disjointe, alors*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On dit que (X, M, μ) *est un* ***espace mesuré****.*

Définition 1.3.12. *Soit* $(X, \mathcal{M})$ *et* $(Y, \mathcal{M}')$ *deux espaces mesurables . On dit qu'une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est* ***mesurable*** *(pour les tribus* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}'$ *) si*

$$\forall B \in \mathcal{M}', f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.3.13. *Soit* (X, M, μ) *un espace mesuré .*
Un ensemble $N \in M$ *est* μ***-négligeable*** *si* $\mu(N) = 0$ *; i,e : s'il est de* μ*-mesure nulle.*

Définition 1.3.14. *Soit* (X, M, μ) *un espace mesuré .*
On dit qu'une propriété est vraie ***presque partout*** *par rapport à* μ*, (*μ*-p.p) si elle est vraie sur* $X\backslash N$ *, où* N *est un ensemble* μ*-négligeable.*

Corollaire 1.3.1. *Soient* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *deux fonctions mesurables . Alors* $f + g, fg, min(f, g)$ *et* $max(f, g)$ *sont mesurables.*

Théorème 1.3.3. *[14] ((* ***La convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit* $(f_n)_n$ *une suite des fonctions de* L^1*. On suppose que*

1. $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω*.*
2. *Il existe une fonction* $g \in \mathcal{L}^1$ *telle que pour chaque* n_1 $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p sur* Ω*.*

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$*.*

Définition 1.3.15. *On dit qu'une fonction mesurable* $f : \mathit{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***intégrable*** *au sens de Lebesgue si*

$$\int_{\mathit{\Omega}} |f| < \infty.$$

Définition 1.3.16. *[14] soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,l'espace $\mathcal{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonction mesurable et intégrable sur Ω.On note*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)|dx.$$

On définit en suite pour tout $1 \leqslant p < \infty$, l'espace :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } \|f\|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}.$$

que l'on munit de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}= \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\ f \text{ mesurable et } \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que : } |f| \leqslant c\ p.p\}.$$

on note :

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\infty}}(\Omega) = \inf\{c, |f(x)| \leqslant c \quad p.p\}.$$

Théorème 1.3.4. *[3] Soient $X \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble mesurable , $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur X , et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur X et*

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

Proposition 1.3.3. *:*

1) *Si $f \leqslant g$, alors $\int_X f d\mu \leqslant \int_X g d\mu$.*
2) *Si $A \subset B$ alors $\int_A f d\mu \leqslant \int_B f d\mu$.*
3) *Si C est une constante $0 \leqslant C \leqslant \infty$ alors $\int_X C f d\mu = C \int_X f d\mu$.*
4) *Si $f(x) = 0$ pour tous $x \in X$,alors $\int_X f d\mu = 0$,même si $\mu(X) = \infty$.*
5) *Si $\mu(X) = 0$, alors $\int_X f d\mu = 0$ même si $f = \infty$.*
6) *Si f est une fonction intégrable , alors $|f|$ est aussi intégrable et on a : $|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu$.*

Définition 1.3.17. *Soit $p \in [1, +\infty]$. On appelle **exposant conjugué** de p (noté q dans toute la suite) le nombre $q \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Proposition 1.3.4. *[14] **(Inégalité de Holder)** $1 \leq p < \infty$ soient $f \in L^p(\Omega), g \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. alors $f, g \in L^1$*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Corollaire 1.3.2. *Soit* $f \in L^p(X)$. $g \in L^q(X)$. *Alors* $f.g \in L^r(X)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

Corollaire 1.3.3. ***(Inégalité de Minkowski)*** *pour* f, g *mesurables :*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Corollaire 1.3.4. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz)*** *Soit* $f, g \in \mathcal{L}^2(X, M, \mu)$ *alors* $f.g \in \mathcal{L}^1(X, M, \mu)$

$$\int_X |f.g| d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_X |g|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

Lemme 1.3.3. *[3]* ***(Inégalité de Fatou)*** *Soit* $(f_n)_n, f_n : X \to \mathbb{R}_+$ *une suite de fonctions mesurables Alors*

$$\int (\liminf_{n \to +\infty} f_n) d\mu \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \int f_n d\mu.$$

Théorème 1.3.5. *[14]* ***(Fubini)*** *On suppose que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Alors , pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_Y(\Omega) \quad et \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_X(\Omega_1).$$

De même , pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_X(\Omega_1) \quad et \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_Y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Définition 1.3.18. *Une fonction* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite de* ***carathéodory*** *si :*

i) $t \to f(t, y)$ *est mesurable* $\forall y \in \mathbb{R}$.

ii) $y \to f(t, y)$ *est continue* $\forall t \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Théorème Ascoli-Arzèla

Théorème 1.3.6. *Soient* X *un espace métrique compact ,* Y *un espace de Banach et* $H \subset C(X, Y)$ *une partie muni de la norme* $\|.\|_\infty$. *Alors* H *est relativement compact si et seulement si :*

1. *H est* ***uniformément bornée****, i.e : il existe une constante* $\delta > 0$ *telle que :* $\forall t \in X, \forall f \in H$ *on a*
$$\|f\|_\infty = \sup_{f \in H} |f(t)| \leq \delta.$$
2. *H est* ***équicontinu****, i.e :*
$$\forall \epsilon > 0, \exists v \in \mathcal{V}_{(t)},\ s \in v \Longrightarrow \|f(s) - f(t)\|_Y \leq \epsilon, \forall f \in H.$$
3. *L'ensemble* $\{f(t)\ ,\ f \in H\}$ *est relativement compact pour tout* $t \in X$.

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

Définition 1.4.1. *[9] Soit E un espace de Banach et* $T : E \to E$. *On dit que* $x \in E$ *est un* ***point fixe*** *de l'application T si* $T(x) = x$.

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.4.1. *[9] T une application d'un espace de Banach E dans lui même , si T est une contraction alors T admet un point fixe unique dans* E, $(i.e)$ *il existe unique* $u \in E$ *tel que :* $Tu = u$.

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.4.2. *[17] Soit C un sous-ensemble non vide fermé convexe d'un espace vectoriel normé E. Alors toute application compacte et continue*
$F : C \longrightarrow C$ *a au moins un point fixe.*

Théorème 1.4.3. *[9]****(Alternative non linéaire de Leray-Schauder)***
Soit E un espace de Banach, U un ouvert convexe borné, non vide de E et soit
$T\ :\ \bar{U} \longrightarrow E$ *est complètement continue, alors :*

(i) *T admet un point fixe dans U, ou bien*

(ii) *Il existe* $y \in \partial U$ *et* $y = \lambda T(y)$ *pour* $\lambda \in]0, 1[$.

1.4.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 1.4.4. *([16]) Soit S un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'un espace de Banach X , et soient* $A, B : S \longrightarrow X$ *deux opérateurs tel que :*

(a) A *est contraction .*

(b) B *est complètement continue .*

(c) $Ax + By \in S \; \forall x, y \in S$ *.*

Alors l'équation de l'opérateur

$$Ax + Bx = x \tag{1.4}$$

a une solution dans S*.*

Chapitre 2

Théorème du point fixe hybride

Introduction

Il est bien connu que l'important théorème du point fixe de Krasnoselskii [1.4.4] qui combine le théorème de point fixe métrique de Banach avec le théorème de point fixe topologique de Schauder dans un espace de Banach de nombreuses applications pour équations intégrales non linéaires. De nombreux résultats ont été obtenus pour améliorer et affaiblir les hypothèses de théorème du point fixe de Krasnoselskii à plusieurs auteurs (voir [2.2.4] et les références qu'il contient). L'étude des équations intégrales non linéaires dans les algèbres de Banach a été initiée par Dhage [2.2.5] via des théorèmes de point fixe.

Dans ce chapitre, nous définissons un nouveau concept de applications $\mathcal{P}$-Lipschitziennes qui est plus faible que les applications $\mathcal{D}$-Lipschitziennes et prouvons quelques théorèmes de point fixe du Dhage dans des conditions plus faibles. Enfin, nous donnons quelques remarques importantes liées aux théorèmes de point fixe de Dhage . ([5]- [6]-[7]-[8])

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1. *On appel **$\mathcal{D}$-fonction** toute fonction semi-continue supérieure et non décroissante $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, si $f(0) = 0$. La classe de toutes les $\mathcal{D}$-fonctions sur $\mathbb{R}_+$ est notée par $\mathcal{D}$.*

Définition 2.1.2. *On appel **$\mathcal{L}$-fonction** toute fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, si $\phi(0) = 0$, et pour tout $s > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < \phi(r) \leq s$ pour tout $r \in [s; s+\delta]$. la classe de toutes les $\mathcal{L}$-fonctions est notée par $\mathcal{L}$.*

Définition 2.1.3. *On appel $\mathcal{DL}$-**fonction** toute fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, si elle est $\mathcal{L}$-fonction ainsi que $\mathcal{D}$-fonction. La classe de toutes les $\mathcal{DL}$-fonction est notée $\mathcal{DL}$.*

Définition 2.1.4. *([8]) Soit l'application T sur un espace de Banach X avec la norme $\|.\|$ est dite **contraction non linéaire** si elle satisfait*

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|) \tag{2.1}$$

pour tout $x, y \in X$, où ϕ est une fonction réelle continue telle que $\phi(r) < r, r > 0$.

Définition 2.1.5. *([7]) Soit l'application T sur un espace de Banach X est appelé $\mathcal{D}$-**Lipschitzienne** s'il existe une fonction continue et non décroissante $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|). \tag{2.2}$$

pour tout $x, y \in X$ où $\phi(0) = 0$.

Il a montré dans [7] que chaque application Lipschitzienne est une $\mathcal{D}$-Lipschitzienne, mais l'inverse peut ne pas être vrai.

Nous introduisons maintenant un nouveau concept de l'application $\mathcal{P}$-Lipschitzienne qui est plus faible que le concept de l'application $\mathcal{D}$-Lipschitzienne.

Définition 2.1.6. *Soit l'application T sur un espace de Banach X est appelé $\mathcal{P}$-**Lipschitzienne** s'il existe une fonction non décroissante $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\|Tx - Ty\| \leq \phi(\|x - y\|). \tag{2.3}$$

pour tout $x, y \in X$.

Parfois, nous appelons la fonction ϕ une $\mathcal{P}$fonction de T sur X. Notez que chaque application $\mathcal{D}$-Lipschitzienne est une $\mathcal{P}$-Lipschitzienne , mais l'inverse ne doit pas être vrai.

Exemple 2.1.1. *Soit $X = \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow X$ définit par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \ , & pour \ x \ \geq 0 \\ \dfrac{1}{1-x} \ , & pour \ x < 0 \end{cases}$$

et $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définit par :*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^t \ , & pour \ t \ > 0. \\ 2 \ , & pour \ t = 0. \end{cases}$$

Nous considérons les deux cas suivants :

Cas 1 : *Lorsque* $x \geq 0$ *:*

$$|fx - fy| = |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \leq e^{|x-y|} \leq \phi(|x - y|)$$

Cas 2 : *Lorsque* $x < 0$ *:*

$$|fx - fy| = \left| \frac{1}{1 + |x|} - \frac{1}{1 + |y|} \right| \leq |x - y| \leq e^{|x-y|} \leq \phi(|x - y|).$$

Ainsi, nous concluons que $\|fx - fy\| \leq \phi(\|x - y\|) \ \forall x, y \in X$. *On observe également que :*

- ϕ *n'est pas continue à* $t = 0$ *,*
- ϕ *ne diminue pas,*
- $\phi(0) \neq 0$

Ainsi, f *est une application* $\mathcal{P}$*-Lipschitzienne mais n'est pas* $\mathcal{D}$ *Lipschitzienne. Par conséquent, chaque application* $\mathcal{D}$ *Lipschitzienne est une application* $\mathcal{P}$*-Lipschitzienne, mais l'inverse n'a pas d'être vrai.*

Remarque 2.1.1. *Notez qu'à partir de la définition [2.1.6] et de l'exemple [2.1.1], il est clair que les implications inverses dans le diagramme suivant n'a pas besoin d'être vrai.*

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\textit{contration}} & \Longrightarrow & \boxed{\textit{Lipschitzienne}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \boxed{\mathcal{P}\textit{-Lipschitzienne}} & \Longleftarrow & \boxed{\mathcal{D}\textit{-Lipschitzienne}} \end{array}$$

2.2 Théorème de Dhage

Théorème 2.2.1. *[6] Soit $T : X \longrightarrow X$ une contraction non linéaire sur un espace de Banach X. Alors T admet un point fixe unique.*

Mais les théorèmes de point fixe de Boyd – Wong dans sa forme originale sont les suivants.

Théorème 2.2.2. *[8] Soit (X, ρ) un espace métrique complet, et soit $T : X \longrightarrow X$ satisfait :*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \psi(\rho(x, y)), \text{ pour } x, y \in X. \tag{2.4}$$

où $\psi : \overline{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la semi-continue à partir de la droite supérieure sur $\overline{P}$, et vérifie $\psi(t) < t$ pour $t \in \overline{P} - \{0\}$, où $P = \{\rho(x, y) : x, y \in X\}$ et $\overline{P}$ désigne la fermeture de P. Alors T admet un point fixe $x_0 \in X$ et $T^n(x) \longrightarrow x_0$, pour chaque $x \in X$.

Théorème 2.2.3. *[8] Supposons que (X, ρ) est un espace métrique complet et que $T : X \longrightarrow X$ satisfait :*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \psi(\rho(x, y)), \text{ pour } x, y \in X. \tag{2.5}$$

où $\psi : \overline{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie $\psi(t) < t$ pour $t \in \overline{P} - \{0\}$, où $P = \{\rho(x, y) : x, y \in X\}$ et $\overline{P}$ désigne la fermeture de P. Alors T admet un point fixe $x_0 \in X$ et $T^n(x) \longrightarrow x_0$, pour chaque $x \in X$.

En 2003, Dhage [[7], Théorème 2.3] a prouvé le théorème de point fixe suivant.

Théorème 2.2.4. *([7]) Soit S un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'une algèbre de Banach X et soient $A : X \longrightarrow X$, $B : S \longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :*

(a) A est $\mathcal{D}-$lipschitzienne ;

(b) B est complètement continu ;

(c) $x = AxBy \Rightarrow x \in S, \ \forall y \in S$.

Alors l'équation de l'opérateur

$$AxBx = x. \tag{2.6}$$

a une solution, chaque fois que $M\phi(r) < r, r > 0$, où $M = B(S)$.

Preuve : Soit $y \in S$ et l'application $A_y : X \longrightarrow X$ définit par :

$$A_y(x) = AxBy \ ; \ x \in S.$$

Ensuite nous avons

$$\begin{aligned}\|A_y x_1 - A_y x_2\| &\leq \|Ax_1 - Ax_2\|\|By\|,\\ &\leq M\phi(\|x_1 - x_2\|)\ ,\quad x_1, x_2 \in X\ .\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le théorème [2.2.3], il existe un unique point $x^* \in X$ tel que :

$$A_y(x^*) = x^*.$$

■

En 2005, Dhage [[5], théorème 2.1] a amélioré le théorème [2.2.4] de la manière suivante :

Théorème 2.2.5. *[5] Soit S un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'une algèbre de Banach X et soient $A : X \longrightarrow X$, $B : S \longrightarrow X$ deux opérateurs tels que :*

(a) A est $\mathcal{P}-$lipschitzienne ;

(b) B est complètement continu ;

(c) $x = AxBy \Rightarrow x \in S,\ \forall y \in S$.

Alors l'équation d'opérateur (2.6) a une solution, chaque fois que $M\phi(r) < r, r > 0$, où $M = B(S)$.

Preuve : Soit $y \in S$ et l'application $A_y : X \longrightarrow X$ définit par :

$$A_y(x) = AxBy\ ;\ x \in S.$$

En suivant le théorème [2.2.4], nous pouvons montrer qu'il existe un unique point $x^* \in X$ tel que :

$$A_y(x^*) = x^*\ .$$

■

Corollaire 2.2.1. *Soit S un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'une algèbre de Banach X et soit $A : X \longrightarrow X, B : S \longrightarrow X$ sont deux opérateurs tels que :*

(a) A est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz α,

(b) B est complètement continu ,

(c) $x = AxBy \Rightarrow x \in S$, pour tout $y \in S$.

Alors l'équation d'opérateur (2.6) a une solution, chaque fois que $\alpha M < 1$,
où $M = \|B(S)\|$.

2.3 Quelques extensions du théorème de Dhage

Dans cette section, en relâchant l'hypothèse du théorème principal de Dhage [[5]], nous démontrons le théorème de point fixe suivant impliquant trois opérateurs sur une algèbre de Banach.

Théorème 2.3.1. *Soit S un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'une algèbre de Banach X et soient $A, C : X \longrightarrow X$ et $B : S \longrightarrow X$ trois opérateurs tels que :*

(a) A et C sont $\mathcal{P}$-Lipschitzienne ;

(b) B est complètement continu ;

(c) Si $x = AxBy + Cx$ alors $x \in S, \forall y \in S$.

Alors l'équation de l'opérateur $AxBx + Cx = x$ a une solution, chaque fois que $M\phi_A(r) + \phi_C(r) < r, r > 0$, où $M = B(S)$.

Preuve : : Soit $y \in S$ et une application $A_y : X \longrightarrow X$ définit par

$$A_y(x) = AxBy + Cx \ , \ x \in X \ .$$

Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} \|A_y(x_1) - A_y(x_2)\| &\leq \|Ax_1 - Ax_2\|\|By\| + \|Cx_1 - Cx_2\|. \\ &\leq M\phi_A(\|x_1 - x_2\|) + \phi_C(\|x_1 - x_2\|) \ , x_1, x_2 \in X \ . \end{aligned}$$

Ceci montre que A_y est une contraction non linéaire sur X, puisque $M\phi_A(r)+\phi_C(r) < r, r > 0$. Par conséquent, d'après le théorème [2.2.3], il y a un unique point $x^* \in X$ tel que

$$A_y(x^*) = Ax^*By + Cx^* = x^*.$$

Donc par (c), on a que $x^* \in S$. On définit une application $N : S \longrightarrow S$ par

$$Ny = z \ .$$

où $z \in X$ est l'unique solution de l'équation

$$z = AzBy + Cz \ , \ y \in S \ .$$

Nous montrons que N est continu. Soit $\{y_n\}$ une suite convergente dans S vers un point y . Puisque, S est fermé, $y \in S$. Maintenant :

$$\begin{aligned} \|Ny_n - Ny\| &= \|AN(y_n)By_n - AN(y)By\| + \|C(Ny_n) - C(Ny)\| \\ &\leq \|AN(y_n)By_n - AN(y)By_n\| + \|AN(y)By_n - AN(y)By\| + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|C(Ny_n) - C(Ny)\| \\ &\leq \|AN(y_n) - AN(y)\|\|By_n\| + \|AN(y)\|\|By_n - By\| + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|C(Ny_n) - C(Ny)\| \\ &\leq M\phi_A(\|Ny_n - Ny\|) + \|ANy\|\|By_n - By\| + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \phi_C(\|Ny_n) - C(Ny\|) \end{aligned}$$

Puisque, $M\phi_A(r) + \phi_C(r) < r, r > 0$, il existe $k \in [0,1]$ tel que
$M\phi_A(r) + \phi_C(r) = kr$ et

$$\|Ny_n - Ny\| \leq k(\|Ny_n - Ny\|) + \|ANy\|\|By_n - By\|.$$

En prenant la limite supérieure comme $n \longrightarrow \infty$ des deux côtés, on obtient

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|Ny_n - Ny\| \leq k \limsup_{n\longrightarrow\infty}(\|Ny_n - Ny\|) + \|ANy\|(\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|By_n - By\|).$$

Ceci montre que $\lim_n \|Ny_n - Ny\| = 0$ et par conséquent N est continu sur S .Nous montrons ensuite que N est un opérateur compact sur S. Maintenant, pour tout $z \in S$ nous avons :

$$\begin{aligned} \|Az\| &\leq \|Aa\| + \|Az - Aa\| \\ &\leq \|Aa\| + \alpha\|z - a\| \\ &\leq c \end{aligned}$$

où $c = \|Aa\| + diam(S)$ pour certains fixes $a \in S$.
Soit $\epsilon > 0$ donné. Puisque B est complètement continu, $B(S)$ est totalement borné. Il existe donc un ensemble $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ dans S tel que :

$$B(S) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(\omega_i),$$

où $\omega_1 = By_1, \delta = \left(\frac{1 - (\alpha M + \beta)}{c}\right)\epsilon$ et $B_\delta(\omega_i)$ est une boule ouverte dans X de centre

ω_i et de rayon δ. Par conséquent, pour tout $y \in S$ nous avons un $y_k \in Y$ tel que :

$$\|By - By_k\| < \left(\frac{1-(\alpha M+\beta)}{c}\right)\epsilon.$$

Aussi, nous avons

$$\begin{aligned}
\|Ny - Ny_k\| &\leq \|AzBy - Az_kBy_k\| + \|Cz - Cz_k\| \\
&\leq \|AzBy - Az_kBy\| + \|Az_kBy - Az_kBy_k\| + \|Cz - Cz_k\| \\
&\leq \|Az - Az_k\|\|By\| + \|Az_k\|\|By - By_k\| + \|Cz - Cz_k\| \\
&\leq (\alpha M+\beta)\|z - z_k\| + \|Az\|\|By - By_k\| \\
&\leq \frac{c}{1-(\alpha M+\beta)}\|By - By_k\| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour chaque $y \in S$ et donc :

$$N(S) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(z_i).$$

où $z_i = N(y_i)$. En conséquence, $N(S)$ est totalement borné. Puisque N est continu, donc c'est un opérateur compact sur S. Maintenant on applique le théorème de point fixe de Schauder donne que N admet point fixe dans S.

Ensuite, par la définition de N , on a :

$$x = Nx = A(Nx)Bx + C(Nx) = AxBx + Cx.$$

ainsi, l'équation d'opérateur $x = AxBx + Cx$ a une solution dans S . ∎

Remarque 2.3.1. *Puisque chaque application Lipschitzienne et $\mathcal{D}$-Lipschitzienne est $\mathcal{P}$-Lipschitzienne, nous obtenons les théorèmes de point fixe étudiés dans [7] comme un cas particulier de théorème [2.3.1], qu'est utile pour obtenir les solutions de certains équations différentielles et intégrales.*

Proposition 2.3.1. *Soit S un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'une Algèbre de Banach X telle que $S = \{y \in X : \|y\| \leq r\}$ pour certains nombre réel $r > 0$. Soient $A, C : X \longrightarrow X$, $B : S \longrightarrow S$ trois opérateurs vérifiant l'hypothèse (a) - (b) du théorème [2.3.1]. De plus, si :*

$$\|x\| \leq \left\|\left(\frac{I-C}{A}\right)x\right\|, \qquad \textit{pour tout } x \in X \text{ , } \textit{Alors } x \in S.$$

Chapitre 3

Applications aux équations intégrales non linéaires

Introduction

Dans cette chapitre, nous prouvons certaines applications de théorèmes de point fixe hybrides abstraits à équations intégrales non linéaires pour prouver l'existence des résultats sous certaines géométries hybrides et les conditions topologiques. Cependant, l'étude peut être étendue à d'autres équations intégrales non linéaires avec des modifications évidentes. Les détails du différentiel hybride non linéaire et des équations intégrales avec différentes perturbations.

3.1 Équations intégrales non linéaires de Volterra

3.1.1 Résultats principaux :

Soit un intervalle fermé et borné $J = [0, a]$ de la droite réelle $\mathbb{R}$, considérons l'équation intégrale hybride non linéaire de type Volterra,

$$x(t) = [f(t, x(t))] \left(\int_0^t g(s, x(s))ds \right) . \tag{3.1}$$

pour tout $t \in J$, où $f, g : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues .

On place le problème (3.1) dans l'espace des fonctions continues $C(J; \mathbb{R})$ de valeur réelle sur J .On définit une norme $\|.\|$ dans $C(J; \mathbb{R})$ par

$$\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|. \tag{3.2}$$

Clairement, $C(J,\mathbb{R})$ un espace de Banach par rapport à la norme ci-dessus qui est aussi algèbre de Banach par rapport à la multiplication " $\cdot$ " définie par

$$(x \cdot y)(t) = x(t) \cdot y(t),\ t \in J. \tag{3.3}$$

Nous considérons l'ensemble d'hypothèses suivant :

(A) La fonction f bornée sur $J \times \mathbb{R}$ avec M_f lié et il existe une $\mathcal{D}$-fonction ϕ telle que
$$|f(t,x) - f(t,y)| < \phi(|x-y|).$$
pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$.

(B) La fonction g bornée sur $J \times \mathbb{R}$ avec M_g lié .

Théorème 3.1.1. *Supposons que les hypothèses (A) et (B) sont valables. Alors l'équation intégrale hybride (3.1) a une solution sur J.*

Preuve : Soit $X = C(J,\mathbb{R})$. On définit un sous-ensemble S de X par

$$S = \{x \in X |\ \|x\| \leq K\}, \tag{3.4}$$

où $K = M_f + M_g a$.

Clairement, S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'un espace de Banach X. Nous définissons les deux opérateurs $\mathcal{A} : X \longrightarrow X$ et $\mathcal{B} : S \longrightarrow X$ par

$$\mathcal{A}x(t) = f(t, x(t)),\ t \in J. \tag{3.5}$$

et

$$\mathcal{B}x(t) = \int_0^t g(s, x(s))ds,\ t \in J. \tag{3.6}$$

Alors l'équation intégrale hybride(3.1) équivaut à l'équation de l'opérateur

$$\mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}x(t) = x(t),\ t \in J. \tag{3.7}$$

Nous montrons que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les conditions du théorème (2.2.5).

Cela sera montré dans une série d'étapes suivantes :

Étape 1 : $\mathcal{A}$ est borné et MK-contraction sur X .
Soit $x \in X$ arbitraire. Ensuite nous avons

$$|\mathcal{A}x(t)| = |f(t, x(t))| \leq M_f$$

pour tout $t \in J$. En prenant le sup sur t, on obtient que $\|\mathcal{A}x\| \leq M_f$ et donc, $\mathcal{A}$ est borné sur X en lui-même. Ensuite, soit $x, y \in X$ deux points quelconques. Alors par hypothèse (A), on a :

$$|\mathcal{A}x(t) - \mathcal{A}y(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \phi(|x(t) - y(t)|) \leq \phi(\|x - y\|)$$

pour tout $t \in J$. En prenant le sup sur t , on obtient

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\| \leq \phi(\|x - y\|)$$

pour tout $x, y \in X$, où $\phi \in \mathfrak{DL}$. Cela montre que $\mathcal{A}$ est une MK-contraction sur X en lui-même.

Étape 2 : $\mathcal{B}$ est complètement continu sur S .
Nous montrons d'abord que $\mathcal{B}$ est un opérateur continu sur S .

Soit $\{x_n\}$ une suite de points dans S convergente vers un point $x \in S$ .Puis par le théorème de convergence dominé, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}x_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t g(s, x(s))ds \\
&= \int_0^t \left[\lim_{n\to\infty} g(s, x(s))\right] ds \\
&= \int_0^t g(s, x(s))ds \ .
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Cela montre que $\{\mathcal{B}x_n\}$ converge vers $\mathcal{B}x$ point par point sur J. pour montrer que la convergence est uniforme, nous montrons que $\{\mathcal{B}x_n\}$ est une suite de fonctions équicontinue sur J. Soit $t_1, t_2 \in J$ deux points quelconques . Ensuite nous avons :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}x_n(t_1) - \mathcal{B}x_n(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} g(s, x_n(s))ds - \int_0^{t_2} g(s, x_n(s))ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} g(s, x_n(s))ds \right| \\
&\leq M_g|t_1 - t_2| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \ \ t_1 \to t_2 \ .
\end{aligned}$$

uniformément pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$|\mathcal{B}x_n(t_1) - \mathcal{B}x_n(t_2)| \longrightarrow 0 \quad si \quad t_1 \to t_2 \ .$$

uniformément pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre que $\{\mathcal{B}x_n\}$ est une suite de fonctions équicontinue sur J. Donc $\{\mathcal{B}x_n\}$ converge uniformément vers $\mathcal{B}x$ sur J. Par conséquent $\mathcal{B}$ est un opérateur continu sur S.

Ensuite, nous montrons que $\mathcal{B}$ est un opérateur compact sur S . Pour finir, il suffit de montrer que $\mathcal{B}(S)$ est une ensemble uniformément bornée et équicontinue dans X. Soit $x \in S$ arbitraire. Puis,

$$|\mathcal{B}x(t)| \leq \int_0^t |g(s, x(s))|ds \leq M_g a$$

pour tout $t \in J$. Il en résulte que $\|\mathcal{B}x\| \leq M_g a$ pour tout $x \in S$ et que $\mathcal{B}(S)$ est un ensemble uniformément dans X. Par ailleurs, en poursuivant les arguments comme dans le cas précédent, il est prouvé que

$$|\mathcal{B}x_n(t_1) - \mathcal{B}x_n(t_2)| \longrightarrow 0 \quad si \quad t_1 \to t_2 \ .$$

uniformément pour tous les $x \in S$. Cela montre que $\mathcal{B}(S)$ est un ensemble de fonctions compact dans X en vue à Théorème d'Ascoli Arzel . Par conséquent, $\mathcal{B}$ est un opérateur complètement continu sur S.

Étape 3 : $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont l'hypothèse (c) du théorème 2.2.5 .
Soit $y \in S$ arbitraire , supposons que la relation $x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y$ est vraie. Nous montrerons que $x \in S$;

Maintenant :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |\mathcal{A}x(t)| + |\mathcal{B}y(t)| \\ &\leq |f(t, x(t))| + \int_0^t |g(s, x(s))| ds \\ &\leq M_f + M_g a \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Par conséquent, en prenant le sup dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $\|x\| \leq M_f + M_g a = K$, d'où $x \in S$.
Ainsi, les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les conditions du théorème 2.2.5 et donc l'équation d'opérateur (3.7) a une solution en S. Par conséquent,l'équation intégrale hybride 3.1 a une solution définie sur J . ■

Théorème 3.1.2. *Supposons que les hypothèses (A) et (B) sont valables. De plus, si $M_g a \leq 1$, alors l'équation intégrale hybride (3.1) a une solution sur J.*

Preuve : Fixons $X = C(J, \mathbb{R})$ et on définit un sous-ensemble S de X par :

$$S = \{x \in X | \ \|x\| \leq K\}, \tag{3.8}$$

où $K = M_f M_g a$. Clairement, S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de l'algèbre de Banach X. On définit les deux opérateurs $\mathcal{A} : X \longrightarrow X$ et $\mathcal{B} : S \longrightarrow X$ par (3.5) et (3.6). Alors l'équation intégrale hybride (3.1) est équivalent à l'équation de l'opérateur

$$\mathcal{A}x(t)|\mathcal{B}x(t) = x(t), \ t \in J. \tag{3.9}$$

Maintenant, en procédant aux arguments comme dans la preuve du théorème 3.1.2, on peut prouver que le les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les hypothèses (a) à (d) du théorème 2.2.4. Par conséquent, l'équation opérateur (3.9) a une solution dans S. Par conséquent, l'équation intégrale hybride (3.1) a une solution définie sur J.donc la preuve complète. ■

3.1.2 Exemple

Ci-dessous, nous donnons quelques exemples numériques des équations intégrales non linéaires pour illustrer les idées abstraites contenues dans les théorèmes d'existence,(théorèmes 3.1.1 et 3.1.2).

Exemple 3.1.1. *Soit l'intervalle fermé et borné $J = [0; 1]$ de la droite réelle $\mathbb{R}$, considérons l'équation intégrale non linéaire :*

$$x(t) = [f_1(t, x(t))] \left(\int_0^t \frac{\ln(1 + |x(s)|)}{1 + |x(s)|} ds \right), \ t \in [0, 1], \tag{3.10}$$

où la fonction $f_1(t, x)$ est donnée par :

$$f_1(t, x) = \begin{cases} \ln(1 + |x|), & si \quad -4 < x < 4 \ , \\ \ln 5 & sinon. \end{cases}$$

Si nous comparons l'équation intégrale hybride (3.1) avec (3.10) nous obtenons $a = 1$ et $g(t, x) = \dfrac{ln(1 + |x|)}{1 + |x|}$ pour $t \in [0, 1]$ et $x \in \mathbb{R}$. Clairement, les fonctions f_1 et g sont continues sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

Preuve :

Nous montrons que les fonctions f_1 et g satisfont les hypothèses (A) et (B). Évidemment, f_1 est une fonction bornée sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ avec $M_f = \ln 5$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $4 < x, y < 4$.

Ensuite, par définition de la fonction f_1, on obtient :

$$\begin{aligned} |f_1(t, x) - f_1(t, y)| &\leq |\ln(1 + |x|) - \ln(1 + |y|)| \\ &\leq \ln \frac{1 + |x|}{1 + |y|} \\ &\leq \ln \frac{1 + |x| + |y| - |y|}{1 + |y|} \\ &\leq \ln \left(1 + \frac{|x| - |y|}{1 + |y|} \right) \\ &\leq \ln \left(1 + \frac{|x - y|}{1 + |y|} \right) \\ &\leq \phi(|x - y|), \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, 1]$, où $\phi(r) = \ln(1 + r)$ est une $\mathcal{D}$-fonction sur $\mathbb{R}_+$. Encore une fois, si $x, y \in \mathbb{R} \backslash (-4, 4)$, alors nous avons :

$$|f_1(t, x) - f_1(t, y)| = |\ln 5 - \ln 5| = 0 \leq \phi(|x - y|).$$

pour tout $t \in [0, 1]$, où $\phi(r) = \ln(1 + r)$ et que $\phi \in \mathfrak{DL}$. Ainsi, dans tous les cas, la fonction f_1 satisfait l'hypothèse (A) sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ .Ensuite, la fonction $g(t, x) = \dfrac{ln(1 + |x|)}{1 + |x|}$ est continue et bornée sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ avec $M_g = 1$.

Ainsi les fonctions f_1 et g satisfont l'hypothèse (A) et (B) de Théorème 3.1.1.

Par conséquent, l'équation intégrale hybride (3.10) a une solution définie sur $[0, 1]$ *. De plus,* $M_{\mathcal{B}}a \leq 1$ *.* ■

Remarque 3.1.1. *La conclusion du théorème 3.1.2 peut être étendue avec des modifications appropriées à la équations intégrales non linéaires du type*

$$x(t) = k(t, x(t)) + [f(t, x(t))] \left(\int_0^t g(s, x(s))ds \right) . \tag{3.11}$$

3.2 Équations intégrales non linéaires quadratiques

3.2.1 Résultats d'existence

On a l'intervalle fermé et borné $J = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels, considérons l'équation intégrale fonctionnelle non linéaire :

$$x(t) = \left[\frac{1}{1 + |x(\theta(t))|} \right] \left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds \right). \tag{3.12}$$

pour tout $t \in J$, où $\theta, \eta : J \to J, q : J \to \mathbb{R}$ et $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continus. Par une solution du l'équation intégrale non linéaires (3.12) on entend une fonction continue $x : J \to \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation intégrale non linéaires (3.12) sur J.

Soit $X = C(J, \mathbb{R})$ un espace de Banach par rapport à la norme ci-dessus

$$\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|. \tag{3.13}$$

qui est aussi algèbre de Banach par rapport à la multiplication " $\cdot$ " définie par

$$(x \cdot y)(t) = x(t) \cdot y(t), \; t \in J.$$

Nous obtiendrons la solution de l'équation intégrale non linéaires (3.12) dans certaines conditions appropriées sur les fonctions impliquées dans (3.12).

Supposons que la fonction σ et g satisfasse la condition

$$\begin{cases} \sigma(t) \leq t \\ |g(t, x)| < 1 - \|q\|, \; \|q\| < 1 \end{cases} \tag{3.14}$$

pour tout $t \in J$ et $x \in \mathbb{R}$.

Preuve :
Définissez un sous-ensemble S de X par

$$S = \{y \in X / \|y\| \leq 1\}. \tag{3.15}$$

Considère les deux applications $A, B : X \to X$ définis par

$$Ax(t) = \frac{1}{1 + |x(\theta(t))|},\ t \in J, \tag{3.16}$$

et

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds,\ t \in J. \tag{3.17}$$

Alors l'équation intégrale non linéaire (3.12) est équivalent à l'équation de l'opérateur

$$Ax(t)Bx(t) = x(t),\ t \in J. \tag{3.18}$$

Nous montrerons que les opérateurs A et B satisfont à toutes les conditions du corollaire (2.2.1).

Clairement, A définit une application $A : X \to X - \{0\}$. Nous montrons d'abord que A est Lipschitzienne sur X. Soit $x, y \in X$. Alors on a

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= \left| \frac{1}{1 + |x(\theta(t))|} - \frac{1}{1 + |y(\theta(t))|} \right| \\ &= \frac{|x(t)| - |y(t)|}{(1 + |x(\theta(t))|)(1 + |y(\theta(t))|)} \\ &\leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Prenant le sup sur t on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|.$$

Ce qui montre que A est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $\alpha = 1$. Ensuite, nous allons montrer que l'opérateur B est complètement continu sur S.
Puisque $g(t, x)$ est L^1-Carathéodory, en utilisant le théorème de convergence dominée, on peut montrer que B est continu sur S. Soit $\{x_n\}$ une suite dans S. Alors on a

$\|x_n\| \leq r$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, Alors :

$$\begin{aligned}|Bx_n(t) &\leq |q(t)| + \left|\int_0^{\sigma(t)} |g(s, x(\eta(s)))ds\right| \\ &\leq \|q\|_{B(S)} + \int_0^{\sigma(t)} h_r(s)ds \\ &\leq \|q\|_{B(S)} + \|h_r\|_{L^1}\end{aligned}$$

ce qui donne en outre $\|Bx_n\| \leq \|q\|_{B(S)} + \|h_r\|_{L^1}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. En conséquence $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble uniformément borné dans S.
Soit $t_1, t_2 \in J$. Alors par le définition de B,

$$\begin{aligned}|Bx_n(t_1) - Bx_n(t_2)| &\leq |q(t_1) - q(t_2)| + \left|\int_{\sigma(t_1)}^{\sigma(t_2)} h_r(s)ds\right| \\ &\leq |q(t_1) - q(t_2)| + |p(t_1) - p(t_2)|\end{aligned}$$

où $p(t) = \int_0^{\sigma(t)} h_r(s)ds$. Comme q et p sont continues sur J, ils sont uniformément continues et par conséquent

$$|Bx_n(t_1) - Bx_n(t_2)| \longrightarrow 0 \; comme \; t_1 \to t_2 \; .$$

Ainsi $\{Bx_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble équi-continu dans $B(S)$. Donc $B(S)$ est compact (par le théorème d'Ascoli-Arzelà- pour la compacité). Ainsi B est un opérateur complètement continu . sur $B(S)$.
Par suite on montre que $B : S \to S$. Soit $x \in S$. Puis par (3.14) et (3.17),

$$\begin{aligned}|Bx(t)| &\leq |q(t)| \int_0^{\sigma(t)} |g(t, x(\eta(s)))ds \\ &< |q(t)| + \int_0^{t} (1 - \|q\|)ds.\end{aligned}$$

Puisque $Bx \in C(J, \mathbb{R})$, il existe un point $t^* \in J$ tel que

$$\|Bx\| = |Bx(t^*)| = \max_{i \in J} |Bx(t)|.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\|Bx\| &= |Bx(t^*)| \\
&< |q(t^*)| + \int_0^{t^*} (1 - \|q\|)ds \\
&\leq \|q\| + \int_0^1 (1 - \|q\|)ds \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|Bx\| \leq 1$. Par conséquent $B : S \to S$. Enfin, nous montrons que la condition (4) de la proposition (2.3.1) est vraie.

Maintenant pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{I}{A}\right)(x) \right\| &= \sup_{i \in J} \left| \frac{x(t)}{Ax(t)} \right| \\
&= \sup_{i \in J} \{|x(t)|[1 + |x(\theta(t))|]\} \\
&\geq \|x\|,
\end{aligned}$$

et ainsi par la proposition (2.3.1), la condition (3) du théorème (2.2.5) est satisfaite. Ainsi les opérateurs A et B satisfont toutes les conditions du théorème (2.2.5) et donc une application de celui-ci donne que l'équation d'opérateur (3.18) et par conséquent l'équation intégrale non linéaire (3.12) a une solution sur J. ∎

3.2.2 Exemple

Exemple 3.2.1. *Étant donné un intervalle fermé et borné $J = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, considérons l'équation intégrale non linéaire :*

$$x(t) = [1 + \lambda|x(\theta(t))|]\left(q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds\right). \tag{3.19}$$

pour tout $t \in J$, et $0 < \lambda < 1$, où $\theta, \sigma, \eta : J \to J$, $q : J \to \mathbb{R}$, et $g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continus.
Par une solution du l'équation intégrale non linéaires (3.19) on entend une fonction continue $x : J \to \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation intégrale non linéaires (3.19) sur J. Soit $X = C(J, \mathbb{R})$ une algèbre de Banach de toutes les fonctions réelles continues sur J avec la norme donnée dans (3.13).
Nous obtiendrons la solution de l'équation intégrale non linéaires (3.19) dans certaines

conditions appropriées. Nous supposons que les fonctions impliqués dans l'équation intégrale non linéaires (3.19) satisfont à la condition (3.14).

Preuve :

Définissez un sous-ensemble S de X par

$$S = \left\{ y \in X | \ \|y\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \right\}. \tag{3.20}$$

Considérons les deux applications $A, B : X \to X$ définis par

$$Ax(t) = 1 + \lambda |x(\theta(t))|, \ \ t \in J. \tag{3.21}$$

et

$$Bx(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} g(s, x(\eta(s)))ds, \ \ t \in J. \tag{3.22}$$

Nous montrerons que les opérateurs A et B satisfont à toutes les conditions du corollaire (2.2.1).

Nous montrons d'abord que A est Lipschitzienne sur X. Soit $x, y \in X$. Alors

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= \|[1 + \lambda|x(\theta(t))|] - [1 + \lambda|y(\theta(t))|]\| \\ &= \lambda\| |x(\theta(t))| - |y(\theta(t))| \| \\ &\leq \lambda\|x - y\|. \end{aligned}$$

ou $\|Ax - Ay\| \leq \lambda\|x - y\|$, ce qui montre que A est un Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz λ.

Il est prouvé comme dans la résultat (3.2.1) que l'opérateur B est complètement continue sur S et que $B : S \to S$.

On a aussi $\|Bx\| < 1$ pour tout $x \in S$. Soit $x \in S$ arbitraire avec $x = AxBy$ pour un certain $y \in S$. Alors on a

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |Ax(t)||by(t)| \\ &\leq \|Ax\|\|By\| \\ &\leq 1 + \lambda\|x\| \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda}. \end{aligned}$$

et donc, $\|x\| \leq \frac{1}{1-\lambda}$ *En conséquence* $x \in S$. *Ainsi l'hypothèse (3) du théorème (2.2.5) est satisfaite. Donc si* $\lambda < 1$, *alors une application du théorème(2.2.5) donne que l'équation intégrale non linéaire (3.19) a une solution sur* J. ■

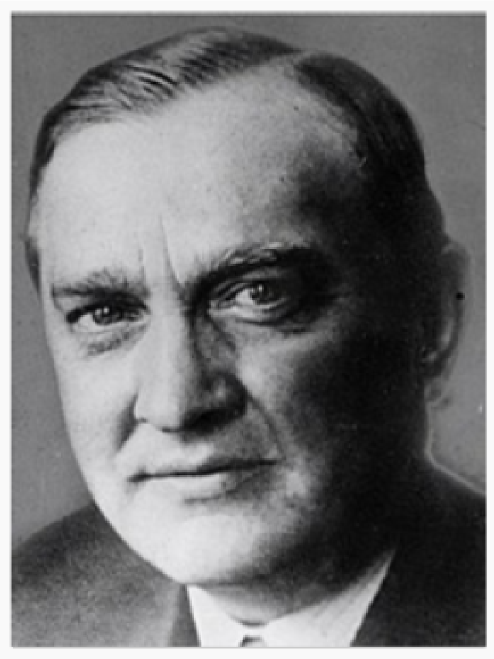
Remarque 3.2.1. *On note que l'opérateur* A *de la résultat [3.2.1] ne satisfait pas la condition (4) de Proposition [2.3.1].*

Remarque 3.2.2. *Il convient de mentionner que dans la résultat (3.2.1) et exemple (3.2.1), l'opérateur* $\frac{I}{A}$ *n'est pas un-par-un sur* X. *Cela prouve l'avantage du théorème (2.2.5) sur le théorèmes (2.2.4) .*

Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire est présenté le théorème du point fixe hybride de Dhage concernent et quelques extensions, par la suite, on a l'utilisé pour prouver l'existence des solutions de certaines équations intégrales non linéaires dans les algèbres de fonctions contnues. Cette étude a une particularité pour traiter les équations différentielle avec une perturbation non linéaire.

Annexe



Stefane Banach est un mathématicien Polonais, ses travaux ont surtout prote sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs. Il est né le 30 mars 1892 à Cracovie, Galicie (Autriche-Hongrie). Autodidacte, il est découvert fortuitement par Hugo Steinhaus et obtient son doctorat en 1920. Il effectue l'essentiel de sa carrière à Lwòw, où il enseigne à l'université et à l'école polytechnique. Ses publications, au nombre d'une soiscantaine, font de lui l'un des mathématiciens les plus infuents du **XXe** siècle. Il est l'un des membres fondateurs de la société mathématique de Pologne dont il devient vice président en 1932 et président en 1939. Son nom reste associé un certain nombre de théorèmes et a été donné entre autres aux espaces de Banach et aux algèbres de Banach et aux point fixe de Banach. Il meurt d'un cancer de 31 août 1945 (à 53 ans).

Juliusz Schauder est un mathématicien polonais, connu pour ses travaux dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, les équations aux dérivées partielles et la physique mathématique. Il est né en 1899 à Lemberg, ils est entré à l'université de Lwów en 1919 et a passé son doctorat en 1923. Il a continué ses recherches tout en travaillant comme enseignant dans une école secondaire, mais grâce à ses résultats remarqués, il a obtenu une bourse d'étude en 1932 qui lui permis de passer plusieurs années d'abord à Leipzig et ensuite à Paris. Vers 1953 Schauder a obtenu un poste de maître assistant à l'université de Lwów. Schauder est surtout connu pour le théorème de Banach-Schauder, le théorème du point xe de Schauder qui est un outil majeur pour prouver l'existence de solutions dans différents problèmes. Schauder était juif. Il a été exécuté par gestapo, probablement en octobre 1943.

Mark Alexandrovich Krasnoselskii est un mathématicien soviétique, né dans la ville de Starokostiantinov, en Ukraine le 27 avril 1920 , 1938 Mark est entré à la faculté physico-mathématique de l'Université de Kiev, qui a été évacuée au début de la Seconde Guerre mondiale vers le Kazakhstan où elle est devenue connue sous le nom d'université ukrainienne commune.

Il est diplômé en 1942, au milieu de la guerre, a servi quatre ans dans l'armée soviétique, est devenu candidat en science en 1948, avec un mémoire sur les extensions auto-adjoints d'opérateurs aux domaines non-sens, avant d'obtenir le titre de docteur en sciences en 1950, avec une thèse sur les investigations en analyse fonctionnelle non linéaire.

Bibliographie

[1] A.El jai. *Eléments de topologie et espaces métriques,* Presses Universitaires de Perpignan.

[2] A.Mostefaï *Cours de topologie* O.D.P.U Ben Aknoun -Alger- 1994.

[3] André Giroux *Mesure et intégration ,Notes de cours , Département de Mathématique et statistique* . Décembre 2004.

[4] Bashir Ahmed sotiris and K.Ntouyas : *Initial-Value Proplemes For Hybrid Hadamard Fractional Differenial Equation*

[5] B.C. Dhage, On a fixed point theorem in Banach algebras with applications, *Appl. Math. Lett. 18 (3) (2005)* 273–280. MR2121036 (2005i :47090).

[6] B.C. Dhage, On some variants of Schauder's fixed point principle and applications to nonlinear integral equations, *J. Math. Phys. Sci. 25 (1988)* 603–611. MR0967242 (89i :47115).

[7] B.C. Dhage, Remarks on two fixed point theorems involving the sum and the product of two operators, Comput. *Math. Appl. 46 (2003)* 1779–1785. MR2018766 (2004i :47104).

[8] D.W. Boyd, J.S.W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. *Math. Soc. 20 (1969)* 458–464. MR0239559 (39 - 916).

[9] F.Dugundji and A. Granas *Fixed Point Theory, Springer*, New York, (2003).

[10] Francis Nier Dragos Iftimie *Introduction à la topologie licence de mathématiques* Université de Rennes 01 .

[11] Franck Boyer *Analyse fonctionnelle , Master mathématique et applications première année* Aix Marseille université , 13 décembre 2015.

[12] F. Ronga. *Topologie et géométrie, Genève, MMVI ap.J.-C.*

[13] J.M. Brun. *Analyse Fonctionnelle*,2009.

[14] Haïm Brézis *Analyse fonctionnelle théorie et application* Dunod ,1999 .

[15] L. Jeanjean. *Espaces métriques ,Cours et TD.* Université de Franche-Comté16 route de Gray, 25030 Besan¸con cedex.

[16] M.A. Krasnoselskii, Some problems of nonlinear analysis, Amer. *Math. Soc. Trans. 10 (2) (1958)* 345–409. MR0094731 (20 - 1243).

[17] R,Agarwal ,M. Meehan and D. O'regan.*Fixed Point Theory and Applications Cambridge*. University. Press.

[18] Rozenn texier- Picard *Convexité et applications* Ens cachan bretagne /université/Rennes 01.

[19] T. Burton, A fixed point theorem of Krasnoselskii, *Appl. Math. Lett. 11 (1) (1998)* 85–88. MR1490385 (98i :47053).