REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE & POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Ibn Khaldoun- Tiaret
FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

MEMOIRE MASTER

Présentée par :

Reguieg Somia & Zaoui Aicha

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse fonctionnelle et applications / Analyse fonctionnelle et équations différentielles*

Intitulé

Integration factionaries au sens de Riamann-Liouville
D'ordre variable

Soutenue le : / / 2022 devant le jury composé de :

Président :	*Halim Benali*	*Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Examinateurs :	*Ziane Mohamed*	*Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*
Encadreur :	*Telli Benoumran*	*Pr. Univ. Ibn Khaldoun Tiaret*

Dédicaces :

Je dédie ce travail…

A mes chers parents

Seul Dieu peut vous récompenser pour le courage, l'amour et tous les sacrifices consentis.

A mes chères sœurs

Dieu les garde et leurs montre le droit chemin.

A mes chers neveux

Pour le bonheur qu'ils me donnent, Puisse Allah vous garde , éclaircit votre route et vous aide à réaliser à votre tour vos vœux les plus chers.

A mes chers amis

Pour tous les encouragements sincères, inestimables.

SOMIA

Dédicaces :

C'est avec un immense honneur et une grande modestie que je dédie ce modeste travail à Celui et celle qui m'ont donné la vie :

***A Mon père** :*

Pour tout ce qu'il a fait pour moi pour que je sois celle que je suis aujourd'hui, je te demande en m'inclinant devant tes sacrifices et bonté, de bien vouloir trouver dans ces petits mots toute ma gratitude ainsi que mon profond dévouement.

A Ma mère :

Pour toute sa tendresse, amour et affection qui ont été pour moi une lumière et un appui d'une valeur inestimable, je te prie mère de trouver ici le témoignage de mes sentiments les plus distingués et s'il ya quelqu'un au monde envers qui je dois beaucoup, ça serait toi mère et quoique je fasse jamais je ne pourrai te revaloir ce qui tu m'as donné avec cœur et âme.

A mes sœurs :

Tu as toujours été avec moi et tu n'as pas abandonné tes conseils .Merci

***A mes amies**:*

merci d'avoir donné un sens au mot amitié et Tu étais avec moi quand tu avais besoin d'un soutien moral.

Aicha

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modest travail

En second lieu; ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de M. Telli B; on le remercie pour la qualité de son encadrement, pour sa patience, sa rigueur tout le long de la période de réalisation de ce modeste travail.

Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait en étant M.Halim .B président du jury et M. Ziane .M d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Nos vifs remerciements sont adressés à nos parents Pour nous avoir toujours soutenu et guidé dans la bonne direction Pour l'éducation qui nous a permis de devenir que nous sommes aujourd'hui et aussi pour l'aide et les encouragements pour arriver au bout de cette formation.

Nos remerciement s'adresse également à tout nos enseignants pour leur générosité et la grande patience.

Nous adressons nos vifs remerciements à tous les employés de l'université de Tiaret.

Contents

Notation

$(DrFr)$	la dérivée fractionner
$(EqsDr)$	des équation différentielle fractionnaires
$(DrFrRL)$	la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable
$(InFrRL)$	l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre variable
$(EqsDFNnL)$	des équation différentielle fractionnaires non linaire
$(Prpco - Banach)$	le principe de contraction de Banach
$C(\mathfrak{J}, \mathbb{R})$	désigne l'espace des application continues de $\mathfrak{J}$ dans $\mathbb{R}$

Introduction

Le calcul fractionnaire d'ordre variable est une généralisation d'ordre constant.

Alors que plusieurs travaux de recherche ont été menées sur l'étude de l'existence de solutions aux problèmes fractionnaires d'ordre constant, l'existence de solutions aux problèmes d'ordre variable.

En relation avec l'étude de la théorie de l'existence de solutions aux problèmes fractionnaires d'ordre variable, Nous référons à un certain nombre de travaux, Dans [7], Zhang a étudié les solutions d'un problème aux limites à deux points avec des équations différentielles singulières d'ordre variable. Quelques années plus tard, Zhang et Hu [6] ont présenté les résultats d'existence pour des solutions approchées d'un problème initiale fractionnaire d'ordre variable sur le demi-axe.

Récemment, Hristova et al. [9] se sont tournés vers l'étude des problèmes aux limites fractionnaires d'ordre variable au sens de Hadamard en utilisant la méthode de la mesure de non-compacité de Kuratowski, pour plus d'études, nous nous référons aux références [10, 11, 12].

L'objectif de ce mémoire est de présenter, des résultats d'existence et d'unicité de de solutions pour quelque classe de problèmes aux limites pour des équations différentielles non linéaires à dérivées fractionnaires d'ordre variable sur des intervalles finis.

La technique utilisée consiste à transférer l'étude de notre problème aux limites des équations différentielles fractionnaires d'ordre variable à un problème équivalent d'ordre fractionnaire constant en utilisant des intervalles généralisés et la fonction constante par morceaux.

Les résultats de cette étude sont basés sur le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach.

Dans ce qui suit, on donnons un plan de notre travail de mémoire.

La thèse se compose de trois chapitres.

Le premier chapitre introduit les notations, les définitions et les préliminaires qui sont utilisés dans les autres chapitres .

Dans le deuxième chapitres , on intéressons aux définitions des opérateurs d'intégrations et de dérivations fractionnaires d'ordre variable et leurs propriétés. .

Dans le troisième chapitres ,on traite l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles fractionnaires d'ordre variable suivantes :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{v(\tau)}x(\tau) + f(\tau, x(\tau), I_{0^+}^{v(\tau)}x(\tau)) = 0, \ \ \tau \in J := [0,T], \\ x(0) = 0, \ \ x(T) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $0 < T < +\infty$, $1 < v(\tau) \leq 2$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fonction continue et $D_{0^+}^{v(\tau)}$, $I_{0^+}^{v(\tau)}$ sont la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et intégral de Riemann-Liouville d'ordre variable v.

Chapter 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Bref historique

La théorie de dérivation fractionnaireest un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle, l'époque o'u Newton et Leibniz ont désenveloppe les fondements de calcul différentiel et intégrale. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée

d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'hôpital a répondu : Que signifie $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \dfrac{1}{2}$?

Cette lettre de l'hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que hôpital a demandé spécifiquement pour $n = 12$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques .
Les dérivées non entières possédant un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymère. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaire dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un cout élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme.
De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.
Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{e}me$ siècle, inclut : P.S.Laplace(1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J.Liouville (1832-1873), B.Riemann (1847), H.Holmgren (1865-67), A.K.Grunwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H.Laurent (1884), P.A.Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J.Hadamard (1892), O.Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P.L'evy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A.Zygmund (1935-1945), E.R.Amour (1938-1996), A.Erd'elyi (1939-1965), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949), Caputo (1967)

1.1.2 La fonction Gamma et la fonction Bêta

Soit$L^1(J, \mathbb{R})$ désigne la classe des fonctions intégrables de Lebesgue sur l'intervalle $J = [0; T]$ menu de la norme :

$$||u||_{L_1} = \int_J |u(\tau)| d\tau$$

1. La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge le factorielle aux valeurs réelles et complexes.

   Pour $Re(\alpha) > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau \tag{1.1}$$

La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) a $\mathbb{C} \setminus Z^-$ tout entier
On a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$et pour n entier on a $n! = \Gamma(n+1)$.

2. La fonction Bêta est définie par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.2}$$

avec$Re(\alpha) > 0$ et$Re(\beta) > 0$.

1.1.3 Intégration fractionnaire

Considérons une fonction ξ définie pour $\tau > a$
on pose :

$$(I_{a^+}\xi)(\tau) = \int_a^\tau \xi(s)ds, (I^2\xi)(\tau) = \int_a^\tau (I\xi)(u)du = \int_a^\tau (\int_a^u \xi(s)ds)du$$

en répétant n fois on obtient d'après la formule de Cauchy

$$(I^n_{a^+}\xi)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^\tau (\tau-s)^{n-1}\xi(s)ds$$

en utilisent la fonction 'Γ d'Euler 3.1 on aura la définition suivante :

Definition 1.1.1. ([1],[2]) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $\xi \in L^1([a;b];\mathbb{R})$ est défini par :

$$I^\alpha_{a^+}\xi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^\tau (\tau-s)^{\alpha-1}\xi(s)ds$$

ou $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma si $a = 0$ on écrit $I^\alpha\xi(\tau) = \xi(\tau) * \varphi_\alpha(\tau)$,
avec $\varphi_\alpha(\tau) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$,et $\varphi_\alpha(\tau) = 0$ pour $\tau \leq 0$ et $\varphi_\alpha \to \delta(\tau)$
quand $\alpha \to 0$, où δ représente la fonction delta.

1.1.4 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Definition 1.1.2. ([1],[2]) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $\xi \in L^1([a;b];\mathbb{R})$ est donnée par

$$(D^\alpha_{a+}\xi)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{d\tau})^n\int_a^\tau (\tau-s)^{n-\alpha-1}\xi(s)ds$$

.

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α. si $\alpha \in (0; 1]$, alors

$$(D^{\alpha}_{a+}\xi)(\tau) = \frac{d}{d\tau} I^{1-\alpha}_{a+}\xi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_a^{\tau} (\tau - s)^{-\alpha} \xi(s) ds.$$

1.2 Quelques lemmes et propositions

Proposition 1.2.1. *([1]) Soient $\alpha, \beta > 0$. Alors on a*

1. *L'opérateur d'intégration fractionnaire I^{α}_{a+} est linéaire .*

2. *$I^{\alpha}_{a+} : L^1(J, \mathbb{R}) \to L^1(J, \mathbb{R})$ et si $f \in L^1(J, \mathbb{R})$ alors*
   $I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f(\tau) = I^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f(\tau) = I^{\alpha+\beta}_{a+} f(\tau)$

3. *Si $f \in L^p(J, \mathbb{R}), 1 \leq p < +\infty$ alors $\|I^{\alpha} f\|_{L_p} \leq \dfrac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_{L_p}$, avec $J = [a, b]$ et $T = b - a$*

4. *L'opérateur intégral d'ordre fractionnaire I^{α}_{a+} linéaire et borné de l'espace $L^1(J)$ dans lui- même.*

Lemme 1.2.1 *([1],[3]) Soit $\alpha > 0$, l'équation différentielle*

$$(D^{\alpha}_{a+}\xi)(\tau) = 0 \tag{1.3}$$

admet les solutions

$$\xi(\tau) = \lambda_1(\tau - a)^{\alpha-1} + \lambda_2(\tau - a)^{\alpha-2} + \lambda_3(\tau - a)^{\alpha-3} + ... + \lambda_m(\tau - a)^{\alpha-m},$$

pour $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, ...m - 1 < \alpha \leq m$

Lemme 1.2.2 *([1]) Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+}\xi(\tau) = \xi(\tau) + \lambda_1(\tau - a)^{\alpha-1} + \lambda_2(\tau - a)^{\alpha-2} + \lambda_3(\tau - a)^{\alpha-3} + ... + \lambda_m(\tau - a)^{\alpha-m}$$

pour $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, ...m - 1 < \alpha \leq m$.

Lemme 1.2.3 *([3]) Soit $\alpha > 0$ alors on obtient*

$$D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} \xi(\tau) = \xi(\tau)$$

.

Lemme 1.2.4 *([3]) Soit $\alpha, \delta > 0$ alors on obtient*

$$I^{\alpha}_{a^+} I^{\delta}_{a^+} \xi(\tau) = I^{\delta}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} \xi(\tau) = I^{\alpha+\delta}_{a^+}$$

.

Definition 1.2.1. Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur

1. T est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tx.

2. T est dit compact, T(E) est relativement compact .

3. T est dit complètement continu si T est continue et si elles transforme de tout borné est relativement compact .

Definition 1.2.2. Soit $C(J; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J; \mathbb{R})$

1. M est dit équicontinu si est seulement si:

   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in J$

   $|t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon \quad , \forall f \in M$

2. M est dit uniformément borné si et seulement si:
   $\exists c > 0 : |f(t)| \leq c, \forall t \in J$, et $\forall f \in M$

1.2.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs . Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1 *Soient E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque. Une partie M de $C(E,F)$ est relativement compact si et seulement si :*

1. *. M est équicontinue sur E.*
2. *M uniformément borne .*
3. *. Pour tout $x \in E$, l'espace$M(x)$ défini par :*

$$M(x) = \{f(x) : f \in M\}$$

est relativement compact dans F.

Théorème 2 *Soit M une partie de$C([a,b])$ muni de la norme uniforme. M est relativement compact dans $C([a,b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.*

1.3 Fonction de Green

Soit $p, q, f, \in C([a;b])$ où $v \in C^1([a,b]), a < b$ et $(\alpha_i;\beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$\forall i = 1,2$
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ on considère les équations différentielles ordinaires
$(H) \quad (py')' + qy = 0$
$(NH) \quad (py')' + qy = f$
ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh}\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\gamma\\ \beta_1 y(b)-\beta_2 y'(b)=\delta\end{cases}$$

1.3.1 Définition

Definition 1.3.1. On appelle fonction de Green associée au $\mathbb{R}$ problème homogène $(H)-(CB)_h$ une fonction $G:[a;b]\times[a;b]\rightarrow$ vérifiant les propriétés :

(a). G est continue sur $[a;b]\times[a;b]$;

(b). G est symétrique : $G(x,y)=G(y,x), \forall(x,y)\in[a,b]^2$;

(c). $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ est continue pour tout $x\neq y$

(d). $\dfrac{\partial G}{\partial x}(y^+,y)-\dfrac{\partial G}{\partial x}(y^-,y)=\dfrac{1}{v(\tau)}$ pour tout $y\in[a,b]$;

(e). La fonction partielle $x\rightarrow G(x,y)$ est solution de l'équation (H) pour tout $x\neq y$;

(f). La fonction partielle $x\rightarrow G(x,y)$ vérifie les conditions (CH) pour tout $y\in[a;b]$

Chapter 2

Intégration fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre variable

Introduction

Dans ce chapitre ,on donne quelque définition des l'opérateur intégration et dérivation fractionner d'ordre variable et leur proposition

2.1 Définition et notation

Certaines notation mathématiques essentielle qui seront utilisées plus tard sont fournies dans cette section .Au moyen de $C(\mathfrak{J}, \mathbb{R})$ représentons l'espace de Banach des application continues de $\mathfrak{J}$ dans $\mathbb{R}$ menu de la norme :

$$\|x\| = \sup\{|x(\tau)| : \tau \in \mathfrak{J}\} \tag{2.1}$$

Definition 2.1.1. ([4],[5]) Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $v(\tau) : [a, b] \to (0, +\infty)$ la gauche InFrRL d'une fonction $\xi(\tau)$ exprime par :

$$I_{a^+}^{v(\tau)}\xi(\tau) = \int_a^\tau \frac{(\tau-\mu)^{v(\mu)-1}}{\Gamma(v(\mu))}\xi(\mu)d\mu$$

Ou la fonction gamma est note par $\Gamma(.)$

Definition 2.1.2. ([4]) Soit $-\infty < a < b < +\infty$,$m \in \mathbb{N}$ et
$v(\tau) : [a, b] \to (m-1, m)$ DrFrRL d'une fonction $\xi(\tau)$ s'exprime par :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{v(\tau)}\xi(\tau) &= \left(\frac{d}{d\tau}\right)^m I_{a^+}^{m-v(\tau)} \\ &= \left(\frac{d}{d\tau}\right)^m \int_{a^+}^{\tau} \frac{(\tau-\mu)^{m-v(\mu)-1}}{\Gamma(m-v(\mu))}\xi(\mu)d\mu,\ \tau > a \end{aligned} \tag{2.2}$$

évidement si l'ordre $v(\tau)$ est une fonction constante v alors la dérivée fractionnelle d'ordre variable de Riemann-Liouville (DrFrRL)et intégrale (InFrRL) sont respectivement les DrFrRL et InFrRL habituels
Examinons maintenant quelques propriétés essentielles

Remarques 2.1.1. Généralement ,pour les fonction $v(\tau)$ et $\chi(\tau)$ la propriété de semi-groupe n'est pas vérifiée c'est à dire

$$I_{a^+}^{v(\tau)} I_{a^+}^{\chi(\tau)}\xi(\tau) \neq I_{a^+}^{v(\tau)+\chi(\tau)}\xi(\tau) \tag{2.3}$$

Preuve 2.1. *soit*

$$v(\tau) = \begin{cases} 2, & \tau \in [0,1] \\ 1, & \tau \in]1,3] \end{cases} ,\chi(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0,1] \\ 2, & \tau \in]1,3] \end{cases} \tag{2.4}$$

et $\xi(\tau) = \tau$ et$\tau \in [0,3]$ ensuite on calcule

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{v(\tau)} I_{0^+}^{\chi(\tau)}\xi(\tau) &= \int_0^1 \frac{(\tau-\mu)^{v(\mu)-1}}{\Gamma(v(\mu))} \int_0^{\mu} \frac{(\mu-\omega)^{\chi(\omega)-1}}{\Gamma(\chi(\omega))}\xi(\omega)d\omega d\mu + \\ & \int_1^{\tau} \frac{(\tau-\mu)^{v(\mu)-1}}{\Gamma(v(\mu))} \int_0^{\mu} \frac{(\mu-\omega)^{\chi(\omega)-1}}{\Gamma(\chi(\omega))}\xi(\omega)d\omega d\mu \\ &= \int_0^1 \frac{(\tau-\mu)^1}{\Gamma(2)} \int_0^{\mu} \frac{(\mu-\omega)^0}{\Gamma(1)}\omega d\omega d\mu + \int_1^{\tau} \frac{(\tau-\mu)^0}{\Gamma(1)} \\ & \cdot \left[\int_0^1 \frac{(\mu-\omega)^0}{\Gamma(1)}\omega d\omega + \int_1^{\mu} \frac{(\mu-\omega)^1}{\Gamma(2)}\omega d\omega\right] d\mu \\ &= \int_0^{\tau} \frac{(\tau-\mu)\mu^2}{2\Gamma(2)}d\mu + \int_1^{\tau} \frac{\mu^3}{6} - \frac{\mu}{2} + \frac{5}{6}d\mu, \end{aligned}$$

$$I_{0^+}^{v(\tau)+\chi(\tau)}\xi(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{(\tau-\mu)^{v(\mu)+\chi(\mu)-1}}{\Gamma(v(\mu)+\chi(\mu))}\xi(\mu)d\mu \tag{2.5}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{v(\tau)} I_{a^+}^{\chi(\tau)} \xi(\tau)|_{\tau=2} &= \int_0^1 \frac{(2-\mu)\mu^2}{2\Gamma(2)} d\mu + \int_1^2 \frac{\mu^3}{6} - \frac{\mu}{2} + \frac{5}{6} d\mu \\ &= \frac{5}{24} + \frac{17}{24} = \frac{22}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{v(\tau)+\chi(\tau)} \xi(\tau)|_{\tau=2} &= \int_0^1 \frac{(2-\mu)^{2+1-1}}{\Gamma(2+1)} \mu d\mu + \int_1^2 \frac{(2-\mu)^{1+2-1}}{\Gamma(1+2)} \mu d\mu \qquad (2.6) \\ &= \frac{11}{24} + \frac{5}{24} + \frac{16}{24} \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons

$$I_{0^+}^{v(\tau)} I_{0^+}^{\chi(\tau)} \xi(\tau)|_{\tau=2} \neq I_{0^+}^{v(\tau)+\chi(\tau)} \xi(\tau)|_{\tau=2} \qquad (2.8)$$

Lemme 2.1.1 *([6]) Soit* $0 \leq \zeta < 1$ *et* $v : \mathfrak{J} \to (1,2]$ *continue, puis,pour* $y \in C(\mathfrak{J}, \mathbb{R}) = \{y(\tau) \in C(\mathfrak{J}, \mathbb{R}), \tau^\zeta y(\tau) \in C(\mathfrak{J}, \mathbb{R})\}$ *l'intégrale fractionnaire d'ordre variable* $I_{0^+}^{v(\tau)} y(\tau)$ *existe pour tout point sur* $\mathfrak{J}$.

Lemme 2.1.2 *([6]) Soit* $v : \mathfrak{J} \to (1,2]$ *une fonction continue ,alors*

$I_{0^+}^{v(\tau)} y(\tau) \in C(\mathfrak{J}, \mathbb{R})$ *pour* $y \in C(\mathfrak{J}, \mathbb{R})$.

Definition 2.1.3. ([7]) on dit que l'ensemble $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$ est un intervalle généralisé s'il est soit un intervalle (un ensemble de la forme $(c_1, c_2), [c_1, c_2], [c_1, c_2)$ ou $(c_1, c_2]$ soit un seul-point $\{c_1\}$ ou $\varnothing$.

Definition 2.1.4. ([7]) On supposant $\mathbb{I}$ comme intervalle généralisés un ensemble fini $\mathbb{P}$ constitué d'intervalle généralisés appartenant à $\mathbb{I}$ est nommé comme une partition de $\mathbb{I}$ si chaque $x \in \mathbb{I}$ est contenu dans exactement un des intervalle généralisés $\mathbb{J}$ de P .

Exemple 2.1.1. L'ensemble $\mathbb{P} = \{\{1\}.(1,6).[6,7).\{7\}.(7,8]\}$ d'intervalles généralisés est un partition de $[1,8]$.

Definition 2.1.5. ([7]) soit $\mathbb{I}$ est un intervalle généralisés et $\rho : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ est un fonction , et $\mathbb{P}$ est une partition de $\mathbb{I}$,Alors , ρ est constante par morceaux relativement de $\mathbb{P}$ pour chaque $\mathbb{J} \in \mathbb{P}$ est constant sur $\mathbb{J}$.

Exemple 2.1.2. La fonction $f : [1, 6] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(\tau) = \begin{cases} 3 & 1 \leq \tau < 3 \\ 4 & \tau = 3 \\ 5 & 3 < \tau < 6 \\ 2 & \tau = 6 \end{cases}$$

est un constante par morceaux par rapport à la partition $\{[1, 3).\{3\}.(3, 6).\{6\}\}$ de $[1, 6]$.

Théorème 3 *([8]) (théorème du point fixe de Schauder) Supposons que E est un espace Banach ,et Q un sous ensemble non vide , convexe et fermé de E .Si $F : Q \to Q$ est continue et compacte ,alors F possède au moins un point fixe on Q.*

Théorème 4 *([8]) (théorème de contradiction de Banach) Supposons que E est un espace Banach .Si $F : E \to E$ est une contraction ,alors F possède un point fixe unique on E.*

Chapter 3

Solutions Continues des problèmes aux limites pour les équations différentielles implicites d'ordre variable

3.1 Introduction et motivations

Dans [6],Nous étudié l'existence des solutions pour l'équation fractionnel non linéaires suivantes de l'ordre constant

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{a^+}x(\tau) = f(\tau, x(\tau), I^{\alpha}_{a^+}x(\tau)), \quad \tau \in [a,b], \quad \alpha \in]0,1], \\ x(a) = x_a, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fonction continue et ${}^cD^{\alpha}_{a^+}$ et $I^{\alpha}_{a^+}$ sont la dérivée fractionnaire de Caputo et intégral de Riemann-Liouville d'ordre variable α.

L'objectif de ce chapitre est de présenter des nouveaux résultats sur l'existence de solutions Continues pour une classe des problèmes aux limites pour des équations différentielles implicites d'ordre variable concernant la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Nos résultats sont basés sur le théorème du point fixe de Schauder et le théorème du point fixe du principe de contraction de Banach.

Soit le problème:

$$\begin{cases} D_{0^+}^{v(\tau)}x(\tau) + f(t, x(\tau), I_{0^+}^{v(\tau)}x(\tau)) = 0, \;\; \tau \in J := [0, T], \\ x(0) = 0, \;\; x(T) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $0 < T < +\infty$, $1 < v(\tau) \leq 2$, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fonction continue et $D_{0^+}^{v(\tau)}$, $I_{0^+}^{v(\tau)}$ sont la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et intégral de Riemann-Liouville d'ordre variable v

Dans ce qui suite nous donnons deux résultats, le premier est basé sur le théorème du point fixe de Schauder et le deuxième sur le principe de contraction de Banach.

3.2 Existence de solution

Tous nos principaux résultats dans ce travail sont discutée dans cette section. supposons les hypothèses suivantes :

(H_1) Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier , et

$$P = \{\mathfrak{J}_1 := [0, K_1], \mathfrak{J}_2 := (K_1, K_2], \mathfrak{J}_3 := (K_2, K_3], ...\mathfrak{J}_m := (K_{m-1}, K]\}$$

une partition de l'intervalle $\mathfrak{J}$ et $v : \mathfrak{J} \to (1, 2]$ une fonction constante par morceaux relativement à P définie par :

$$v(\tau) = \sum_{j=1}^{m} v_j \mathbb{I}_j(\tau) = \begin{cases} v_1, & si \quad \tau \in \mathfrak{J}_1, \\ v_2, & si \quad \tau \in \mathfrak{J}_2, \\ . & \\ . & \\ v_m, & si \quad \tau \in \mathfrak{J}_m, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $1 < v_j \leq 2$ et $\mathbb{I}_j$ est l'indicateur d'intervalle $\mathfrak{J}_j = (K_{j-1}, K_j], j = 1, 2...m$, tel que

$$\mathbb{I}_j(\tau) = \begin{cases} 1, & si \quad \tau \in \mathfrak{J}_j, \\ 0, & sinon, \end{cases} \tag{3.4}$$

(H_2) Soit $\tau^{\zeta}\psi : \mathfrak{J} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $(0 \le \zeta < 1)$. Il existent des constantes $c_i > 0, i = 1, 2, 3$ et $0 < \sigma < 1$, $0 < \eta < 1$ tel que,

$$\tau^{\zeta}|\psi(\tau, y, z)| \le c_1 + c_2|y|^{\sigma} + c_3|z|^{\eta} \tag{3.5}$$

pour tout $y, z \in \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathfrak{J}$.
(H_3) Il existent des constantes $W, L > 0, \quad 0 \le \zeta < 1$ tel que

$$\tau^{\zeta}|\psi(\tau, s_1, z_1) - \psi(\tau, s_2, z_2)| \le W|s_1 - s_2| + L|z_1 - z_2| \tag{3.6}$$

pour tout $s_1, s_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathfrak{J}$.

$E_j = C(\mathfrak{J}, \mathbb{R})$ désigne l'espace de Banach des application continues de $\mathfrak{J}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme:

$$\|x\|_{E_j} = \sup_{\tau \in \mathfrak{J}_j}|x(\tau)| \tag{3.7}$$

où $j \in \{1, 2, ..., m\}$.
Pour obtenir nos résultats originaux ,effectuons d'abord une analyse essentielle à notre proposition de problème (3.2).
D'après (2.2) l'équation du problème (3.2) peut s'écrire

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\int_0^{\tau} \frac{(\tau - \mu)^{1-v(\mu)}}{\Gamma(2 - v(\mu))} x(\mu)d\mu + \psi\left(\tau, x(\tau), I_{0+}^{v(\tau)}x(\tau)\right) = 0, \qquad \tau \in \mathfrak{J} \tag{3.8}$$

D'après H_1 ,l'équation (3.8) sur l'intervalle $\mathfrak{J}_j$
, $\quad j = 1, 2, ...m$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2}\left(\int_0^{K_1} \frac{(\tau - \mu)^{1-v_1}}{\Gamma(2 - v_1)} x(\mu)d\mu + ... + \int_{K_{j-1}}^{\tau} \frac{(\tau - \mu)^{1-v_j}}{\Gamma(2 - v_j)} x(\mu)d\mu\right) \\ + \psi\left(\tau, x(\tau), I_{0+}^{v(\tau)}x(\tau)\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour $\tau \in \mathfrak{J}_j$.
Commençons par définir ce que nous entendons par solution du problème (3.2) , qui est essentiel dans cette étude

Definition 3.2.1. :
problème (3.2) admet une solution , s'ils existent des fonctions $x_j, \quad j = 1, 2, ..., m$ de sorte que $x_j \in C([0, K_j], \mathbb{R})$ qui vérifient l'équation (3.9) et $x_j(\tau) = 0 = x_j(K_j)$.

D'après notre analyse précédente ci-dessus (3.2) peut être exprimé par l'équation (3.8) ,que peut être écrite sur les intervalles $\mathfrak{J}_j \quad j \in \{1, 2, ..., m\}$ comme (3.9) pour $0 \leq \tau \leq K_{J-1}$ en prenant $x(\tau) \equiv 0$ alors (3.9) s'écrit

$$D^{v_i}_{K^+_{i-1}} x(\tau) + \psi \left(\tau, x(\tau), I^{v_i}_{K^+_{i-1}} x(\tau)\right) = 0, \qquad \tau \in \mathfrak{J}_i \tag{3.10}$$

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} D^{v_j}_{K^+_{i-j}} x(\tau) + \psi \left(\tau, x(\tau), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\tau)\right) = 0, & \tau \in \mathfrak{J}_j \\ x(K_{j-1}) = 0, & x(K_j) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Pour l'existence de solutions du problème (3.11) , nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 3.2.1 *La fonction $x \in E_j$ est une solution du problème 3.11 si et seulement six satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$x(\tau) = \int_{K_{j-1}}^{K_j} G(\tau, \mu)\psi \left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right) d\mu \tag{3.12}$$

Où $G_j(\tau, \mu)$ est la fonction de Green définie par

$$G_j(\tau, \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(v_j)} \left[(K_j - K_{j-1})^{1-v_j}(\tau - K_{j-1})^{v_j-1}(K_j - \mu)^{v_j-1} - (\tau - \mu)^{v_j-1}\right] \\ \\ K_{j-1} \leq \mu \leq \tau \leq K_j \\ \\ \dfrac{1}{\Gamma(v_j)}(K_j - K_{j-1})^{1-v_j}(\tau - K_{j-1})^{v_j-1}(K_j - \mu)^{v_j-1} \\ \\ K_{j-1} \leq \tau \leq \mu \leq K_j \end{cases} \tag{3.13}$$

Où $j = 1, 2, ..., m$

Preuve 3.1. *Soit $x \in E_j$ une solution du problème 3.11 .Maintenant ,appliquons l'opérateur $I^{v_j}_{K^+_{j-1}}$ aux deux côtés de l'équation du supposé problème 3.11 ,D'après le* *lemme 1.2.2 ,on obtient*

$$\begin{aligned} x(\tau) = \lambda_1(\tau - K_{j-1})^{v_j-1} + \lambda_2(\tau - K_{j-1})^{v_j-2} - \\ \frac{1}{\Gamma(v_j)} \int_{K_{j-1}}^{\tau} (\tau,\mu)^{v_j-1} \psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right) d\mu, \tau \in \mathfrak{J}_j \end{aligned} \tag{3.14}$$

Par $x(K_{j-1}) = 0$ *et la fonction* ψ *on obtient* $\lambda_2 = 0$ *, Soit* $x(\tau)$ *satisfait* $x(k_j)$ *Ainsi , nous obtenons* $\lambda_1 = (K_j - K_{j-1})^{1-v_j} I^{v_j}_{K^+_{j-1}} \psi\left(K_j, x(K_j), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(K_j)\right)$ *,Ensuite nous avons*

$$\begin{aligned} x(\tau) = (K_j - K_{j-1})^{1-v_j} (\tau - K_{j-1})^{v_j-1} I^{v_j}_{K^+_{j-1}} \psi\left(K_j, x(K_j), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(K_j)\right) - \\ I^{v_j}_{K^+_{j-1}} \psi\left(\tau, x(\tau), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\tau)\right), \quad \tau \in \mathfrak{J}_j \end{aligned}$$

Par la continuité de la fonction de Green qui implique que

$$x(\tau) = \int_{K_{j-1}}^{K_j} G(\tau,\mu) \psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right) d\mu \tag{3.15}$$

Inversement ,soit $x \in E_j$ *une solution de l'équation intégrale 3.12 ,alors par la continuité de la fonction du lemme 1.2.3 on peut facilement obtenir que x est un solution de problème 3.11 .*
La proposition suivant sera nécessaire

Proposition 3.2.1. *([7]) Soit* $\leq \zeta < 1$ *et supposons que* $\tau^{\zeta}\psi : \mathfrak{J} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue* $v : \mathfrak{J} \to (1, 2]$ *vérifie* (H_1) *,Alors la fonction de Green de problème 3.11 les propriétés suivantes :*

(I) $G_j(\tau,\mu) \geq 0, \quad \forall K_{j-1} \leq \tau, \quad \mu \leq K_j$.

(II) $\max_{\tau \in \mathfrak{J}_j} G_j(\tau,\mu) = G_j(\mu,\mu), \quad \mu \in \mathfrak{J}_j$.

(III) $G_j(\mu,\mu)$ *un maximum unique donné par*

$$\max_{\tau \in \mathfrak{J}_j} G_j(\mu,\mu) = \frac{1}{\Gamma(v_j)} \left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \tag{3.16}$$

Où $j = 1, 2, ..., m$

Le premier résulta d'existence repose sur le théorème3

Théorème 5 *Supposons que les hypothèses (H_1) , (H_2) sont satisfait , alors le problème* (**??**) *admet au moins une solution sur* $\mathfrak{J}$.

Preuve 3.2. *Le problème 3.11 peut être transformé en un problème de point fixe ,Construisons l'opérateur suivant :*

$$M : E_j \to E_j \tag{3.17}$$

formulé par

$$Mx(\tau) = \int_{K_{j-1}}^{K_j} G(\tau,\mu)\psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right) d\mu \quad \tau \in J_j \tag{3.18}$$

Il résulte des propriétés des intégrales fractionnaires et de continuité de la fonction $\tau^{\zeta}\psi$ que l'opérateur $M : E_j \to E_j$ défini dans 3.18 est bien défini ,On considère l'ensemble

$$B_{R_j} = \left\{x \in E_j, \quad \|x\|_{E_j} \le R_j\right\} \tag{3.19}$$

où

$$\begin{aligned} R_j = \max\{ & \frac{3c_1}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1}\left(\frac{K_j^{1-\zeta} - K_{j-1}^{1-\zeta}}{1-\zeta}\right), \\ & \left(\frac{3c_2}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1}\left(\frac{K_j^{1-\zeta} - K_{j-1}^{1-\zeta}}{1-\zeta}\right)\right)^{1/(1-\sigma)} \\ & \left(\frac{3c_3}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1}\left(\frac{K_j^{1-\zeta} - K_{j-1}^{1-\zeta}}{1-\zeta}\right)\left(\frac{(K_j - K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}\right)^{\eta}\right)^{1/(1-\eta)} \} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Clairement $B_{R_j} \neq \varnothing$ est convexe ,borné et fermé ,Maintenant nous prouvons dans les trois étapes suivantes que M satisfait les hypothèses du théorème 3

Étape I

$M(B_{R_j}) \subseteq B_{R_j} \neq \varnothing$

Pour $x \in B_{R_j}$ d'après la proposition 3.2.1 et (H_2) ,on obtient

$$
\begin{aligned}
|Mx(\tau)| &= \left| \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu)\psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right) d\mu \right| \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu) \left|\psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right)\right| d\mu \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu)\mu^{-\zeta}\left(c_1 + c_2|x(\mu)|^{\sigma} + c_3\left|I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right|^{\eta}\right) d\mu \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \\
&\quad \int_{K_{j-1}}^{K_j} \mu^{-\zeta}\left(c_1 + c_2|x(\mu)|^{\sigma} + c_3\left(\frac{(K_j-K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}\right)^{\eta} \|x\|_{E_j}^{\eta}\right) d\mu \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1}\left(\frac{K_j^{1-\zeta} - K_{j-1}^{1-\zeta}}{1-\zeta}\right) \\
&\quad \left(c_1 + c_2 R_j^{\sigma} + c_3\left(\frac{(K_j-K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}\right)^{\eta} R_j^{\eta}\right) \\
&\leq \frac{R_j}{3} + \frac{R_j}{3} + \frac{R_j}{3} = R_j
\end{aligned}
$$

ce qui signifie que $M(B_{R_j}) \subseteq B_{R_j}$

Étape II

M est continue , Supposons que (x_m) est une suite $x_m \to x \in E_j$ on vérifier que :

$$
\|(Mx_m) - (Mx)\|_{E_j} \to 0, \quad m \to \infty \tag{3.21}
$$

En effet ,pour $\tau \in \mathfrak{J}_j$ par la proposition 3.2.1 et (H_3) On obtenir

$$\begin{aligned}
&|(Mx_m)(\tau) - (Mx)(\tau)| \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu) \left|\psi\left(\mu, x_m(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x_m(\mu)\right) - \psi\left(\mu, x(\mu), J_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right)\right| d\mu \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(v_j)} \left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\psi\left(\mu, x_m(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x_m(\mu)\right) - \psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right)\right| d\mu \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(v_j)} \left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \int_{K_{j-1}}^{K_j} \mu^{-\zeta}\left(W|x_m(\mu) - x(\mu)| + LI_{K_{j-1}^+}^{v_j}|x_m(\mu) - x(\mu)|\right) d\mu \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(v_j)} \left(\frac{K_j - K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \left[W\|x_m - x\|_{E_j} \int_{K_{j-1}}^{K_j} \mu^{-\zeta} d\mu + L\|I_{K_{j-1}^+}^{v_j}(x_m - x)\|_{E_j} \int_{K_{j-1}}^{K_j} \mu^{-\zeta} d\mu\right] \\
&\leq \frac{\left(K_j^{1-\zeta} - K_{j-1}^{1-\zeta}\right)(K_j - K_{j-1})^{v_j-1}}{4^{v_j-1}(1-\zeta)(\Gamma_{v_j})} \left(W + \frac{L\,(K_j - K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}\right) \|x_m - x\|_{E_j}
\end{aligned}$$

Alors

$$\|(Mx_m) - (Mx)\|_{E_j} \to 0, \quad m \to \infty \tag{3.22}$$

Par conséquent M est un opérateur continu sur E_j.

Étape III

M est compact

Maintenant nous allons prouver que $M(B_{R_j})$ est relativement compact M ,c'est à dire qu'il est compact ,clairement $M(B_{R_j})$ est uniformément borné car par L'étape II nous avons :

$$M(B_{R_j}) = \left\{M(x) : x \in B_{R_j}\right\} \subset B_{R_j} \tag{3.23}$$

Ainsi pour chaque $x \in B_{R_j}$ nous avons $\|M(x)\|_{E_j} \leq R_j$ qui signifie que $M(B_{R_j})$ est uniformément borné .Il reste à prouver que $M(B_{R_j})$ est équicontinue.

Pour $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{J}_j, \tau_1, \tau_2$ et $x \in B_{R_j}$ et $\psi^* = \sup\limits_{\mu \in \mathfrak{J}_j} \psi(\mu, 0, 0)$

On a

$$
\begin{aligned}
&|(Mx)(\tau_2)-(Mx)(\tau_1)| \\
&= \left| \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau_2,\mu)\psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right) d\mu - \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau_1,\mu)\psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right) d\mu \right| \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left| \left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right)\right| d\mu \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left| \left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\left(\psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right)-\psi(\mu,0,0)+\psi(\mu,0,0)\right)\right| d\mu \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| \left|\psi\left(\mu, x(\mu), I^{v_j}_{K^+_{j-1}} x(\mu)\right)-\psi(\mu,0,0)\right| d\mu \\
&+ \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| \left|\psi(\mu,0,0)\right| d\mu \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| \left[\mu^{-\zeta}\left(W|x(\mu)|+L|I^{v_j}_{K^+_{j-1}}(x(\mu))|\right)\right] d\mu \\
&+ \psi^* \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| d\mu \\
&\leq \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| \left[\mu^{-\zeta}\left(W|x(\mu)|+\frac{L(K_j-K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}|(x(\mu))|\right)\right] d\mu \\
&+ \psi^* \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| d\mu \\
&\leq K_{j-1}^{-\zeta}\left(W+\frac{L(K_j-K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}\right) R_j \times \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| d\mu \\
&+ \psi^* \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\left(G_j(\tau_2,\mu)-G_j(\tau_1,\mu)\right)\right| d\mu
\end{aligned}
$$

Par la continuité de la fonction de Green G_j *par conséquent*

$$
|(Mx)(\tau_2)-(Mx)(\tau_1)| \to 0 \tag{3.24}
$$

Comme $|\tau_2-\tau_1| \to 0$ *, li bée de* $x \in B_{R_j}$ *ce la implique que* $M(B_{R_j})$ *équicontinue , Des étapes I à III et du théorème d'Arzela-Ascoli on peut conclure que* M *est complément continue*
d'après le théorème 3 le problème 3.11 possède au moins un solution $\tilde{x}_j$ *dans* B_{R_j} *on obtient*

$$
\tilde{x}_j(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, K_{j-1}] \\ \tilde{x}_j(\tau), & \tau \in \mathfrak{J}_j \end{cases} \tag{3.25}
$$

On sait que $x_j \in C([0,K_j],\mathbb{R})$ défini par 3.25 vérifie l'équation suivante

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\int_0^{K_1}\frac{(\tau-\mu)^{1-v_1}}{\Gamma(2-v_1)}x_j(\mu)d\mu+...+\int_{K_{j-1}}^{\tau}\frac{(\tau-\mu)^{1-v_1}}{\Gamma(2-v_j)}x_j(\mu)d\mu\right)$$
$$+\psi\left(\mu,\tilde{x}_j(\mu),I^{v_j}_{K^+_{j-1}}\tilde{x}_j(\mu)\right)=0$$

Pour $\tau \in \mathfrak{J}$ ce que signifie que x_j est un e solution de 3.9 avec $x_j(0)=0, x_j(K_j)=\tilde{x}_j(K_j)$, En conséquence , on comprend que le problème (3.1) admet au moins une solution définie par

$$\tilde{x}(\tau)=\begin{cases} x_1(\tau), & \tau\in\mathfrak{J}_1\\ x_2(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\in\mathfrak{J}_1\\ \tilde{x}_2(\tau), & \tau\in\mathfrak{J}_2\end{cases}\\ .\\ .\\ x_j(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\in[0,K_{j-1}]\\ \tilde{x}_j(\tau), & \tau\in\mathfrak{J}_j\end{cases}\end{cases} \tag{3.26}$$

et l'argument est terminé
Discutions notre deuxième résultat que repose sur la Prpco-Banach

Théorème 6 *Supposons que (H_1) et (H_3) soient vérifiées et si*

$$\frac{\left(K_j^{1-\zeta}-K_{j-1}^{1-\zeta}\right)(K_j-K_{j-1})^{v_{j-1}}}{4^{v_j-1}(1-\zeta)\Gamma(v_j)}\left(W+\frac{L\,(K_j-K_{j-1})^{v_{j-1}}}{\Gamma(v_j+1)}\right)<1 \tag{3.27}$$

alors on trouve une solution unique pour problème 3.1 en E_j

Preuve 3.3. *Utilisons le Prpco-Banach pour montrer que M défini dans 3.18 a un* *point fixe unique ,D' après la proposition 3.2.1 et (H_3) ,et pour $x(\tau), y(\tau) \in E_j$*

$$
\begin{aligned}
&|(Mx)(\tau)-(My)(\tau)| \\
&= \left| \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu)\psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right) d\mu - \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu)\psi\left(\mu, y(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} y(\mu)\right) d\mu \right| \\
&\le \int_{K_{j-1}}^{K_j} G_j(\tau,\mu)\left|\psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} x(\mu)\right) - \psi\left(\mu, y(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} y(\mu)\right)\right| d\mu \\
&\le \frac{1}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j-K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \int_{K_{j-1}}^{K_j} \left|\psi\left(\mu, x(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{\Omega_j} x(\mu)\right) - \psi\left(\mu, y(\mu), I_{K_{j-1}^+}^{v_j} y(\mu)\right)\right| d\mu \\
&\le \frac{1}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j-K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \int_{K_{j-1}}^{K_j} \mu^{-\zeta}\left(W|x(\mu)-y(\mu)|, I_{K_{j-1}^+}^{v_j}|x(\mu)-y(\mu)|\right) d\mu \\
&\le \frac{1}{\Gamma(v_j)}\left(\frac{K_j-K_{j-1}}{4}\right)^{v_j-1} \left[W\|x_-y\|_{E_j}\int_{K_{j-1}}^{K_j}\mu^{-\zeta}d\mu + L\|I_{K_{j-1}^+}^{v_j}(x-y)\|_{E_j}\int_{K_{j-1}}^{K_j}\mu^{-\zeta}d\mu\right] \\
&\le \frac{\left(K_j^{1-\zeta}-K_{j-1}^{1-\zeta}\right)(K_j-K_{j-1})^{v_{j-1}}}{4^{v_j-1}(1-\zeta)\Gamma(v_j)}\left(W+L\frac{(K_j-K_{j-1})^{v_j}}{\Gamma(v_j+1)}\right)\|x-y\|_{E_j}
\end{aligned}
$$

Par conséquent ,D'après 3.27 l'opérateur M est une contraction
Ainsi par Prpco-Banach ,on peut trouver un point fixe $\tilde{x}_j \in E$ pour unique M du problème 3.11 on laisse

$$
x_j(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, K_{j-1}] \\ \tilde{x}_j(\tau), & \tau \in \mathfrak{J}_j \end{cases} \tag{3.28}
$$

On supposant $C([0,K_j],\mathbb{R})$ comme l'ensemble de tout les fonctions continue $[0,K_j]$ dans $\mathbb{R}$,nous savons que $x_j \in C([0,K_j],\mathbb{R})$ défini par 3.28 satisfait l'équation suivante :

$$
\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\int_0^{k_1}\frac{(\tau-\mu)^{1-v_1}}{\Gamma(2-v_1)}x_j(\mu)d\mu + ... + \int_{k_{j-1}}^{\tau}\frac{(\tau-\mu)^{1-v_j}}{\Gamma(2-v_j)}x_j(\mu)d\mu\right) + \psi\left(\tau, \tilde{x}(\tau), I_{0^+}^{v(\tau)}\tilde{x}(\tau)\right) = 0 \tag{3.29}
$$

pour $\tau \in \mathfrak{J}_j$ ce que signifie que x_j est une unique solution de 3.9 avec $x_j(0) = 0$

et $x_j(K_j) = \tilde{x}_j(K_j) = 0$ puis

$$x(\tau)\begin{cases} x_1(\tau), & \tau \in \mathfrak{J}_1 \\ x_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in \mathfrak{J}_1 \\ \tilde{x}_2(\tau), & \tau \in \mathfrak{J}_2 \end{cases} \\ . \\ . \\ x_j(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, K_{j-1}] \\ \tilde{x}_j(\tau), & \tau \in \mathfrak{J}_j \end{cases} \end{cases} . \tag{3.30}$$

est une seule solution au problème proposé 3.1 et l'argument et terminé

3.3 Application

Un exemple numérique illustra-tif est donné dans cette section pour appliquer et valider tous nos résultats théoriques

Exemple 3.3.1. Considérez le problème fractionnaire :

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{0^+}^{v(\tau)} x(\tau) + \dfrac{\tau^{-1/5}}{1 + |x(\tau)| + |J_{0^+}^{v(\tau)} x(\tau)|} = 0, & \tau \in \mathfrak{J} := [0,2] \\ x(0) = 0, & x(2) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

on obtient

$$\psi(\tau, s, h) = \frac{\tau^{-1/5}}{1 + |s| + |h|}, \qquad (\tau, s, h) \in [0,2] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \tag{3.32}$$

$$v(\tau) = \begin{cases} 1.7, & \tau \in \mathfrak{J}_1 := [0.1] \\ 1.8, & \tau \in \mathfrak{J}_2 := (1.2] \end{cases} \tag{3.33}$$

On voit que $v(\tau)$ satisfait condition (H_1) Nous avons

$$\begin{aligned} \tau^{1/5}|\psi(\tau, s_1, h_1) - \psi(\tau, s_2, h_2)| \\ &= \left|\tau^{1/5}\left(\frac{\tau^{-1/5}}{1 + |s_1| + |h_1|} - \frac{\tau^{-1/5}}{1 + |s_2| + |h_2|}\right)\right| \\ &= \left|\frac{|s_2| + |h_2| - |s_1| - |h_1|}{(1 + |s_1| + |h_1|)(1 + |s_2| + |h_2|)}\right| \\ &\le |s_2| - |s_1| + |h_2| - |h_1| \le |s_2 - s_1| + |h_2 - h_1| \end{aligned} \tag{3.34}$$

Ainsi (H_3) tient avec $\zeta = 1/5$ et$W = L = 1$,D'après 1.3 l'équation du problème 3.31 divisée en deux expressions comme suit :

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{0^+}^{1.7} x(\tau) + \dfrac{\tau^{-1/5}}{1 + |x(\tau)| + |J_{0^+}^{1.7} x(\tau)|} = 0, & \tau \in [0,1] \\ \mathfrak{D}_{1^+}^{1.8} x(\tau) + \dfrac{\tau^{-1/5}}{1 + |x(\tau)| + |J_{0^+}^{1.8} x(\tau)|} = 0, & \tau \in (1.2] \end{cases} \tag{3.35}$$

Pour $\tau \in [0,1]$ le problème 3.31 correspond au problème suivant

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{0^+}^{1.7} x(\tau) + \dfrac{\tau^{-1/5}}{1 + |x(\tau)| + |J_{0^+}^{1.7} x(\tau)|} = 0, & \tau \in [0,1] \\ x(0) = 0, & x(1) = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

Nous vérifierons que la condition 3.27 est satisfaite comme suit :

$$\frac{\left(K_1^{1-\zeta} - K_0^{1-\zeta}\right)(K_1 - K_0)^{v_1 - 1}}{4^{v_1 - 1}(1-\zeta)\Gamma(v_1)} \left(W + \frac{L\,(K_1 - K_0)^{v_1}}{\Gamma(v_1 + 1)}\right)$$

$$= \frac{5}{4^{1.7}\Gamma(1.7)} \left(1 + \frac{1}{\Gamma(2.7)}\right) \simeq 0.8587 < 1 \tag{3.37}$$

D'après la théorème 6 ,on trouve une solution $x_1 \in C_1$ uniquement pour le problème 3.36

D'après $\tau \in [1,2]$ le problème 3.31 peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \mathfrak{D}_{1^+}^{1.8} x(\tau) + \dfrac{\tau^{-1/5}}{1 + |x(\tau)| + |J_{0^+}^{1.8} x(\tau)|} = 0, & \tau \in (1.2] \\ x(1) = 0, & x(2) = 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

On voit ça

$$\frac{\left(K_2^{1-\zeta} - K_1^{1-\zeta}\right)(K_2 - K_1)^{v_2 - 1}}{4^{v_2 - 1}(1-\zeta)\Gamma(v_2)} \left(W + \frac{L\,(K_2 - K_1)^{v_2}}{\Gamma(v_2 + 1)}\right)$$

$$= \frac{5(2^{4/5} - 1)}{4^{1.8}\Gamma(1.8)} \left(1 + \frac{1}{\Gamma(2.8)}\right) \simeq 0.5237 < 1 \tag{3.39}$$

Ainsi ,la condition 3.27 est satisfaite .Par le théorème 6 ,il est trouvé une solution uniquement au problème 3.38 il est connu que

$$x_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, 1] \\ \tilde{x}_2(\tau), & \tau \in (1.2] \end{cases} \tag{3.40}$$

Maintenant ,à partir de la définition (3.2.1), le problème (3.31) admet une solution unique défini par :

$$x(\tau) = \begin{cases} x_1(\tau), & \tau \in [0, 1] \\ x_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, 1] \\ \tilde{x}_2(\tau), & \tau \in (1.2] \end{cases} \end{cases} \tag{3.41}$$

conclusion

Notre but principal dans ce travail est de présenter plusieurs résultats d'existence et d'unicité des solutions pour des équations différentielles non linéaires à dérivées fractionnaires d'ordre variable sur des intervalles finis(EqsDFNnL)aux sens de Riemann-Liouville.

Ce résultat on été obtenus par l'utilisation de la théorie de point fixe,en particulier on a utilisé le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach (Prpco-Banach).

Un exemple numérique est donné à la fin pour appliquer et valider la potentialité de tous nos résultats théoriques.

Bibliography

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006

[2] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, "Theory and applications of fractional differential equations," in North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] S. G. Samko, "Fractional integration and differentiation of variable order," Analysis Mathematica, vol. 21, no. 3, pp. 213–236, 1995.

[5] S. G. Samko and B. Boss, "Integration and differentiation to a variable fractional order," Integral Transforms and Special Functions, vol. 1, no. 4, pp. 277–300, 1993.

[6] S. Zhang, S. Sun, and L. Hu, "Approximate solutions to initial value problem for differential equation of variable order," Journal of Fractional Calculus and Applications, vol. 9, no. 2, pp. 93–112, 2018.

[7] S. Zhang and L. Hu, "The existence of solutions and generalized Lyapunov-type inequalities to boundary value problems of differential equations of variable order," AIMS Mathematics, vol. 5, no. 4, pp. 2923–2943, 2020.

[8] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[9] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, USA, 1999.

[10] D. Baleanu, S. Etemad, and S. Rezapour, "A hybrid Caputo fractional modeling for thermostat with hybrid boundary value conditions," Boundary Value Problems, vol. 2020, no. 1, 2020

[11] A. K. Golmankhane, K. K. Ali, R. Yilmazer, and M. K. A. Kaabar, "Economic models involving time fractal," Journal of Mathematics and Modeling in Finance, vol. 2020, no. 1, pp. 181–200, 2020.

[12] M. M. Matar, M. I. Abbas, J. Alzabut, M. K. A. Kaabar, S. Etemad, and S. Rezapour, "Investigation of the p-Laplacian nonperiodic nonlinear boundary value problem via generalized Caputo fractional derivatives," Advances in Difference Equations, vol. 2021, no. 1, 2021

[13] F. Martínez, I. Martínez, M. K. A. Kaabar, and S. Paredes, "On conformable Laplace's equation," Mathematical Problems in Engineering, vol. 2021, Article ID 5514535, 10 pages, 2021

[14] A. Akgül, M. Inc, and D. Baleanu, "On solutions of variableorder fractional differential equations," An International Journal of Optimization and Control: Theories Applications (IJOCTA), vol. 7, no. 1, pp. 112–116, 2017.

[15] H. G. Sun, A. Chang, Y. Zhang, and W. Chen, "A review on variable-order fractional differential equations: mathematical, foundations, physical models, and its applications," Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 22, no. 1, 2018.

[16] A. Raminia, A. F. Dizaji, and V. J. Majd, "Solution existence for non-autonomous variable-order fractional differential equations," Mathematical and Computer Modelling, vol. 55, no. 3- 4, pp. 1106–1117, 2012.

[17] C. F. M. Coimbra, "Mechanics with variable-order differential operators," Annalen der Physik, vol. 12, no. 1112, pp. 692–703, 2003.

[18] R. Lin, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, "Stability and convergence of a new explicit finite-difference approximation for the variable-order nonlinear fractional

diffusion equation," Applied Mathematics and Computation, vol. 212, no. 2, pp. 435–445, 2009.

[19] P. Zhuang, F. Liu, V. Anh, and I. Turner, "Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term," SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 47, no. 3, pp. 1760–1781, 2009.

[20] J. F. G. Aguilar, "Analytical and numerical solutions of a nonlinear alcoholism model via variable-order fractional differential equations," Physica A, vol. 494, pp. 52–75, 2018

[21] H. Aydi, M. Jleli, and B. Samet, "On positive solutions for a fractional thermostat model with a convex-concave source term via ψ-Caputo fractional derivative," Mediterranean Journal of Mathematics, vol. 17, no. 1, p. 16, 2020.

[22] S. T. M. Thabet, S. Etemad, and S. Rezapour, "On a coupled Caputo conformable system of pantograph problems," Turkish Journal of Mathematics, vol. 45, no. 1, pp. 496–519, 2021.

[23] S. A. Khan, K. Shah, G. Zaman, and F. Jarad, "Existence theory and numerical solutions to smoking model under CaputoFabrizio fractional derivative," Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, vol. 29, no. 1, article 013128, 2019.

[24] S. T. M. Thabet, S. Etemad, and S. Rezapour, "On a new structure of the pantograph inclusion problem in the Caputo conformable setting," Boundary Value Problems, vol. 2020, no. 1, 2020.

[25] H. Mohammadi, S. Kumar, S. Rezapour, and S. Etemad, "A theoretical study of the Caputo-Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to mumps virus with optimal control," Chaos, Solitons and Fractals, vol. 144, p. 110668, 2021.

[26] E. Karapinar, A. Fulga, M. Rashid, L. Shahid, and H. Aydi, "Large contractions on quasi-metric spaces with an application to nonlinear fractional differential equations," Mathematics, vol. 7, no. 5, p. 444, 2019.

[27] D. Baleanu, A. Jajarmi, H. Mohammadi, and S. Rezapour, “A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo-Fabrizio fractional derivative,” Chaos, Solitons and Fractals, vol. 134, p. 109705, 2020

[28] B. Alqahtani, H. Aydi, E. Karapinar, and V. Rakocevic, “A solution for Volterra fractional integral equations by hybrid contractions,” Mathematics, vol. 7, no. 8, p. 694, 2019.

[28] S. Rezapour, A. Imran, A. Hussain, F. Martínez, S. Etemad, and M. K. A. Kaabar, “Condensing functions and approximate endpoint criterion for the existence analysis of quantum integro-difference FBVPs,” Symmetry, vol. 13, no. 3, p. 469, 2021.

[29] F. Martnez, I. Martnez, M. K. A. Kaabar, and S. Paredes, “New results on complex conformable integral,” AIMS Mathematics, vol. 5, no. 6, pp. 7695–7710, 2020.

[30] F. Martnez, I. Martnez, M. K. A. Kaabar, R. Ortz-Munuera, and S. Paredes, “Note on the conformable fractional derivatives and integrals of complex-valued functions of a real variable,” IAENG International Journal of Applied Mathematics, vol. 50, pp. 609–615, 2020

[31] A. Akgül, M. Inc, and D. Baleanu, “On solutions of variableorder fractional differential equations,” An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications (IJOCTA), vol. 7, no. 1, pp. 112–116, 2017

[32] D. Valerio and J. S. Costa, “Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations,” Signal Processing, vol. 91, no. 3, pp. 470–483, 2011.

[33] J. V. D. C. Sousa and E. C. de Oliverira, “Two new fractional derivatives of variable order with non-singular kernel and fractional differential equation,” Computational and Applied Mathematics, vol. 37, no. 4, pp. 5375–5394, 2018.

[34] S. Zhang and L. Hu, “Unique existence result of approximate solution to initial value problem for fractional differential equation of variable order involving the derivative arguments on the half-axis,” Mathematics, vol. 7, no. 286, pp. 1–23, 2019.

[35] S. Zhang, "Existence of solutions for two point boundary value problems with singular differential equations of variable order," Electronic Journal of Differential Equations, vol. 245, pp. 1–16, 2013.