

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : **Génie Civil**

Option : **Structures**

Présenté par :

BENOUADAH Nawel

BOUSSAADIA Ismahane

Sujet du mémoire

Un nouveau modèle analytique pour l'étude de la flexion
des plaques sandwichs en FGM

Soutenu publiquement le /06/2022 devant le jury composé de :

M. DRAICHE Kada

Président

Mme. KHELIFA Zoubida

Rapporteur

M. TLIDJI Youcef

Examineur

Mme. Ouazir khatima

Examineur

PROMOTION : 2021/2022

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de mes grands-parents.

Mes Très Chers Parents, tous les mots du monde ne sauraient exprimer l'immense amour que je vous porte, ni la profonde gratitude que je vous témoigne pour tous les efforts et les sacrifices que vous n'avez jamais cessés de consentir pour mon instruction et mon bien-être.

J'espère avoir répondu aux espoirs que vous avez fondés en moi.

A mes frères et mes sœurs, merci pour votre amour et soutien.

A tous ceux ou celles qui me sont chers et que j'ai omis involontairement de citer.

Navel

Dédicaces

*C'est avec un très grand honneur que je dédie ce modeste travail aux
Personnes les plus chères au monde, mes chers parents pour leurs amours
Et bonté et que sans eux je n'aurai jamais pu atteindre mon objectif, que*

Dieu me les garde

À...

Mes parents

Mes sœurs

Mes frères

Tous mes amis

*Tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans
L'accomplissement de ce travail.*

Ismahane

Remerciements

*Nous remercions tout d'abord le grand Dieu pour l'achèvement de ce
Mémoire.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre rapporteur
Mme khelifa zoubida de nous avoir proposé ce sujet, et pour ces
Précieuses conseils tout au long de notre travail, son aide, sa
Confiance et bien sur sa disponibilité.*

*A tous les enseignants du département de Génie civil qui nous ont
fait bénéficier de leurs connaissances et leurs compétences.*

*Aux membres du jury, d'avoir accepté de prendre part à ce jury ainsi
Que pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

*A tous ceux qui nous ont aidé à terminé ce modeste travail trouvant ici
L'expression de nos remerciements les plus sincères.*

Résumé

Ce travail a pour objectif d'analyser la flexion statique des plaques sandwichs en matériaux fonctionnellement gradués « FGM », simplement appuyées en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (2D) qui se base sur un nouveau modèle du champ de déplacement. Dans ce type de plaque, Les propriétés matérielles de la plaque sandwich FGM varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des différents constituants. La théorie proposée implique que quatre variables et explique la variation des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions aux limites de la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans avoir besoin d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont dérivées en employant le principe des travaux virtuels : ensuite les solutions des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées ont été obtenues à l'aide de la procédure de Navier. Afin de confirmer la précision et l'efficacité de la présente théorie, plusieurs résultats numériques sont présentés et comparés avec d'autres théories HSDTs existantes dans la littérature.

MOTS CLES : plaques sandwichs FGM , flexion statique , équations d'équilibre , solution de Navier

Abstract

This work aims to analyze the static bending of sandwich plates made of functionally graded materials "FGM", simply supported using a high order (2D) shear deformation theory which is based on a new model of the displacement field. In this type of plate, the material properties of the FGM sandwich plate vary according to a power law distribution in terms of the volume fraction of the different constituents. The proposed theory involves only four variables and explains the variation of transverse shear stresses through thickness by satisfying the zero stress boundary conditions at the top and bottom surfaces of the plate without the need for a correction factor of shear. The balance equations and the boundary conditions are derived using the principle of virtual work: then the solutions of the simply supported FGM sandwich plates were obtained using the Navier procedure. In order to confirm the accuracy and efficiency of this theory, several numerical results are presented and compared with other existing HSDT theories in the literature.

KEY WORDS: FGM sandwich plates , static bending , balance equations , Navier procedure.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحليل الانحناء الثابت لألواح الساندويتش المصنوعة من مواد متدرجة وظيفيًا، والتي يتم دعمها ببساطة باستخدام نظرية تشوه القص عالية المستوى (ثنائية الأبعاد) بناءً على نموذج جديد لمجال الإزاحة. في هذا النوع من الألواح، تختلف الخصائص المادية لصفحة الساندويتش المتدرجة وظيفيًا وفقًا لتوزيع قانون الطاقة من حيث حجم الجزء من المكونات المختلفة. تتضمن النظرية المقترحة أربعة متغيرات وتفسر تباين القص العرضي والتوزيع المقعر للإجهادات في اتجاه ارتفاع الصفحة وتحقيق شروط انعدام الإجهادات ذات القص على مستوى الجهة العليا والسفلى للصفحة دون الحاجة إلى عامل تصحيح القص. يتم اشتقاق معادلات التوازن والحدود باستخدام مبدأ الأعمال الافتراضية، من أجل تأكيد دقة وفعالية النظرية الحالية، تم الحصول على حلول لوحدات الساندويتش في المواد المتدرجة وظيفيًا عن طريق حل نافي يتم تقديم العديد من النتائج العددية ومقارنتها بالنظريات الكلاسيكية ذات الدرجات العليا.

الكلمات المفتاحية: مواد متدرجة وظيفيًا، ألواح ساندويتش، انحناء ساكن، معادلة التوازن، حل نافي.

Sommaire

Liste des notations	i
Liste des figures	iii
Liste des tableaux.....	iv
Introduction générale.....	1
Chapitre I. Généralités sur les matériaux FGM et les sandwichs	3
I.1 Introduction	3
I.2 Historique et concept des FGM.....	4
I.3. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	5
I.4. Propriétés des matériaux FGM	7
I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	8
I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	10
I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	11
I.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	12
I.6. Processus et technique de fabrication des FGM.....	13
I.7. Avantages et inconvénients des matériaux FGM	14
I.7.1. Avantages des matériaux FGM	14
I.7.2. Inconvénient des matériaux FGM	14
I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients FGM.....	15
I.9. Les matériaux sandwichs.....	15
I.10. Éléments constituant les matériaux sandwichs	17
I.10.1. Peaux	17
I.10.2. Âme	17
I.10.3. Interface.....	18
I.11. Conception des structures sandwichs	19
I.12. Sollicitations et modes de dégradations des sandwichs	19
I.13. Théorie des matériaux sandwichs.....	20
I.13.1. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs	20
I.14. Intérêt des structures sandwichs	21
I.15. Structures sandwichs en FGM	21

Sommaire

I.16. Conclusion.....	22
Chapitre II. Les différentes Théories des plaques	23
II.1. Introduction	23
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle	24
II.2.1. Approche monocouche équivalente	24
II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT).....	24
II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT).....	25
II.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur.....	26
II.2.2. Approche par couche	30
II.2.2.1. Les modèles zig-zag	31
II.2.2.2. Les modèles couches discrètes	32
II.3. Conclusion.....	33
Chapitre III. Analyse de la flexion des plaques sandwichs en FGM.....	35
III.1. Introduction.....	35
III.2. Description du problème et équation de base	35
III.2.1. Configuration géométrique.....	35
III.2.2. Cinématique et équations constitutive.....	37
III.2.2.1. Champs de déplacement	37
III.2.2.2. Champs de déformation	38
III.2.2.3. Relations constitutives	39
III.2.2.4. Equations de mouvement.....	39
III.2.3. Solutions analytiques des plaques sandwichs FGM	44
III.3. Les différents types de plaques sandwichs pour cette étude.....	47
III.4. Conclusion	48
Chapitre IV. Résultats et Discussions	49
IV.1. Introduction	49
IV.2. Analyse de la flexion des plaques sandwichs	50
IV.3 Conclusion.....	57

Sommaire

Conclusion générale	58
Références bibliographiques	59

Liste des notations

$[\]$	Matrice
$\{ \}$	Vecteur colonne
E	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
ν	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
α, β	Paramètres
P	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
θ	Rotation de la surface neutre
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Déformations normales
$\delta_u, \delta_v, \delta_w$	Champ virtuel de déplacement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments dû à la flexion
S_{xz}, S_{yz}	Moment dû au cisaillement transverse

Liste des notations

A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$f(z)$	Fonction de cisaillement

Liste des figures

Figure I- 1. Caractéristiques des matériaux composites FGM.....	3
Figure I-2. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [3].....	6
Figure I-3. La distribution composante des matériaux	7
Figure I-4. Géométrie d'une plaque FGM.....	9
Figure I-5. La variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	10
Figure I-6. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	12
Figure I-7. Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM.....	13
Figure I-8. Schéma d'un sandwich [15].....	16
Figure I-9. Matériaux sandwichs à âmes pleines	18
Figure I-10. Matériaux sandwichs à âmes creuses.....	18
Figure II-1. Cinématique de Love-Kirchhoff.	24
Figure II-2. Cinématique de Reissner-Mindlin.....	25
Figure II-3. Variation de la fonction de gauchissement	26
Figure II-4. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur	28
Figure II-5. Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [40].....	30
Figure II-6. Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [40].....	30
Figure II-7. Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [40]	31
Figure II- 8. Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [40].....	32
Figure III- 1. Géométrie de la plaque sandwich en matériau à gradient fonctionnel (FGM).....	36
Figure IV-1. Variation de la flèche dans les plaques sandwich FGM en fonction de l'indice de puissance P à $a/h=10$	54
Figure IV-2. Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-1-2 ($a/h = 10$).....	55
Figure IV-3. Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-2-1 ($a/h = 10$)	55
Figure IV-4. Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-1-2 ($a/h = 10$).....	56
Figure IV-5. Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-2-1($a/h=10$).....	56

Liste des tableaux

Tableau IV-1. Flèche adimensionnelle w des plaques carrées ($a/h = 10$)	51
Tableau IV-2. Contrainte normale adimensionnelle $\sigma_x(h/2)$ des plaques carrées ($a/h = 10$)	52
Tableau IV-3. Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0)$ des plaques carrées ($a/h = 10$).....	53

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux ont un rôle important de tout temps, parce qu'ils définissent le niveau du développement et le progrès de la civilisation à chaque époque. Au première développement, les humains utilisaient les matériaux simples, naturellement disponibles sur la surface de terre, grâce à leur faciliter d'utilisation dans différentes applications, comme la pierre, le silex, le bois, les peaux, les coquillages, diverses fibres, l'argile et la boue. Avec le temps jusqu'à l'arrivée à la technologie moderne, la nécessité à la découverte des nouveaux matériaux est devenue inévitable, la seule solution était des matériaux hybride qui combinent non seulement des matériaux simples mais permet aussi d'avoir des propriétés matérielles plus élevées, allient par exemple la rigidité, la résistance mécanique et la ténacité élevée avec une grande légèreté.

Les matériaux composites (conventionnels) ont atteint cet objectif, mais ils restent encore incapables de résister à des conditions de travail extrêmes correspondant à une différence de température très élevée qui conduit à une défaillance des composants par le processus de délaminage, à cause d'une transition brusque des propriétés à la jonction des matériaux.

Alors, pour surmonter ce problème, la transition nette des propriétés est remplacée par des propriétés variables lisses et continues du matériau dans une direction spatiale souhaitée telles que la résistivité à la corrosion, la conductivité thermique, la chaleur spécifique, la dureté et le rapport de rigidité, dans des nouveaux matériaux composites (avancés), nommés matériaux fonctionnellement gradués (FGM). En raison des caractéristiques importantes et tous ses avantages, les FGMs devenus bien meilleures que les matériaux composites conventionnels à utiliser dans de multiples applications. Par la suite, plusieurs efforts ont été déployés dans les recherches pour améliorer encore plus les propriétés des FGM, et dans notre travail, une nouvelle solution analytique est développée dont l'objectif est d'analyser la flexion des plaques sandwich FGM soumissent à une charge sinusoïdale, en utilisant une théorie de la déformation de cisaillement à quatre variables

Le présent mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre traite des généralités sur les matériaux à gradient de propriété et les matériaux sandwichs en FGM tout en définissant leurs concepts, leurs caractéristiques et leurs domaines d'application.

Le second chapitre est consacré à exposer les différentes théories des plaques à gradient fonctionnel, leurs hypothèses et leurs cinématiques de déplacement

Le troisième chapitre c'est un développement de la formulation mathématique basée sur une nouvelle théorie de déformation en cisaillement transverse pour l'analyse de la flexion des plaque sandwichs en FGM.

Quant au quatrième chapitre une comparaison et validation des résultats numériques, tout en les comparants avec ceux trouvés dans les études et théories relatives à l'étude de la flexion des plaques sandwichs en FGM.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette présente théorie dans la résolution du comportement de flexion des plaques sandwichs en FGM ainsi par des perspectives envisagées pour des travaux futurs.

Chapitre I.

Généralités sur les matériaux FGM et les sandwichs

Chapitre I. Généralités sur les matériaux FGM et les sandwichs

I.1 Introduction

Les matériaux fonctionnels FGM sont actuellement à l'avant-garde de la recherche sur les matériaux et bénéficient d'une attention mondiale, Ces nouveaux matériaux composites, connus en tant que matière à fonction graduée (FGM), sont largement utilisés dans les applications d'ingénierie en raison de leur résistance à gradient élevé de température tout en maintenant l'intégrité structurale. Ils sont généralement fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métaux pour atteindre l'exigence importante des propriétés du matériau (**figure I-1**). Les avantages considérables offerts par les FGM par rapport aux matériaux conventionnels et la nécessité de surmonter les défis techniques liés aux environnements à haute température ont conduit à une utilisation accrue des structures sandwichs et à incorporer dans leur construction les FGM comme feuilles de façade. Les matériaux composites sandwichs sont couramment utilisés dans les avions ainsi que dans de nombreuses sortes d'ouvrages de génie civil en raison de leurs excellents rapports de haute résistance/poids et rigidité/poids [1].

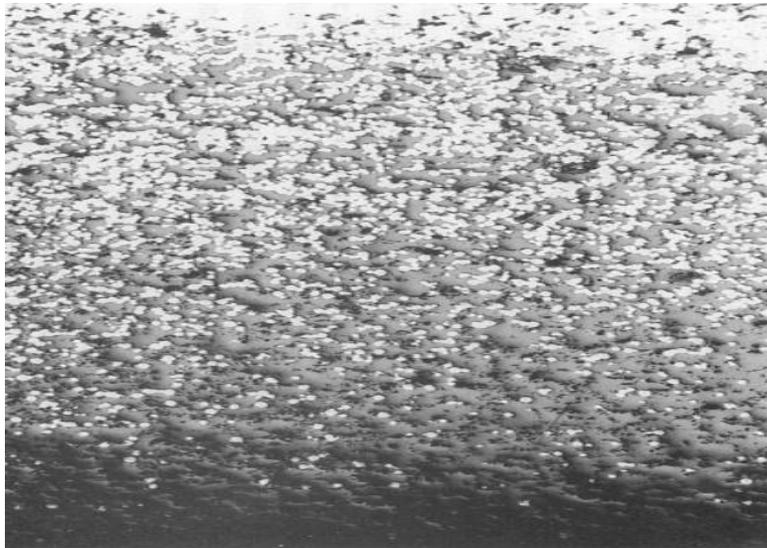


Figure I- 1. Caractéristiques des matériaux composites FGM

I.2 Historique et concept des FGM

Dans les structures multicouches classiques, des couches homogènes sont collées les unes aux autres pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustiques) de la structure (plaques sandwichs, structures renforcées par matériaux composites...). L'inconvénient, de cette démarche est de créer des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches qui peuvent conduire à des délaminages, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

La solution d'une transition continue des propriétés, par un gradient de composition, permet d'atténuer ces singularités par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Material "FGM"). Les matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

La création des FGM est apparue au Japon au début des années 1980, lorsque les chercheurs ont été confrontés à un problème nécessitant un type de matériau composite capable de résister à une différence de température très élevée [2]. En 1987 le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de Fonction et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux [3].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau.
- Ténacité du matériau côté basse température.
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc... [4].

I.3. Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement non homogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la **figure I-2**. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure

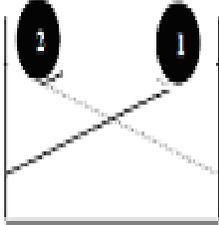
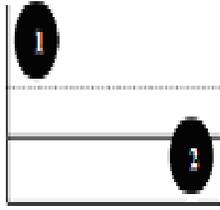
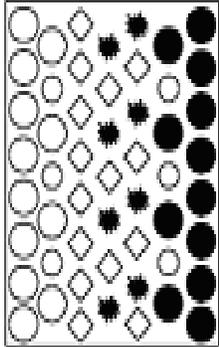
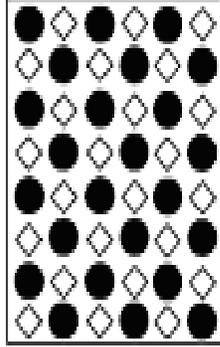
<p>Propriétés</p>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<p>Structure</p>	<p>Eléments constitutifs:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ○</p> <p>fibres ◆</p>		
<p>Matériaux</p>	<p>exemple</p>	<p>FGM</p>	<p>NON-FGM</p>

Figure I-2. Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [3]

Yoshihisa [5], a établi un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient évalué (FGM) et les matériaux conventionnels (figure I-3). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent les matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui est composé du métal et de la céramique réunie les caractéristiques de la bonne conductivité thermique et mécanique.

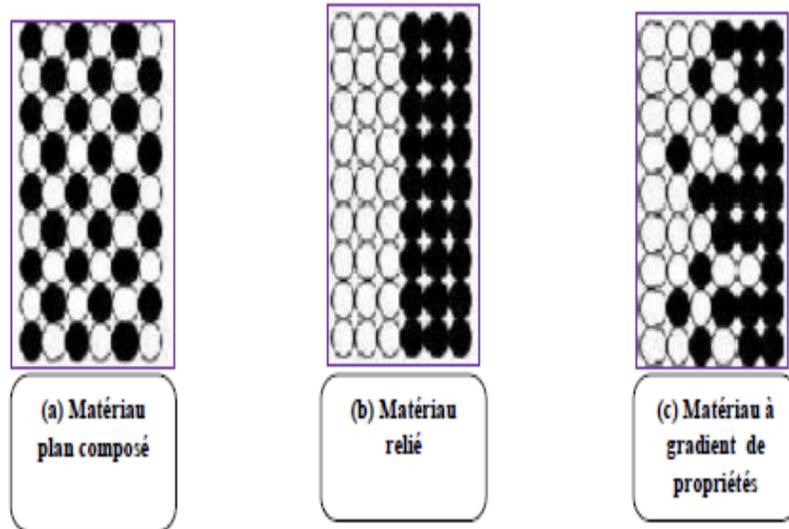


Figure I-3. La distribution composante des matériaux

1.4. Propriétés des matériaux FGM

Les matériaux FGM peuvent incorporer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation des céramiques avec la ténacité élevée, la résistance élevée, l'usinabilité et la capacité de liaison des métaux sans contrainte thermique interne sévère [2], souvent constitués de deux types de matériaux de base, céramique et métal, choisie en fonction des propriétés physiques de chaque composant [6].

- **Les métaux**

Lorsque la majorité des éléments chimiques dans le tableau de Mendeleïev sont les métaux, ils possèdent plusieurs avantages :

- Très bons conducteurs de chaleur,
- Très bons conducteurs d'électricité,
- Plus souvent durs et rigides,
- Déformables plastiquement,
- Un nombre important possèdent une température de fusion très élevée.

Les métaux les plus souvent utilisés sont le fer, le nickel, le tungstène, le titane, le magnésium et l'aluminium [6].

- **Les céramiques**

Les céramiques sont en général, des matériaux très durs, résultent de la combinaison des éléments métalliques (Al, Ni, Ti, Zr...) et non métalliques dont le plus courant est l'oxygène.

Ils sont largement utilisés comme abrasifs et typiquement dans les régions ou les environnements est réfractaires schématisés par leurs résistances mécaniques et thermiques très élevées [6]. Alors qu'ils ont généralement un comportement fragile ce qui réduit leurs emplois pour des applications où les chocs mécaniques et thermiques importants. Ce matériau est choisi grâce à ses caractéristiques exceptionnelles qui sont énumérées comme suit [2] :

- Faible réactivité chimique, bonne tenue à la corrosion,
- Haute température de fusion ou de décomposition,
- Haut module d'élasticité et haute dureté,
- Charge à la rupture élevée,
- Bas coefficient de frottement, bonne résistance à l'usure.

I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [7].

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants ; de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure. Comme le montre la **figure I-4** considérant une plaque élastique rectangulaire illustrant sa géométrie.

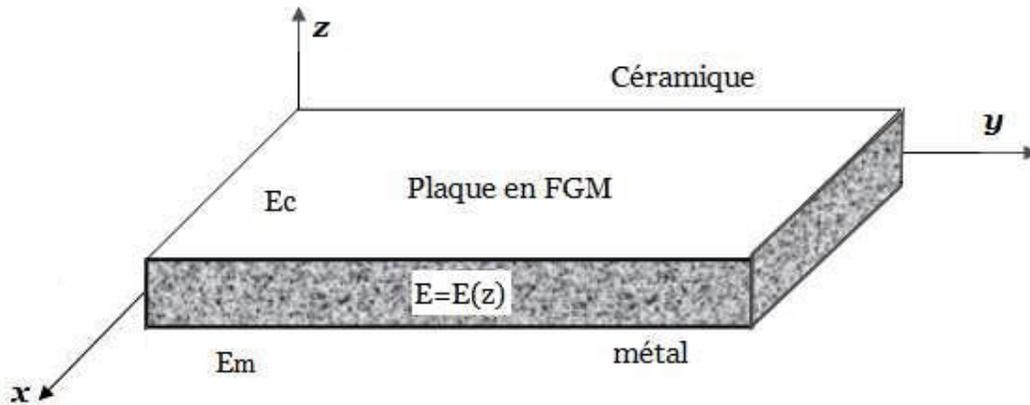


Figure I-4. Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Elles varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$ et $\nu = \nu(z)$.

Jin et al. [8] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^k \quad (1.5)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [9] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) V(z) \quad (1.6)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la **figure I-5**.

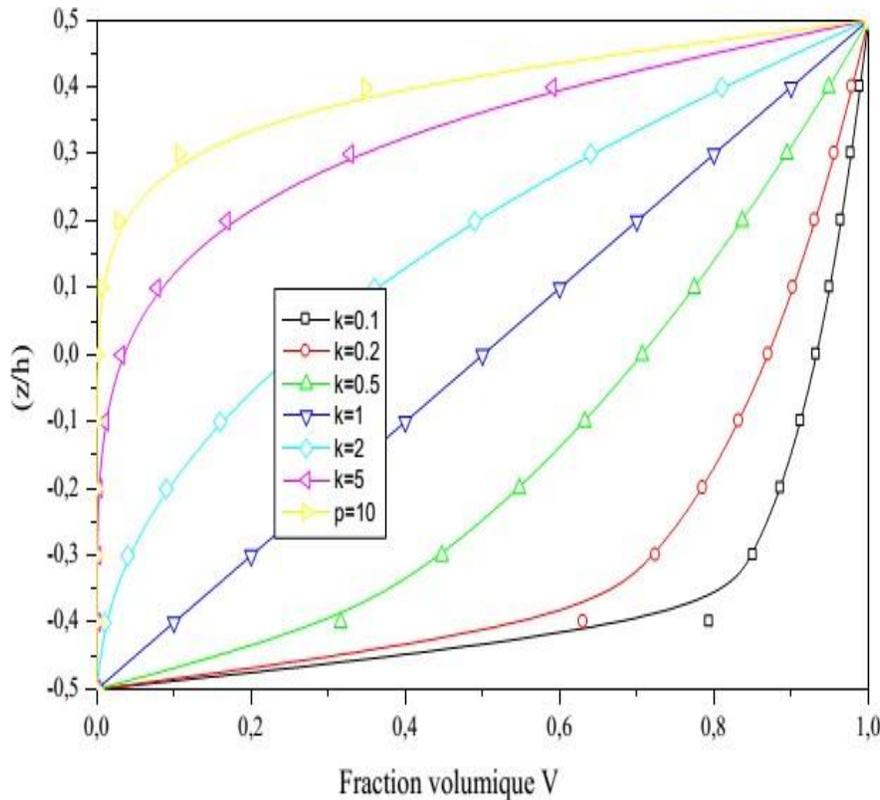


Figure I-5. La variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Chi et al. [10] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7a})$$

$$V(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.7b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \quad \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.8b})$$

La **figure I-6** montre que la variation de la fraction volumique définie par **les équations (I.7a) et (I.7b)** représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée : Plaque S-FGM.

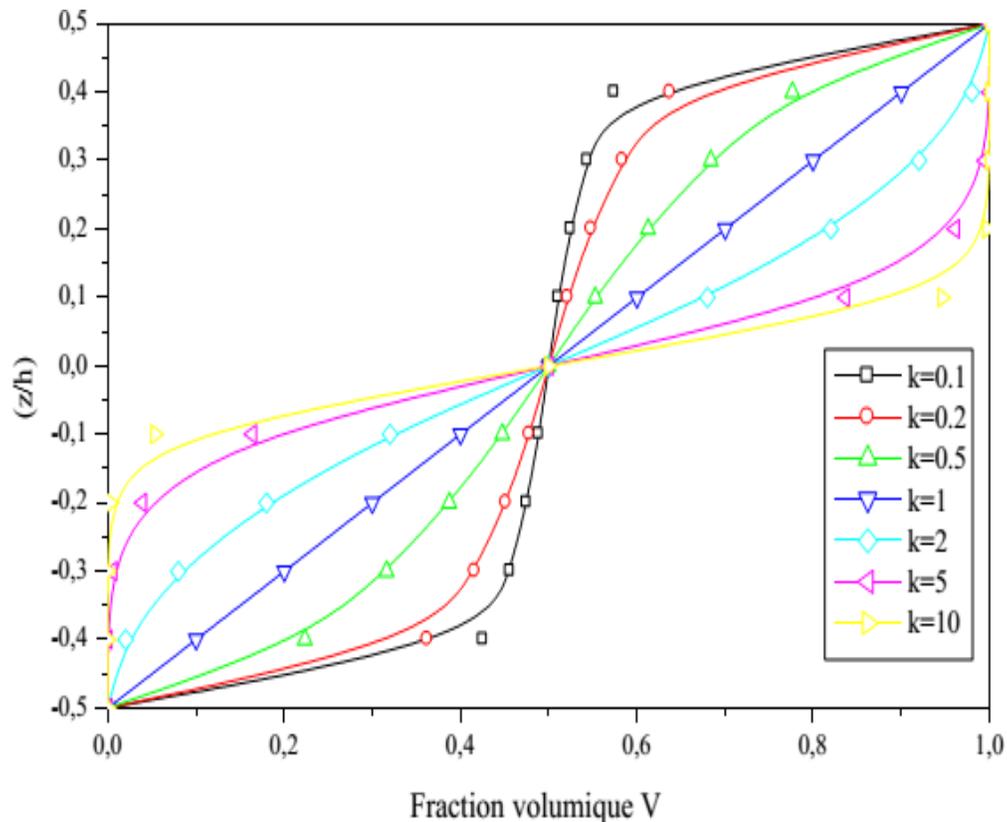


Figure I-6. Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s’écrit sous la forme [11].

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \tag{I.9}$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \tag{I.10}$$

La variation du module de Young à travers l’épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I-7.

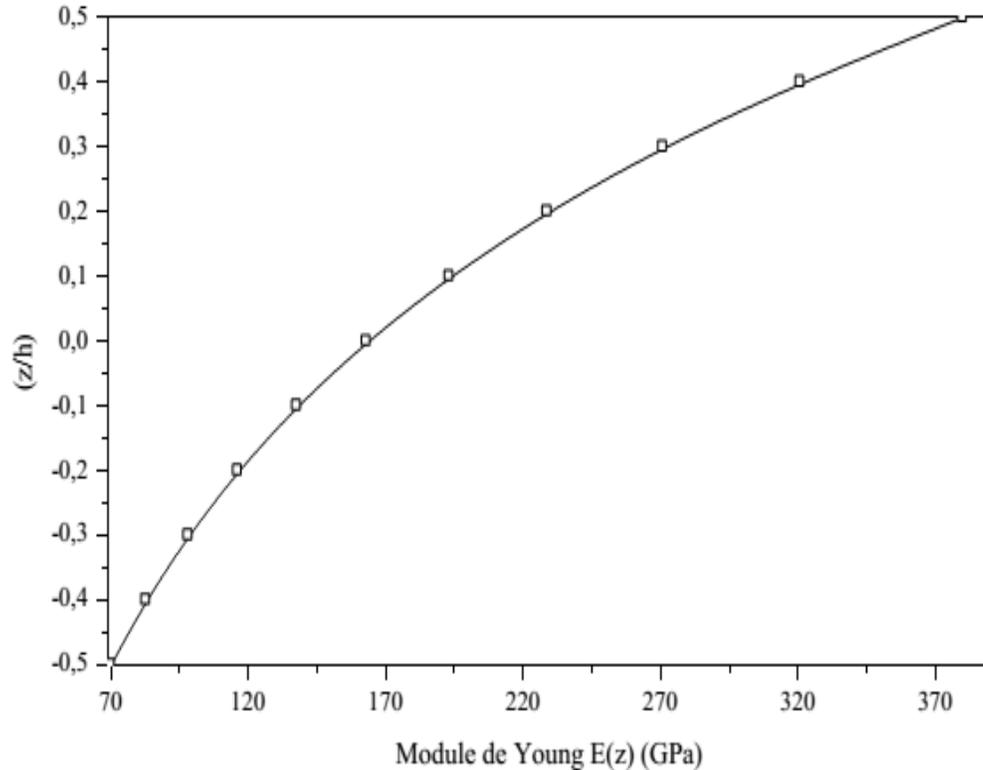


Figure I-7. Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

I.6. Processus et technique de fabrication des FGM

Une variété des méthodes de production des FGM ont été créées, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des différents processus d'élaboration conventionnelles bien établies, des procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation, où on peut citer [12] :

- La compaction sèche des poudres,
- La stratification des feuilles
- Les méthodes de dépôt chimique en phase vapeur.
- Le coulage centrifuge
- Coulage séquentiel en barbotine
- Coulage en bande
- Projection thermique (plasma)

I.7. Avantages et inconvénients des matériaux FGM

I.7.1. Avantages des matériaux FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement [13], et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc [13].

I.7.2. Inconvénient des matériaux FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

I.8. Domaines d'application des matériaux à gradients FGM

Grace aux récentes recherches, aussi bien publiques que privées, des matériaux à gradient FGM ont trouvé une application plus large dans les secteurs industriels de l'aéronautique, de l'automobile, du sport et loisir, du génie civil et de la marine. Ces matériaux présentent des avantages de légèreté, de résistance mécanique, et de résistance à la corrosion. Ils permettent grâce à leur comportement anisotrope d'adapter les rigidités à l'application. Les principaux domaines d'application des FGM sont [14] :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de poutre peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.
- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoionique, pile à combustible.
- **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
- **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

I.9. Les matériaux sandwichs

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux **Figure I-8** et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance). Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble [15].

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce Dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des Contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f / T_c (T_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après Allen, on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d / t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = T_c + t_f$.

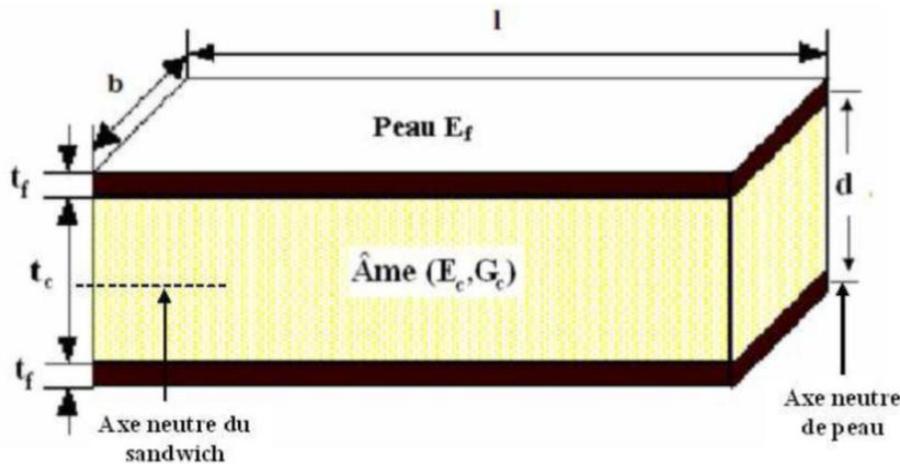


Figure I-8. Schéma d'un sandwich [15]

En fonction des valeurs du rapport d / t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport d / t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;
- Pour un rapport d / t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d / t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses [15].

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwichs possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions.

I.10. Éléments constituant les matériaux sandwichs

I.10.1. Peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduits par des contraintes normales (traction ou compression) [16].

I.10.2. Âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- Mousses : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécaniques [17].
- Balsa : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques [17].
- Nid d'abeille : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront, transformées à leur tour en planche de nid d'abeille par expansion [17].

Il existe deux types d'âmes : les âmes pleines et les âmes creuses.

a) Âmes pleines [16]

Parmi lesquelles on retrouve :

1. Le Balsa ou bois cellulaires (**Figure I-9 a**).
2. Diverses mousses cellulaires (**Figure I-9 b**).
3. Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelées mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

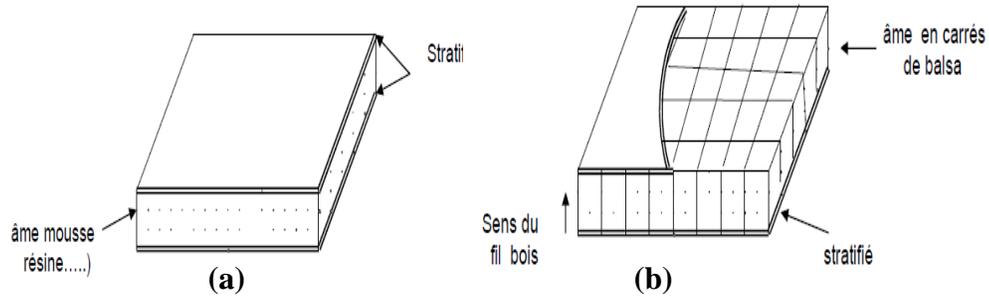


Figure I-9. Matériaux sandwichs à âmes pleines

b) Âmes creuses [16]

Elles sont essentiellement de type nid d'abeilles **Figure I-10** :

1. Des alliages métalliques légers
2. Des papiers kraft
3. Du papier polyamide, type papier Nomex.

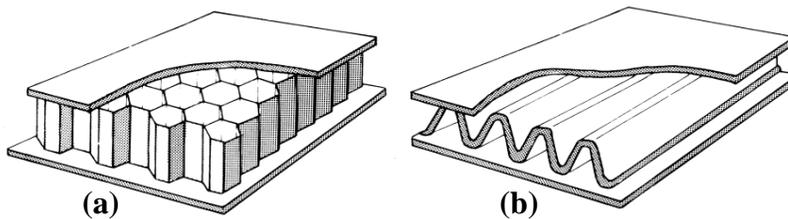


Figure I-10. Matériaux sandwichs à âmes creuses

(a) nid d'abeilles, (b) âme ondulée

I.10.3. Interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

Les matériaux sandwichs sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de portée) et de 2 2600kg/m (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de 2 33kg/m
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques.

En revanche, les matériaux sandwichs n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

I.11. Conception des structures sandwichs

Bien que généralement conçues pour être soumises à des efforts en flexion, les structures sandwichs le sont aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un « sandwich » sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwichs (théorème des poutres homogènes) et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

I.12. Sollicitations et modes de dégradations des sandwichs

Les principales charges supportées par ces structures sont la flexion, la torsion, la compression ou l'extension **Figure I-11**. Un sandwich peut être donc soumis à un :

- moment de flexion,
- moment de torsion,
- effort normal,
- effort tranchant.

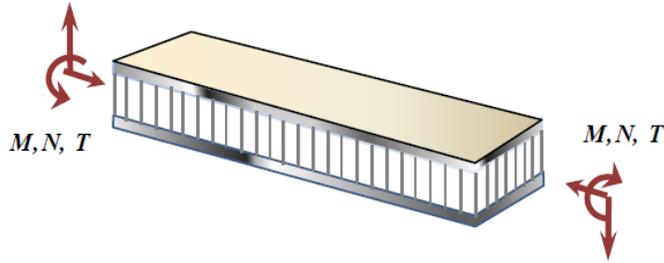


Figure I-11. Différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich

I.13. Théorie des matériaux sandwichs

Un matériau sandwich est constitué d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées [16]. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée h_c et l'épaisseur totale du sandwich H ($H=h_1+h_c+h_2$). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen [18].

I.13.1. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$)
- Les déplacements du cœur U_c et V_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée Z .
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable Z : la déformation ε_{zz} est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transversales σ_{xz}, σ_{yz} , les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformation.

I.14. Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg.m^{-3} . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante [17].

Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions.

Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels, ...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

1.15. Structures sandwichs en FGM

La structure sandwich en FGM est composée de deux revêtements, et situé entre elle un noyau qui sont réalisées directement de manière continue avec une nature différente des deux composantes entre les céramiques ou le FGM, un matériau résultant ayant de très bonnes caractéristiques, permettant de concilier la légèreté et la rigidité. L'utilisation de telle structure aide à éliminer mécaniquement et thermiquement les contraintes induites par la distribution non graduelle des propriétés matérielles (changements brusques de propriétés) et à améliorer l'adhérence, elles peuvent être divisées en trois types:

- Type-A, plaques sandwich avec peau en FGM et noyau homogène ;
- Type B, plaques sandwich avec des feuilles de face homogènes et un noyau FGM ;
- Type C, plaques sandwich avec une couche Supérieure homogènes et les couches centrale et inférieure en FGM [16].

I.16. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une recherche bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués FGM. Au début nous avons donné un petit aperçu historique sur l'apparition des matériaux à gradient de propriétés FGM, ainsi que les différentes lois qui décrivent la variation des propriétés matérielles de ce matériaux (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque. Ensuite nous avons cité leurs avantages et inconvénients, leurs propriétés et leurs domaines d'application.

Les matériaux sandwichs traditionnels et en FGM ont aussi été détaillé tout en montrant les éléments qui les constituent ainsi que leurs concepts et leurs intérêts.

Chapitre II

Les différentes Théories des plaques

Chapitre II. Les différentes Théories des plaques

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans les travaux de **Noor et al [19]**, **Kapania et al [20]**, **Kant et al [21]**, **Carrera et al [22]**, des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque. L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats exacts tridimensionnels, utiles notamment comme référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple [23], [24], [25], [26]. L'encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas (bord libre droit, plaque trouée . . .) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoires. Dans la suite se sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour la modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente.
- Approche par couche.
- Approche développement asymptotique.

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelle

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)

En commence par le model le plus simple est le plus général appelé model de Love- Kirchhoff. Ce modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur [27]. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [28] des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (**Figure II-1**).

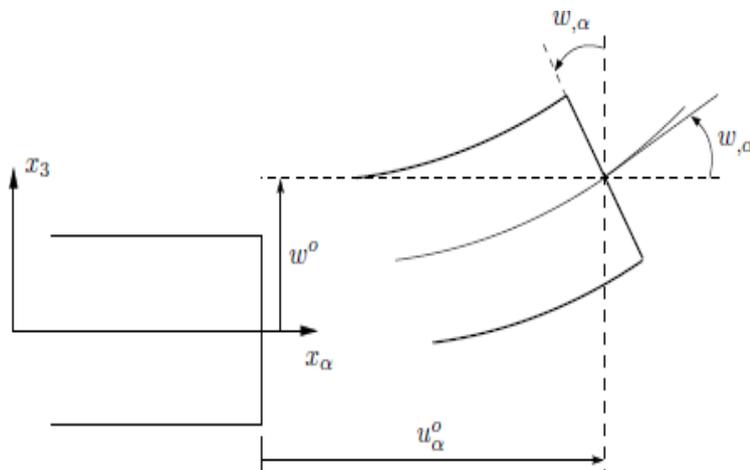


Figure II-1. Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$U_a(X_1, X_2, X_3 = Z) = U_a^0(X_1, X_2) - Z\omega_a(X_1, X_2), a = 1,2 \quad (\text{II.1})$$

$$U_3(X_1, X_2, X_3 = Z) = \omega(X_1, X_2)$$

Avec :

U_a^0 : Le déplacement de membrane dans la direction a

ω : La flèche de la plaque,

ω_a : La rotation due à la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Le cisaillement transverse ne peut être négligé ; sa prise en compte est adoptée par Mindlin dont l'hypothèse cinématique est la suivante :

La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (**Figure.II.2**). Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$U_a(X_1, X_2, X_3 = Z) = U_a^0(X_1, X_2) - Z\phi_a(X_1, X_2), a = 1,2 \quad (\text{II.2})$$

$$U_3(X_1, X_2, X_3 = Z) = \omega(X_1, X_2)$$

ϕ_a : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_a

$\gamma_a^0 = (\omega_a) + \phi_a$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen

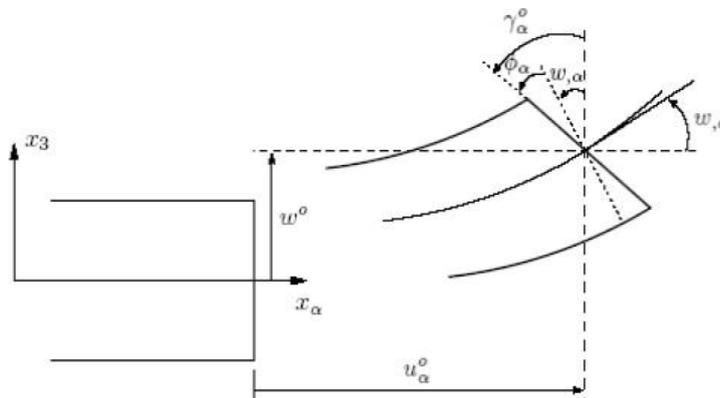


Figure II-2. Cinématique de Reissner-Mindlin

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_a^0 sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes à n'importe quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels. Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte,

Dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal [29]. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La **Figure II-3** montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiés ou au niveau de l'interface il ya une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

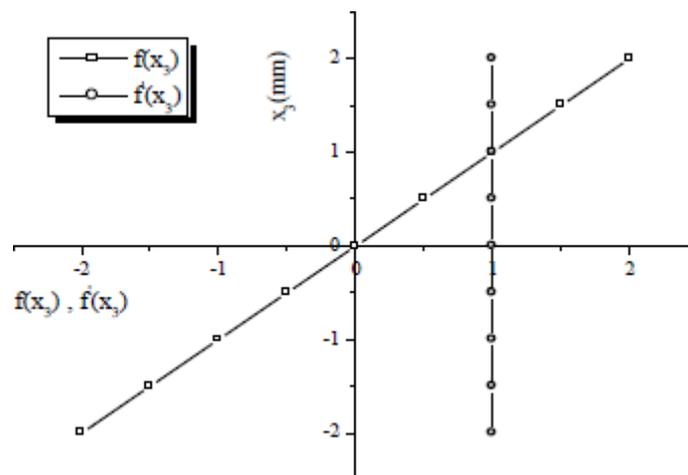


Figure II-3. Variation de la fonction de gauchissement

II.2.1.3. Les modèles d'ordre supérieur

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (**Figure. II.4**) [30-29-31]. La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\vartheta_1^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\vartheta_1^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\vartheta_1^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\vartheta_1^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\vartheta_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\vartheta_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2, 3, 4$ et $\vartheta_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec :

$$\vartheta_i^{0(4)} = \vartheta_i^{0(2)} = \vartheta_i^{0(1)} = 0, \vartheta_i^{0(3)}, \alpha = \{1, 2\}$$

Le champ de déplacement devient :

$$\{u_\alpha(x_1, x_2, x_3=z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - zW_\alpha + f(z)\gamma_\alpha^0(x_1, x_2)\} \{u_3(x_1, x_2, x_3=z) = w(x_1, x_2)\} \quad (\text{II.4})$$

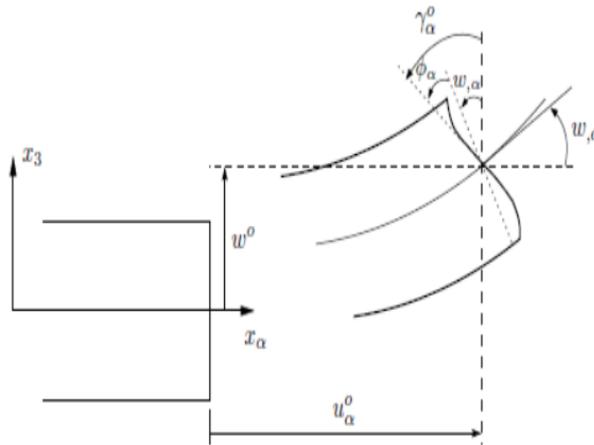


Figure II-4. Cinématique de la théorie d'ordre supérieur

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

- L'approche d'Ambartsumyan [32] avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left[\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right] \quad (\text{II.5})$$

- L'approche de Reissner [33] avec :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left[1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right] \quad (\text{II.6})$$

- L'approche de Reddy [34] avec :

$$f(z) = z \left[1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de **Reddy** [34], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

- L'approche de Touratier [31] avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc

introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} = z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots\right) \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de **Reddy [35]**.

Récemment, Afaq et al. [36] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu [37] avec :

$$f(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente pressentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci

présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .). Mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II.2.2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés par Chabot [38], Carrera [22], Afaq et al [36], Reddy [35], Sciuva [39]. Le multicouche est subdivisé en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes :

- Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.
- Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait a priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches (**Figures II-5 et II-6**).

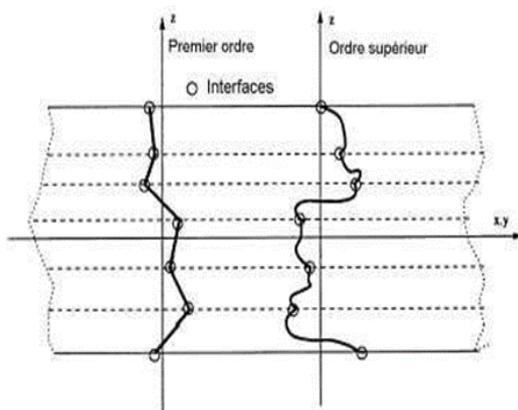


Figure II- 5. Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [40]

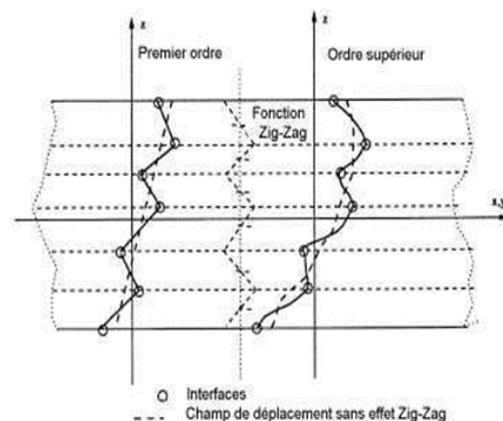


Figure II- 6. Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [40]

II.2.2.1. Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, DiSciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [39]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (**Figure II-7**). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

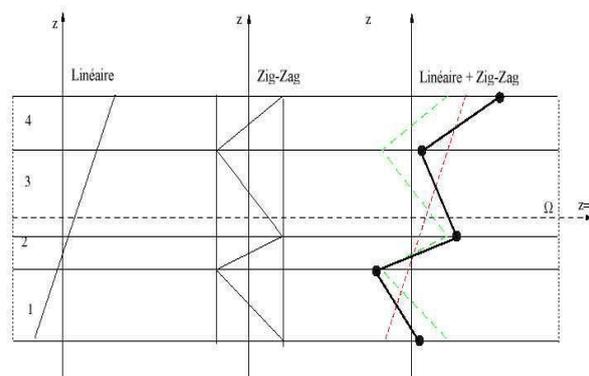


Figure II-7. Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [40]

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité. En se basant sur le concept de **Sciuva** [41], plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [40]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (**Figure II-8**). Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

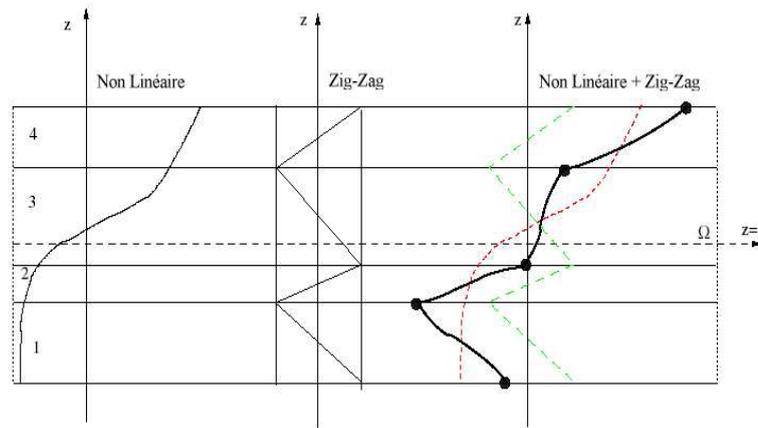


Figure II- 8. Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur [40]

Dans les travaux de **Karama et al. [42]**, **Ossadzow et al [43]**, la fonction sinus de Touratier [31] est combinée avec la fonction zig-zag pour raffiner les effets de cisaillement.

Récemment, **Afaq et al. [36]** combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche. Les résultats numériques de tous ces travaux montrent que le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le cout de calcul. Néanmoins, les modèles zig-zag ont des limites de validation dans l'analyse du délaminage. En effet rien de physique ne pousse à penser que ces modèles quelque peu artificiels peuvent prévoir les délaminages, par exemple. Le calcul des contraintes de cisaillement transverse par les équations constitutives des modèles zig-zag devient moins précis quand le rapport d'élancement diminue [44]. Un autre inconvénient des modèles zig-zag, tout comme pour les modèles d'ordre supérieur est la continuité de type C_1 demandée qui complique leur implémentation numérique.

II.2.2.2. Les modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (**Figure II-5**). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite. Dans les travaux de **Srinivas et al [26]**, **Reddy [34]**, **Thahani et al [45]**, on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche. D'une manière alternative, les travaux de **Ren [46]**, **Kassapoglou et al [47]**, **yen [48]** utilisent une approximation des champs de contraintes par

couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi **Ren [46]** utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces. Dans **[47]**, le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans **[48]**, les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façons polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans **[49]**. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche. Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales. La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, n 'étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair. La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevé de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité **[40]**.

II.3. Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche et l'approche développement asymptotique. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est la mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses et les poutres courtes pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

Chapitre III.

Analyse de la flexion des plaques sandwichs en FGM

Chapitre III. Analyse de la flexion des plaques sandwichs en FGM

III.1. Introduction

Les matériaux sandwich fonctionnellement gradués présentent de nombreux avantages pour une utilisation dans des composants structuraux d'ingénierie contrairement aux composites stratifiés à matrice fibrées, les sandwichs FGM n'ont pas de problèmes de décollement et de délaminage qui résultent de fortes concentrations des contraintes inter-laminaires. La composition du matériau change progressivement suivant la direction de l'épaisseur. En conséquence, les propriétés mécaniques sont supposées variables de manière continue à partir de la surface supérieure à la partie inférieure. En raison des bonnes caractéristiques de la céramique à la température et la bonne résistance à la corrosion ainsi que la ténacité du métal, la combinaison de la céramique et du métal peut aboutir à d'excellents matériaux. Les matériaux en FGM sont largement utilisés en génie mécanique, aéronautique, nucléaire et génie civil. Par conséquent, beaucoup d'études consacrées à comprendre les comportements statiques et dynamiques des poutres et les plaques FGM ont été lancées ces dernières années.

L'objectif de ce chapitre est de développer une approche analytique pour analyser la flexion des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées sous un chargement sinusoïdale en se basant sur un champ de déplacement qui contient que quatre variables tout en assurant la distribution hyperbolique des contraintes.

III.2. Description du problème et équation de base

III.2.1. Configuration géométrique

La géométrie et les dimensions de la plaque rectangulaire en FGM considérée sont représentées sur la **figure III-1**. Les coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) sont utilisées pour décrire les déformations infinitésimales d'une plaque élastique sandwich à trois couches occupant la région $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ dans la configuration de référence non contrainte, et les axes sont parallèles aux bords de la plaque. La plaque a une longueur a , une largeur b et une épaisseur uniforme h .

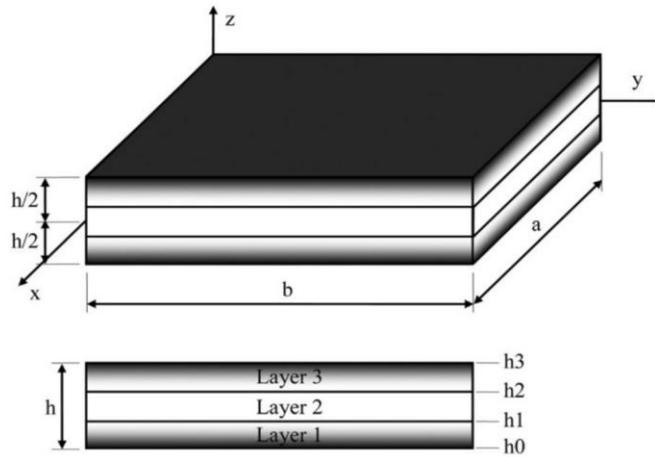


Figure III- 1. Géométrie de la plaque sandwich en matériau à gradient fonctionnel (FGM)

- le plan médian du composite plaque sandwich est définie par $z = 0$ et ses plans de délimitation extérieurs étant définie par

$z = \pm \frac{h}{2}$ Les positions verticales de la surface inférieure, des deux interfaces entre les couches d'âme et de faces, et de la surface supérieure sont notées , respectivement $h_0 = -\frac{h}{2}$, h_1 , h_2 et $h_3 = +\frac{h}{2}$.

Les couches de face de la plaque sandwich sont constituées d'un matériau isotrope dont les propriétés matérielles varient de façon régulière dans la direction z (épaisseur) uniquement.

- La couche centrale est constituée d'un matériau homogène isotrope, comme le montre la figure 1. Pour des raisons de concision, le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas en haut est désigné par la combinaison de trois nombres, c'est-à-dire "1-0-1", "2-1-2" et ainsi de suite.

La fraction volumique des FGM est supposée obéir à une fonction de loi de puissance dans le sens de l'épaisseur

$$V^{(1)} = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^p, \quad z \in [h_0, h_1] \quad \text{(III.1.a)}$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad \text{(III.1.b)}$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^p, \quad z \in [h_2, h_3] \quad \text{(III.1.c)}$$

Où V^n ($n = 1,2,3$) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche n ;
 P est l'indice de fraction volumique ($0 \leq p \leq +\infty$), qui indique la variation du matériau à travers l'épaisseur.

Les propriétés effectives du matériau, tel que le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α peuvent alors être exprimées par la loi du mélange suivante :

$$p^n(z) = p_2 + (p_1 - p_2) V^{(n)} \quad (\text{III.2})$$

Où p^n est la propriété matérielle effective du FGM de la couche n .

Notez que P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 dépendant de la fraction volumique $V^{(n)}$, ($n = 1,2,3$). On note que P_1 et P_2 sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal de la plaques sandwich FGM.

III.2.2. Cinématique et équations constitutive

III.2.2.1. Champs de déplacement

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le nouveau champ de déplacement proposé pour l'étude de la flexion des plaques sandwich FGM en utilisant la présente théorie de déformation en cisaillement peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &:= u_0(x, y) - z \left(\frac{\partial}{\partial x} w_0(x, y) \right) + k_1 A_1 f(z) \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y) \right) \\ v(x, y, z) &:= v_0(x, y) - z \left(\frac{\partial}{\partial y} w_0(x, y) \right) + k_2 B_2 f(z) \left(\frac{\partial}{\partial y} \theta(x, y) \right) \\ w(x, y, z) &:= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

$u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $\theta(x, y)$ sont les déplacements inconnus du plan médian de la plaque

k_1, k_2 ; sont des paramètres qui dépendent de la géométrie

$$k_1 = \alpha^2 \quad ; \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients A' et B' sont exprimés selon la solution de type Navier et ils sont donnés par :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2} \quad , \quad B' = -\frac{1}{\beta^2} \quad \text{(III.5.a)}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad \text{(III.5.b)}$$

La fonction de forme f(z) est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{3}{2} \pi h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3}{2} \pi z \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{(III.6)}$$

III.2.2.2. Champs de déformation

Les équations de déformation-déplacement en tout point du système de la plaque sont définies comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad \text{(III.7)}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix},$$

(III.7.a)

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_2 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.7.b})$$

III.2.2.3. Relations constitutives

Les composantes des contraintes sont déterminées en utilisant les relation d'élasticité contraintes-déformation « loi de comportement élastique linéaire » $\{\sigma_{ij}\} = [Q_{ij}] \{\varepsilon_{ij}\}$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes de contrainte et de déformations, respectivement, Q_{ij} sont des Constans de rigidité définis comme suit :

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad (\text{III.8.a})$$

$$Q_{12}=\nu Q_{11}, \quad (\text{III.8.b})$$

$$Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.8.c})$$

III.2.2.4. Equations de mouvement

Les équation gouvernantes d'équilibre sont trouvées en utilisant le principe des travaux virtuels sous la forme analytique suivante :

$$\delta U + \delta V = 0$$

Avec :

δU : La variation de l'énergie de déformation de la plaque

δV : la variation de l'énergie potentiel du au chargement extérieur

La variation de l'énergie de déformation de la plaque est définie par la relation suivante :

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dz.dA$$

$$\delta U = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \tau_{yz} \delta \varepsilon_{yz} + \tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz.dA \quad (\text{III.9})$$

En remplaçant l'équations (III.6) et (III.7) dans l'équation (III.9) et en intégrant par parties suivant l'épaisseur de la plaque, l'équation (III.9) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\delta U = \int_A \left\{ \begin{aligned} & N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + k_1 A^s M_x^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ & - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + k_2 B^s M_y^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \\ & + (k_1 A^s + k_2 B^s) M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_1 A^s S_{xz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + k_2 B^s S_{yz}^s \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \end{aligned} \right\} dA \quad (\text{III.10})$$

Les contraintes résultantes N, M et S sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N_x, & N_y, & N_{xy} \\ M_x^b, & M_y^b, & M_{xy}^b \\ M_x^s, & M_y^s, & M_{xy}^s \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ z \\ f(z) \end{array} \right\} dz \quad (\text{III.11.a})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.11.b})$$

En substituant l'équation (III.7) dans l'équation (III.10) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ M^b \\ M^s \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{array} \right\}, S = A^s \gamma \quad (\text{III.12})$$

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.13.a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \quad (\text{III.13.b})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14.a})$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.14.b})$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}, \gamma = \{\gamma_{xz}^s, \gamma_{yz}^s\}, A = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \quad (\text{III.14.c})$$

Où :

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, \dots$, etc., sont les constantes de la rigidité de la plaque, définie par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)}(1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)} \\ \frac{1-\nu^{(n)}}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.15.a})$$

$$Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{III.15.b})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{III.15.c})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_n^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \quad (\text{III.15.d})$$

La variation de l'énergie potentiel est exprimé par :

$$\delta v = -q \int_A \delta W(x, y, z) dA \quad (\text{III.16})$$

$$\delta v = -q \int_A \delta W_0 dA$$

Les équations d'équilibres peuvent être déduites de l'équation (III.10) en intégrant par parties les gradients de déplacement et en mettant les coefficients δU_0 , δV_0 , δw_0 et $\delta \theta$ égale à zéro séparément, Ainsi, on peut obtenir les équations d'équilibre associées avec la présente théorie de déformation de cisaillement .

$$\begin{aligned} \delta U_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta V_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta \theta : -k_1 A \left(\frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - (k_1 A + k_2 B) \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} - k_2 B \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + k_1 A \frac{\partial^2 S_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B \frac{\partial^2 S_{yz}^s}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

En substituant l'équation (III.12) à l'équation (III.17), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\delta U_0 = & -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, y)\right) A_{11} + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} w_0(x, y)\right) B_{11} - K_1 A_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} \theta(x, y)\right) B_{S_{11}} \\
& -\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} v_0(x, y)\right) A_{12} + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} w_0(x, y)\right) B_{12} - K_2 B_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \theta(x, y)\right) B_{S_{12}} \\
& -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0(x, y)\right) A_{66} + 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} w_0(x, y)\right) B_{66} - K_1 A_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \theta(x, y)\right) B_{S_{66}} \\
& -\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} v_0(x, y)\right) A_{66} - K_2 B_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} \theta_0(x, y)\right) B_{S_{66}} = 0
\end{aligned} \tag{III.18.a}$$

$$\begin{aligned}
\delta V_0 = & -\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_0(x, y)\right) A_{66} + 2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} w_0(x, y)\right) B_{66} - K_1 A_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \theta(x, y)\right) B_{S_{66}} \\
& -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x, y)\right) A_{66} - K_2 B_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \theta(x, y)\right) B_{S_{66}} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u_0(x, y)\right) A_{12} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} w_0(x, y)\right) B_{12} - K_1 A_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \theta(x, y)\right) B_{S_{12}} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} v_0(x, y)\right) A_{22} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} w_0(x, y)\right) B_{22} - K_2 B_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} \theta(x, y)\right) B_{S_{22}} = 0
\end{aligned} \tag{III.18.b}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 = & -\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0(x, y)\right) B_{11} + \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w_0(x, y)\right) D_{11} - K_1 A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \theta(x, y)\right) D_{11S} \\
& -\left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} v_0(x, y)\right) B_{12} + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_0(x, y)\right) D_{12} - K_2 B_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \theta(x, y)\right) D_{12S} \\
& -2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_0(x, y)\right) B_{66} + 4 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_0(x, y)\right) D_{66} - 2k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \theta(x, y)\right) D_{66S} \\
& -2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} v_0(x, y)\right) B_{66} - 2K_2 B_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \theta(x, y)\right) D_{66S} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_0(x, y)\right) B_{12} \\
& -K_1 A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \theta(x, y)\right) D_{12S} - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} v_0(x, y)\right) B_{22} + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w_0(x, y)\right) D_{22} \\
& -K_2 B_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} \theta(x, y)\right) D_{22S} - q(x, y) = 0
\end{aligned} \tag{III.18.c}$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta = & K_1 A_1 \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0(x,y) \right) B_{S_{11}} - \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w_0(x,y) \right) D_{11s} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \theta(x,y) \right) H_{S_{11}} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} v_0(x,y) \right) B_{S_{12}} - \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_0(x,y) \right) D_{12s} + K_2 B_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \theta(x,y) \right) H_{12s} \\
& + (K_1 A_1 + K_2 B_2) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_0(x,y) \right) B_{S_{66}} - 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_0(x,y) \right) D_{66s} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \theta(x,y) \right) H_{S_{66}} \quad \text{(III.18.d)} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} v_0(x,y) \right) B_{S_{66}} + K_2 B_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \theta(x,y) \right) H_{66s} + K_2 B_2 \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} u_0(x,y) \right) B_{S_{12}} - \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w_0(x,y) \right) D_{S_{12}} + k_1 A_1 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \theta(x,y) \right) H_{12s} \\
& + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} v_0(x,y) \right) B_{S_{22}} - \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w_0(x,y) \right) D_{22s} + K_2 B_2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} \theta(x,y) \right) H_{S_{11}} \\
& - K_1 A_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta(x,y) \right) A_{44s} - K_2 B_2^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2 \partial x} \theta(x,y) \right) A_{55s} = 0
\end{aligned}$$

III.2.3. Solutions analytiques des plaques sandwichs FGM

Considérons une plaque rectangulaire simplement appuyée avec une longueur a et une largeur b sous une charge sinusoïdale. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la solution de Navier,

Sur la base de l'approche Navier, la solution des variables de déplacement satisfaisant les conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée sont comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \theta_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad \text{(III.19)}$$

Où : $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta = \frac{n\pi}{b}$, ω est la fréquence propre. U_m, V_m, W_m , et θ sont des paramètres arbitraires à déterminer.

La charge transversal q est également développées en série sinusoïdale double-fourrier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III.20})$$

Pour le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons :

$$m=n=1 \quad \text{et} \quad q_{11} = q_0 \quad (\text{III.21})$$

où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

Pour analyse de la flexion :

$$[k]\{\Delta\} = \{q\} \quad (\text{III.22})$$

$$\text{Où : } \{\Delta\} = \begin{pmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \\ \theta_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{q\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

En substituant les équations (III.19) et (III.20) à l'équation (III.18), on obtient une matrice symétrique donné par :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Dans la quelle :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66} \\
 K_{12} &= \alpha\beta A_{12} + \alpha\beta A_{66} \\
 K_{13} &= -2\alpha\beta^2 B_{66} - \alpha\beta^2 B_{12} - \alpha^3 B_{11} \\
 K_{14} &= K_1 A_1 \alpha\beta^2 B_{S_{66}} + K_2 B_2 \alpha\beta^2 B_{S_{12}} + K_1 A_1 \alpha^3 B_{S_{11}} + K_2 B_2 \alpha\beta^2 B_{S_{66}}
 \end{aligned} \tag{III.25.a}$$

$$\begin{aligned}
 K_{21} &= \alpha\beta A_{12} + \alpha\beta A_{66} \\
 K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22} \\
 K_{23} &= -2\alpha^2\beta B_{66} - \beta^3 B_{22} - \alpha^2\beta B_{12} \\
 K_{24} &= K_2 B_2 \alpha^2\beta B_{S_{66}} + K_1 A_1 \alpha^2\beta B_{S_{66}} + K_1 A_1 \alpha^2\beta B_{S_{12}} + K_2 B_2 \beta^3 B_{S_{22}}
 \end{aligned} \tag{III.25.b}$$

$$\begin{aligned}
 K_{31} &= -2\alpha\beta^2 B_{66} - \alpha\beta^2 B_{12} - \alpha^3 B_{11} \\
 K_{32} &= -2\alpha\beta^2 B_{66} - \beta^3 B_{22} - \alpha^2\beta B_{12} \\
 K_{33} &= \alpha^2 D_{11} + 4\alpha^2\beta^2 D_{66} + 2\alpha^2\beta^2 D_{12} + \beta^4 D_{22} \\
 K_{34} &= -K_2 B_2 \alpha^2\beta^2 D_{12S} - K_1 A_1 \alpha^4 D_{11S} - K_2 B_2 \beta^4 D_{22S} \\
 &\quad - 2K_1 A_1 \alpha^2\beta^2 D_{66S} - 2K_2 B_2 \alpha^2\beta^2 D_{66S} - K_1 A_1 \alpha^2\beta^2 D_{12S}
 \end{aligned} \tag{III.25.c}$$

$$\begin{aligned}
 K_{41} &= K_1 A_1 \alpha^3 B_{S_{11}} + K_2 B_2 \alpha\beta^2 B_{S_{12}} + (K_1 A_1 + K_2 B_2) \alpha\beta^2 B_{S_{66}} \\
 K_{42} &= K_1 A_1 \alpha^2\beta B_{S_{12}} + K_2 B_2 2\beta^3 B_{S_{22}} + (K_1 A_1 + K_2 B_2) \beta\alpha^2 B_{S_{66}} \\
 K_{43} &= K_1 A_1 (-\alpha^2\beta^2 D_{12S} - \alpha^4 D_{11S}) - 2(K_1 A_1 + K_2 B_2) \alpha^2\beta^2 D_{66S} \\
 &\quad + K_2 B_2 (-\beta^4 D_{22S} - \alpha^2\beta^2 D_{12S}) \\
 K_{44} &= K_1 A_1 (K_1 A_1 \alpha^4 H_{11S} + K_2 B_2 \alpha^2\beta^2 H_{12S}) + K_2 B_2 (K_1 A_1 \alpha^2\beta^2 H_{12S} + K_2 B_2 2\beta^4 H_{11S}) \\
 &\quad - K_2^2 B_2^2 \alpha\beta A_{55S} + (K_1 A_1 + K_2 B_2) (K_2 B_2 \alpha^2\beta^2 H_{S_{66}} + K_1 A_1 \alpha^2\beta^2 H_{S_{66}}) + K_1^2 A_1^2 \alpha^2 A_{44S}
 \end{aligned} \tag{III.25.d}$$

III.3. Les différents types de plaques sandwichs pour cette étude

Plusieurs types de plaques sandwich sont présentés en fonction de l'épaisseur de la couche centrale, qui est entièrement en céramique, tandis que les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sont riches en métal.

Plusieurs types de plaques sandwich sont considérées dans cette étude :

La plaque sandwich FGM (1-0-1)

La plaque est symétrique et constituée de seulement deux couches de FGM d'épaisseur égale, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. Ainsi :

$$h_1 = h_2 = 0$$

La plaque sandwich FGM (1-1-1)

Ici, la plaque est symétrique et constituée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons,

$$h_1 = \frac{-h}{6}, \quad h_2 = \frac{h}{6}$$

La plaque sandwich FGM (2-1-2)

La plaque est symétrique et nous avons :

$$h_1 = \frac{-h}{10}, \quad h_2 = \frac{h}{10}$$

La plaque sandwich FGM (2-2-1)

La plaque est non symétrique l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur de la couche inférieure et le double de celle de la couche supérieure et nous avons :

$$h_1 = \frac{-h}{10}, \quad h_2 = \frac{3h}{10}$$

La plaque sandwich FGM (1-2-1)

La plaque est symétrique et l'épaisseur du cœur est égale à la somme des épaisseurs des couches des faces. Donc, on obtient :

$$h_1 = \frac{-h}{4}, \quad h_2 = \frac{h}{4}$$

III.4. Conclusion

Dans ce chapitre une approche analytique pour analyser la flexion des plaques sandwichs constituées par des matériaux composites avancés est représentée, tout en proposant une simple théorie de déformation en cisaillement qui se base sur un nouveau champ de déplacement avec seulement quatre variables, en introduisant une composante intégrale indéterminée, ce qui assure la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque sans avoir besoin d'un éventuel facteur de correction de cisaillement. Les équations de mouvement régissant proviennent du principe des travaux virtuels. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions des plaques FGM simplement appuyées. Une validation des résultats de cette théorie des plaques ainsi qu'une étude paramétrique seront faites dans le chapitre suivant.

Chapitre IV.
Résultats et Discussions

Chapitre IV. Résultats et Discussions

IV.1. Introduction

Dans cette étude, nous avons analysé différents types de plaques en fonction du nombre de couches symétrique et non symétrique). Afin de valider la présente théorie de cisaillement à quatre variables et nous avons présenté les résultats numériques adimensionnelle de la flèche centrale (\bar{w} : déplacement transversal), contraintes normales axiale σ_x et les contraintes tangentielles transversales τ_{xz} de l'analyse de flexion des plaques FGM sandwichs simplement appuyées.

Les résultats obtenus par la présente approche sont comparés aux résultats des autres modèles d'ordre élevé à cinq variables proposés dans la littérature tels que les travaux de **Zenkour [50]** sur la base de la théorie de cisaillement sinusoïdale (SSDT), la théorie de cisaillement trigonométrique (TSDT), la théorie de cisaillement conventionnelle du premier d'ordre (FSDT) et de la nouvelle théorie de cisaillement premier d'ordre développée par **Huu-Tai Thai et al. [51]**.

Cette théorie est variationnelle, elle néglige le coefficient de correction de cisaillement, et assure une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres des plaques étudiées.

Les plaques sandwichs FGM présent dans cette étude sont simplement appuyées, soumise à une charge sinusoïdale, composées de peau de face en aluminium, le noyau choisi est en céramique (Zirconia, ZrO_2).

Les propriétés des matériaux utilisées sont les suivantes :

$$\text{Al/AlO}_{23} : E_M = 70 \text{ GPa}, \nu = 1/3$$

$$\text{Céramique (Zirconia, } ZrO_2) : E_c = 151 \text{ GPa}, \nu = 1/3$$

Les résultats numériques sont présentés sous la forme non dimensionnelle suivante :

$$\text{Déplacement transversal (w) à } x = a/2, y = b/2 \text{ et } z = 0 : \bar{W} = \frac{10 E_0 h}{q_0 a^2}$$

$$\text{Contrainte axiale } (\sigma_x) \text{ à } x = a/2, y = b/2 \text{ et } z = -h/2 : \bar{\sigma}_x = \frac{10 h^2}{q_0 a^2} \sigma_x$$

$$\text{Contrainte de cisaillement transversale } (\tau_{xz}) \text{ à } x = 0, y = b/2 \text{ et } z = 0 : \bar{\sigma}_x = \frac{\tau_{xz} h}{q_0 a} \sigma_x$$

IV.2. Analyse de la flexion des plaques sandwiches

Les tableaux IV.1, IV.2, IV.3 montrent respectivement les résultats numériques adimensionnels de la flèche, la contrainte normale et la contrainte de cisaillement transversale pour les plaques FGM sandwichs soumises à un chargement sinusoïdal pour différentes valeurs d'indice de puissance P avec un rapport $a/h=10$. Les résultats obtenus utilisant la nouvelle théorie à quatre variables montrent un bon accord avec les résultats des théories précitées à cinq variables.

On remarque que l'augmentation de l'indice de loi de puissance P conduit à une augmentation de la flèche w , de la contrainte axiale σ_x et contraintes de cisaillement τ_{xz} pour tous les types de plaques.

On peut voir aussi que les valeurs de la flèche w , de la contrainte axiale σ_x et contraintes de cisaillement τ_{xz} pour la plaque (1-0-1) dont le cœur n'existe pas sont supérieurs aux autres valeurs des plaques qui contiennent un cœur rigide que ce soit symétrique tels que (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1) ou non symétrique (2-2-1).

Tableau IV-1. Flèche adimensionnelle \bar{w} des plaques carrées ($a/h = 10$)

		Types de plaques FGM sandwichs				
P	Théories	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT [50]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	TSDT [50]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	FSDT [50]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961	0.1961
	Présente	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960
1	SSDT [50]	0.3235	0.3062	0.2919	0.2808	0.2709
	TSDT [50]	0.3236	0.3063	0.2920	0.2809	0.2709
	FSDT [50]	0.3248	0.3075	0.2930	0.2817	0.2717
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.3237	0.3064	0.2920	0.2809	0.2710
	Présente	0.3235	0.3062	0.2919	0.2802	0.2709
2	SSDT [50]	0.3732	0.3522	0.3328	0.3161	0.3026
	TSDT [50]	0.3734	0.3523	0.3329	0.3162	0.3026
	FSDT [50]	0.3751	0.3541	0.3344	0.3174	0.3037
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.3737	0.3526	0.3330	0.3163	0.3027
	Présente	0.3732	0.3522	0.3328	0.3149	0.3026
5	SSDT [50]	0.4091	0.3916	0.3713	0.3495	0.3347
	TSDT [50]	0.4093	0.3918	0.3715	0.3496	0.3348
	FSDT [50]	0.4112	0.3942	0.3736	0.3512	0.3363
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.4101	0.3927	0.3720	0.3501	0.3350
	Présente	0.4091	0.3916	0.3713	0.3475	0.3347
10	SSDT [50]	0.4175	0.4037	0.3849	0.3492	0.3412
	TSDT [50]	0.4177	0.4041	0.3855	0.3622	0.3482
	FSDT [50]	0.4192	0.4066	0.3879	0.3640	0.3500
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.3988	0.3894	0.3724	0.3492	0.3361
	Présente	0.4175	0.4038	0.3853	0.3598	0.3481

Tableau IV-2. Contrainte normale adimensionnelle $\sigma_x(h/2)$ des plaques carrées ($a/h = 10$)

P	Théories	Types de plaques FGM sandwichs				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT [50]	2.0545	2.0545	2.0545	2.0545	2.0545
	TSDT [50]	2.0499	2.0499	2.0499	2.0499	2.0499
	FSDT [50]	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758	1.9758
	Présente	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951	1.9951
1	SSDT [50]	1.5820	1.4986	1.4289	1.3234	1.3259
	TSDT [50]	1.5792	1.4959	1.4262	1.3206	1.3231
	FSDT [50]	1.5325	1.4517	1.3830	1.2775	1.2810
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	1.5324	1.4517	1.3830	1.2775	1.2810
	Présente	1.5446	1.4632	1.3943	1.2744	1.2920
2	SSDT [50]	1.8245	1.7241	1.6303	1.4739	1.4828
	TSDT [50]	1.8217	1.7214	1.6275	1.4710	1.4799
	FSDT [50]	1.7709	1.6750	1.5824	1.4253	1.4358
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	1.7709	1.6750	1.5824	1.4253	1.4358
	Présente	1.7840	1.6870	1.5941	1.4145	1.4473
5	SSDT [50]	1.9957	1.9155	1.8184	1.6148	1.6411
	TSDT [50]	1.9927	1.9130	1.8158	1.6118	1.6381
	FSDT [50]	1.9358	1.8648	1.7699	1.5640	1.5931
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	1.9358	1.8648	1.7699	1.5640	1.5931
	Présente	1.9505	1.8772	1.7818	1.5452	1.6048
10	SSDT [50]	2.0336	1.9731	1.8815	1.6198	1.6485
	TSDT [50]	2.0304	1.9713	1.8838	1.6666	1.7042
	FSDT [50]	1.9678	1.9217	1.8375	1.6165	1.6584
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	1.9678	1.9217	1.8375	1.6165	1.6584
	Présente	1.9840	1.9344	1.8495	1.5944	1.6704

Tableau IV-3. Contrainte de cisaillement transversale adimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0)$ des plaques carrées ($a/h = 10$)

P	Théories	Types de plaques FGM sandwiches				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	SSDT [50]	0.2462	0.2462	0.2462	0.2462	0.2462
	TSDT [50]	0.2386	0.2386	0.2386	0.2386	0.2386
	FSDT [50]	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910	0.1910
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387	0.2387
	Présente	0.2440	0.2440	0.2440	0.2440	0.2440
1	SSDT [50]	0.2991	0.2777	0.2681	0.2668	0.2600
	TSDT [50]	0.2920	0.2710	0.2612	0.2595	0.2526
	FSDT [50]	0.2610	0.2432	0.2326	0.2276	0.2206
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.2566	0.2593	0.2602	0.2582	0.2593
	Présente	0.2971	0.2758	0.2661	0.2648	0.2579
2	SSDT [50]	0.3329	0.2942	0.2781	0.2763	0.2654
	TSDT [50]	0.3262	0.2884	0.2719	0.2694	0.2583
	FSDT [50]	0.2973	0.2675	0.2508	0.2432	0.2326
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.2552	0.2617	0.2650	0.2624	0.2655
	Présente	0.3310	0.2926	0.2763	0.2744	0.2634
5	SSDT [50]	0.3937	0.3193	0.2915	0.2890	0.2715
	TSDT [50]	0.3863	0.3145	0.2864	0.2827	0.2651
	FSDT [50]	0.3454	0.2973	0.2721	0.2610	0.2460
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.2468	0.2576	0.2649	0.2627	0.2694
	Présente	0.3917	0.3180	0.2901	0.2874	0.2697
10	SSDT [50]	0.4415	0.3364	0.2953	0.2967	0.2768
	TSDT [50]	0.4321	0.3324	0.2957	0.2908	0.2690
	FSDT [50]	0.3728	0.3132	0.2830	0.2700	0.2526
	Huu-Tai Thai et <i>al.</i> [51]	0.2419	0.2534	0.2627	0.2611	0.2698
	Présente	0.4389	0.3357	0.2989	0.2955	0.2732

La figure IV.1 montre l'influence de l'indice de fraction volumique P sur la variation de la flèche \bar{w} , à travers la direction de l'épaisseur pour différents types de plaques sandwichs avec un rapport $a/h=10$.

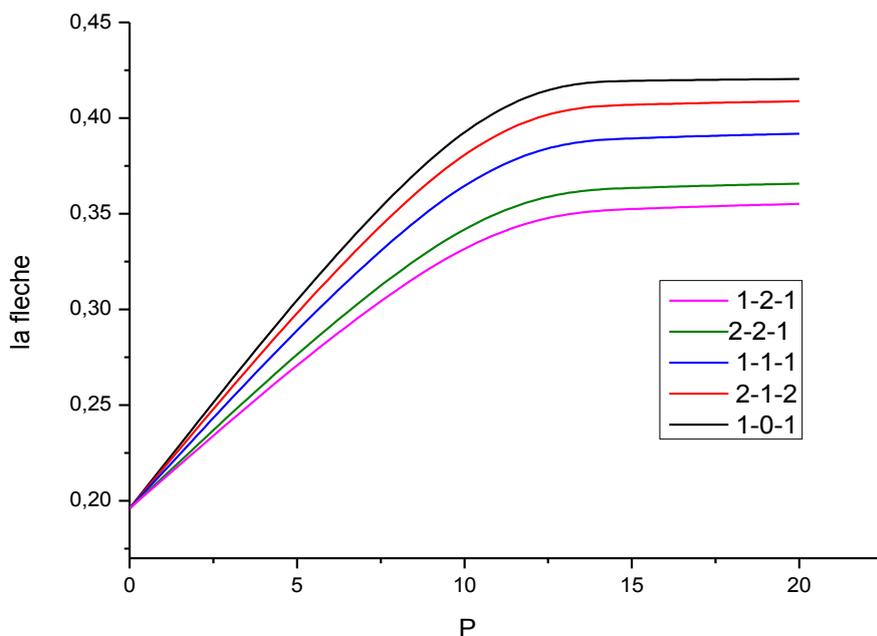


Figure IV-1. Variation de la flèche dans les plaques sandwich FGM en fonction de l'indice de puissance P à $a/h=10$

On peut voir que la flèche des plaques symétriques est plus grande que celle de la plaque non symétrique et en général, le déplacement transversal augmente lorsque l'indice de fraction volumique P augmente. Cela est dû au fait que le module de Young pour la céramique étant élevé par rapport à celui du métal. Par conséquent, plus le P augmente on s'éloigne de la céramique et on s'approche du métal qui est moins rigide.

Les figures IV.2 et IV.3 représentent la variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur des plaques 2-1-2 ; 2-2-1 respectivement.

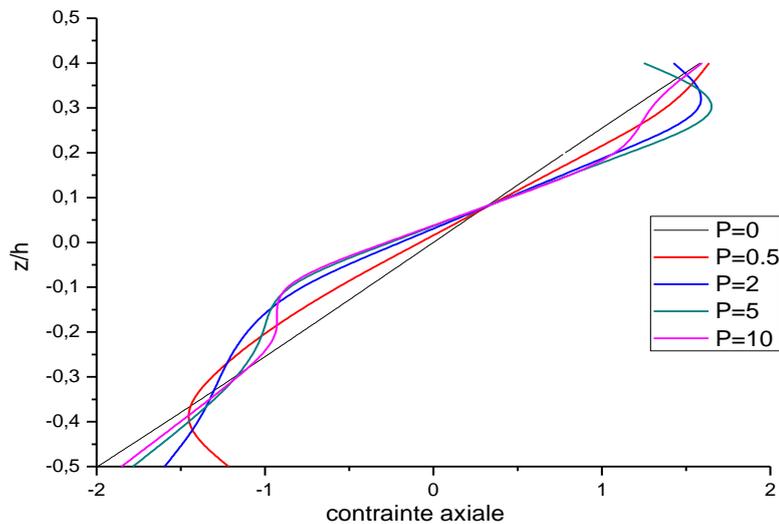


Figure IV-2. Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-1-2 ($a/h = 10$)

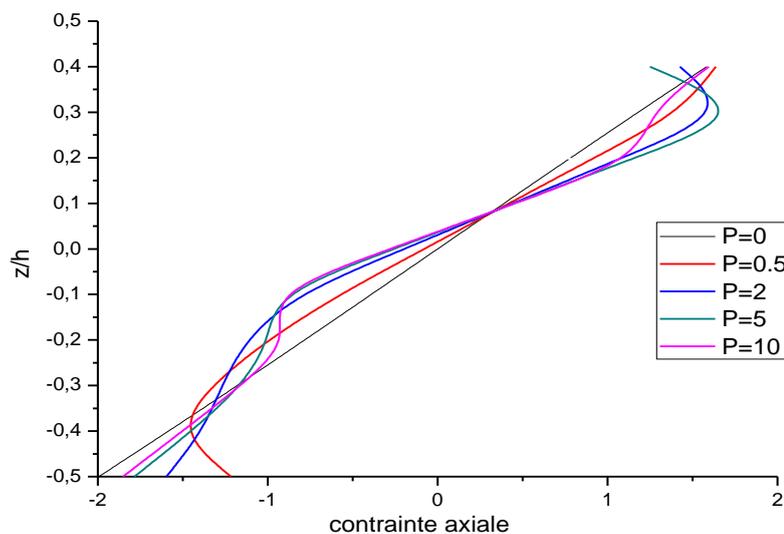


Figure IV-3. Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-2-1 ($a/h = 10$)

On peut dire que la distribution de la contrainte à la surface supérieure est une traction et à la surface inférieure c'est une contrainte de compression pour les plaques sandwichs symétriques et asymétriques. La plaque céramique ($P=0$) homogène produit les contraintes de compression maximales à la surface inférieure et les contraintes de traction minimales à la surface supérieure de la plaque sandwich.

Les figures IV.4 et IV.5 indiquent la variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur des plaques 2-1-2 ; 2-2-1 respectivement.

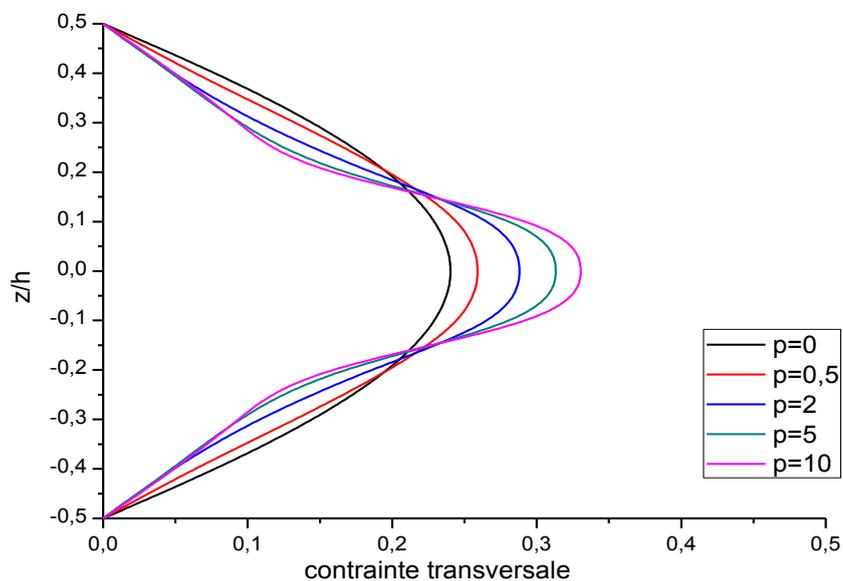


Figure IV-4. Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-1-2 ($a/h = 10$)

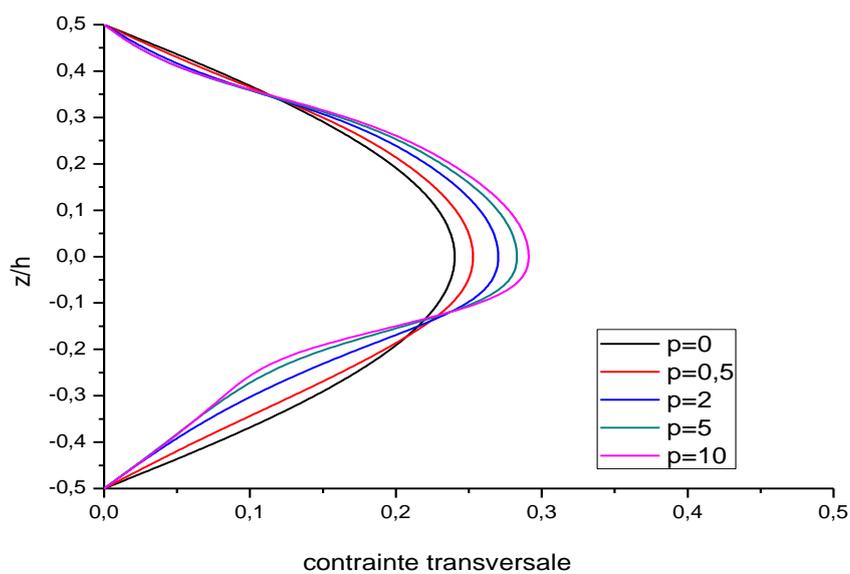


Figure IV-5. Variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque carrée type 2-2-1 ($a/h = 10$)

On note que la variation des contraintes de cisaillement est parabolique dans la plaque symétrique, par contre dans la plaque non symétrique la distribution n'est pas parabolique. Les contraintes les plus élevées sont obtenues pour l'indice de puissance P élevé.

IV.3 Conclusion

La théorie de cisaillement à quatre variables des plaques sandwichs FGM simplement appuyées pour l'analyse de la flexion a été développée dans cette étude. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la plaque et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de traction sur les bords, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels.

En conclusion, on peut dire que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance réduit la rigidité de la plaque sandwich FGM et entraîne par conséquent une augmentation de la flèche et des contraintes normales et tangentielles et que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée et le nouveau modèle de cisaillement sont non seulement précis, mais aussi efficaces pour l'analyse de la flexion des plaques sandwichs en matériau FGM.

Conclusion générale

Conclusion générale

Les structures sandwichs en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

Ce travail a pour objectif d'analyser la flexion des plaques sandwichs en matériaux fonctionnellement gradués « FGM », simplement appuyées en utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (2D) qui se base sur un nouveau modèle du champ de déplacement avec des intégrales indéterminées.

Dans ce type de plaque, Les propriétés matérielles de la plaque sandwich FGM varient selon une distribution de loi de puissance en termes de fraction volumique des différents constituants. La théorie proposée implique que quatre variables et explique la variation des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions aux limites de la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans avoir besoin d'un facteur de correction de cisaillement.

Les équations du mouvement et les conditions aux limites sont dérivées en employant le principe des travaux virtuels, ensuite les solutions des plaques sandwichs en FGM simplement appuyées ont été obtenues à l'aide de la procédure de Navier. Afin de confirmer la précision et l'efficacité de la présente théorie, plusieurs résultats numériques sont présentés et comparés avec d'autres théories HSDTs existantes dans la littérature.

Les résultats générés dans le présent travail sont comparés aux résultats publiés existants. La comparaison prouve la précision de la théorie de déformation en cisaillement actuellement considérée, et donc elle peut être employée avec succès pour les analyses structurelles de la plaque sandwich.

En perspective, il est prévu d'appliquer nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour :

- Analyser la vibration des plaques sandwichs en FGM
- Analyser le comportement statique et dynamique des plaques sandwichs en FGM sous l'effet d'un chargement thermique avec différentes conditions d'appuis
- Analyser le comportement statique avec l'effet d'étirement des plaques sandwichs en FGM.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Shen H. and Rong Li S, “Postbuckling of Sandwich Plates with FGM Face Sheets and Temperature Dependent Properties,” *Compos: Part B* 39, page 332, 2008.
- [2] Miyamoto Y, Kaysser WA, Rabin BH, Kawasaki A, Ford RG. *Functionally graded materials design, processing and applications, materials technology series*. Springer science+ business media, llc. Ta418.9. F85f86, 1999.
- [3] Koizumi M. The concept of FGM. *Ceramic transaction, functionally graded materials* 34, 3–10, 1992.
- [4] Miyamoto Y. Kaysser W., Rabin, B., Kawasaki, A Ford, R.G. *Functionally graded*. 1993.
- [5] Yoshihisa Uchida, *Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications*, 39- 51-B, Vol. 39-B, Mar., 2004.
- [6] Ait Sidhoum I. Thèse de doctorat en sciences. *Analyse de la vibration libre des plaques épaisses en matériaux fonctionnellement gradué*. Universités Mohamed-Boudiaf. Oran.
- [7] Shen, H.-S. ,«*Functionally Graded Materials – Nonlinear Analysis of Plates and Shells*», New York: CRC Press, Taylor & Francis Group. 2009.
- [8] Jin. Z. H, Batra. R. C. *Journal of Thermal Stresses* 19, 317,339. 1996.
- [9] Bao. G, Wang. L. *Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal* 1995.
- [10] Chi, S.-H. and Chung, Y.L. “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”, *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227-1243. 2003,
- [11] Delale. F, Erdogan. F. The crack problem for a non-homogeneous plane *Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614 1983,.
- [12] Mahmoudi A. Thèse de doctorat en sciences. *Étude de l’influence des modèles micromécaniques sur la réponse globale des structures FGM*. Université Djillali Liabes. Sidi Bel Abbes. Faculté de Technologie. Département de Génie Civil et Travaux Publics. 7-8 ; 10-11. 2019.
- [13] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi 2011 ,*Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions*; John Wiley & Sons; page 110, 4 août 2011
- [14] Bouafia. K, Maachoul. M, Benzair. A, Tounsi. A « *Etude des contraintes résiduelles dans le matériau FGM* », CNMI, UMAB, 09-10 Décembre, 2014.
- [15] Sudharsan M., —*Structural Design and Analysis of a Lightweight Composite Sandwich space Radiator Panell*, Phd thesis, Bharathiar University, Coimbatore, India. 2003.

- [16] Berthelot J. M., —Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures, 4^{ème} édition, 1996.
- [17] Chatin M, "Matériaux composites – présentation générale", Technique de l'ingénieur BT4, 2000.
- [18] lazreg.hadji, « contribution à l'étude de la vibration des plaques sandwiches en fgm », thèse de doctorat de l'université Djilali liabes de sidi bel Abbes, 2012.
- [19] Noor A. K & W. S. Burton. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Appl Mech Rev*, vol. 42, no. 1, pages 1,12, 1989.
- [20] Kapania R. K & S. Raciti. Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I : Shear effects and buckling. *AIAA Journal*, vol. 27, no. 7, pages 923,934, 1989.
- [21] Kant T. & K. Swaminathan. Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites - a selective review and survey of current developments. *Composite structures*, vol. 49, pages 65,75, 2000.
- [22] Carrera. E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [23] Pagano. N.J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Comp. Mat.*, vol. 3, pages 398,411, 1969.
- [24] Pagano. N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, vol. 4, pages 20,35, 1970.
- [25] Srinivas S. & A. K. Rao. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, vol. 6, pages 1463,1481, 1970.
- [26] Srinivas S. & A.K. Rao. Flexure of thick plates. *ASME*, pages 298-299, 1973.
- [27] Reissner E. & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous anisotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [28] Kirchhoff. G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [29] Whitney. J.M. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J. Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [30] Liberscu. L. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [31] Touratier. M. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [32] Ambartsumyan. S.A. Theory of anisotropic plate. *Technomic Publishing Co*, 1969.
- [33] Reissner. E The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69, 77, 1945.

- [34] Reddy J.N.. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [35] Reddy. J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [36] Afaq, K.S., M. Karama, S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In *Comptes rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [37] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 1740–1755. 2005
- [38] Chabot. A. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [39] Sciuva. M. Di. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589-596. 1987.
- [40] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [41] Sciuva. M. Di A re_ned transverse shear deformation theory for multi-layered anisotropic plates. *Atti.Accad. Sci. Torino*, vol. 118, pages 279,295, 1984.
- [42] Karama, M.et AbouHarb, B.et S. Mistou& S. Caperaa. Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composite Part B*, vol. 29, no. 3, pages 223,234, 1998.
- [43] Ossadzow C. & M. Touratier. An improved shear-membrane theory for multi- layered shells. *Composite Structures*, vol. 52, pages 85, 95, 2001.
- [44] Icardi. HU. Igher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites : Part B*, vol. 32, pages 343,354, 2001.
- [45] Tahani M. & A. Nosier. Edge e_ect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design*, vol. 24, pages 647, 658, 2003.
- [46] Ren. J.G A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology*, vol. 26, pages 225, 239, 1986.
- [47] Kassapoglou C. & P.A. Lagace. Closed form solutions for the interlaminar stress _eld in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pages 292,308, 1987.
- [48] Yin. W.L. Interlaminar stress analysis of composite laminates using a subla- minate/layer model. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, no. 11, pages 1549, 1564, 1994.

- [49] Pagano. N.J Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, vol. 14, page 385, 1978.
- [50] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part1- deflection and stresses. Int J Sol Struct 2005; 42: 5224–5242.
- [51] Huu-Tai T, Trung-Kien N, Thuc PV, et al. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. Eur J Mech A/Solids 2014; 45: 211–225