

République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn-Khaldoun – Tiaret  
Faculté Des Sciences Appliquées  
Département De Génie Mécanique

**THÈSE**

**EN VUE DE L'OBTENTION DU  
DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCES**

**Spécialité :** Génie Mécanique

**THÈME**

Analyse non linéaire des portiques en composite stratifié par  
la méthode des éléments finis

**Présentée par :**  
**Mme. SI NACEUR Amal.**

**Soutenu publiquement le : 13/02/2020**

**Devant le jury composé de :**

Mr. BOUZIDANE Ahmed	(Professeur, université de Tired)	Président
Mr. SAHLI Ahmed	(Professeur, université de Tired)	Directeur de la thèse
Mme. NOURINE Leila	(M.C.A, ESGEE d'Oran)	Examinatrice
Mr. BOUTCHICHA Djilali	(Professeur, USTO MB)	Examineur
Mr. KEBDANI Said	(Professeur, USTO MB)	Examineur
Mr.SASSI Ahmed	(M.C.A, université de Tired)	Invité

**Année universitaire 2019/ 2020**

## **DÉDICACES**

*A mes parents, pour leurs prières et sacrifices.*

*A mes merveilleux enfants Fatima, Ibtial et Akrem.*

*A mon mari Habib, pour son aide et soutien.*

*A toute la famille Si naceur, Denfar et Bousmahia*

*A mes amis.*

## **Remerciements :**

*En premier lieu et avant tout, je tiens à remercier Allah de m'avoir donné la foi, le courage et la confiance en moi-même pour pouvoir continuer arriver à ce niveau.*

*Je souhaite tout d'abord remercier Monsieur Ahmed SAHLI, mon directeur de thèse, qui a accepté de diriger ce travail. Je lui suis reconnaissant pour ses conseils, sa disponibilité, pour le suivi de mon travail et sa grande compétence qui m'a donné le goût de la recherche durant la période de ce travail.*

*Je tiens à remercier, l'équipe de Laboratoire de recherche des technologies industrielles, Université Ibn Khaldoun de Tiaret.*

*Je remercie ensuite tout particulièrement le Professeur BOUZIDANE Ahmed pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider le jury.*

*Je voudrais aussi remercier madame NOURINE Leila, le Professeur BOUTCHICHA Djilali, le Professeur KEBDANI Said et le Docteur SASSI Ahmed qui ont accepté de participer au jury de cette thèse, leurs contributions le rendra meilleur.*

*Je suis également très touché par l'aide de B. Safia et je tiens à la remercier pour sa gentillesse et son soutien pendant toutes ces années.*

*Je remercie pleinement mes parents de leur soutien .*

*Je saisis l'occasion, à remercier toutes personnes ayant contribué de près ou de loin de ma formation.*

*Enfin, je remercie Mes merveilleux enfants pour m'avoir toujours fait sourire malgré des hauts et de bas. A eux je voudrais offrir mes réussites.*

## **Abstract**

This work deals with the development a finite element of laminated planar gantry based on the positional formulation whose kinematics enables independent turns and variation of slab thickness in an extension of the Layerwise theory. The objective is to verify the results obtained with the element proposed in this work and to compare its efficiency in relation to the two-dimensional finite elements. In addition, the analyzes are performed in order to verify the consistency, the efficiency and the robustness of the formulation with respect mainly to the correct representation of the stresses distributions.

It is intended, therefore, to obtain an element capable of performing non-linear geometric analyzes in structures of plane porticoes composed of laminated composite materials with thin or thick cross-section. Thus, the results of strain distributions and stresses are expected to be more realistic along the thickness and interfaces, aiming at future modelling of the lamination failure process by delamination or sliding. The finite element proposed in this work presents a kinematics based on the Layerwise theory, but with positions intrinsically compatible by the positional mapping functions themselves. The formulation is geometric nonlinear with the possibility of large displacements and rotations and the proposed kinematics allows to represent the Zigzag effect and the transverse heterogeneity. In all examples, numerical analyzes are performed on the Ansys software using two-dimensional finite elements.

## **Résumé**

Ce travail traite du développement d'un élément fini de portique plan stratifié basé sur la formulation de position dont la cinématique permet des tours indépendants et une variation de l'épaisseur de la brame dans le prolongement de la théorie de couche par couche. L'objectif est de vérifier les résultats obtenus avec l'élément proposé dans ce travail et de comparer son efficacité par rapport aux éléments finis bidimensionnels. De plus, les analyses sont effectuées afin de vérifier la cohérence, l'efficacité et la robustesse de la formulation par rapport principalement à la représentation correcte des distributions de contraintes.

Il est donc destiné à obtenir un élément capable d'effectuer des analyses géométriques non linéaires dans des structures de portiques plans composées de matériaux composites stratifiés de section transversale mince ou épaisse. Ainsi, les résultats des distributions des contraintes devraient être plus réalistes le long de l'épaisseur et des interfaces, en vue de la modélisation future du processus d'échec de la stratification par délamination ou glissement. L'élément fini proposé dans ce travail présente une cinématique basée sur la théorie des couches, mais avec des positions intrinsèquement compatibles par les fonctions de cartographie de position elles-mêmes. La formulation est non linéaire géométrique avec la possibilité de grands déplacements et rotations et la cinématique proposée permet de représenter l'effet Zigzag et l'hétérogénéité transversale. Dans tous les exemples, des analyses numériques sont effectuées sur le logiciel Ansys à l'aide d'éléments finis à deux dimensions.

# TABLE DES MATIERES

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

## Chapitre 01

### Revue Bibliographique

1.1 Introduction.....	7
1.2 Aspects généraux des matériaux composites.....	11
1.2.1 Classification des matériaux composites.....	12
1.2.2 Etude du comportement mécanique des matériaux composites.....	18
1.2.3 Théories sur les stratifiés.....	21
1.2.4 Évolution de l'analyse non Linéaire.....	27
1.2.5 Défauts dans les composites stratifiés.....	29

## Chapitre 02

### Méthode D'élément Fini Positionnel Appliquée Aux Modèles Bidimensionnels

2.1 Introduction.....	47
2.2 Analyse non linéaire des structures.....	48
2.3 Fonction de changement de configuration.....	56
2.4 Mesure de la déformation et de la loi de comportement.....	59
2.5 Énergie potentielle de déformation.....	63
2.6 Énergie potentielle relative aux actions extérieures.....	67
2.7 Énergie potentielle totale et équations d'équilibre.....	69
2.8 Processus de la solution.....	73

## Chapitre 03

### Eléments Finis D'un Portique Plan Homogène

3.1 Introduction.....	79
-----------------------	----

3.2 Mappage positionnel des paramètres initiaux et actuels.....	80
3.3 Particularités de l'élément de portique plan homogène.....	83
3.3.1 Gradient des fonctions de mappage de position.....	84
3.3.2 Énergie potentielle de déformation.....	84
3.3.3 Énergie potentielle relative aux actions extérieures.....	85
3.3.4 Énergie potentielle totale et équations d'équilibre.....	89
3.3.5 Processus de la solution.....	92
3.3.6 Connexions entre éléments non colinéaires.....	93
3.4 Exemples numériques.....	101
3.4.1 Exemple 3.1: Poutre en équilibre soumise à diverses actions externes.....	102
3.4.2 Exemple 3.2: Portique plan avec différentes géométries et conditions aux limites...106	
3.4.3 Exemple 3.3: Portique avec connexions semi-rigides.....	111
3.5 Considérations.....	114

## Chapitre 04

### Eléments Finis Pour Portique Plan Stratifié

4.1 Introduction.....	116
4.2 Mappage positionnel des configurations initiales et actuelles.....	118
4.3 Particularités de l'élément fini du portique plat laminé.....	126
4.3.1 Gradient des fonctions de mappage de position.....	127
4.3.2 Energie potentielle de déformation.....	130
4.3.3 Energie potentielle relative aux actions extérieures.....	130
4.3.4 Équations d'énergie potentielle totale et d'équilibre.....	137
4.3.5 Processus de solution.....	143
4.3.6 Connexions entre éléments non colinéaires.....	144
4.4 Post-traitement.....	145
4.5 Exemples numériques.....	148

4.5.1 Exemple 4.1: Poutre homogène polarisée avec force distribuée.....	150
4.5.2 Exemple 4.2: Poutre sandwich polarisée à force répartie.....	162
4.5.3 Exemple 4.3: Poutre sandwich polarisée à force concentrée.....	169
4.5.4 Exemple 4.4: Véranda homogène à liaisons semi-rigides.....	177
4.5.5 Exemple 4.5: Portiques laminés.....	180
4.6 Considérations.....	184
Conclusion Générale.....	186

## Références bibliographiques

## Liste des tableaux

Tableau 1 - Composites avec fibres: matières constitutives les plus courantes [13].....	14
Tableau 2 - Évaluation de la quantité de points de Gauss requise pour les intégrations numériques de l'élément de portique plat stratifié de l'exemple 4.1.....	153

## Liste des figures

Figure 1 : Phases d'un matériau composite [13].....	11
Figure 2 : Classification des matériaux composites selon le type de renfort (adapté)[20].....	12
Figure 3 - Nomenclature du schéma de stratification [22].....	16
Figure 4 - Exemples de schémas de stratification [22] .....	16
Figure 5 - Composite de type sandwich: panneau (A), faces (B) et noyau (C) en forme de ruche.....	17
Figure 6 - Niveaux d'analyse dans les structures formées de matériaux composites[13].....	19
Figure 7 - Déplacements transversaux et tensions le long d'une section homogène et stratifiée[3].....	20
Figure 8 - Equilibre des tensions interlaminaires[5].....	21
Figure 9 -. Théorie cinématique de CLT, FSDT et HSDT (à gauche) déformations et les contraintes des théories FSDT et VRT (droite) [3].....	24
Figure 10 - Interpolation linéaire des déplacements dans la théorie des couches[5].....	26
Figure 11 - Déplacements dans le plan des couches le long de l'épaisseur selon les théories ESL et Layerwise[16].....	27
Figure 12 - Paramètres importants pour l'identification des descriptions lagrangiennes.....	53
Figure13 - Paramètres dans la description totale de Lagrange.....	53
Figure 14 - Configurations dans la description Lagrangienne mise à jour [151].....	54
Figure 15 - Paramètres dans la description corrotative [151].....	55
Figure 16 - Fonctions de mappage des paramètres initial et actuel[177].....	57
Figure 17 - Changement de configuration.....	60
Figure 18 - Ressort unidimensionnel élastique non linéaire.....	63
Figure 19 - Association de deux éléments finis[177].....	70
Figure 20 - Organigramme de base de la méthode de Newton-Raphson.....	78
Figure 21 - Cartographie de position de l'élément portique homogène [9].....	80
Figure 22 - Mappage positionnel de n'importe quel point de la configuration initiale.....	81

Figure 23 - Mappage positionnel de n'importe quel point de la configuration actuelle .....	83
Figure 24 - Charge répartie et forces nodales équivalentes [177] .....	85
Figure 25 - Binaires correspondant au moment concentré.....	87
Figure 26 - Association de deux éléments finis de portique plan homogène [177] .....	90
Figure 27 - Modèle de couplage entre éléments.....	94
Figure 28 - Exemples de possibilités d'éléments de liaison.....	94
Figure 29 - Identification des rotations d'un vecteur nodal généralisé.....	96
Figure 30 - Géométrie, chargement et paramètres élastiques de l'exemple 3.1.....	103
Figure 31 - trajectoire d'équilibre pour la poutre avec une force concentrée.....	103
Figure 32 - trajectoire d'équilibre pour la poutre avec un moment concentré.....	104
Figure 33 - Trajectoire d'équilibre de la poutre avec une force répartie.....	104
Figure 34 - Configurations de décalage des poutres pour certains incréments de charge.....	105
Figure 35 - Géométrie, chargement et paramètres élastiques de l'exemple 3.2.....	107
Figure 36 - Trajectoire d'équilibre pour le cadre en forme de losange.....	108
Figure 37 - Trajectoire d'équilibre pour le cadre en forme de carré.....	109
Figure 38 - Trajectoire d'équilibre pour l'arc plat sinusoïdal.....	109
Figure 39 - Paramètres actuels des trames et de l'arc pour certains incréments de charge ou de position.....	110
Figure 40 - Géométrie, chargement et paramètres élastiques de l'exemple 3.3.....	112
Figure 41 - Trajectoires d'équilibre pour le portique avec des supports simples (supérieur). Étirement Initial (inférieur).....	113
Figure 42 - Trajectoires d'équilibre pour le portique avec des supports simples avec une raideur élastique à la rotation (supérieure). Étirement initial (inférieur).....	113
Figure 43 - Trajectoires d'équilibre pour le portique avec des supports fixes (en haut). Étirement initial (inférieur).....	113
Figure 44 - Cartographie de la position de l'élément de portique plat laminé.....	119
Figure 45 - Mappage de position de tout point de la couche de référence dans la configuration initiale.....	121
Figure 46 - Mappage de position de tout point de la configuration initiale d'une couche inférieure à la couche de référence.....	122

Figure 47 - Mappage de position d'un point quelconque dans la configuration initiale d'une couche au-dessus de la couche de référence.....	124
Figure 48 - Modèle de couplage entre éléments stratifiés.....	144
Figure 49 - Systèmes de référence locaux et globaux dans l'élément stratifié.....	147
Figure 50 - Paramètres de géométrie, de chargement et d'élasticité pour le problème.....	151
Figure 51 - La discrétisation avec 4 éléments cubiques et la variation du nombre de couches (Cas de $S = 10$ ).....	155
Figure 52 - Résultats de l'exemple 4.1: Déplacement dans la direction 1 ( $u$ ) pour une section à 2,5 m du support gauche.....	157
Figure 53 - Résultats de l'exemple 4.1: Contrainte axiale $S_{11}$ pour une section située au milieu de la travée.....	158
Figure 54 - Résultats de l'exemple 4.1: Contrainte axiale $S_{22}$ pour une section située au milieu de la travée.....	160
Figure 55 - Résultats de l'exemple 4.1: Contrainte de cisaillement $S_{12}$ pour une section à 2,5 m du support gauche.....	161
Figure 56 - Paramètres de géométrie, de chargement et d'élasticité du problème: Exemple 4.2.....	163
Figure 57 - Maillages d'éléments finis utilisés dans l'exemple 5.2 pour le cas où $S = 2$ .....	164
Figure 58 - Résultats de l'exemple 4.2: Déplacement dans la direction 1 ( $u$ ) pour une section à 2,5 m du support gauche.....	165
Figure 59 - Résultats de l'exemple 4.2: Contrainte axiale $S_{11}$ pour une section située au milieu de la travée.....	166
Figure 60 - Résultats de l'exemple 4.2: Contrainte axiale $S_{22}$ pour une section située au milieu de la travée.....	167
Figure 61 - Résultats de l'exemple 4.2: contrainte de cisaillement $S_{12}$ pour une section à 2,5 m du support gauche.....	168
Figure 62 - Paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité de l'exemple 4.3.....	170
Figure 63 - Maillages d'éléments finis utilisés dans l'exemple 4.3 pour le modèle ABA.....	171
Figure 64 - Résultats de l'exemple 4.3: Déplacement dans la direction 1 ( $u$ ) pour une section à 2,5 m du support gauche.....	173

Figure 65 - Résultats de l'exemple 4.3: Contrainte axiale S11 pour une section à 2,5 m du support gauche.....	174
Figure 66 - Résultats de l'exemple 4.3: Contrainte axiale S22 pour une section à 2,5 m du support gauche.....	175
Figure 67 - Résultats de l'exemple 4.3: contrainte de cisaillement S12 pour une section à 2,5 m du support gauche.....	176
Figure 69 - Paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité de l'exemple 4.4.....	177
Figure 70 - Trajectoires d'équilibre du portique à connexions semi-rigides analysées avec l'élément stratifié (en haut). Initiale (inférieure).....	179
Figure 72 - Paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité des cadres stratifiés.....	181
Figure 73 - Répartition des déplacements longitudinaux $u$ (m) pour certaines sections transversales du portique avec un étage. Résultats de la dernière augmentation de charge...	182
Figure 74 - Répartition des déplacements longitudinaux $u$ (m) pour certaines sections transversales du portique à cinq ponts. Résultats de la dernière augmentation de charge.....	183
Figure 75 - Trajectoires d'équilibre faisant référence au déplacement horizontal $u$ (m) du nœud supérieur gauche.....	184

## Liste des principaux symboles

$f(x)$	La fonction de changement de configuration
$f^0(\xi_1, \xi_2)$	Fonction de mappages pour la configuration initiale
$f^1(\xi_1, \xi_2)$	Fonction de mappages pour la configuration actuelle
$A^0(\xi_1, \xi_2)$	Le gradient de la fonction de mappage de position pour la configuration initiale
$A^1(\xi_1, \xi_2)$	Le gradient de la fonction de mappage de position pour la configuration actuelle
$A$	Le gradient de la fonction de changement de configuration
$x_1, x_2$	Les positions de la configuration initiale dans les directions 1 et 2
$y_1, y_2$	Les positions de la configuration actuelle dans les directions 1 et 2
$b_0$	La hauteur de la section de l'élément dans la configuration initiale
$u(x)$	Le champ de déplacement
$u, v$	Composantes suivants les deux axes des déplacements
$C$	Le tenseur d'allongement à droite de Cauchy-Green
$E$	le tenseur de déformation de Green-Lagrange
$S$	Les contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce
$G$	Module d'élasticité de cisaillement
$u_e$	L'énergie spécifique de déformation
$U$	L'énergie potentielle de déformation
$J(\xi_1, \xi_2)$	Le jacobien de la transformation du système de coordonnées
$F_{int \alpha}^\beta$	Le vecteur des forces internes
$Q_k^i$	La force nodale équivalente agissant sur le nœud $k$
$P_k^i$	La force concentrée appliquée au nœud
$B_\alpha^\beta$	Energie équivalente due aux moments concentrés

$\mathbf{R}_\alpha^\beta$	Le résidu correspondant au vecteur de déséquilibre mécanique
$y_k^i$ tentative	Les positions d'essai provisoires
$y_k^i$	Les positions actuelles des nœuds
$\mathbf{g}_k^i$	Le vecteur généralisé
$H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}$	La matrice de Hesse
$\Delta y_k^i$	Une correction à ajouter aux positions provisoires
$K_{ab}^i$	La raideur du ressort ou le facteur de pénalité correspondant à la direction i
$\Delta y_a^i, \Delta y_b^i$	Les composantes dans la direction i, des déplacements nodaux de a et b
Lr	La ligne de référence
LR	La couche de référence
$k_e$	L'épaisseur de la couche k
$d_j$	La distance entre le nœud j sur la ligne de référence et le centre de la couche k
$D(\xi_1)$	La distance de la ligne de référence au centre de la couche de référence
${}^k E(\xi_1)$	L'épaisseur des couches ${}^k E(\xi_1)$ dans la configuration actuelle
${}^{LR} e$	L'épaisseur de la couche de référence LR
${}^m e$	L'épaisseur des couches au-dessus et sous la couche de référence LR
ngl	Le nombre de degrés de liberté de l'élément
nlam	Le nombre de couches utilisées dans le modèle numérique
gr+1	Le nombre de nœuds de l'élément
$2(nlam+1)$	Le nombre de degrés de liberté par nœud
M	Les conjugués énergétiques associés aux vecteurs généralisés des couches
${}^k q^i$	La force distribuée
${}^k T$	Les contraintes réelles de Cauchy
$R(\xi_1)$	La matrice de rotation du système global vers les directions locales de l'élément

S	La relation entre l'envergure et la hauteur de la structure
S11	Contrainte axiale dans la direction longitudinale
S22	Contrainte axiale dans la direction transversale
S12	Contrainte de cisaillement
$\Phi_k$	La fonction de forme constituée par un polynôme de Lagrange
$(\xi_1, \xi_2)$	Le système de coordonnées adimensionnelles
$\Omega$	L'énergie potentielle des actions externes
$\Pi$	La fonction d'énergie potentielle totale
${}^p\alpha_a, {}^p\alpha_b$	Les rotations cumulées des vecteurs généralisés de la configuration initiale à la configuration correspondant à l'incrément de chargement p
$\theta_a, \theta_b$	Les rotations qui se produisent entre les étapes de chargement
$\nu$	Le coefficient de Poisson

# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENARALE

La conception des structures en matériaux composites est un art dont on ne peut prétendre rendre compte de façon exhaustive. Le sujet est en effet extrêmement vaste tant du point de vue des objets potentiels auxquels il s'adresse, que des solutions possibles, du fait de la multiplicité des propriétés et des paramètres à prendre en compte. L'innovation y est par ailleurs fort active[1].

Le problème résiduel lié à ce matériau « optimal » est devenu la prédiction de son comportement à la fois complexe et multiple (lié à l'hétérogénéité et anisotropie) : la compréhension des phénomènes physiques et leur prise en compte dans des modèles ne sont pas encore aussi abouties que pour les matériaux métalliques. Du fait de la grande complexité des problèmes, on peut être satisfait des progrès déjà réalisés concernant le comportement mécanique sous chargement statique ; mais là où la marge de progression reste importante, c'est en dehors de ce domaine : en particulier le domaine des chargements mécaniques de fatigue [2].

Ainsi l'évolution de la technologie des matériaux et le développement des divers secteurs industriels ont amené l'emploi de matériaux légers et résistants permettant de réduire la dimension des composantes d'une structure en raison de leur niveau élevé de résistance. D'autre part, l'évolution actuelle des normes de construction oblige de concevoir des structures plus fiables en termes d'amélioration de la sécurité et de la performance sur le plan économique. Ce but ne peut être atteint que par une analyse non linéaire tenant compte de toutes les sources de non linéarités possibles. Celles-ci peuvent être classées en trois catégories: La première est géométrique due aux grands déplacements, la deuxième est matériel ou rhéologique due aux grandes déformations où la loi de comportement des matériaux est caractérisé par la plasticité, la troisième est due à l'évolution des conditions limites.

Selon Carrera (2002)[3], toute théorie d'analyse de composites stratifiés, ainsi qu'un élément fini développé avec cette théorie, devrait considérer les aspects complexes suivants d'une structure stratifiée: anisotropie au niveau du stratifié, hétérogénéité transversale, effet Zig-Zag et continuité inter laminaire.

Lorsque l'objectif de l'analyse des structures laminées d'épaisseur fine à modérée est d'obtenir des réponses globales telles que les déplacements, les charges critiques de frottement et les fréquences de vibration, par exemple les théories équivalentes à une couche (*Equivalent*

*Single Layer* –ESL) qui analysent le stratifié considérant une seule couche avec des propriétés mécaniques équivalentes, fournissent une précision acceptable des résultats.

Cependant, ces théories ont une application limitée lorsqu'on travaille avec des stratifiés épais ou lorsqu'une évaluation au niveau de la lame et de ses interfaces est nécessaire pour identifier le processus de défaillance du composite, tel que le délaminage ou le glissement. Cette limitation est due au fait que les théories ESL ne sont pas en mesure de représenter avec précision les distributions de contraintes le long de l'épaisseur et aux interfaces du stratifié composite [5].

En raison de la continuité interlaminaire, de l'anisotropie des couches et de l'hétérogénéité transversale, les distributions de contraintes sont continues et les déformations sont discontinues aux interfaces du stratifié. Les théories ESL représentent ce comportement de manière exactement opposée car, en traitant le stratifié comme une seule couche équivalente, les déformations obtenues sont continues et les tensions sont discontinues.

Ainsi, les théories qui différencient les couches sont plus adéquates. Une théorie bien connue est Layerwise, dont les hypothèses cinématiques considèrent des champs de déplacement indépendants dans chaque couche, mais compatibles dans les interfaces [5]. Ces hypothèses génèrent une distribution de déformations transversales discontinues au niveau des interfaces, permettant la représentation de tensions plus réalistes, principalement dans le cas de stratifiés épais.

D'autres problèmes importants liés aux stratifiés concernent les effets non linéaires. Les matériaux composites stratifiés sont légers et présentent une résistance et une rigidité spécifiques élevées. Ainsi, il existe une tendance à avoir des structures minces sujettes à de grands déplacements et rotations. En conséquence, l'analyse à l'équilibre dans la configuration non perturbée n'est plus acceptable, ce qui oblige à utiliser des formulations qui effectuent l'analyse dans la configuration déformée de la structure (non-linéarité géométrique).

L'hypothèse d'un comportement linéaire de la relation contrainte-déformation est largement acceptée et largement utilisée en ingénierie, car les matériaux composites sont fortement linéaires par rapport à la rupture, avec une linéarité généralement supérieure aux métaux [6]. Cependant, lorsque l'objectif de l'analyse est d'identifier la défaillance matérielle, les effets de la non-linéarité physique peuvent être importants pour l'identification réaliste de ce phénomène.

Compte tenu de tout ce qui a été discuté, il est conclu que l'analyse des composites stratifiés présente des défis majeurs, dans la mesure où les distributions de contraintes dans les formulations classiques sont discontinues et imprécises et que leur amélioration est essentielle pour définir des critères de défaillance efficaces pour les structures composites stratifiées. Par conséquent, il est justifié d'utiliser une théorie discrète pour les couches en plus de la prise en compte des effets non linéaires, car la recherche d'une formulation numérique qui représente de manière réaliste les distributions de contraintes le long de l'épaisseur et aux interfaces d'un stratifié devrait également considérer la présence de ces effets.

Dans ce travail, la formulation développée suit une cinématique similaire à celle adoptée par la théorie des stratifiés de couche par couche et utilise la méthode de positionnement par éléments finis (Coda;Paccola, 2007[7]; Coda, 2009[8] ; Coda; Paccola, 2011[9]; Pascon; Coda 2013[10],Sampaio, 2014[11]) pour l'analyse des cadres plats stratifiés en tenant compte de la non-linéarité géométrique. De cette manière, il est prévu d'obtenir une répartition plus réaliste des tensions le long de l'épaisseur et des interfaces. La non-linéarité physique n'est pas prise en compte, elle est proposée comme travail futur.

La méthode des éléments finis par position est une formulation par éléments finis qui fonctionne avec des degrés de liberté en position à la place des déplacements traditionnels. La formulation positionnelle a pour caractéristiques pertinentes l'utilisation d'une description lagrangienne totale et de la mesure de déformation de Green-Lagrange dont le conjugué énergétique est le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff de second ordre. Cette mesure de déformation est objective et adéquate pour la représentation de problèmes soumis à de grands déplacements et rotations.

Une solution possible pour l'analyse de portiques stratifiés serait l'utilisation d'éléments finis à deux dimensions communément appelé comme éléments de plaque. Cependant, la discrétisation des couches avec cet élément peut provoquer le dysfonctionnement matriciel du système d'équations d'équilibre dans le modèle discret. Cela est dû à la présence de couches minces et longues, même dans les stratifiés épais, et à la variation soudaine et importante des propriétés élastiques d'une couche à l'autre. Ainsi, le raffinement de la discrétisation est nécessaire pour éviter la présence d'éléments très déformés qui causent ce mauvais conditionnement, mais la quantité de degrés de liberté et, par conséquent, le coût de calcul peut devenir irréalisable en raison de la plus grande quantité d'éléments.

Les chapitres suivants présentent une description des théories sur les stratifiés, en mettant l'accent sur la théorie des couches. Nous identifions une approche importante dans les déplacements de la théorie des couches trouvée dans les travaux de Reddy (2004a)[5], qui consiste à représenter le champ de déplacement par une combinaison linéaire du produit de polynômes d'interpolation unidimensionnels le long de l'épaisseur avec des polynômes d'interpolation bidimensionnelle dans le plan du stratifié.

Le développement d'un élément fini pour l'analyse de cadres plats stratifiés dont la cinématique correspond à celle de la théorie de Reddy's Layerwise (2004a) peut ne pas être efficace, car les éléments finis utilisés pour représenter les couches deviennent similaires aux éléments finis Lagrangiens à deux dimensions. Par conséquent, ils sont soumis aux problèmes de mauvais conditionnement discutés précédemment.

Ainsi, la proposition d'un élément fini présentant les caractéristiques des modèles de portique, mais offrant la possibilité d'une rotation et d'une variation indépendantes de l'épaisseur de la section des couches, devient intéressante, car il est prévu que l'analyse de problèmes posés avec des épaisseurs faibles ou modérées dans le cas de portiques homogènes et stratifiés, et les problèmes de section transversale épaisse et stratifiée ou non, comme dans le cas de poutres et poutres sandwich, ne sont pas soumis au problème de dysfonctionnement de la matrice. Ainsi, il est possible d'utiliser un plus petit nombre d'éléments finis, mais avec une qualité équivalente des résultats en déplacements et contraintes par rapport à ceux obtenus avec les éléments plaques par une analyse utilisant une discrétisation très fine.

### **Objectifs de la thèse**

Compte tenu de ce qui précède, l'objectif principal de ce travail est de développer un élément fini d'un portique stratifié basé sur la formulation positionnelle, dont la cinématique permet des rotations indépendantes et une variation de l'épaisseur des couches dans le prolongement de la théorie Layerwise.

Il est donc destiné à obtenir un élément capable d'effectuer des analyses géométriques non linéaires dans des structures de portiques plats composées de matériaux composites stratifiés de section transversale mince ou épaisse. Ainsi, on s'attend à ce que les résultats de la déformation et de la répartition des déformations soient plus réalistes le long de l'épaisseur et des interfaces, en vue d'une modélisation future du processus de défaillance de la stratification par délamination ou glissement. À cette fin, les objectifs spécifiques suivants sont définis:

- a) Développer la formulation mathématique de l'élément fini du portique plan homogène à degrés de liberté composé de positions nodales et de vecteurs généralisés représentant la rotation et la variation en hauteur de la section;
- b) Elargir la formulation de cet élément pour prendre en compte une section composée de plusieurs lames de matériaux différents, avec indépendance de rotation et variation d'épaisseur, dans le prolongement de la théorie des couches;
- c) Evaluer l'efficacité de l'élément de portique plat stratifié par rapport aux éléments finis bidimensionnels, communément appelés éléments en plaque :
- d) Effectuer des analyses des cas d'intérêt.

### **Organisation de la thèse**

L'organisation des différents thèmes de ce travail est décrite dans ce point afin de clarifier la séquence logique utilisée et de présenter le contenu de chaque chapitre de ce travail.

Un examen bibliographique des aspects généraux des matériaux composites est présenté dans la première partie du chapitre 1. Les questions liées au concept de matériau composite et à la classification des différents types sont discutées. Une plus grande attention a été accordée aux composites stratifiés. Les niveaux d'approches existantes dans l'évaluation du comportement mécanique des structures constituées de ces matériaux sont identifiés, ce qui a permis la localisation de la formulation développée dans ce travail.

Un résumé des principales théories pour l'analyse des stratifiés englobant leurs hypothèses et leurs limites est également présenté. Enfin, un élément aborde la question de la défaillance des composites stratifiés, en mettant l'accent sur les principaux aspects à prendre en compte dans une analyse plus réaliste afin d'identifier ce phénomène. Dans cet élément, les critères d'erreur existants sont également affichés.

L'ensemble du contenu de cette première partie de la revue bibliographique a été rédigé dans le but de fournir une vue d'ensemble des matériaux composites. Une grande partie de ce qui est écrit dans cet article est tirée d'ouvrages connus sur l'ingénierie des matériaux, tels que Jones (1999) [4], Reddy (2004a)[5], Vinson et Sierakowski (2004) [12], Mendonça (2005) [6], Daniel et Ishai(2006) [13], entre autres.

La deuxième partie de la revue bibliographique présentée au chapitre 1 cherche à identifier et à caractériser les principales théories existantes pour l'analyse des composites stratifiés dans

des régimes linéaires et non linéaires. Les hypothèses, les applications et les limites de chaque théorie sont discutées. Le but de ce chapitre est de situer la formulation du stratifié à éléments finis développée dans ce travail par rapport aux autres formulations existantes. La majeure partie du contenu a été extraite d'articles scientifiques tels que Ghugal et Shimpi (2001, 2002) [14], [15], Carrera (2002)[3], Kreja (2011) [16], Lo et al. (2011) [17], entre autres.

Le chapitre 1, par conséquent, délimite ces travaux dans le domaine des connaissances relatives aux matériaux composites. Après cela, les chapitres suivants du texte décrivent les formulations par éléments finis développées.

Cela commence, au chapitre 2, avec une présentation de la formulation mathématique particulière aux éléments finis de position appliqués à des problèmes permettant une simplification du domaine bidimensionnel. La première partie de ce chapitre contient la révision bibliographique des principales formulations destinées à l'analyse non linéaire des structures. La formulation de position est identifiée dans les formulations avec une description lagrangienne totale, comme indiqué dans l'item faisant référence à la définition de la fonction de changement de configuration. La mesure de la déformation et la loi de comportement adoptée sont présentées ci-dessous. Au fur et à mesure que la formulation positionnelle est développée au moyen d'une approche énergétique, les graphes constituant l'énergie potentielle totale du problème sont identifiés. Le chapitre se termine par la description du processus de résolution utilisé pour résoudre le système d'équations non linéaires, basé sur la méthode de Newton-Raphson. Comme on le verra, l'ensemble des opérations mathématiques présentées au chapitre 2 est indépendant du type d'élément développé.

De cette manière, les chapitres 3 et 4 ont été organisés avec la même séquence logique qui consiste à décrire initialement la cinématique adoptée au moyen des fonctions de mappage de position des configurations initiale et actuelle, suivies de la présentation des aspects particuliers de chaque élément fini développé. Ces aspects sont principalement liés à la détermination des termes constituant les différents vecteurs et matrices de la formulation positionnelle, identifiés au chapitre 2. L'avant-dernier élément présente les résultats obtenus lors des analyses numériques d'exemples. Ces résultats sont comparés à d'autres analyses et données numériques disponibles dans la littérature ou obtenues à partir d'analyses effectuées dans Ansys. Les considérations relatives à la vérification de la formulation sont énumérées à la fin de chaque chapitre.

Enfin, des conclusions et des suggestions pour la poursuite de cette recherche sont décrites à la conclusion générale.

# **CHAPITRE 01**

## **REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

## 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

De nombreux progrès technologiques pertinents dans plusieurs domaines de la connaissance ne sont devenus possibles que grâce au développement et à l'utilisation de matériaux composites. Bien que l'application de ces matériaux se réfère toujours à la technologie la plus récente, l'origine de cette classe importante de matériaux fait référence aux composites dits naturels présents dans les bois, les os et les tissus musculaires (Hull et Cline, 1996)[18]. Historiquement, l'utilisation des composites est très ancienne. Par exemple, les Égyptiens utilisaient déjà du bois lamellé pour améliorer les performances mécaniques, augmenter la résistance à la dilatation thermique et réduire l'absorption d'humidité [4]. Dans les applications modernes, les matériaux composites ont été utilisés pour la première fois lors de la construction de véhicules spatiaux au cours de la dernière moitié du siècle dernier [3].

Les composites peuvent être conçus pour présenter de nombreuses propriétés avantageuses par rapport aux matériaux qui constituent les structures monolithiques traditionnelles. Parmi eux, ils peuvent être énumérés, par exemple: résistance et rigidité supérieures, densité plus faible, délai de fatigue plus long, résistance supérieure à l'usure et à la corrosion, stabilité dimensionnelle accrue liée aux actions thermiques et hygroscopiques, entre autres.

Selon Daniel et Ishai (2006) [13], cette performance supérieure n'est possible que parce que les matériaux constitutifs des composites présentent des caractéristiques qui augmentent les possibilités de développement d'une configuration optimale du matériau en fonction des contraintes d'une application spécifique. Les principales propriétés des composites sont les suivantes: résistance spécifique élevée (rapport de résistance à la densité), rigidité spécifique élevée (rapport de rigidité à la densité) et propriétés anisotropes et hétérogènes.

Depuis les années 60, on a assisté à une « envolée technologique » du mode aéronautique et spatial qui a été conditionnée par la mise au point de structures optimisées constituées de matériaux spécifiquement résistants.

Les fibres de carbone ont été sélectionnées grâce à leurs très bonnes caractéristiques spécifiques (résistance et rigidité). Elles ont été alliées à une matrice résineuse (époxy ou polyester) qui permet une mise en forme aisée. On a ainsi obtenu un **matériau composite** qui

possède à des caractéristiques duales ; les constituants résine et fibre ont des propriétés mécaniques quasiment aux extrêmes de la plaquette des matériaux. Le composite sous forme de plis arrangés en fonction des directions de chargement constitue un **composite stratifié** [2].

Les applications des matériaux composites vont des objets simples comme le bouton d'une chemise aux objets extrêmement complexes comme une navette spatiale. L'utilisation comprend des applications dans l'aérospatiale, l'aéronautique, la marine, l'énergie, les infrastructures et la construction civile, les produits militaires, biomédicaux et sportifs.

Dans le secteur aérospatial, les matériaux doivent avoir une grande stabilité dimensionnelle car ils sont exposés à des conditions environnementales extrêmes. Ainsi, des matériaux composites ayant des coefficients de dilatation thermique et hygroscopique proches de zéro sont conçus et utilisés dans les structures de bus et les installations spatiales, dans les antennes, dans les miroirs et dans les instruments optiques [13].

Dans les applications des avions militaires et de l'aviation civile, il est souhaitable que les matériaux présentent une rigidité élevée, une résistance élevée et une faible densité. De cette manière, l'utilisation de matériaux composites a considérablement augmenté au cours des dernières décennies. A titre d'exemple, nous pouvons citer l'Airbus A380 qui est le plus grand avion commercial du monde et utilise une grande quantité de composites: composé de 22% de plastiques renforcés de fibres de carbone, de verre et de quartz et de 3% de laminés sandwich à faces façonnées par des stratifiés en aluminium ou en polymère avec des fibres de carbone et un noyau composé de fibres de verre dans une matrice époxy. Un autre exemple est l'avion militaire B-2, fabriqué presque entièrement avec des composites tels que celui en carbone avec époxy [12]; [13]).

L'utilisation de matériaux composites dans les voitures, les bus, les camions et les véhicules ferroviaires est due à la légèreté et à la résistance de ces matériaux, qui sont utilisés de différentes manières telles que: portes, capots, pare-chocs, isolation thermique, blindage, carénages, entre autres. Les composites sont utilisés, par exemple: dans le remplacement de pièces métalliques par des pièces plus légères, comme dans les ressorts en fibres de verre avec époxy; dans les sièges des trains et des métros, fabriqués avec des résines thermodurcissables autoextinguibles; dans certaines parties du carénage, qui utilisent des panneaux sandwich; dans l'utilisation de SMC (composite de résine thermodurcissable et de fibres de renforcement) dans les carénages d'automobiles pour réduire le poids; dans des blindages en

composites à hautes performances, tels que le composite de résines thermodurcissables avec des fibres d'aramide; entre autres ([12], [13]).

Le secteur nautique est l'un des principaux utilisateurs de composites dans le monde et tire parti des avantages de ces matériaux, tels que: l'isolation thermique, des coûts de fabrication moins élevés, une maintenance réduite, une résistance à la corrosion et un poids réduit. Les panneaux sandwich hybrides largement utilisés dans la construction de bateaux sont formés par des faces épaisses en stratifié polymère renforcé de fibres de verre et de carbone et par une âme remplie de mousse de PVC. Ce matériau est utilisé, par exemple, sur le navire suisse Corvette YS - 2000. Sur des navires plus petits tels que des bateaux, des bateaux de pêche et des catamarans, la coque est entièrement réalisée en résines renforcées de fibre de verre [12].

Dans le secteur de l'énergie, les matériaux composites sont utilisés, par exemple, dans les aubes d'éoliennes et les plates-formes de forage en mer. Les couches sont fabriquées avec des résines de polyester ou époxy renforcées de tissus et de bandes de fibres de verre et de carbone [13]. L'utilisation de colonnes montantes composites constitue une excellente alternative aux colonnes montantes en acier car elles sont plus légères, plus résistantes à la fatigue, à la corrosion et à une meilleure isolation thermique. Pour fabriquer les colonnes montantes, des structures hybrides composées de fibre de carbone et de fibre de verre sont utilisées dans une matrice époxy [19].

Par exemple, des matériaux composites (carbone avec époxy ou carbone avec poly sulfone) peuvent également être trouvés dans des produits biomédicaux tels que prothèses, membres artificiels, fauteuils roulants, béquilles et produits de sport, qui nécessitent des matériaux légers et robustes, tels que des raquettes, des clubs de golf, des cannes à pêche, des skis, des planches et des bicyclettes. Les vélos professionnels, par exemple, peuvent être fabriqués à partir de résines thermodurcissables renforcées de fibre de carbone, offrant une rigidité et une légèreté élevées.

Dans la construction civile, les applications des matériaux composites sont assez étendues. Les principaux produits sont les suivants: réservoirs d'eau, tuiles, marbres synthétiques, toits, mobilier urbain, entre autres. Dans les infrastructures, le nombre d'applications est également important, par exemple: conduites d'eau et d'égout, réservoirs, sols et profilés pultrudés en général. Dans ce domaine, l'utilisation de matériaux composites a augmenté principalement dans la récupération et le renforcement de ponts, dans la substitution de plateaux et de teintures [12].

Les secteurs de la construction et des infrastructures sont également les principaux consommateurs de béton simple et de béton armé, qui sont les matériaux composites les plus largement utilisés dans le monde. Le béton simple est un composite formé de particules inertes, représentées par des agrégats d'origine pierre, avec une matrice à base de ciment Portland. Leurs applications sont destinées à des fins non structurelles, comme dans certains éléments préfabriqués et aux structures dont les contraintes de traction restent faibles, comme dans les barrages, les ponts et les blocs de fondation.

Le béton simple résiste aux contraintes de compression mais présente une faible résistance à la traction. Ainsi, pour augmenter la résistance à la traction, des barres d'acier sont insérées dans un agencement prédéfini, formant le béton armé. Ceci est largement utilisé à des fins structurelles telles que la construction de bâtiments et de ponts.

Comme on peut le constater, les matériaux composites sont utilisés dans plusieurs domaines, tant dans les applications structurelles que non structurelles. Cela est dû à la faisabilité d'une conception optimisée et efficace pour le matériau et, par conséquent, pour la structure.

L'utilisation des matériaux composites a grandement contribué à atteindre ces objectifs de gains de masse tout en conservant la fiabilité mécanique et la longévité. L'association de fibres de carbone et de résine époxyde est un exemple de ces matériaux légers et anisotropes présentant, de par l'association d'un renfort fibreux et d'une matrice organique, de remarquables atouts mécaniques et physico-chimiques. Depuis environ une quarantaine d'années, l'évolution des techniques de fabrication rend aujourd'hui possible la conception de pièces de fortes épaisseurs, de formes complexes et de dimensions de plus en plus grandes. Divers programmes de recherche ont été menés pour pouvoir obtenir une meilleure compréhension du comportement mécanique des matériaux composites.

Les aspects généraux des matériaux composites sont les suivants: définition, classification, types de constituants, comportement mécanique, types d'analyses structurelles possibles et formes de défaillance. Ces aspects contribuent à la justification et à la contextualisation de la formulation numérique présentée dans ce travail, ainsi qu'à donner un aperçu des matériaux composites et plus spécifiquement des composites stratifiés.

## 1.2 Aspects généraux des matériaux composites

Un matériau est appelé composite lorsque deux ou plusieurs matériaux sont combinés à une échelle macroscopique pour former un troisième matériau présentant des propriétés supérieures à celles de ses composants individuels ([4]; [5]; [12]). Lorsque cette combinaison se produit à l'échelle microscopique, comme dans les alliages métalliques, le matériau formé n'est pas considéré comme composite.

En gros, trois phases peuvent être identifiées dans un composite, la matrice, le renfort et la zone de transition (Figure 1). En fonction de l'application du composite, la fonction de ces phases peut varier. Dans les composites de performances faibles à moyennes, la matrice est le principal élément de résistance et le renforcement contribue à la rigidité. Dans les composites à hautes performances, le renforcement détermine la rigidité et la résistance du matériau, tandis que la matrice a pour fonction de protéger le renforcement des dommages de surface et des agents environnementaux agressifs, de maintenir l'espacement et l'orientation et de transmettre les tensions entre les éléments du renforcement. La zone de transition a une influence importante sur les mécanismes de défaillance et sur le comportement contrainte-déformation du matériau [13].

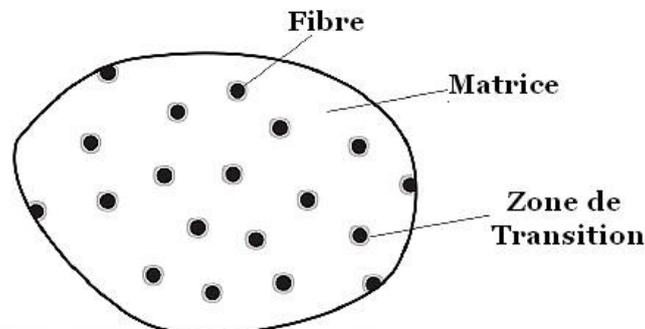


Figure 1 : Phases d'un matériau composite[13].

À la suite de cet élément, une classification des différents types de matériaux composites est présentée, identifiant le groupe auquel les stratifiés appartiennent. Les niveaux des approches existantes pour déterminer le comportement mécanique des composites sont décrits et la formulation développée dans ce travail est encadrée à ces niveaux. Enfin, les théories d'analyse des composites stratifiés et les principaux critères de défaillance sont présentés. L'objectif est d'identifier les facteurs pertinents à prendre en compte dans toute formulation dont la proposition est la détermination la plus précise de la répartition des contraintes afin d'identifier le processus de défaillance d'un composite stratifié.

### 1.2.1 Classification des matériaux composites

Reddy (2004a) [5] classe les matériaux composites dans les composites à particules, les composites à fibres et les composites stratifiés. En plus de ces trois modèles, Jones (1999) [4] inclut une quatrième classification correspondant à un groupe de composites formés par la combinaison des trois types précédents, les composites hybrides. Une autre division que l'on peut trouver dans Levy Neto et Pardini (2006) [20] fait référence à la division en composites naturels et synthétiques. Ces auteurs proposent le schéma de classification présenté à la figure 2, défini en fonction des types et des dispositions des renforts.

Il est évident que toute classification envisagée ne sera pas assez générale pour englober le grand nombre de combinaisons possibles des matériaux composites. Ces combinaisons résultent de la flexibilité de ces matériaux pour le développement de propriétés optimales face à un ensemble de demandes spécifiques. Ainsi, certaines modifications (surlignées en rouge) ont été incluses dans la classification hiérarchique de Levy Neto et Pardini (2006) [20] (Figure.2) pour indiquer d'autres combinaisons possibles et trouvées en génie civil. Certaines de ces combinaisons et leurs composites résultants sont identifiés de manière pratique dans les rubriques suivantes.

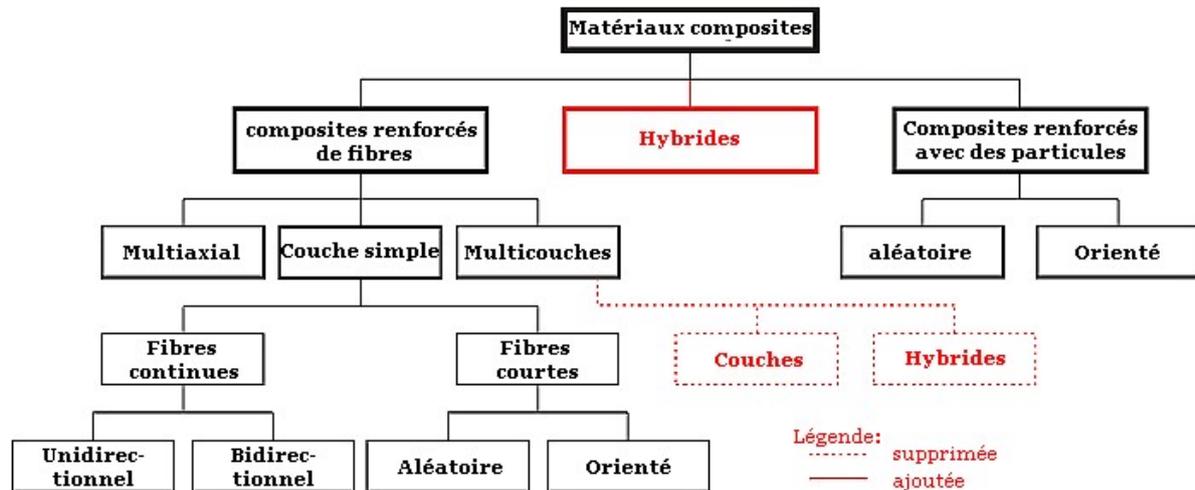


Figure 2 : Classification des matériaux composites selon le type de renfort (adapté) [20].

#### a) composites de particules

Les composites particuliers sont formés par un ou plusieurs types et formes de particules en suspension dans une matrice d'un autre matériau. Dans la plupart des cas, la distribution des particules est aléatoire et permet de considérer le matériau homogène et isotrope à l'échelle macroscopique. En tout, quatre combinaisons sont possibles pour les composites à particules.

La composition la plus commune se produit entre les particules non métalliques et la matrice. Le composite le plus connu de cette catégorie est le béton simple, formé d'une matrice cimentaire (céramique) renforcée de particules d'origine pierre. D'autres exemples sont: le verre renforcé de flocons de mica, les polymères fragiles renforcés de particules de caoutchouc, les céramiques renforcées de particules de céramique et un nanocomposite entre le polymère et l'argile. Dans ce dernier exemple, les particules sont orientées menant à un comportement anisotrope [13].

Des particules métalliques de matrice non métalliques peuvent également être combinées. Des exemples de cette catégorie sont les suivants: composite composé de particules d'aluminium dispersées dans du caoutchouc polyuréthane utilisé dans les propulseurs de fusée; soudure froide constituée d'une poudre métallique en suspension dans un composite de résine et de cuivre avec époxy qui augmente la conductivité électrique. L'inclusion de particules métalliques dans les plastiques augmente la conductivité thermique, réduit l'usure et diminue le coefficient de dilatation thermique [4].

Une autre catégorie de composites avec des particules peut être obtenue entre des particules et des matrices métalliques. Dans ce type de matériau composite, les particules ne sont pas dissoutes dans la matrice, ce qui la différencie des alliages métalliques. Le composite commun de cette catégorie est formé par l'addition de particules de plomb dans des alliages de cuivre ou d'acier afin d'améliorer l'usinage. Un autre exemple concerne le processus appelé frittage liquide, qui consiste à ajouter des particules métalliques fragiles dans des matrices en métal ductile formant un composite ductile à hautes propriétés thermiques [4].

Enfin, les particules non métalliques peuvent être combinées dans des matrices métalliques. Le composite le plus courant est constitué de particules céramiques d'oxydes ou de carbures en suspension dans une matrice métallique. Ces composites sont utilisés dans les applications où la rigidité élevée, la résistance élevée à la corrosion, l'abrasion et les températures élevées sont importantes [4].

### ***b) composites à fibres***

Les composites de fibres sont constitués de fibres (matériau de renforcement) insérées dans une matrice. Fondamentalement, deux classifications peuvent être identifiées: les composites à fibres discontinues et les composites à fibres continues. Le premier type est constitué de fibres courtes ou de whiskers, qui sont des fibres très courtes et du même ordre de grandeur du cristal constituant. Malgré leur faible longueur, ces fibres ont un rapport de forme élevé

(rapport longueur sur diamètre). Dans la filière, les fibres courtes peuvent être disposées de manière aléatoire ou orientées dans une direction spécifique. Le deuxième type est constitué des composites à fibres longues (du même ordre de grandeur des éléments structurels) pouvant être du type unidirectionnel et du type bidirectionnel à fibres croisées ou formant un tissu. Ces composites sont beaucoup plus efficaces structurellement que les composites à fibres courtes ([13]; [20] ; [12]).

Les composites de fibres peuvent également être classés en fonction des matériaux constitutifs. Cette classification est définie selon le type de matrice, qu'il soit polymère, métallique, céramique ou carbone. Les composites à matrice polymère sont constitués de polymères thermoplastiques ou thermoplastiques et de fibres de verre, de carbone, d'aramide ou de bore. Son application est limitée aux basses températures. Les composites à matrice métallique sont constitués de métaux ou d'alliages métalliques et, en général, de fibres de bore, de carbone ou de céramique non métalliques. Les composites à matrice céramique sont principalement utilisés dans des environnements soumis à des températures élevées et leurs fibres sont constituées de matériaux céramiques tels que le carbure ou le nitrure de silicium et l'alumine. Les composites de carbone sont formés d'une matrice de carbone ou de graphite et d'un renforcement avec des fibres ou des tissus de graphite. Ce sont des composites de grande rigidité et résistance [13]. Les types les plus courants de matériaux constituant les fibres composites sont présentés dans le tableau 1.

Type de Matrice	Fibre	Matrice
Polymère	Verre E, verre S, carbone (graphite), aramida (Kevlar), bore	époxy, phénolique, polyimide bismaléimide, polyester, polyétheréther cétone, polyamides, polypropylène
Métal	bore, carbone (graphite), carbure de silicium, alumine	aluminium, magnésium, cuivre, titane, acier, tungstène, béryllium
Céramique	carbure de silicium, alumine, nitrure de silicium	carbure de silicium, alumine, nitrure de silicium, céramique vitreuse
Carbone	carbone	carbone

Tableau 1 - Composites avec fibres: matières constitutives les plus courantes[13].

### ***c) composites stratifiés***

Les composites stratifiés sont formés en empilant et en joignant des couches de différents matériaux. La jonction des couches est réalisée de manière à garantir le travail de solidarité entre elles. Ainsi, les propriétés des matériaux constitutifs de chaque couche sont combinées et forment un matériau présentant de meilleures propriétés, telles qu'une résistance accrue, une rigidité accrue, un poids inférieur, une résistance accrue à la corrosion et à l'usure, entre autres.

Dans un stratifié, les couches constituent l'unité de base et peuvent être constituées de matériaux composites tels que ceux renforcés de fibres. Ce sont les plus utilisés lorsque des performances mécaniques élevées sont requises ([4]; [5]).

Le composite stratifié est produit selon un schéma de stratification prédéfini en fonction des propriétés souhaitées pour le matériau. Il s'agit de la principale proposition d'un stratifié [4]. De cette manière, les directions principales du matériau en termes de résistance et de rigidité peuvent être orientées dans les directions les plus demandées (chemin des charges).

Le schéma de stratification a la possibilité de faire varier le nombre, l'épaisseur, la séquence, les propriétés mécaniques et l'orientation des fibres de chaque couche. Ainsi, les composites peuvent être fabriqués de manière à obtenir des projets hautement optimisés dans chaque situation spécifique [21].

La nomenclature utilisée pour spécifier le schéma de stratification est du type  $[t_1, \alpha_1 / t_2, \alpha_2 / \dots t_{n-1}, \alpha_{n-1} / t_n, \alpha_n]$ , dans lequel  $[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n]$  et  $[\alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n]$  représente l'épaisseur des couches et l'angle d'orientation des fibres dans les couches, respectivement [22]. La numérotation des couches est effectuée dans le sens positif de l'axe des  $x_3$  et l'angle d'inclinaison des fibres obéit au sens positif de la rotation dans le système de référence adopté (règle de la main droite), comme le montre la figure 3.

L'angle d'inclinaison des fibres dans les couches peut aller de  $-90^\circ$  à  $90^\circ$ . Le schéma de stratification est appelé couche croisée lorsque cette pente est toujours égale à  $0$  ou à  $90^\circ$  et est appelé couche angulaire lorsque les fibres ont d'autres pentes. Une autre observation importante concernant le schéma de stratification est la répartition des couches par rapport à la surface moyenne du stratifié, laquelle peut être symétrique, antisymétrique ou asymétrique. La figure 4 contient des exemples de schémas de stratification avec leurs dénominations spécifiques.

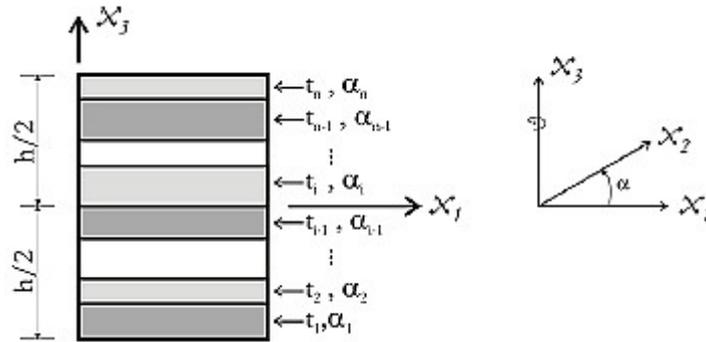


Figure 3 - Nomenclature du schéma de stratification [22].

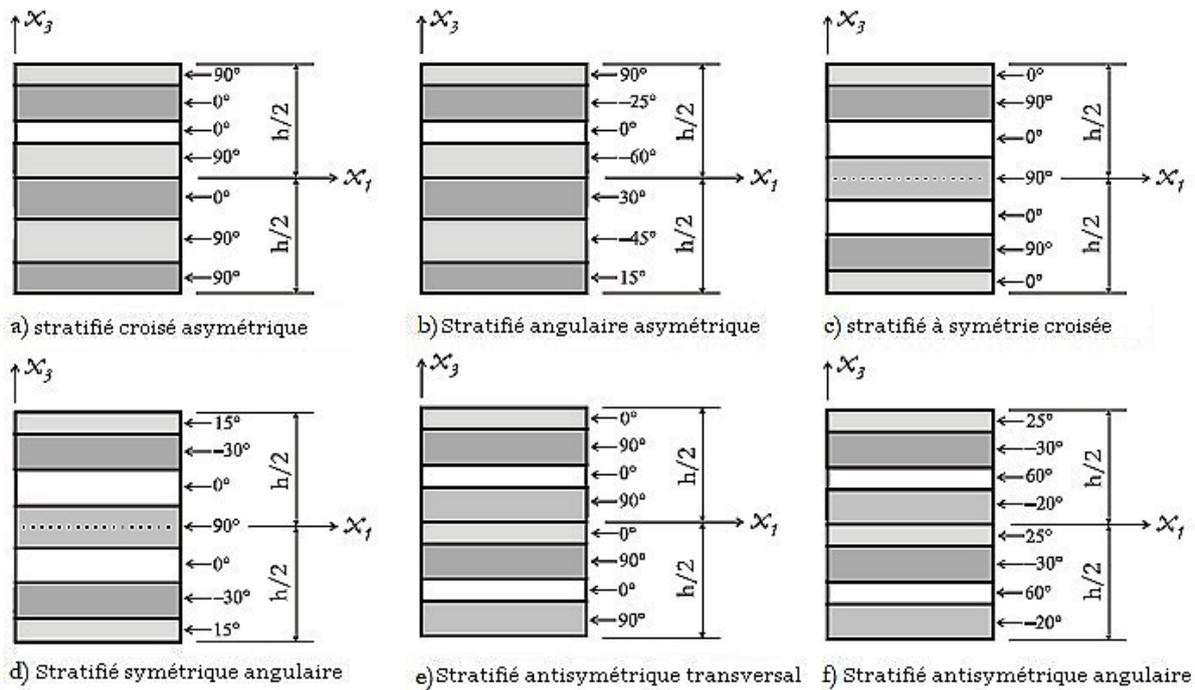


Figure 4 - Exemples de schémas de stratification[22].

**d) composites hybrides**

Selon Jones (1999) [4], les composites hybrides sont des matériaux formés à partir de la combinaison de matériaux appartenant aux trois autres catégories de composites (particules, fibres et stratifiés). Daniel et Ishai (2006) [13] soutiennent que la combinaison de différents types de fibres dans la même couche peut être avantageuse dans certains cas. Ainsi, les auteurs classifient les composites hybrides en trois types: intra-couche, inter-couche et intra-couche / inter-couche.

Un exemple clair de composite hybride est le béton armé. Ce matériau est constitué de béton simple pouvant être classé en tant que composite de particules et de barres d'acier représentant les fibres. Ainsi, le béton armé peut être classé comme un composite de particules et de fibres.

D'autres possibilités identifiées pour un composite hybride sont l'utilisation de différentes fibres ou matrices dans un composite stratifié et la combinaison de différents stratifiés composites. Dans ce dernier cas, par exemple, on peut identifier la combinaison de pales métalliques avec des pales composites, de structures en béton armé renforcées de fibres de carbone, de structures composites en sandwich, entre autres.

Les composites dits sandwich sont un type important de composites hybrides formés de deux minces couches d'un matériau rigide situées sur les faces et d'un noyau léger et épais de faible résistance (Figure 5). Ce stratifié a une grande rigidité à la flexion et une faible densité.

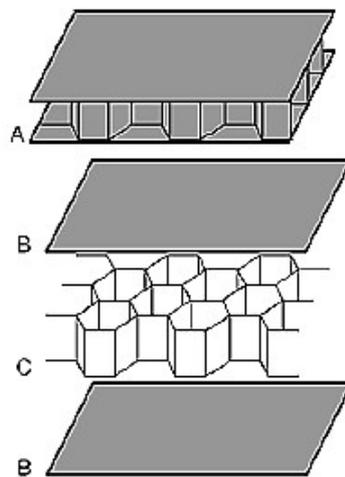


Figure 5 - Composite de type sandwich: panneau (A), faces (B) et noyau (C) en forme de ruche.

Les principaux composants responsables de la résistance du composite sandwich sont les faces et le matériau de l'interface de collage. Les faces ont pour fonction de résister aux contraintes de compression axiale, de traction et de cisaillement coplanaires générées par les contraintes de flexion. Le matériau d'interface de liaison absorbe les contraintes axiales et de cisaillement inter laminaires. Le noyau a pour fonction de maintenir les visages à l'écart, assurant ainsi un fort moment d'inertie [23].

Dans la constitution d'un composite sandwich, le noyau peut être rempli de mousses plastiques expansées, de bois, de plastiques, de carton ondulé et de ruches. Le carton ondulé et les ruches sont courants dans les emballages, les portes et les cloisons. Les matériaux utilisés peuvent être le papier, le carton, le coton, les tissus imprégnés et les couches en aluminium ou en acier. Sur les faces, les dalles minces sont généralement constituées de stratifiés polymères thermoplastiques ou thermoplastiques renforcés de fibres de verre ou de carbone. Les feuilles de métal sont également couramment utilisées. La liaison entre le noyau et les couches frontales est réalisée avec des adhésifs ou des composants métalliques ([23] ; [20]).

Les différents modes de défaillance possibles dans un composite sandwich sont l'écoulement ou la rupture des faces, le cisaillement du noyau, le flambement global du panneau, la déflexion excessive, le froissement du visage, le flambage intracellulaire et le broyage du noyau [23].

### 1.2.2 Etude du comportement mécanique des matériaux composites

Les matériaux composites sont souvent hétérogènes et orthotropes ou anisotropes. Le matériau est hétérogène lorsqu'il y a variation de ses propriétés d'un point à un autre et le matériau est anisotrope lorsque ces propriétés dépendent de la direction considérée. L'orthotropie se produit s'il existe trois plans de symétrie perpendiculaires les uns aux autres dont l'intersection définit les axes principaux du matériau. Toutes ces caractéristiques dépendent de l'échelle d'observation. Lorsque cette échelle décroît de la dimension macroscopique à la dimension microscopique, le même matériau peut être considéré comme homogène ou hétérogène, isotrope, orthotrope ou anisotrope [13].

En raison des caractéristiques hétérogènes et de l'ampleur du comportement mécanique d'intérêt, l'analyse des matériaux composites peut être divisée en deux approches: micromécanique et macromécanique. Selon Jones (1999)[4], dans l'approche micromécanique, l'étude du comportement mécanique du composite se situe au niveau des interactions entre les constituants. Dans l'approche macromécanique, l'étude est réalisée à l'échelle macroscopique et un matériau homogène équivalent est utilisé. L'influence des constituants composites est considérée sous la forme de propriétés moyennes pour le matériau dans son ensemble. Un schéma des approches dans un composite est illustré à la figure 6.

Selon Daniel et Ishai (2006) [13], l'approche micromécanique est importante pour l'étude des mécanismes de résistance, des mécanismes de défaillance (rupture de fibre, matrice ou zone de transition), de la résistance à la rupture et du temps d'apparition de fatigue. De plus, les micromécaniques permettent d'établir le comportement moyen au niveau des couches à partir de leurs constituants. L'approche macromécanique est recommandée pour l'étude du comportement général du stratifié et de la structure. Dans cette approche, des critères de défaillance peuvent être établis en termes de tensions et de forces moyennes sur la couche.

Le couplage des théories des stratifiés avec la méthode des éléments finis permet de déterminer le comportement mécanique global de la structure et les tensions ou forces au

niveau des aubes dans une approche macromécanique. Ces théories prennent en compte les propriétés moyennes des aubes et le schéma de stratification. Toujours dans le macromécanique les théories de stratifié fonctionnent fondamentalement approche considérant deux niveaux: celui dans lequel le stratifié est analysé comme une couche homogène équivalent, et une autre dans laquelle l'analyse suppose une discrétisation des couches. Dans ce travail, les formulations développées utilisent cette dernière approche.

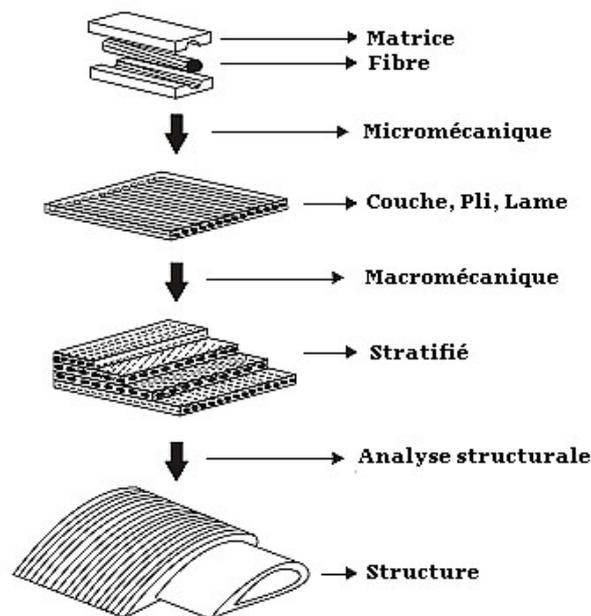


Figure 6 - Niveaux d'analyse dans les structures formées de matériaux composites[13].

Selon Carrera (2002)[3], toute théorie d'analyse de composites stratifiés, ainsi qu'un élément fini développé avec cette théorie, devrait considérer les aspects complexes suivants d'une structure stratifiée: anisotropie au niveau du stratifié, hétérogénéité transversale, effet Zig-Zag et continuité inter laminaire.

L'anisotropie dans le plan du stratifié survient lorsque les propriétés physiques et mécaniques changent en fonction de la direction considérée dans le plan. Les stratifiés composés de fibres composites ont une résistance et une rigidité élevées le long des fibres, mais ces propriétés sont plus petites dans le sens transversal, car il n'ya pratiquement que l'influence de la matrice composite. Cela conduit, selon Carrera (2002), à une grande flexibilité dans le sens transversal, tant vis-à-vis du cisaillement que vis-à-vis des tensions axiales.

Selon Jones (1999)[4] et Reddy (2004a)[5], une conséquence plus pertinente de l'anisotropie du plan dupli concerne le couplage entre les déformations normale et les

déformations en cisaillement, ce qui accroît considérablement les difficultés rencontrées lors des procédures de stratification. Jones (1999) et Reddy (2004a) indiquent également que cette anisotropie peut produire un couplage supplémentaire entre les déformations contenues dans le plan et l'extérieur de celui-ci, entraînant l'apparition de grands déplacements même à de faibles niveaux de charge.

L'hétérogénéité transversale représente le changement des propriétés physiques et mécaniques le long de l'épaisseur dû aux différents matériaux utilisés dans chaque pli. Aux interfaces, cette hétérogénéité produit une discontinuité de la première dérivée du champ de déplacement par rapport à la coordonnée  $z$  (ou  $3$ ), située le long de l'épaisseur du stratifié. Ce comportement est connu sous le nom d'effet Zig-Zag, comme le montre la figure 7 dans le cas d'une structure composée de trois couches [3].

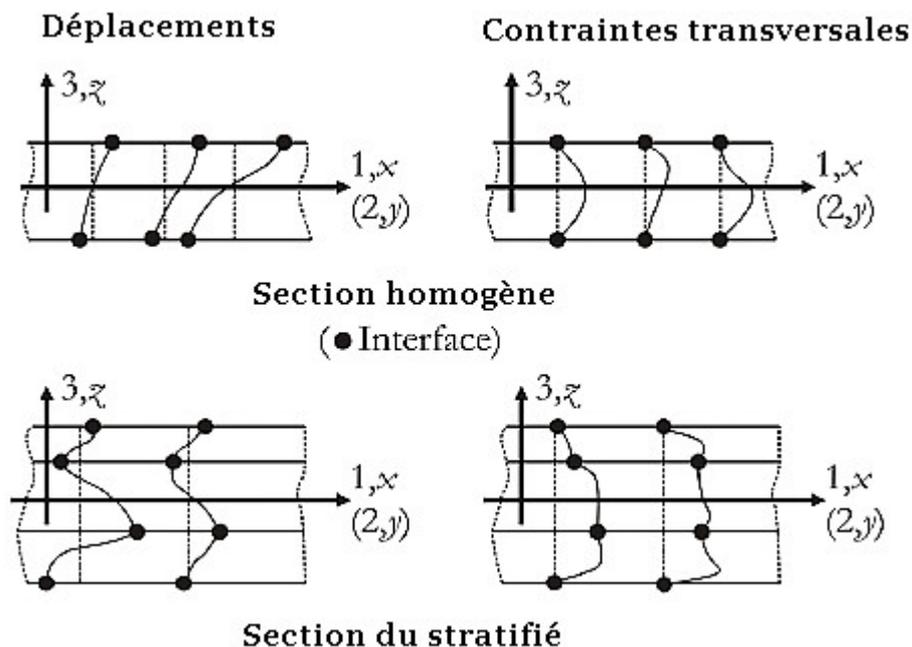


Figure 7 - Déplacements transversaux et tensions le long d'une section homogène et stratifiée[3].

Selon Reddy (2004a) [5], la continuité inter laminaire résulte de l'équilibre des forces entre les différents plis du composite (Figure 8), ce qui a pour effet que les tensions transversales sont continues. Cette condition de continuité conduit à une discontinuité des déformations inter laminaires tant que les matériaux des couches adjacentes sont distincts.

Carrera (2002) appelle l'effet Zig-Zag et la continuité inter laminaire comme conditions de classe  $C^0$  ( $C_z^0$  - Conditions requises). Il avertit également que le respect de ces conditions est

essentiel pour le développement de toute théorie appropriée à l'analyse de structures formées par des composites stratifiés.

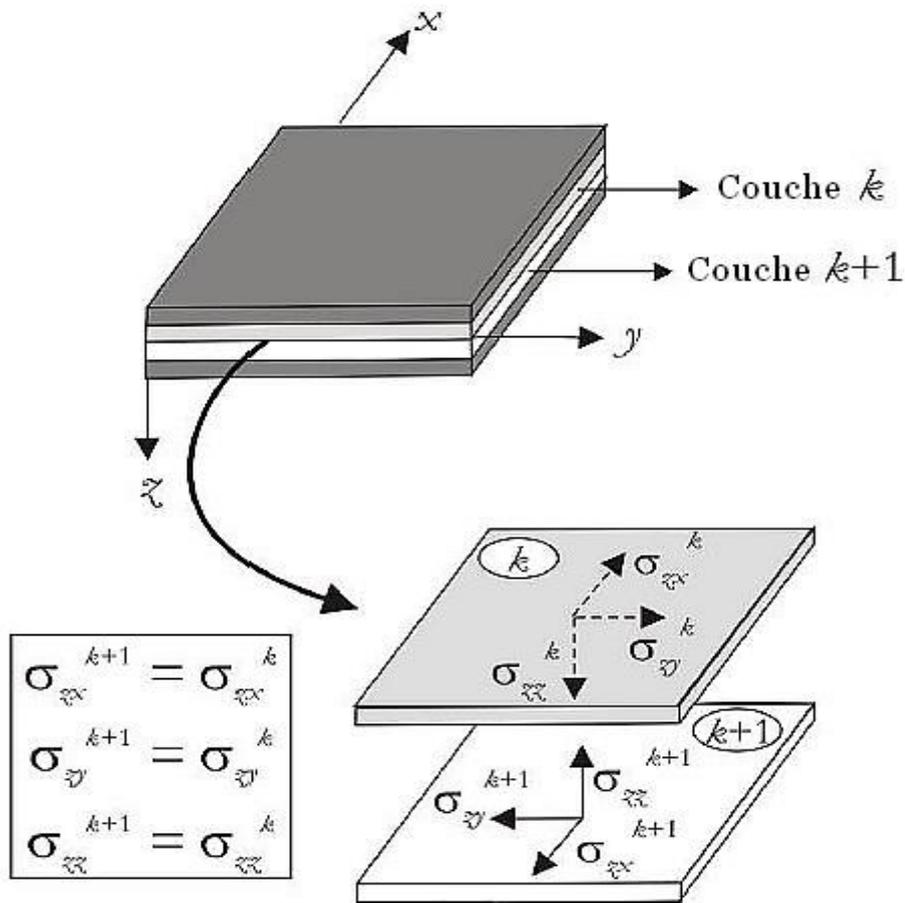


Figure 8 - Equilibre des tensions interlaminaires[5].

Comme discuté précédemment, la discrétisation des aubes permet de représenter le comportement de Zig-Zag pour le champ de déplacements le long de la section, permet la continuité inter laminaire des tensions transversales et prend en compte l'hétérogénéité transversale due au changement de matériau d'aube à couche. Ces aspects sont fondamentaux pour obtenir une réponse aux contraintes plus précise afin de vérifier le processus de défaillance du stratifié.

### 1.2.3 Théories sur les stratifiés

Selon Reddy (2004a) [5], les principaux modèles d'analyse des composites stratifiés peuvent être divisés en:

a) Modèles basés sur la théorie de la couche unique équivalente (Equivalent Single Layer - ESL):

- Théorie classique de stratification (Classical Laminated Theory- CLT);
- Théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (First order Shear Deformation Theory - FSDT);
- Théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (High order Shear Deformation Theory - HSDT);

b) Modèles basés sur des théories en trois dimensions:

- Théorie des couches;
- Théorie de l'élasticité tridimensionnelle;

c) Modèles basés sur plusieurs théories.

Les modèles basés sur la théorie ESL reposent sur un ensemble d'hypothèses concernant le champ des déplacements ou des tensions qui transforment le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel (plaques et coques) ou unidimensionnel (barres). Les modèles basés sur les théories tridimensionnelles analysent un composite stratifié en traitant chaque couche comme un solide tridimensionnel [5].

Les théories ESL transforment un composite stratifié hétérogène en une couche unique statiquement équivalente composée d'un matériau homogène dont la loi de comportement est définie en fonction des lois de comportement des matériaux composant le stratifié.

Dans les théories ESL, la plus simple est la théorie classique (CLT), puisqu'elle est une extension des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les barres, de Kirchhoff pour les plaques et de Cauchy-Poisson-Kirchhoff-Love pour le cas des coques. Selon cette théorie, les sections plates et normales d'une surface de référence restent plates et normales à cette surface dans l'état déformé du stratifié ([4]; [5]). Avec cette hypothèse, donc, les déformations normales sur le plan du stratifié et les déformations de cisaillement transversal sont négligées.

Suite à un ordre de complexité croissant dans les théories ESL, nous avons la théorie FSDT qui considère pour les composites laminés une extension des hypothèses de Reissner-Timoskenko pour le cas des barres et de Reissner-Mindlin pour le cas des plaques. Selon cette théorie, les sections plates et normales d'une surface de référence restent plates à l'état déformé du stratifié, mais pas nécessairement normales à cette surface de référence [3]. Avec

cette hypothèse, on considère donc une déformation transversale à cisaillement constant, mais les déformations normales continuent d'être négligées.

La théorie de la FSDT requiert un facteur de correction pour le cisaillement, car avec l'hypothèse adoptée, les déformations de cisaillement restent constantes dans la section. Selon Reddy (2004a) [5], ce facteur de correction est difficile à déterminer et doit prendre en compte non seulement les paramètres géométriques et de stratification, mais également les conditions limites et de chargement.

Les théories d'ordre élevé (HSDT) répondent aux recommandations bien connues de (Koiter, 1960[24] ; Carrera, 2002[3]). Ces recommandations stipulent que tout raffinement des théories d'analyse des composites stratifiés doit simultanément prendre en compte les effets des déformations normales et des déformations par cisaillement. Pour cela, les théories HSDT utilisent des polynômes d'ordre élevé (degré supérieur ou égal à deux) pour représenter toutes les composantes des déplacements le long de l'épaisseur du stratifié [5].

Une théorie bien connue des ordres élevés est celle appelée par Carrera (2002) [3] de la théorie de Vlasov-Reddy (VRT). Dans la VRT, la description du champ de déplacement montre une expansion avec un polynôme de troisième ordre le long de l'épaisseur et des conditions aux limites sont appliquées afin de respecter les contraintes de cisaillement transversales en haut et en bas du stratifié ( $\sigma_{33}(\pm h/2) = 0$ ). Selon Reddy et Phan (1985) [25], la conformité des conditions de contour aux efforts à la surface du stratifié conduit à une acquisition plus précise des fréquences de vibration et des charges de flambage des plaques stratifiées par rapport aux théories CLT et FSDT. Reddy (2004a) [5] indique que les théories du troisième ordre produisent une amélioration de la précision des résultats fournis par les analyses composites stratifiées, mais avec une augmentation du coût de calcul et sans garantir la continuité inter laminaire des tensions, puisqu'en adoptant un seul champ de déplacement pour tout le stratifié, les déformations sont continues aux interfaces, alors qu'elles devraient être discontinues.

L'illustration de la figure 9 permet une comparaison entre la cinématique adoptée dans les théories CLT, FSDT, HSDT et entre les champs de déformation et de tension obtenus avec les théories FSDT et VRT.

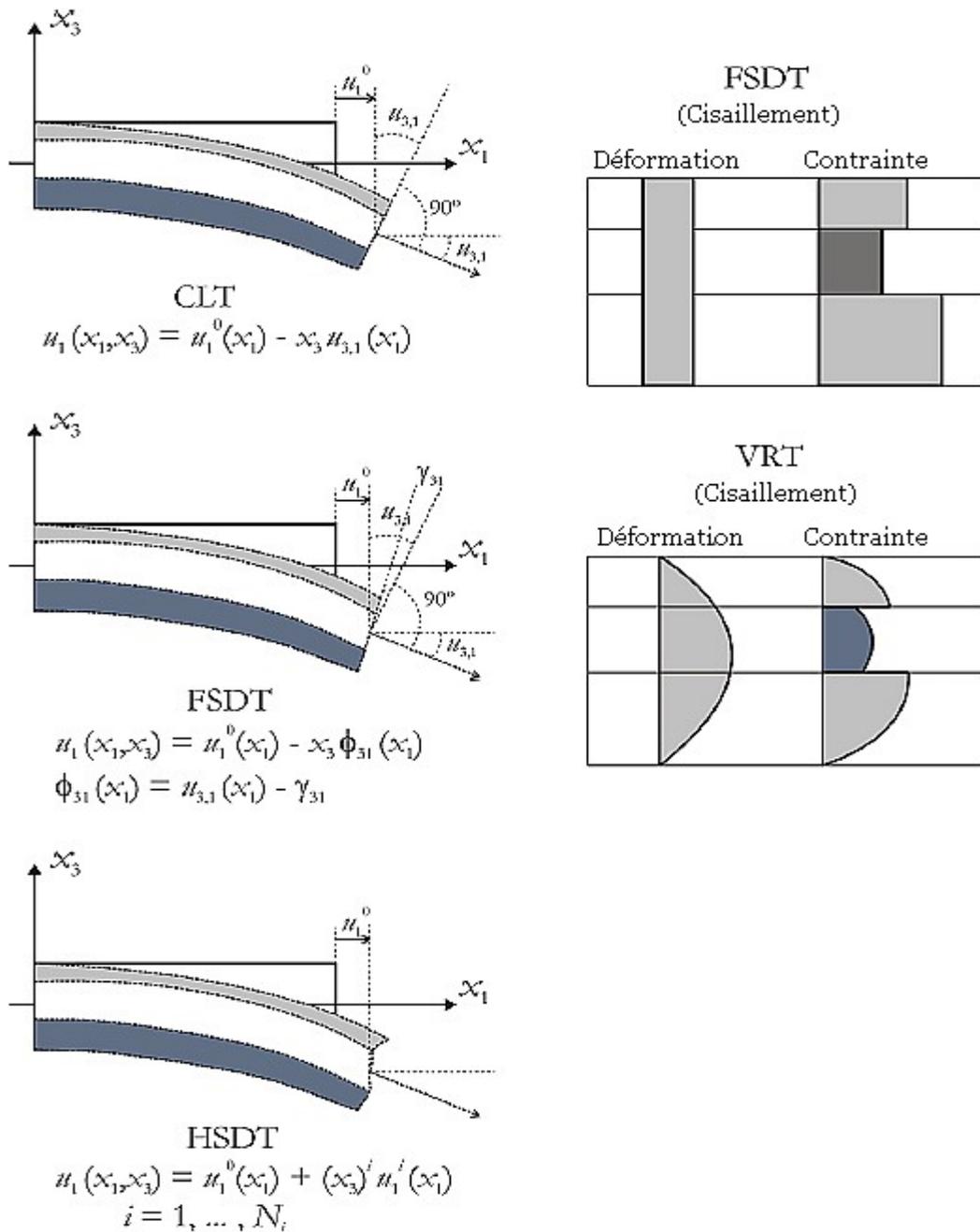


Figure 9 -. Théorie cinématique de CLT, FSDT et HSDT (à gauche) déformations et les contraintes des théories FSDT et VRT (droite) [3].

Lorsque vous travaillez avec des stratifiés épais et lorsqu'il est nécessaire de déterminer la répartition des contraintes et des contraintes aux niveaux de chaque couche, en particulier près des discontinuités géométriques et matérielles ou dans les zones d'application de la charge, avec des modèles basés sur les théories monocouche les résultats sont imprécis. Dans ces cas, les formulations basées sur la théorie de l'élasticité sont plus appropriées car elles modélisent le stratifié comme un solide tridimensionnel. Cependant, ces formulations fournissent des solutions analytiques linéaires à application restreinte, parfois très complexe,

et peut entraîner des coûts de calcul élevés lorsqu'il est utilisé avec des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis.

Une alternative consiste à utiliser des théories d'ordre élevé associées aux couches individuelles. Selon Carrera (2002) [3], l'application des théories ESL (CLT, FSDT, VRT, HSDT) au niveau des couches est une forme naturelle de représentation de l'effet Zig-Zag qui se produit dans les déplacements de composites stratifiés. Cela implique de traiter chaque couche indépendamment, ce qui est l'approche de la théorie des couches. Selon cette théorie, des équations d'équilibre sont établies pour chaque couche individuellement et des conditions d'interface sont introduites en tant que contrainte en termes de déplacements pour assurer la compatibilité entre les couches adjacentes. ([3]; [5]).

Reddy (2004a) [5] présente une approche axiomatique de cette théorie avec des variables de déplacement. En cela, le champ de déplacement de chaque couche  $I$  est représenté le long de l'épaisseur par une combinaison linéaire du produit entre les polynômes d'interpolation de Lagrange  $F_k^I(x_3)$  et des variables constituées de fonctions  $F_k^I(x_1, x_2)$  qui définissent les déplacements de tous les points situés dans un plan  $k$  donné de la couche  $I$ . La quantité de plans  $k$  définis sur la couche dépend du degré de polynôme d'interpolation utilisé.

Sur la figure 10, il est illustré comment la composante du déplacement dans la direction de  $x_I$  est approchée le long de l'épaisseur du stratifié dans le cas d'une interpolation linéaire. L'interpolation des déplacements le long de l'épaisseur peut être affinée en utilisant davantage de subdivisions (raffinement  $h$ ) ou en augmentant le degré de polynôme d'interpolation (raffinement  $p$ ).

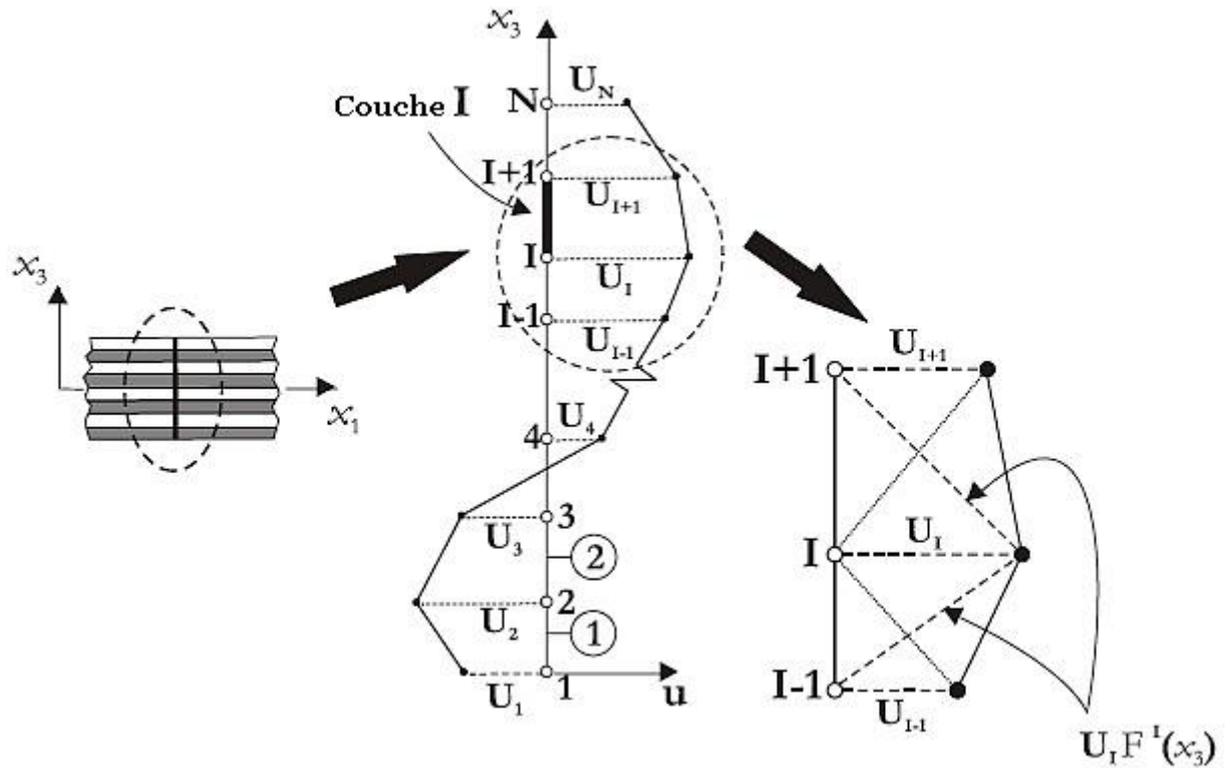


Figure 10 - Interpolation linéaire des déplacements dans la théorie des couches[5].

L'illustration de la figure 11 permet de comparer les différences obtenues avec les formulations utilisant la théorie ESL et la théorie Layerwise dans la représentation du champ de déplacement dans le plan des couches le long de l'épaisseur du stratifié. Comme on peut le constater, les couches montrent des rotations indépendantes les unes des autres dans les champs de déplacement obtenus selon la théorie des couches. Ces mêmes couches ont des rotations continues aux interfaces des champs de déplacement obtenus selon la théorie ESL. L'apparition de spires indépendantes est un phénomène présent dans les composites stratifiés du fait de la continuité des tensions inter laminaires, de l'anisotropie et de l'hétérogénéité entre les couches adjacentes.

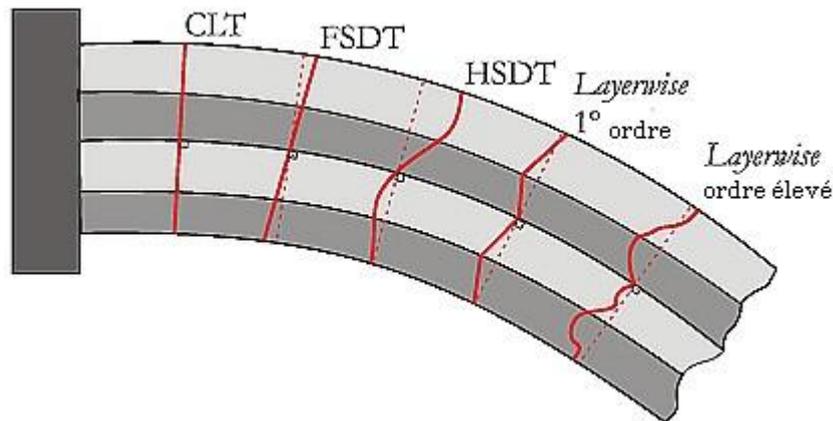


Figure 11 - Déplacements dans le plan des couches le long de l'épaisseur selon les théories ESL et Layerwise[16].

Enfin, plusieurs théories utilisent différents modèles mathématiques (théorie ESL et théorie tridimensionnelle) et différents niveaux de discrétisation pour la modélisation des sous-régions de la structure. La combinaison de ces modèles multiples dans une analyse globale et locale est effectuée simultanément ou séquentiellement.

Lorsqu'elle est réalisée simultanément, la structure est modélisée, discrétisée et analysée à l'aide de différents modèles mathématiques et de différents niveaux de discrétisation: les modèles basés sur la théorie ESL sont utilisés dans les régions où une analyse globale est suffisante et des modèles basés sur la théorie des couches ou sur des éléments finis tridimensionnels sont utilisés lorsqu'une analyse locale plus fine est requise.

Lorsqu'elle est utilisée de manière séquentielle, une analyse globale de la structure entière est effectuée à l'aide de la théorie ESL et une analyse locale ultérieure dans les régions critiques est effectuée avec la théorie Layerwise ou avec des éléments finis à trois dimensions. Le grand avantage des modèles multiples est la possibilité d'analyser une grande variété de problèmes dans les stratifiés avec une efficacité maximale et un coût de calcul minimal [5]. Divers programmes de recherche ont été menés pour pouvoir obtenir une meilleure compréhension du comportement mécanique des matériaux composites.

#### 1.2.4 Évolution de l'analyse non Linéaire

En 1960, Turner propose pour la première fois l'application de la méthode des éléments finis à l'analyse non linéaire des structures. L'auteur présente une approche "incrémentale"[26] permettant d'analyser les problèmes géométriquement non linéaires par éléments finis. La réponse non linéaire de la structure est obtenue 'par incrément', c'est à dire

pas à pas, par augmentation progressive de la sollicitation. À partir de cette date, l'analyse non linéaire par éléments finis va connaître un développement intense sous l'impulsion des industries aéronautique et aérospatiale et grâce à la disponibilité d'ordinateurs de plus en plus puissants.

Même si la méthode incrémentale est appliquée avec des succès et perfectionnements divers par Turner[27], Argyris[28] (1964), Fellipa[29], Martin[30], Wissmann[31], Oden[32] (1966), essentiellement pour l'analyse de l'instabilité élastique des structures, il faudra attendre jusqu'en 1968 pour assister à une vulgarisation de cette méthode sous l'impulsion de Marcal (1970) [33], Oden (1972) [34] et de Yagmai (1968) [35] qui ont établi les équations d'une formulation générale de l'analyse non linéaire géométrique, respectivement pour la description lagrangienne "totale", qui prend constamment comme référence l'état initial non chargé de la structure, et pour la description lagrangienne "actualisée", qui prend comme référence le dernier état calculé de la structure. Dès lors, de nombreuses publications sont apparues dont celles de Brebbia et Connor (1969) [36], qui introduisent le principe de prédiction-corrrection et résolvent des problèmes de plaques et coques quasi planes en utilisant la méthode de Newton-Raphson; Hibbit et al. (1970) [33] emploient le principe des travaux virtuels et obtiennent la forme incrémentale de la description lagrangienne totale après avoir discrétisé le champ de déplacements en fonction des inconnues nodaux; Hofmeister et al (1971) [37] présentent la formulation lagrangienne actualisée, en faisant ressortir la notion du résidu d'équilibre qui permet de vérifier l'équilibre à chaque pas de chargement ; Sharifi et Popov(1971) [38] étendent la formulation lagrangienne actualisée établie par Yagmai à l'analyse élastoplastique en petites déformations des coques de révolution.

Il faut noter que seule la formulation lagrangienne totale aura connu beaucoup de succès jusque dans les années 1970. Les résultats encourageants obtenus par les équipes dynamiques de Marcal et Oden ont lancé toute la recherche non linéaire sur la formulation lagrangienne totale pendant dix bonnes années. Par la suite, grâce au leadership de Wilson et de ses collaborateurs (1975) [39,40], la formulation lagrangienne actualisée a refait surface pour détrôner la formulation lagrangienne totale dans bien des applications, au moment où cette dernière a commencé à éprouver des difficultés de mise en œuvre dans le cas des grandes rotations tridimensionnelles, spécialement pour les corps orientés. La formulation lagrangienne totale valable pour les grandes rotations mais petites déformations a cependant été utilisée avec succès pour les structures planes de type poutres.

Dans la formulation lagrangienne actualisée, l'utilisation de la configuration déformée actualisée à chaque pas de chargement Z. P. Bazant, M. E. Nimeiri (1973) et K. Wishizu (1982) [41, 42] ou à chaque itération d'équilibre K.J. Bathe(1982), F. Frey (1978) et S. Jaarnei (1986) [43, 44, 45] comme configuration de référence permet de découper le mouvement entre les configurations initiale et finale en un certain nombre de pas de déplacements et rotations modérés et dégager des expressions approximatives du champ cinématique et des déformations, faciles à mettre en œuvre. Cette façon de faire permet de traiter les grands déplacements et les grandes rotations d'une manière simple en admettant l'hypothèse des petits déplacements et petites rotations entre la configuration déformée et la configuration intermédiaire et en utilisant la théorie linéaire classique pour le calcul des déformations ce qui est important en théorie assujettie. La formulation lagrangienne actualisée s'avère simple et efficace mais contient des approximations qui peuvent introduire des erreurs jouant un rôle considérable sur les résultats et la convergence, surtout dans le cas des structures très flexibles où quelques complications apparaissent à cause de la nature non vectorielle des grandes rotations. La formulation lagrangienne actualisée restera cependant jusque dans les années 1980 une des seules possibilités pour traiter les problèmes de grandes rotations des structures avec des éléments simples ; elle a été utilisée essentiellement pour les éléments basés sur la théorie assujettie [34].

Signalons, pour clore cette sous section, que parallèlement aux méthodes et techniques de résolution citées ci-dessus, il en existe plusieurs. Pour une synthèse très concise dans ce domaine, nous référons le lecteur aux excellents travaux de (M.A. Crisfield (1990)[46], Gadala, Oravas et Dokainish (1983)[47], Gattass et Abel en (1987)[48], Mondkar et Powell en (1977)[49], Gadala et Oravas en (1984)[50], Meek et Tanen (1984)[51].

### **1.2.5 Défauts dans les composites stratifiés**

Au niveau micromécanique, des défauts dans un composite stratifié peuvent se produire dans le domaine de la matrice, sous la forme de craquage et de broyage; dans le domaine du renforcement (fibre), sous forme de rupture et de flambage; et dans le domaine des interfaces pouvant se situer entre les couches, entre la fibre et la couche ou d'une défaillance originale provenant d'un défaut. La défaillance aux interfaces est caractérisée par la propagation de fissures, le délaminage ou le glissement. Lorsque la défaillance survient dans la couche, elle est généralement identifiée comme intra laminaire et si la défaillance se produit à l'interface entre les couches, la dénomination adoptée est inter laminaire [12].

Les critères de définition de la défaillance dans un composite stratifié peuvent être établis au niveau des constituants des couches (critères micromécaniques) ou des couches et du stratifié (critères macromécaniques). Bien qu'il soit nécessaire de détecter le début d'une défaillance aux points critiques des couches, il est difficile de définir la résistance du stratifié lorsqu'il est soumis à un chargement général, car le processus de défaillance dans un stratifié se produit progressivement du fait de la défaillance d'une couche, ce qui entraîne la redistribution entre les couches restantes. Ainsi, la définition de critères macromécaniques est préférable par rapport aux critères micromécaniques [13].

Les couches étant généralement anisotropes, la détermination de ces résistances dépend de la définition complète de l'état de contrainte. Ainsi, les méthodes d'analyse des stratifiés doivent être capables de fournir cette information. Selon Daniel et Ishai (2006) [13], les critères de défaillance des couches peuvent être classés en trois groupes:

- a) Théories non interactives: le critère de rupture est défini simplement en comparant les contraintes ou déformations avec les contraintes ou déformations ultimes. Il n'y a pas d'interaction entre les différentes composantes de contrainte et de déformation. Dans ce groupe figurent les critères de contraintes et de déformations maximales;
- b) Théories interactives: toutes les contraintes sont prises en compte dans le critère et la défaillance n'est pas associée à un mode particulier. Dans ce groupe figurent les critères de Tsai-Hill et Tsai-Wu;
- c) Théories partiellement interactives: différents critères sont établis pour les fibres, les matrices et les interfaces. Dans ce groupe, les critères de Hashin-Rotem et de Puck sont présents.

Le processus de défaillance du stratifié est beaucoup plus complexe que la défaillance des couches individuellement, car de nombreux autres facteurs influencent la résistance du stratifié, tels que:

Schéma de stratification, rigidité et résistance des différentes couches, procédé de fabrication (produit des contraintes résiduelles), forme du défaut (il est plus probable qu'il y ait des dommages éparpillés au lieu de dommages localisés), entre autres. La résistance de la couche est importante pour la détermination du début et de la progression de la rupture du stratifié [13].

Ainsi, les critères de rupture pour les stratifiés peuvent être divisés en critère de première couche défaillante et critère de défaillance ultime. Dans le premier critère, on

considère que la couche fonctionne de la même manière individuellement et dans un stratifié. A partir de l'analyse du composite stratifié, l'état de contrainte agissant sur les couches est vérifié par rapport aux critères de rupture des couches individuelles. En général, les résultats obtenus avec ce critère sont conservateurs. Dans le deuxième critère, la défaillance d'un stratifié se produit par un processus d'endommagement progressif. Comme cela est beaucoup plus complexe à déterminer, il n'existe pas de définition bien établie de ce qui caractérise la défaillance finale. Certains critères établissent une défaillance lorsque la charge maximale est atteinte, d'autres définissent une déformation limite, d'autres définissent encore la défaillance résultant du processus de dégradation de la rigidité. En raison de cette incertitude, les stratifiés conçus avec ce critère utilisent des coefficients de sécurité plus élevés que ceux conçus avec le critère de la première couche défaillante [13].

Par conséquent, pour déterminer avec précision la résistance ultime d'un stratifié, il est nécessaire d'obtenir l'état de contraintes tridimensionnelles agissant sur les couches et leurs interfaces. Il est également nécessaire de connaître les propriétés concernant la ténacité des couches et la résistance des interfaces. Il est à noter que la séparation (délamination) et le glissement des couches sont un mode de défaillance important qui se produit couramment dans les bords libres et dans les zones de discontinuité géométrique ou de charge [5].

Pour déterminer une répartition plus précise des contraintes dans les couches et les interfaces, il est nécessaire d'utiliser des méthodes plus sophistiquées d'analyse des stratifiés, telles que celles basées sur la théorie de l'élasticité tridimensionnelle ou la théorie des couches. Par conséquent, dans ce travail, la cinématique adoptée pour le développement du stratifié à éléments finis permet la rotation indépendante de la section transversale des couches et la variation de l'épaisseur de celles-ci, dans le prolongement de la théorie de Layerwise.

Les principales différences entre la cinématique proposée et celle de la théorie des couches sont l'utilisation de positions au lieu de déplacements en tant que degrés de liberté et le caractère de portique de l'élément.

Dans cette rubrique, une revue bibliographique des travaux traitant de l'analyse des structures constituées de composites stratifiés est présentée. Dans cette revue, nous avons l'intention d'identifier et de décrire succinctement comment la théorie des couches par couches (Layerwise) a été utilisée dans des formulations pour l'analyse linéaire et non linéaire de structures constituées de composites stratifiés. À la fin de l'examen, la formulation

proposée dans ce travail est délimitée par les formulations existantes pour les composites stratifiés qui utilisent la théorie des couches par couches comme base de son développement.

Les composites stratifiés étant principalement appliqués dans les structures en plaques et coques, la quasi-totalité des travaux recensés dans cette revue bibliographique sont destinés à l'étude de ces types de structures. Malgré cela, les formulations développées dans les travaux relatifs à l'analyse de plaques stratifiées peuvent être appliquées directement sur les cadres plats stratifiés, il suffit de ne pas tenir compte de l'une des dimensions dans le plan de la plaque.

Dans les théories ESL, le stratifié est représenté par une seule couche équivalente dont les propriétés sont obtenues par une moyenne pondérée des propriétés mécaniques de chaque couche qui compose le stratifié ou par des techniques d'homogénéisation [52]. Les variables (déplacements, tensions ou déplacements et tensions) peuvent être approximées selon l'épaisseur de l'ensemble du stratifié selon une description axiomatique avec des fonctions du type [5] :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_i(x_1, x_2)F_i(x_3), \quad i = 1 \dots N \quad (1)$$

Dans laquelle  $f(x_1, x_2, x_3)$  est la fonction supposée représenter la variable de problème dans le stratifié entier,  $f_i(x_1, x_2)$  sont les fonctions décrivant la variable de problème dans le domaine à deux dimensions et  $F_i(x_3)$  sont les fonctions qui effectuent l'expansion de cette variable le long de l'épaisseur du stratifié.

Comme présenté précédemment, les théories ESL peuvent être classées essentiellement en trois types: la théorie classique CLT (théorie de la plastification classique), la théorie du premier ordre FSDT (Théorie du premier ordre de déformation en cisaillement) et théorie d'ordre élevé HSDT (Théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé). Reddy (1993) [53], Ghugal et Shimpi (2001, 2002) ([54], [55]), Carrera (2002) [3], Reddy (2004a) [5], Kreja (2011) [52], proposent une vaste revue bibliographique des formulations employant ces théories et leurs hypothèses de base. Lo et al. (2011) [56]. Les hypothèses de base de ces théories sont décrites brièvement.

La théorie du CLT repose sur l'hypothèse selon laquelle les sections plates et normales d'une surface de référence restent plates et normales à cette surface dans l'état déformé du stratifié. Le modèle utilisé dans la description du champ de déplacement  $u(x_1, x_2, x_3)$  pour le cas des plaques, par exemple, est donné par (Carrera, 2002) [3]:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) - x_3 u_{3,i}(x_1, x_2) \quad , \quad i = 1 \text{ et } 2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2) \quad (2)$$

Avec  $u_1$  et  $u_2$  indiquant des déplacements dans les directions contenues dans le plan et  $u_3$  dans l'épaisseur.

La théorie de la FSDT considère l'hypothèse selon laquelle les sections plates et normales d'une surface de référence restent plates dans l'état déformé du stratifié, mais pas nécessairement normales à cette surface de référence. Le modèle utilisé dans la description du champ de déplacement ( $u$ ) dans le cas des plaques, par exemple, est donné par (Carrera, 2002) [3]:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) - x_3 \phi_{3i}(x_1, x_2) \quad , \quad i = 1 \text{ et } 2$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3^0(x_1, x_2) \quad (3)$$

Avec  $\phi_{3i}(x_1, x_2) = u_{3,i}(x_1, x_2) - \gamma_{3i}(x_1, x_2)$  et  $\gamma_{3i}(x_1, x_2)$  étant la déformation de cisaillement.

Les théories d'ordre élevé (HSDT) sont apparues pour mieux représenter la distribution des contraintes de cisaillement transversales et pour prendre en compte les contraintes axiales transversales. Selon ces théories, la description du champ de déplacement pour le cas des plaques, par exemple, est donnée par (Carrera, 2002) [3]:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0 + (x_3)u_i^1 + (x_3)^2u_i^2 + \dots + (x_3)^{N_i}u_i^{N_i} \quad , \quad i = 1, 2 \text{ et } 3 \quad (4)$$

Où  $u_i^j(x_1, x_2)$  avec  $j = 0, \dots, N_i$  sont les coefficients du polynôme et  $N_i$  l'ordre d'expansion du champ de déplacement dans la direction  $i$ .

Comme indiqué précédemment, les distributions du cisaillement transversal et de la contrainte axiale doivent être continues aux interfaces d'une couche en raison de l'équilibre des forces et les déplacements doivent être compatibles tant qu'il n'y a pas de défaillance matérielle. En raison de cela et du changement des propriétés du matériau d'une couche à l'autre, il est nécessaire d'avoir une discontinuité des déformations transversales aux interfaces des couches, générant des déplacements dans le plan du stratifié avec un comportement de Zig-Zag dans l'épaisseur.

Ce comportement en zig-zag est bien prononcé sur les stratifiés épais et lorsqu'il y a une variation soudaine des constantes élastiques du matériau des couches. On peut le voir dans les solutions analytiques obtenues auprès de Pagano (1969, 1970) [57], [58], Pagano et

Hatfield (1972) [59], Noor (1973) [60] et Piskunov, Sipetov et Tuimetov (1990) [61], dans le cas de la flexion des plaques stratifiées, et dans Ren (1987b) [62] et Varadan et Bhaskar (1991) [63], dans le cas de la flexion des coques cylindriques.

Une cinématique plus correcte pour le champ des déplacements dans les stratifiés épais peut être obtenue avec la théorie des couches par couches, car le comportement en zig-zag des déplacements dans le plan du stratifié est représenté. Contrairement aux modèles ESL, dans lesquels, le long de l'épaisseur du stratifié, le champ de déplacement appartient à la classe  $C^1$  et produit donc une continuité des déformations et une discontinuité des contraintes aux interfaces, la cinématique adoptée dans la théorie par couches permet de représenter un champ de déplacements de classe  $C^0$ . Ceci génère un champ de déformations discontinues aux interfaces des couches et permet la continuité des contraintes inters laminaires. Reddy (2004a) [5] soutient que la théorie des couches est bien acceptée lorsqu'une représentation plus précise de la distribution des contraintes est nécessaire pour, par exemple, identifier le début de la défaillance de la couche et des interfaces, ainsi que sa progression sur l'ensemble du stratifié.

L'idée essentielle de la théorie des couches est de représenter les variables du problème (déplacements, contraintes ou déplacements et contraintes) au moyen de fonctions indépendantes sur chaque couche. Pour les cas de plaques et de coques, dans lesquelles cette théorie est plus appliquée, les variables du problème sont supposées, par exemple, comme des fonctions du type:

$$f^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = f_i^{(k)}(x_1, x_2) F_i^{(k)}(x_3), \quad i = 1 \dots N \quad (5)$$

Dans lequel  $f^{(k)}(x_1, x_2, x_3)$  est la fonction supposée représenter la variable du problème dans la couche  $(k)$ ,  $f_i^{(k)}(x_1, x_2)$  sont les fonctions à deux dimensions qui décrivent la variable du problème dans le domaine des plans  $i$  contenus dans la couche,  $F_i^{(k)}(x_3)$  sont les fonctions qui effectuent l'expansion de cette variable le long de l'épaisseur de la couche et  $N$  est le nombre de nœuds répartis le long de l'épaisseur de la couche. Les conditions de compatibilité dans les déplacements et la continuité des contraintes transversales inters laminaires peuvent être satisfaites avec l'imposition de restrictions dans les interfaces [3].

Selon Reddy (2004a) [5], la théorie des couches par couches basée sur les déplacements peut être classée en partie et complète. Dans la théorie des couches partielle, la composante du champ de déplacements dans la direction transversale -  $u_3(x_1, x_2)$  - est considérée comme constante le long de l'épaisseur et la dilatation discrète par couches n'apparaît que pour les composantes du champ de déplacement dans les directions contenues

dans plan des pales –  $u_1(x_1, x_2, x_3)$  et  $u_2(x_1, x_2, x_3)$ . Dans la théorie complète Layerwise, l'expansion discrète par couches se produit pour les trois composantes du champ de déplacement -  $u_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_2(x_1, x_2, x_3)$  et  $u_3(x_1, x_2, x_3)$ . En conséquence, les contraintes de cisaillement transverses sont considérées à la fois dans les théories partielle et complète, mais les contraintes axiales transverses sont négligées dans la théorie partielle et ne sont considérées que dans la théorie complète.

Ghugal et Shimpi (2002) [55] ont proposé une autre division intéressante pour classer les théories de Layerwise appliquées aux plaques. Cette division peut toutefois être étendue aux théories par couches appliquées à d'autres structures stratifiées telles que des poutres et des coques. Selon ces auteurs, le nombre d'inconnues des théories par couches peut ou non dépendre du nombre de couches composant le stratifié. Nous avons donc les théories dépendantes des couches et les théories indépendantes des couches.

Compte tenu de ces deux classifications pour les théories par couches, les articles consultés dans cette revue bibliographique seront présentés et classés dans les catégories suivantes: Théorie par couches partiellement dépendante, théorie par couches partielle indépendante, théorie par couches complète dépendante et théorie par couches complète indépendante.

On trouvera dans Srinivas (1973) [64], Reddy (1987, 2004a) [65], [5] et Barbero, Reddy et Teply (1990) [66] certains articles qui utilisent la théorie des couches partielle en fonction du nombre de couches. Srinivas (1973) [64] a présenté une formulation partielle par couches pour les analyses statiques et dynamiques de plaques stratifiées. Selon cette formulation, les déplacements dans le plan du stratifié sont approximés à partir d'une dilatation linéaire par couche. Le déplacement transversal est supposé constant dans l'épaisseur. Une généralisation de la théorie partielle des couches pour la représentation du champ de déplacement a été présenté par Reddy (1987, 2004a) [65], [5] pour l'analyse de plaques stratifiées. Barbero, Reddy et Teply (1990) [66] ont développé l'idée de coque cylindrique laminée. La théorie est basée sur l'interpolation du champ de déplacement sur chaque couche.

Dans la proposition des auteurs, la représentation des déplacements dans l'épaisseur est réalisée au moyen d'éléments finis lagrangiens unidimensionnels qui se sont révélés très pratiques, car tout degré d'approximation est facilement employé. Les résultats des déplacements naturels, des contraintes et des fréquences obtenues étaient très proches des solutions analytiques tridimensionnelles.

Les modèles basés sur la théorie des couches partielles sont plus réalistes que les modèles équivalents à une couche (ESL), car ils considèrent le comportement de Zig-Zag pour le champ de déplacements dans le plan des couches et, par conséquent, produisent un champ de déformations de cisaillement transverse discontinu en épaisseur. Une limitation de la théorie partielle est associée au non-respect d'une variation du déplacement transversal le long de l'épaisseur du stratifié, négligeant ainsi les contraintes axiales transversales. Ainsi, il n'est pas possible de satisfaire les conditions de contour à la base et au sommet du stratifié avec des contraintes normales appliquées et une répartition réaliste des contraintes dans la région des bords libres soumis à des contraintes de cisaillement transversales n'est pas obtenue. Les modèles basés sur la théorie des couches partielles fournissent des résultats imprécis dans les régions discontinues telles que les ouvertures, les bords libres et les fronts de délamination. Ceci est dû au manque de prise en compte des contraintes axiales transversales significatives dans ces régions. Une alternative pour contourner cette limitation consiste à effectuer une expansion par couche, également pour le déplacement transversal, qui est la proposition de la théorie complète par couche [5].

Des formulations utilisant la théorie complète des couches et possédant la quantité de variables dépendantes de la tranche peuvent être trouvées dans les travaux : [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74] et [5].

Les formulations d'Epstein et Huttelmaier (1983) [67] et de Huttelmaier et Epstein (1985) [75] présentent des caractéristiques similaires à la formulation développée dans le présent travail. En utilisant une cartographie vectorielle, Epstein et Huttelmaier (1983) [67] et Huttelmaier et Epstein (1985) [75] ont présenté une formulation basée sur la méthode des éléments finis pour l'analyse des plaques et coques laminées, respectivement. Dans la proposition, un élément fini bidimensionnel iso paramétrique à quatre nœuds est situé sur une surface de référence et la cartographie d'épaisseur est effectuée le long de chacun de ses nœuds. Toute cette cartographie est réalisée à partir d'un système de référence non dimensionnel. Pour cela, on trouve  $r$  vecteurs de position qui localisent les nœuds de l'élément sur la surface de référence et qui dirigent les vecteurs  $d_I$  qui, avec une coordonnée sans dimension  $z_I$ , cartographient tous les points de l'épaisseur de chaque couche  $I$ . Les degrés de liberté d'élément sont constitués par les vecteurs  $u$  et  $e_I$  qui représentent respectivement le déplacement d'un nœud de l'élément et la variation du vecteur directeur  $d_I$  nodal. Ainsi, les contraintes de cisaillement transverses et les contraintes axiales transversales sont prises en compte. La détermination de  $u$  et  $e_I$  est effectuée en appliquant le principe de travaux

virtuelles (PTV). La formulation utilise une cinématique similaire à la dilatation par couches du premier ordre, car les sections de chaque couche présentent des tours constants le long de l'épaisseur et sont indépendantes, restant droites mais pas nécessairement normales à la surface de référence. Cette formulation trouve son origine dans les travaux d'Epstein et Glockner (1977) [76] sur l'analyse non linéaire des coques laminées.

Les formulations d'Epstein et Glockner (1977) [76], d'Epstein et Huttelmaier (1983) [67] et de Huttelmaier et Epstein (1985) [75] sont l'une des rares œuvres trouvées avec ce vecteur appelant à représenter la cinématique d'un stratifié. Tous les autres travaux consultés utilisent des fonctions mathématiques qui représentent les champs de déplacements et / ou de contraintes.

En ce sens, Cho, Striz et Bert (1990) [68] et Cho, Bert et Striz (1991) [69] ont supposé un champ de déplacement d'ordre élevé pour les trois déplacements et présenté une solution analytique au problème de la flexion cylindrique avec chargement sinusoïdal et vibrations des plaques laminées simplement supportées. Dans cette solution, les déplacements dans le plan et le déplacement transversal de chaque couche sont approximés par des fonctions de troisième et de second ordre dans la coordonnée le long de l'épaisseur, respectivement. Dans la proposition de Lee et Liu (1992) [70], pour l'analyse des poutres stratifiées, des polynômes cubiques d'Hermite ont été utilisés pour l'interpolation indépendante des déplacements longitudinaux et transversaux le long de l'épaisseur. Afin de garantir la discontinuité des déformations transversales, des torsions distinctes sur les couches adjacentes à une interface sont admises.

Gaudenzi (1992) [71] a proposé une formulation générale pour l'analyse des plaques stratifiées au moyen d'une expansion du champ de déplacements vers l'épaisseur à l'aide de séries de puissances d'ordre élevé. Des cas particuliers de modèles Zig-Zag et de modèles monocouche peuvent être obtenus à partir de cette formulation générale. Gaudenzi, Barboni et Mannini (1995) [72] ont étendu cette proposition à une formulation basée sur la méthode des éléments finis. Negishi et Hirashima (1997) [73] ont également utilisé une série d'expansion avec puissance pour élaborer une formulation générale utilisant le principe de Hamilton et l'assouplissement des conditions de compatibilité des déplacements aux interfaces pour l'analyse statique et dynamique de composites stratifiés sujets au glissement.

Une alternative à l'utilisation des fonctions Hermite est l'utilisation des fonctions d'interpolation de splines. Zhu et Lam (1998) [74] ont utilisé cette idée pour déterminer les contraintes locales dans les composites stratifiés. Une répartition précise des contraintes a été

obtenue avec l'utilisation de fonctions splines cubiques pour l'interpolation du champ de déplacement de chaque couche dans l'épaisseur et avec l'imposition de conditions de compatibilité et de continuité des contraintes transversales dans les interfaces. La méthode de la solution de Rayleigh-Ritz a également été utilisée.

À la recherche d'une généralisation de la théorie des couches, Reddy (2004a) [5] a présenté une formulation basée sur la méthode des éléments finis élaborée à partir de la composition entre éléments bidimensionnels, responsable de l'interpolation des déplacements dans le plan de la couche, et des éléments lagrangiens unidimensionnels pour l'interpolation, avec un degré d'approximation quelconque, des déplacements le long de l'épaisseur. De cette façon, il est facile de développer des théories complètes, par couches, des ordres les plus faibles aux plus élevées.

Les éléments développés avec cette généralisation ressemblent aux éléments finis 3D. Cependant, Reddy (2004a) [5] indique que les éléments au niveau des couches présentent certains avantages, tels que: la maintenance d'une structure de données de type 2D similaire à celle des théories ESL; conduisant à une réduction du volume de données d'entrée par rapport aux éléments 3D et à une plus grande flexibilité en ce qui concerne le raffinement du maillage dans le plan du stratifié et dans le sens transversal, car il est possible de le réaliser indépendamment les uns des autres. Dans les éléments finis 3D, une telle indépendance n'existe pas, puisqu'une révision complète de l'élément est nécessaire.

La structure de données 2D permet une formulation plus efficace de la matrice de rigidité de l'élément car les intégrations en volume peuvent être effectuées au moyen d'intégrations numériques séparées par rapport aux coordonnées le long de l'épaisseur et par rapport aux coordonnées dans le plan. Une seule intégration le long de l'épaisseur peut être utilisée pour tous les points gaussiens des intégrations dans le plan. Ces intégrations distinctes réduisent considérablement le nombre d'opérations mathématiques nécessaires pour calculer la matrice de rigidité de l'élément par couches par rapport aux opérations mathématiques permettant de calculer la matrice de rigidité d'un élément fini 3D [5].

Les théories dépendantes des couches peuvent devenir limitées lorsque le coût de calcul devient excessif en raison de l'augmentation du nombre de couches dans la composition d'un stratifié. En ce sens, les théories indépendantes des couches sont avantageuses, car le nombre d'inconnues n'augmente pas avec le nombre de couches. En outre, un autre aspect important à souligner concerne la continuité inter laminaire des contraintes transversales. De nombreuses formulations basées sur les théories dépendantes des couches ne vérifient que le

comportement de Zig-Zag pour le champ de déplacement, tandis que la plupart des formulations basées sur les théories indépendantes des couches vérifient également la continuité inter laminaire des contraintes transverses. Cette condition sert uniquement de restriction supplémentaire pour réduire le nombre d'inconnues, rendant la formulation indépendante du nombre de couches.

Parmi les théories indépendantes de Layerwise, celles qui ont retenu le plus l'attention des chercheurs sont celles appelées par Sciuva (1986) [90] des théories de Zig-Zag. Selon Reddy (2004a) [5], un champ de déplacement partiel adopté par ces théories pour des applications statiques prend une forme du type:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3) &= u_i^0(x_1, x_2) - x_3 u_{3,i}^0(x_1, x_2) + f_{ij}(x_3) \phi_j(x_1, x_2), \quad i, j = 1 \text{ et } 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^0(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Où  $f_{ij}(x_3)$  et  $\phi_j(x_1, x_2)$  sont des fonctions déterminées pour que les déplacements et les contraintes transversales soient continus aux interfaces des couches.

Carrera (2002) [3] présente une excellente bibliographie des théories du zig-zag. Cet auteur cite trois modèles principaux qui ont donné lieu à ces théories: le modèle Lekhnitskii-Ren, le modèle Ambartsumian-Whitney-Rath-Das et le modèle Reissner-Murakami-Carrera.

Selon Carrera (2002) [3], le modèle Lekhnitskii-Ren a été proposé par Lekhnitskii (1935) [77] Carrera, (2002) [3] pour les poutres et étendu par Ren (1986a, 1986b, 1987a) [78], [79], [80] pour l'analyse de plaques stratifiées orthotropiques et anisotropes. La formulation de Ren [78], [79], [80] est basée sur les contraintes et une expansion par couches du second ordre le long de l'épaisseur a été adoptée pour les contraintes de cisaillement croisées, qui satisfont aux conditions de continuité aux interfaces. A partir de l'intégration des relations déformation-déplacement et de l'imposition de la compatibilité aux interfaces, on détermine une dilatation cubique par couche pour représentent les déplacements dans le plan du stratifié.

Carrera (2002) [3] affirme que l'origine du modèle est due aux travaux d'Ambartsumian (1958a, 1958b, 1961, 1962, 1969) [81], [82], [83], [84], [85], qui ont été étendus aux plaques anisotropes par Whitney (1969) [86] Carrera, (2002) [3]. Ce dernier a eu son travail prolongé pour les coques laminées par Rath et Das (1973) [87] dont la formulation est basée sur des contraintes avec une expansion par couche du second ordre le long de l'épaisseur pour les contraintes de cisaillement transverses. Imposant la continuité inter laminaire de ces contraintes et de l'intégration des relations déformation-déplacement, un

champ de déplacement par couches de quatrième ordre compatible aux interfaces a été déterminé. Le déplacement transversal est considéré constant dans la section.

Enfin, Carrera (2002) [3] indique que le modèle de Reissner-Murakami-Carrera est issu d'une approche variationnelle mixte connue sous le nom de théorème de variation mixte de Reissner (RMVT). Dans ce modèle, les déplacements transversaux et les contraintes sont abordés indépendamment par des fonctions par morceaux ou par couches. En minimisant la fonction d'énergie potentielle totale, les inconnues sont déterminées. Des conditions de compatibilité et de continuité des contraintes inters laminaires sont imposées à l'énergie fonctionnelle à partir de techniques telles que les multiplicateurs de Lagrange. Un exemple de travail utilisant ce modèle est celui de Toledano et Murakami (1987) [88]. Dans ce travail, une fonction par morceaux a été adoptée pour approcher tous les déplacements. Cette fonction comprend les polynômes de Legendre au premier, deuxième et troisième degré et un graphe de Zig-Zag. Ce graphe en zig-zag est composé d'une fonction contenant le terme  $(-1)^k$ ,  $k$  étant le numéro de la couche. Indépendamment, les contraintes de cisaillement transverse et la contrainte normale transversale ont été approximées dans une expansion par couche en utilisant des polynômes du quatrième et du cinquième degré, respectivement.

Certains travaux importants pour le développement des techniques d'analyse des composites stratifiés ont utilisé des formulations basées sur la théorie des couches partielles, indépendamment du nombre de couches. Ces formulations peuvent être classées en tant que théories de Zig-Zag et ont été proposées par Spilker (1980) [89] :, Sciuva (1986) [90] :, Owen et Li (1987a, 1987b) [91], [92], Lee et al. (1990, 1994) [93], Soldatos (1992) [94], Xavier, Lee et Chew (1993) [95] et Xaxier, Chew et Lee (1995) [96].

Spilker (1980) [89] a proposé une formulation hybride d'éléments finis pour l'analyse de plaques stratifiées. L'élément proposé est développé à partir de l'adoption d'une expansion par couche d'ordre élevé le long de l'épaisseur du stratifié pour les déplacements et les contraintes. Les conditions de compatibilité et d'équilibre sont satisfaites aux interfaces du stratifié, ainsi que les conditions de contour aux contraintes sur les faces supérieure et inférieure.

Dans le travail de Sciuva (1986) [90] est apparu le nom de théorie Zig-Zag. Les problèmes de flexion, d'amortissement et de flambage dans une plaque carrée épaisse, constituée de trois couches symétriques et simplement supportées, ont été analysés. En utilisant des fonctions de Heaviside, en satisfaisant les conditions d'équilibre et de compatibilité aux interfaces des couches et en utilisant un enrichissement par déformation, Sciuva (1986) [90] a proposé une

fonction par morceaux pour les déplacements dans le plan. Le modèle adopté s'appelait la théorie de Zig-Zag, car le comportement de Zig-Zag des déplacements le long de l'épaisseur était représenté.

En modifiant une proposition présentée par Reddy (1987) [65], Reddy, (2004a) [5], Owen et Li (1987a, 1987b) [91], [92] ont proposé une formulation par éléments finis pour l'analyse des problèmes de statique, de vibration et de stabilité dans les plaques stratifiées. La formulation montre les déplacements dans le plan du stratifié représentés le long de l'épaisseur par une fonction par morceaux. En appliquant séparément la première variation de l'énergie fonctionnelle par rapport aux degrés de liberté des nœuds contenus dans le corps de la couche et par rapport aux degrés de liberté des nœuds contenus dans la face supérieure de la couche, les variables de nœuds du corps de l'élément ont été obtenues en fonction des variables appartenant aux nœuds contenus dans l'interface de la couche supérieure. Owen et Li (1987a, 1987b) [91], [92] ont appelé cette technique de sous-structure. Par ce biais, la quantité de variables de formulation était indépendante du nombre de diapositives.

He, Chou et Zhang (1993) [97] et Botello, Oñate et Canet (1999) [98] sont d'autres ouvrages aux idées différentes qui utilisent une expansion en couches de premier ordre partiel et indépendant. Pour réduire et rendre le nombre de variables indépendant du nombre de couches, He, Chou et Zhang (1993) [97] ont retenu une hypothèse selon laquelle les déformations de cisaillement transversal de deux couches sont linéairement dépendantes l'une de l'autre et Botello, Oñate et Canet (1999) [98] utilisent des techniques de condensation lors de l'assemblage de la matrice de rigidité de l'élément fini proposé.

Au lieu de travailler, comme dans les formulations précédentes, avec les déplacements dans le plan du stratifié variant selon une fonction linéaire le long de l'épaisseur, Lee, Senthilnathan et Chow (1990) [99] et Lee, Lin et Chow (1994) [93] ont proposé une formulation plus précise en adoptant une variation cubique pour ces déplacements sur chaque couche. En utilisant des conditions de compatibilité et de continuité des contraintes inters laminaires, le comportement de Zig-Zag le long de l'épaisseur a été satisfait et le nombre d'inconnues de la formulation est devenu indépendant du nombre de couches et égal à celui des formulations basées sur la théorie FSDT. Ces travaux ont été utilisés pour l'analyse de plaques stratifiées. Xavier, Lee et Chew (1993) [95] et Xaxier, Chew et Lee (1995) [96] ont étendu la formulation pour l'analyse des coques laminées.

De nombreuses formulations sont développées en considérant une expansion partielle par couche du champ de déplacement à partir d'une variation cubique par couche superposée

avec une fonction par morceaux. En imposant la compatibilité des déplacements et la continuité des contraintes transversales aux interfaces, le nombre de variables à problèmes devient indépendant du nombre de couches. Les travaux déjà cités présentant ces caractéristiques sont ceux de Ren [78], [79], [8] et [88]. D'autres travaux sont ceux de Sciuva (1992) [100] et Cho et Parmeter (1992) [132], qui ont superposé une expansion par couches du troisième ordre avec des fonctions de Heaviside, et Icardi (1998) [101], qui a adopté un champ de déplacement similaire à celui de Sciuva (1992) [100] et Cho et Parmeter (1992) ont proposé un élément curvilinéaire fini à huit nœuds pour l'analyse de plaques stratifiées.

Soldatos (1992) [94] a présenté une formulation d'ordre général élevée. Sa théorie convient aux analyses statiques et dynamiques des plaques stratifiées et est basée sur l'adoption d'un champ de déplacement élargi en épaisseur utilisant les séries de puissance et les fonctions de Heaviside. En utilisant des multiplicateurs de Lagrange en conjonction avec le principe de Hamilton, les équations différentielles du problème ont été obtenues et leurs solutions ont conduit à un champ de déplacement satisfaisant la compatibilité des déplacements et la continuité des contraintes de cisaillement transversales aux interfaces des couches.

Au lieu d'adopter des variations polynomiales ou des séries de puissances le long de l'épaisseur comme dans de nombreux articles, [134] Karama et al. (1998) ont envisagé une expansion partielle par couche du champ de déplacement utilisant des fonctions trigonométriques superposées avec des fonctions linéaires et des fonctions de Heaviside. Cette dernière fonction garantit un comportement Zig-Zag du champ de déplacement indépendant du nombre de diapositives.

Comme dans la théorie partielle des couches, des formulations indépendantes du nombre de couches sont développées pour des théories complètes des couches. Les conditions de continuité des contraintes transversales et la compatibilité des déplacements dans les interfaces restent les principales contraintes permettant de rendre le nombre d'inconnues indépendant du nombre de couches. De plus, les conditions aux limites sont également imposées et respectées dans ces formulations.

De nombreuses formulations de la théorie des couches totalement indépendante présentent des expansions d'ordre élevé. Moazzami et Sandhu (1993) [133] ont proposé une formulation basée sur une expansion de second ordre pour les déplacements dans le plan et une expansion linéaire pour le déplacement transversal. Wu et Kuo (1992) [102] et Wu et Hsu (1993) [103] ont adopté une expansion polynomiale cubique pour les déplacements dans le

plan et une expansion polynomiale quadratique pour le déplacement transversal. Les conditions de compatibilité et de continuité des contraintes aux interfaces ont été introduites dans la fonction d'énergie potentielle totale au moyen de multiplicateurs de Lagrange. Un travail basé sur les contraintes a été présenté par He et Zhang (1997, 1999) [104], [105] qui ont adopté une expansion cubique pour les contraintes transversales. Afin de rendre la formulation indépendante du nombre de couches, outre les conditions de contrainte évoquées ci-dessus, nous avons retenu l'hypothèse selon laquelle les déformations de cisaillement transversal de deux couches quelconques sont linéairement dépendantes l'une de l'autre. À partir de l'intégration des contraintes transversales, une variation cubique de l'épaisseur a été déterminée pour les champs de contraintes transversales et de déplacement normaux.

La plupart des travaux cités ici sont consacrés à l'analyse de structures formées de composites stratifiés soumis à de petits déplacements, de petites déformations et constitués d'un matériau élastique linéaire. Dans ces cas, une analyse linéaire suffit à fournir des résultats satisfaisants.

Cependant, comme les composites stratifiés ont une résistance spécifique et une rigidité élevée (rapports résistance / densité et rapports rigidité / densité, respectivement), les structures sont généralement légères, minces et susceptibles de subir de grands déplacements. Une autre caractéristique pertinente des composites stratifiés est l'anisotropie, qui peut être contrôlée en modifiant l'orientation et la séquence d'empilement des couches. Cela permet d'optimiser les propriétés mécaniques du matériau, mais chaque couche ayant tendance à fonctionner de manière autonome, des concentrations de contraintes apparaissent aux interfaces pour assurer la compatibilité des déplacements. Cette anisotropie conduit également à un couplage complexe entre les déformations dans le plan des couches et les déformations transversales aux couches. Ainsi, en raison de ces caractéristiques, un comportement non linéaire est observé à la fois dans les structures soumises à de petits déplacements et dans les structures soumises à des déplacements importants [106], [107].

De nombreux travaux ont été développés sur les analyses non linéaires de structures formées par des composites stratifiés. La plupart ne considèrent que la non linéarité géométrique avec la structure sujette à de petites ou grandes déformations et certains des problèmes étudiés sont la détection de défaillances telles que le délaminage, l'analyse du comportement après flambement et l'analyse de structures formées par des composites contenant des matériaux piézoélectriques.

Certains articles consacrés à l'analyse non linéaire des plaques stratifiées sont ceux de Barbero et Reddy (1991) [108], Reddy Y. et Reddy J. (1992) [109], Icardi (1994) [110], Schmidt et Librescu (1994) [111], Zinno et Barbero (1994) [112]. Reddy Y., Moorthy et Reddy J. (1995) [113], Kam, Sher et Chao (1996) [114], Sciuva, Icardi et Villani (1998) [115], Reddy (2004a) [5], Andrade, Awruch et Morsch (2007) [116], Toudeshky, Hosseini et Mohammadi (2010) [117], Ćetković et Vuksanović (2011) [118], Choudhary et Tungikar (2011) [119], Kishore, Singh et Pandit (2011) [120], Kapoor et Kapania (2012) [121]. Pour l'analyse non linéaire des coques laminées, des travaux apparentés sont ceux d'Epstein et Glockner (1977) [76], Gruttmann et al. (1993) [106], Chaudhuri et Hsia (1998) [122], To et Liu (2001) [123], Reddy (2004a) [5], Kim et Chaudhuri (2005) [124], Andrade, Awruch et Morsch (2007) [116], Isoldi et al. (2008) [125], Moreira, Sousa et Valente (2010) [126]. Enfin, en ce qui concerne cette recherche bibliographique, seuls les travaux de Vo et Lee (2010) [127] traitent de l'analyse non linéaire dans des barres (poutres) laminées.

La procédure numérique la plus utilisée pour le développement de formulations appropriées pour l'analyse non linéaire dans les structures formées de composites stratifiés est la méthode des éléments finis, car elle facilite la manipulation numérique de ces problèmes et permet la mise en œuvre informatique [122]. Ainsi, Reddy (2004a) [5] indique que deux approches ont été suivies pour le développement de modèles utilisant la méthode des éléments finis pour l'analyse non linéaire de composites stratifiés. Ces approches donnent lieu à des éléments finis stratifiés et à des éléments finis continus.

Les éléments finis stratifiés sont obtenus en utilisant les théories des stratifiés ESL qui réduisent le problème tridimensionnel à un problème bi ou unidimensionnel à partir d'un ensemble d'hypothèses cinématiques et d'une homogénéisation le long de l'épaisseur. Les formulations non linéaires utilisant ces éléments sont utilisées dans l'analyse de structures sujettes à de petites déformations et à de grands déplacements. Les déformations utilisées sont celles de vonKármán [5], [118]. On peut trouver l'utilisation d'éléments finis laminés dans les travaux de : [109], [114], [115], [5], [125], [127], [120], [121] et [128]. Les formulations proposées dans ces travaux sont adéquates lorsque l'intérêt porte sur le comportement général des stratifiés minces ou d'épaisseur moyenne.

Comme indiqué dans les sections précédentes, les formulations basées sur la théorie ESL ne sont pas en mesure de représenter le comportement de Zig-Zag des déplacements dans le plan des couches et ne parviennent pas à satisfaire la continuité des contraintes inters laminaires. Ainsi, lorsqu'il est nécessaire d'évaluer des aspects locaux tels que la distribution

des contraintes le long de l'épaisseur pour prédire le début et la progression de la rupture du stratifié par délamination, glissement ou fissuration, les théories de Layerwise sont reconnues pour fournir de bons résultats pour la distribution des contraintes et déplacements au niveau de la couche.

En ce sens, les éléments finis continus sont plus adéquats car ils sont basés sur une formulation tridimensionnelle continue, dans laquelle des hypothèses cinématiques sont introduites dans une approximation tridimensionnelle. A cette approche appartiennent les éléments obtenus à partir des théories Layerwise et les éléments finis tridimensionnels. Les formulations non linéaires utilisant ces éléments sont utilisées dans les analyses de structures sujettes à de petites ou grandes déformations et à des déplacements importants. Les mesures des déformations non linéaires complètes ou des déformations de vonKármán [5], [118] sont prises en compte. Des formulations basées sur des éléments finis continus utilisant les théories de Layerwise peuvent être trouvées dans : [76], [108], [110], [111], Reddy Y., Moorthy et Reddy J. (2010) [113], [122], [123], [124], [129], [126], [119], [130] et [131]. En raison du coût de calcul plus élevé, une plus petite quantité de travail est basée sur des éléments finis continus utilisant des éléments finis tridimensionnels. Seules les œuvres de Zinno et Barbero (1994) [112] et d'Andrade, Awruch et Morsch (2007) [116] ont été retrouvées avec cette formulation.

Signalons, pour clore cette section, que parallèlement aux méthodes et techniques de résolution citées ci-dessus, il en existe plusieurs. Nous aimerions souligner que jusqu'à présent, des études approfondies visant l'amélioration des méthodes de résolution et des critères de convergence. Dans ce sens, nous avons essayé modestement de raffiner ces derniers le mieux possible.

Compte tenu de tout ce qui a été présenté, la méthode développée dans ce travail a une cinématique similaire la théorie complète de Layerwise avec une approximation de premier ordre pour le champ de déplacement sur chaque couche.

Comme indiqué dans le chapitre relatif aux éléments finis laminés, un vecteur tangent à la section de chaque couche est utilisé pour représenter la torsion et la variation d'épaisseur de la couche. Avec cette proposition, le comportement de Zig-Zag le long de l'épaisseur pour les déplacements dans le plan du stratifié peut être représenté, mais la continuité des contraintes inters laminaires n'est pas satisfaite. La répartition de la contrainte peut être améliorée en augmentant la discrétisation dans la section transversale, ce qui augmente le

nombre de degrés de liberté, puisque la cinématique proposée pour l'élément fini laminé dépend du nombre de couches.

Comme discuté, la prise en compte des non-linéarités est très importante pour obtenir plus précisément une répartition des déplacements, des déformations et des contraintes au niveau des couches. Ainsi, la présente proposition considère la non-linéarité géométrique, la structure pouvant présenter de grands déplacements, de grandes rotations et de petites déformations. La formulation est lagrangienne totale en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la position. Le matériau constitutif des aubes se comporte conformément à la loi de comportement énergétique de Saint-Venant-Kirchhoff liant les déformations de Green au tenseur de contraintes de second ordre de Piola-Kirchhoff. Dans les formulations pour l'analyse non linéaire des stratifiés, l'élément fini proposé dans cette recherche peut être classé en tant qu'élément fini continu.

En ce qui concerne les formulations trouvées dans la littérature qui sont basées sur la théorie Layerwise, la formulation de ce travail diffère principalement par le caractère de l'élément portique. Ainsi, sont évités les problèmes de désadaptation de matrice qui peuvent survenir lorsqu'on utilise des éléments finis basés sur la théorie Layerwise présentée par Reddy (2004a) [5] ou des éléments bidimensionnels finis pour analyser des cadres plats stratifiés constitués de couches minces et présentant une variation importante des propriétés des matériaux constitutifs ces couches.

## **CHAPITRE 02**

# **MÉTHODE D'ÉLÉMENT FINI POSITIONNEL APPLIQUÉE AUX MODÈLES BIDIMENSIONNELS**

## 2 MÉTHODE D'ÉLÉMENT FINI POSITIONNEL APPLIQUÉE AUX MODÈLES BIDIMENSIONNELS

### 2.1 Introduction

La méthode des éléments finis positionnels a comme caractéristique principale l'utilisation de degrés de liberté dans les positions, ce qui justifie le nom de la méthode, au lieu des degrés traditionnels de liberté dans les déplacements.

L'ensemble du développement de la méthode est réalisé en déterminant une fonction de changement de configuration ( $f$ ) qui définit la configuration actuelle, ou l'équilibre, à partir d'un domaine fixe et représenté par la configuration initiale,  $B_0 \xrightarrow{f} B$  avec  $B_0$  et  $B \in \mathcal{R}^2$ . En employant une configuration de référence fixe et en coïncidant avec la configuration initiale, la formulation de position est caractérisée en tant que lagrangien total.

La non-linéarité géométrique est considérée comme naturelle, car aucune simplification n'est imposée sur l'ordre de grandeur des déplacements et des rotations subis par le corps dans la définition de  $f$ . Ceci est dû à l'utilisation de la mesure de déformation de Green, qui est une mesure de déformation objective appropriée pour résoudre des problèmes impliquant de grands déplacements et rotations. Le conjugué de déformation énergétique de Green est le tenseur de contraintes de second ordre Piola-Kirchhoff [134].

La solution approximative des éléments finis positionnels est représentée par une interpolation des positions nodales à l'aide de polynômes de Lagrange. Pour la détermination de ces positions nodales, le principe de l'énergie stationnaire potentielle totale est utilisé. En imposant la nullité de la première variation de la fonction totale d'énergie potentielle, on obtient un système d'équations non linéaire ([134], [135], [136],[137]). La résolution de ce système d'équations est réalisée au moyen d'une stratégie basée sur la méthode de Newton-Raphson [138].

La méthode des éléments finis positionnels trouve son origine dans les travaux de Bonet et al. (2000) [139], Coda et Greco (2004) [140], Greco et al. (2006) [141] et Coda et Paccola (2007[7], 2008[142], 2011[9]) qui démontrent leur précision et leur compréhension facile.

Ce chapitre décrit la séquence des opérations mathématiques nécessaires au développement d'éléments finis positionnels appliqués à des problèmes bidimensionnels. Cette séquence est indépendante du type d'élément à développer. Nous commençons par une brève revue des

différentes formulations pour l'analyse non linéaire des structures. Dans la séquence, section 2.3, nous présentons la façon dont la fonction de changement de configuration est définie à partir des positions. La mesure de la déformation et la loi de comportement employée sont décrites à la section 2.4. Les différentes parcelles qui constituent la fonction d'énergie potentielle totale sont décrites aux points 2.5, 2.6 et 2.7. Enfin, la stratégie utilisée pour résoudre le système d'équations non linéaires est présentée au point 2.8.

## 2.2 Analyse non linéaire des structures

L'analyse d'un problème structurel est linéaire lorsque le modèle structurel développé suppose des hypothèses de base: apparition de petits déplacements, matériau à comportement élastique linéaire et conditions de contour vérifiées lors de l'application de demandes externes.

Dans un modèle discret basé sur les déplacements, le problème structurel peut être résolu à partir de la solution d'un système d'équations linéaires d'équilibre du type:

$$Ku=F \tag{7}$$

Où  $K$  est la matrice de raideur de la structure,  $u$  est le vecteur contenant les degrés de liberté inconnus du problème et  $F$  est le vecteur des forces externes.

Du fait des hypothèses retenues dans les analyses linéaires, la relation déformation-déplacement est linéaire et la matrice constitutive de la relation contrainte-déformation et les conditions aux limites sont constantes. Par conséquent,  $K$  et  $F$  sont indépendants du déplacement  $u$  et toutes les intégrales qui apparaissent dans le modèle mathématique peuvent être évaluées par rapport à la configuration initiale de la structure [143].

Lorsque le problème structurel peut être modélisé de manière réaliste d'adopter les hypothèses utilisées dans les modèles linéaires, il est préférable de les utiliser, parce que les solutions sont plus simples et à moindre coût de calcul par rapport aux solutions obtenues par une analyse non linéaire. L'une des raisons en est la validité du principe des effets de chevauchement.

Lorsque les hypothèses du problème linéaire ne peuvent être supposées, l'analyse du problème structurel devient non linéaire. Dans ce type d'analyse, le principe des effets de chevauchement n'est plus valide et pour chaque situation de chargement, il est nécessaire d'utiliser une analyse

particulière. En outre, l'historique ou la séquence du chargement doit être pris en compte. Selon Reddy (2004b) [144] et Bonet et Wood (2008) [137], l'analyse non linéaire devient nécessaire dans certains cas, tels que: (a) la conception haute performance des structures trouvées, par exemple, dans les industries de l'aérospatiale, l'aviation et nucléaire et qui utilisent des matériaux hautement composites; (b) dans l'étude du comportement mécanique du corps humain; (c) en évaluant la fonctionnalité des structures qui ont subi un certain type de dommage et de défaillance; (d) dans l'analyse des structures dans l'état limite ultime; (e) dans l'étude de la stabilité, entre autres.

Le non-respect l'une des hypothèses de base dans les modèles linéaires définit les trois principaux types d'analyse non linéaire existants, qui sont l'analyse non linéaire géométrique, analyse non linéaire physique et problème de contact physique ([138], [143], [144], [137]).

L'analyse géométrique non linéaire est celle qui considère l'effet de grands déplacements sur le comportement de la structure. L'expression non-linéarité géométrique découle précisément de l'incorporation du changement de géométrie dans le modèle. Bien qu'il y ait de grands déplacements, de nombreuses structures peuvent encore avoir de petites déformations. Ainsi, l'analyse géométrique non linéaire peut être effectuée en tenant compte de petites ou de grandes déformations [146].

Dans les problèmes géométriques non linéaires, il n'y a aucune limitation aux changements de géométrie. Cela augmente les difficultés à effectuer une analyse structurale car les équations d'équilibre doivent être écrites par rapport à la géométrie déformée, qui n'est pas connue à l'avance. La configuration géométrique initiale ou non déformée est seulement une configuration d'équilibre lorsque aucune action extérieure étant appliquée à la structure ([143], [137]).

L'importance de l'analyse géométrique non linéaire a considérablement augmenté. L'une des raisons est le développement de matériaux de haute performance tels que les matériaux composites, ce qui a permis la conception plus efficace des structures et souvent léger et mince. Par conséquent, l'analyse structurelle de la condition non déformée ne suffit plus de fournir des résultats fiables en ce qui concerne le comportement de la structure et donc l'incorporation d'effets non linéaires en raison de l'apparition d'un grand déplacement est indispensable.

Les modèles utilisés pour représenter le comportement du matériau sont appelés dans la littérature modèles de comportement et la relation mathématique entre la contrainte et la déformation d'un modèle particulier est appelé la loi constitutive de la matière ([145]; [136], [137]). Chaque modèle constitutif peut comporter plusieurs constitutive, il est possible d'avoir des matériaux différents compatibles avec les caractéristiques de comportement d'un modèle constitutif particulier, mais avec une relation contrainte-déformation spécifique.

Dans l'analyse linéaire, le matériau présente un comportement selon le modèle de comportement élastique linéaire dont la relation contrainte-déformation peut être exprimée par la loi de comportement de Hooke. Cependant, dans de nombreuses situations, l'analyse doit considérer un modèle plus réaliste pour représenter un comportement non linéaire du matériau. Ceci est une autre source importante de non-linéarité et, lorsque ce comportement non linéaire du matériau est incorporé dans l'analyse, il est le soi-disant analyse non linéaire physique.

La troisième hypothèse de base adoptée dans les analyses linéaires traite des conditions aux limites du problème structurel. En pratique, ces conditions ne sont pas toujours constantes, notamment lorsque le problème implique le contact entre deux ou plusieurs corps déformables comme dans le cas de l'analyse structurale impliquant l'interaction entre le sol et la structure.

Les problèmes structurels dont les conditions aux limites ne sont pas constantes constituent des problèmes dits de contact. Ces problèmes sont une autre source importante de non-linéarité et apparaissent lorsque différentes structures ou surfaces entrent en contact, se séparent ou glissent l'une sur l'autre. Les forces de contact, telles que les forces de frottement, peuvent augmenter ou diminuer et doivent être déterminées de manière à pouvoir évaluer leur influence sur le comportement de la structure. De plus, l'emplacement et l'étendue du contact ne sont pas connus à l'avance et doivent également être déterminés [143]. La présence de conditions aux limites dépendant de l'état de contrainte et de tension du corps introduit un comportement non linéaire à la structure dont l'analyse est assez complexe. D'autres exemples de ce type de problème sont le contact entre les pneus et les chaussées et ceux impliquant des roulements et des joints [145].

L'étude des problèmes non linéaires est complexe et il existe peu de solutions analytiques. En général, ces solutions sont limitées aux cas de charge et des structures simples. Des solutions analytiques peuvent être trouvées, par exemple, dans certains cas soumis à une non-linéarité

géométrique comme dans les problèmes de poutres encastrées ([147], [148]) et dans des cadres articulés et rigides [148]. Certaines des difficultés de proposer des solutions analytiques sont liées à la non-validité du principe de superposition, au fait qu'il peut y avoir plus d'une condition d'équilibre pour une charge donnée et à la nécessité de résoudre un système d'équations non linéaires.

Ainsi, les solutions numériques constituent une alternative viable pour l'analyse structurale des problèmes soumis à des effets non linéaires complexes, et la méthode des éléments finis est la technique numérique prédominante [137]. Gadala et Oravas (1984) [50] présentent une vaste revue des diverses formulations basées sur la méthode des éléments finis pour résoudre les problèmes de la mécanique du continuum non linéaire. Autres travaux illustrant les différences entre les différentes formulations existantes sont ceux de Wong et Tin-Loi (1990) [149], Crisfield (1991) [138], Bathe (1996) [145], Greco (2004) [150], Felippa et Haugen (2005) [151] et Felippa (2014) [152].

Selon Gadala et Oravas (1984) [50], les formulations numériques peuvent être classées en quatre groupes appelés description matérielle, référentielle, relative et spatiale. Cependant, une classification plus simple a été donnée par Bonet et Wood (2008) [137]. Ces auteurs ont résumé les formulations numériques en seulement deux classifications: les descriptions matérielles ou lagrangiennes, qui englobent les descriptions matérielles, référentielles et relatives de Gadala et Oravas (1984) [50], et les descriptions spatiales ou eulériennes.

Les descriptions matérielles ou lagrangiennes se réfèrent au comportement d'une particule matérielle du corps et les grandeurs physiques d'intérêt sont représentées par une fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ , dans laquelle les variables indépendantes sont le temps  $t$  et la position  $\mathbf{X}$  occupée par la particule par rapport à une configuration de référence. Déjà les descriptions spatiales ou eulériennes se réfèrent à une position de l'espace et ce qui arrive au corps dans cette position. Les grandeurs d'intérêt sont représentées par une fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , dans laquelle les variables indépendantes sont le temps  $t$  et la position  $\mathbf{x}$  par rapport à la configuration spatiale ou actuelle [137].

Les formulations avec la description eulérienne sont largement utilisées dans les problèmes impliquant des fluides, puisque, en général, l'intérêt est dans l'état du fluide dans une région fixe de l'espace. Dans les problèmes impliquant de grandes déformations, cette description est

également bien connue car les maillages par éléments finis ne sont pas soumis à de fortes distorsions[153]. Des exemples de travaux utilisant des formulations eulériennes appliquées à des problèmes de fluides sont : [154], [155], [156] et appliquées aux problèmes impliquant de grandes déformations sont ceux de Gadala, Oravas et Dokainish (1983) [47], Demarco et Dvorkin (2005) [157] et Foucard et al. (2015) [153].

Les formulations par éléments finis basées sur la description lagrangienne sont les plus largement utilisées dans l'analyse des problèmes non linéaires de la mécanique des solides, puisque le plus grand intérêt est concentré dans la détermination du comportement des particules matérielles composant le solide [137]. Selon Gadala et Oravas (1984) [50] et Foucard et al. (2015) [153], les principaux avantages de ce type de description sont la simplicité de description d'une cinématique et le calcul de grandeurs physiques par rapport à une configuration de référence fixe et connue. Les formulations eulériennes utilisées pour une description matérielle du solide deviennent plus complexes, puisque la configuration de référence est a priori cachée, conduisant à des opérations mathématiques plus compliquées (la variable de position  $x$  de la configuration actuelle devient une fonction implicite du temps  $t$ ).

D'autres avantages signalés dans le cas de la description lagrangienne sont la mise en œuvre computationnelle plus simple, le coût inférieur et la facilité de traitement des conditions aux limites, et il n'est pas nécessaire d'utiliser des techniques de suivi d'interface. Cependant, des inconvénients surviennent lorsque le solide subit de grandes déformations, dues aux distorsions de mailles, et lorsque les conditions de contour sont variables, comme dans les problèmes de contact et de propagation des fissures. Pour contourner cette limitation, certaines stratégies peuvent être utilisées comme la configuration de référence mise à jour ou l'utilisation de techniques de remaillage ([50] ; [153]).

Selon Crisfield (1991) [138] et Bathe (1996) [145], la description lagrangienne utilise deux approches différentes pour choisir la configuration de référence: le total lagrangien et le lagrangien mis à jour. Felippa et Haugen (2005) [151] incluent également l'approche corrotative en tant que description lagrangienne.

Pour identifier la configuration de référence, il est important de distinguer deux autres configurations: la configuration de base ou initiale et la configuration actuelle ou courante,

comme le montre la figure 12. Dans la description globale de Lagrange, les configurations de base et de référence sont confuses et restent fixes tout au long du processus de solution (figure 13). Selon Gadala et Oravas (1984), [50] cette description permet le développement de formulations simples en ce qui concerne les opérations mathématiques impliquées et les implémentations informatiques. En utilisant une configuration de référence fixe, la représentation des questions cinématiques et des conditions aux limites est effectuée relativement facilement. Les principales limites de ce type de description sont liées à des résultats imprécis et à des difficultés de convergence du processus de résolution dans des problèmes impliquant de grandes déformations dues aux distorsions importantes dans le maillage des éléments finis. Les problèmes de contact sont également plus difficiles à résoudre.

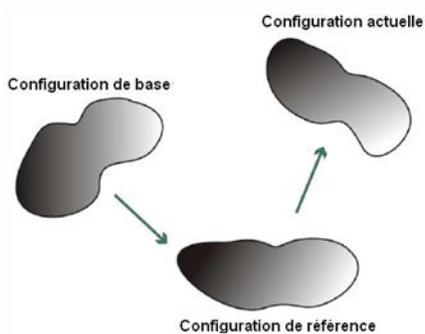


Figure 12 - Paramètres importants pour l'identification des descriptions lagrangiennes.

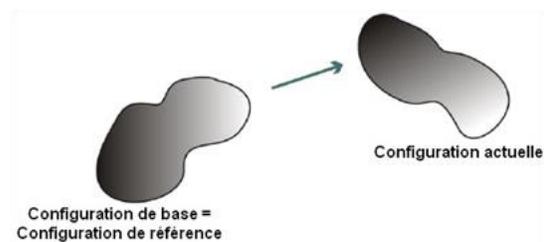


Figure 13 - Paramètres dans la description totale de Lagrange

Source: Felippa et Haugen (2005).

Ainsi, les formulations basées sur la description lagrangienne totale sont très pratiques pour la résolution de problèmes non linéaires soumis à de grands déplacements et rotations, mais avec des conditions aux limites constantes et des déformations modérées. Des formulations qui fonctionnent avec la description totale de Lagrange peuvent être trouvées dans les articles de Mondkar et Powell (1977) [49], Surana (1983) [158], Schulz et Filippou (2001) [159] et Coda et Paccola (2007[7], 2008[142], 2011[9]).

Une alternative aux limitations de la description lagrangienne totale est la description Lagrangienne mise à jour, dans laquelle la configuration de base reste fixe et la configuration de référence est continuellement mise à jour pendant le processus de solution (Figure 14). Dans ce type de description, les conditions de contour variables et les grandes déformations peuvent être

traitées plus facilement. De plus, la mise à jour de la configuration de référence simplifie certaines expressions mathématiques de la formulation comme celle de la matrice de rigidité tangente [50]. Des exemples de papiers qui utilisent des formulations avec une description lagrangienne mise à jour peuvent être trouvés dans les articles : [160], [51] et [48].

Une variante de cette description est appelée lagrangien partiellement mis à jour dans laquelle la mise à jour ne se produit que chaque augmentation de la charge. Par conséquent, au sein d'un même incrément, la configuration de référence reste fixe comme dans la description Lagrangienne totale. Selon Wong et Tin-Loi (1990) [149], cela réduit considérablement le nombre d'opérations mathématiques impliquées dans le processus de mise à jour de la configuration de référence. Des exemples de travaux avec la description lagrangienne partiellement mise à jour peuvent être trouvés dans les articles : [161] et [149].

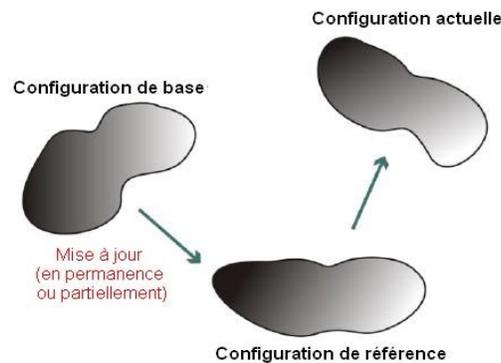


Figure 14 - Configurations dans la description Lagrangienne mise à jour [151].

Une autre approche de la description lagrangienne est la corrotation [151]. Dans cette approche, le mouvement du solide est séparé en deux parcelles, la parcelle en raison du mouvement du corps rigide et la parcelle en raison de la déformation. Comme l'illustre la figure 15, la configuration de référence comprend à la fois la configuration de base et la configuration dite corrotative. La configuration de base est utilisée comme référence pour définir le mouvement du corps rigide et la corrotation accompagne en permanence le solide (ou l'élément fini) et sert de référence pour la détermination des déformations et des tensions [138], [152].

Les formulations corrotatives permettent de considérer de grands déplacements et rotations de manière simple et efficace, en plus de simplifier la prise en compte de la non-linéarité physique

[162]. Les formulations corrotatives, cependant, sont limitées aux problèmes avec de petites déformations, selon Felippa et Haugen (2005) [151] et Felippa (2014) [152]. Ceci est dû à l'utilisation de relations linéaires pour déterminer les déformations entre la configuration actuelle et la configuration corrotative. L'utilisation de ces relations linéaires est faisable, puisque le mouvement du corps rigide est explicitement séparé du mouvement total du solide. De cette manière, il est possible de travailler avec la mesure de déformation linéaire de l'ingénierie, même sous le régime des grands déplacements.

Des exemples de formulations corrotatives peuvent être trouvés dans les articles : [46], [138], [163], [164], [165], [166] et [162].

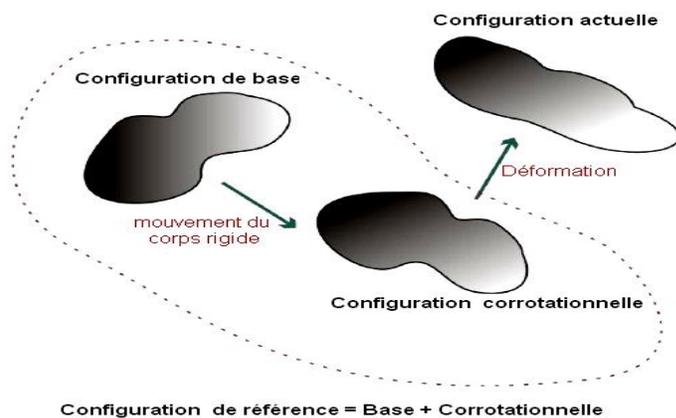


Figure 15 - Paramètres dans la description corrotative [151].

La formulation développée dans ce travail adopte une description lagrangienne totale en utilisant la méthode des éléments finis positionnels. Comme on l'a vu plus haut, cette formulation est appelée positionnelle, puisque les paramètres employés ne sont pas les déplacements et les tours traditionnels, mais les positions et les vecteurs nodaux généralisés. Les vecteurs sont utilisés dans la cartographie en coupe transversale.

Les problèmes traités sont sujets à de grands déplacements et rotations, mais avec des déformations modérées selon la loi de comportement employée. Les conditions aux limites sont constantes et le matériau est représenté par un modèle Hyperélastique constitutif avec la loi de comportement de Saint-Venant-Kirchhoff qui relie la mesure de la déformation de Green à son conjugué énergétique, le tenseur de contraintes de second ordre Piola-Kirchhoff [134]. Selon

cette loi, le matériau présente un comportement élastique-linéaire, et peut être isotrope, orthotrope ou anisotrope, et la relation contrainte-déformation est définie par une fonction d'énergie potentielle de déformation spécifique. L'utilisation de cette loi de comportement est le facteur limitant l'applicabilité de la formulation développée dans ce travail au régime des déformations modérées.

Les applications et développements de la méthode des éléments finis de position se trouvent dans la résolution de nombreux problèmes non linéaires, tels que l'analyse géométrique non-linéaire de cadres, plaques et coques 2D et 3D en petites déformations ([7], [8]; [167]) et les grandes déformations ([168]; [10]) analyses non linéaires physique et géométrique considérant les matériaux élastoplastiques, viscoélastiques et viscoplastiques ([169], [170], l'interaction entre le sol-structure [171] et fluides-structures ([172], [173]), analyse dynamique non linéaire ([174], [9]), analyse des structures soumises à des actions thermiques ([11], [175]), entre autres. Les différents articles cités ci-dessus démontrent la capacité des formulations positionnelles à analyser de manière efficace et précise les types les plus variés de problèmes non linéaires.

Cette première revue des problèmes non-linéaires et des principales stratégies de sa solution est suivie d'une description des opérations mathématiques impliquées dans le développement de la formulation positionnelle appliquée aux problèmes de structures représentées par des modèles bidimensionnels.

### **2.3 Fonction de changement de configuration**

Pour une meilleure compréhension de ce point, il est important de noter d'abord la figure 16 qui contient une illustration des mappages utilisés pour décrire les configurations initiale  $f^0(\xi_1, \xi_2)$  et courante  $f^l(\xi_1, \xi_2)$  d'un système de coordonnées paramétriques sans dimension. La fonction de changement de configuration  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  et le système de coordonnées global qui définit les positions dans les deux configurations sont également affichés.

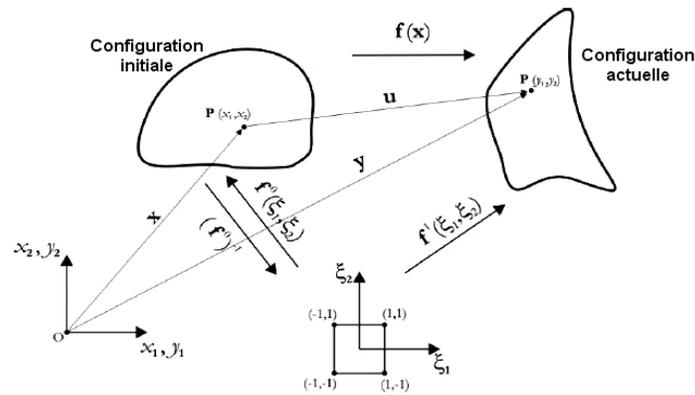


Figure 16 - Fonctions de mappage des paramètres initial et actuel[177].

Dans les formulations traditionnelles par éléments finis basées sur les déplacements,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est directement déterminée en obtenant les degrés de liberté dans les déplacements d'éléments, qui sont utilisés pour composer la solution approchée du champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Comme le montre la Figure 16, la  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  représente une fonction qui fournit la position  $\mathbf{y}$  de la configuration actuelle et dont le domaine est la configuration initiale. Ainsi, on peut écrire  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  comme:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{x} \tag{8}$$

Dans la norme utilisée dans les formulations d'éléments finis paramétriques,  $\mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2)$  est défini à partir d'un système de coordonnées paramétriques sans dimension  $(\xi_1, \xi_2)$  et représente le mappage des positions  $\mathbf{X}$  dans la configuration initiale. Par conséquent, il faut:

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2) \tag{9}$$

Avec le changement de coordonnées,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est défini par:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \circ \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2) + \mathbf{f}^0(\xi_1, \xi_2) \tag{10}$$

Comme indiqué précédemment, il n'y a pas de degrés de liberté dans les déplacements dans la formulation positionnelle, puisque nous travaillons directement avec les positions  $\mathbf{y}$  occupées dans la configuration actuelle, donc il n'est pas possible de définir  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  selon l'équation (10).

Malgré cela, une solution approximative pour la cartographie de la configuration actuelle  $f^1(\xi_1, \xi_2)$  à partir d'un espace sans dimension peut être déterminée et, contrairement aux formulations paramétriques d'éléments finis basés sur des déplacements, la définition de  $f(x)$  n'implique pas la solution approximative pour le champ de déplacements  $u(x)$ . Sur la figure 16, on peut voir que  $f(x)$  peut être déterminé par une composition de fonctions entre un  $f^1(\xi_1, \xi_2)$  et l'inverse de  $f^0(\xi_1, \xi_2)$ , comme montré dans l'équation (11).

$$f(x) = f^1(\xi_1, \xi_2) \circ [f^0(\xi_1, \xi_2)]^{-1} \quad (11)$$

Comme nous le verrons dans les derniers articles, la fonction de changement de configuration et son gradient,  $A = \nabla f$ , sont essentielles pour la détermination des déformations et, par conséquent, des contraintes et de l'énergie spécifique à la déformation. À ce stade du travail, il convient d'attirer l'attention sur l'utilisation de la configuration initiale en tant que configuration de référence pour la définition de la fonction de changement de configuration  $f(x)$ . Ainsi, la formulation adopte une description du type Lagrangien total.

Le calcul différentiel indique que  $A$  est donné par le produit entre le gradient de  $f^1(\xi_1, \xi_2)$ ,  $A^1 = \nabla f^1$ , et l'inverse du gradient de  $f^0(\xi_1, \xi_2)$ ,  $[A^0]^{-1} = [\nabla f^0]^{-1}$ . Ainsi,  $A$  peut être exprimé par:

$$A = A^1(\xi_1, \xi_2) \cdot [A^0(\xi_1, \xi_2)]^{-1} \quad (12)$$

Les éléments qui composent  $A^0$  et  $A^1$  sont obtenus à partir des expressions de la cartographie positionnelle adoptée dans la définition des éléments finis. Ces cartographies sont présentées dans les chapitres suivants pour l'élément de portique plat homogène et l'élément de portique plat laminé.

Les fonctions de mappage positionnel sont des fonctions vectorielles définies du système de coordonnées bidimensionnel et sans dimension  $(\xi_1, \xi_2)$  variant dans l'intervalle  $[-1,1]$ , pour le système de coordonnées à deux dimensions des positions initiales ou actuelles. Ces fonctions sont représentées par:

$$f^0(\xi_1, \xi_2) = \begin{Bmatrix} x_1(\xi_1, \xi_2) \\ x_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} \quad f^1(\xi_1, \xi_2) = \begin{Bmatrix} y_1(\xi_1, \xi_2) \\ y_2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Dans lesquels  $x_1$  et  $x_2$  sont les positions de la configuration initiale dans les directions 1 et 2, respectivement. De manière analogue,  $y_1$  et  $y_2$  se réfèrent à la configuration actuelle.

En observant l'équation (13), les gradients  $A^0$  et  $A^1$  sont définis par des matrices d'ordre deux, selon les équations suivantes:

$$A^0(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad A^1(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dont les composants sont caractérisés en temps opportun après la définition des cartographies positionnelles des éléments de portique planaires homogènes et laminés dans les chapitres suivants.

Une fois la cartographie positionnelle, le changement de configuration et leurs gradients établis, la définition de la mesure de déformation utilisée dans les formulations de ce travail, ainsi que de la loi de comportement, est poursuivie.

#### 2.4 Mesure de la déformation et de la loi de comportement

La mesure de la déformation utilisée dans les formulations développées ici est celle de Green-Lagrange. Cette mesure de déformation est objective, pratique pour le développement de formulations avec une description lagrangienne et convient pour le traitement de problèmes géométriques non linéaires soumis à de grands déplacements et rotations ([138], [144]).

La déformation de Green est dérivée directement du gradient de la fonction de changement de configuration. Pour la définir, considérons d'abord deux points  $P_0$  et  $P_1$  séparés par une distance infinitésimale dans les configurations initiale et courante (figure 17). La position relative entre les points de la configuration initiale est donnée par le vecteur  $dx = x_{P1} - x_{P0}$ . Après la déformation, la position relative devient  $dy = y_{P1} - y_{P0}$ . En appliquant la règle de la chaîne, nous vérifions la relation entre les vecteurs  $dx$  et  $dy$  établis par le gradient de la fonction de changement de configuration:

$$y_{P1} = y_{P0} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx \quad \longrightarrow \quad dy = A \cdot dx \quad (15)$$

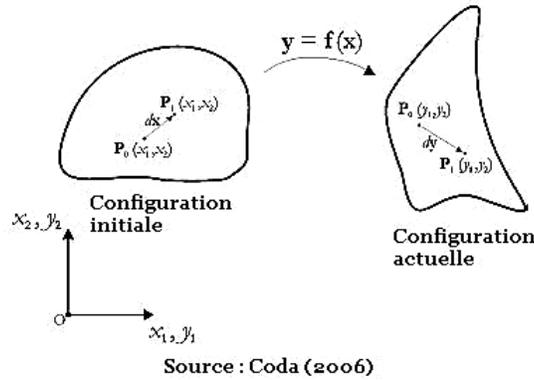


Figure 17 - Changement de configuration

Ce gradient peut être exprimé en termes de vecteur de déplacement du corps. En partant de  $f = u + x$  et en appliquant la dérivée première à la position initiale, on obtient [144] :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad A = \nabla u + I \quad (16)$$

D'après Reddy (2004b) [144] et Ogden (1984) [134], la déformation de Green peut être déduite du calcul des distances entre les points  $P_0$  et  $P_1$ , dans les configurations initiale et courante. Ces distances sont obtenues avec le produit scalaire entre les vecteurs relatifs à la position:

$$(dx)^2 = dx^t \cdot dx \quad (dy)^2 = dy^t \cdot dy \quad (17)$$

Considérant les équations (15) et (17), nous avons cela:

$$(dy)^2 = dy^t \cdot dy = dx^t \cdot A^t \cdot A \cdot dx = dx^t \cdot C \cdot dx \quad (18)$$

Où  $C = A^t \cdot A$  est le tenseur d'allongement à droite de Cauchy-Green [134]. Dans les formulations de position, le gradient de la fonction de changement de configuration est défini selon l'équation (12). Ainsi,  $C$  peut être exprimé par:

$$C = A^t \cdot A = (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (19)$$

Où  $-t$  représente la transposition de l'inverse.

La modification du carré de la longueur d'un infinitésimal en passant de la configuration initiale à la configuration actuelle peut être liée à la longueur d'origine. En observant les équations (17) et (18), nous constatons que cette différence est donnée par:

$$dy^2 - dx^2 = dx^t \cdot C \cdot dx - dx^t \cdot dx = dx^t \cdot (C - I) \cdot dx = 2 dx^t \cdot \left[ \frac{(C-I)}{2} \right] \cdot dx \quad (20)$$

Dans lequel le terme entre parenthèses est appelé **le tenseur de déformation de Green-Lagrange** ou, plus communément appelé le tenseur de déformation de Green [144]. Par conséquent:

$$dy^2 - dx^2 = 2 dx^t \cdot E \cdot dx, \quad E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (21)$$

En considérant l'équation (16), nous pouvons écrire le tenseur de déformation de Green en fonction du vecteur de déplacement comme dans l'équation (22) et vérifier que E est symétrique. En outre, de l'équation (21), on constate que la différence entre les carrés des distances pour les paramètres actuels et initiales est égal à zéro si et seulement si E est également nul, montrant l'objectivité de la déformation mesurée [144].

$$E = \frac{1}{2}(A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2}[(\nabla u)^t + \nabla u + (\nabla u)^t \cdot \nabla u] \quad (22)$$

Dans les problèmes soumis à de faibles déplacements, le produit entre les gradients des vecteurs de déplacement tend vers zéro. Par conséquent, en négligeant  $(\nabla u)^t \cdot \nabla u$  dans l'équation (22), la mesure de déformation linéaire est récupérée, selon l'équation (23), et la formulation de position décrite ici devient naturellement restreinte au cas linéaire géométrique.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[(\nabla u)^t + \nabla u] \quad (23)$$

Le tenseur de déformation de Green présente en tant que conjugué énergétique, le tenseur des contraintes de second ordre Piola-Kirchhoff [134]. La relation entre eux est définie par la loi de comportement du matériau qui, dans ce travail, présente comme caractéristiques: l'homogénéité, l'isotropie et le modèle Hyperélastique représenté par la loi de comportement de Saint Venant-Kirchhoff.

Les matériaux composites sont fortement linéaires à l'écart de la situation de rupture, avec une linéarité généralement supérieure aux métaux. Ainsi, l'hypothèse d'une relation tension-déformation avec cette caractéristique est largement acceptée et largement utilisée en ingénierie [176].

La loi constitutive de Saint-Venant-Kirchhoff est la plus simple parmi les lois modèle de matériau Hyperélastique, car il établit une relation linéaire contrainte-déformation qui ne se distingue pas de la loi constitutive de Hooke lorsque les déformations sont petites. Cette loi est adaptée aux problèmes soumis à de grands déplacements, mais avec le matériel travaillant dans le régime des déformations modérées.

En raison des hypothèses cinématiques supposées pour les éléments finis développés dans ce travail, les problèmes analysés se limitent à ceux soumis à un état de contrainte plane. Au vu de cela, l'énergie spécifique de déformation de la loi de comportement de Saint-Venant-Kirchhoff peut être exprimée par:

$$u_e = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} [(E_{11})^2 + (E_{22})^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + \frac{1-\nu}{2}(E_{12} + E_{21})^2] \quad (24)$$

Avec  $E$  correspondant au module d'élasticité longitudinal,  $\nu$  le coefficient de Poisson. Le module d'élasticité  $G$  est lié à  $E$  et  $\nu$  par:

$$G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)} \quad (25)$$

La dérivée première de l'énergie spécifique de déformation par rapport aux déformations de Green  $\mathbf{E}$  fournit les contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce  $\mathbf{S}$ . Observant l'équation (24), nous avons:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} \longrightarrow \begin{aligned} S_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2}(E_{11} + \nu E_{22}) \\ S_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2}(E_{22} + \nu E_{11}) \\ S_{12} &= G(E_{12} + E_{21}) \\ S_{21} &= G(E_{12} + E_{21}) \end{aligned} \quad (26)$$

Après avoir défini la mesure de déformation et la loi de comportement à utiliser pour le développement de la formulation par éléments finis du portique planaire homogène et laminé, il est maintenant possible d'établir les relations pour déterminer la fonction d'énergie potentielle totale. Pour les problèmes statiques, l'énergie potentielle totale est constituée de l'énergie potentielle de déformation et de l'énergie potentielle associée aux actions extérieures.

## 2.5 Énergie potentielle de déformation

Avant de présenter la procédure de calcul de l'énergie de déformation potentielle, considérons d'abord le cas simple d'un ressort unidimensionnel soumis à l'action d'une force interne  $F_1(u_1)$  et dont le diagramme force-déplacement est élastique non linéaire (figure 18). Le but de cet exemple simple est d'illustrer la relation de conjugaison énergétique entre la force interne et la position de la même manière que cela se produit entre la force interne et le déplacement.

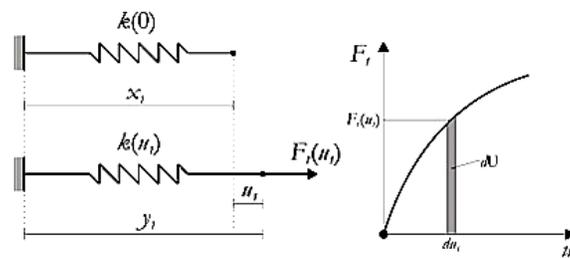


Figure 18 - Ressort unidimensionnel élastique non linéaire

En observant cette figure, on vérifie que l'énergie de déformation accumulée dans le ressort est numériquement égale à la surface sous le graphe force-déplacement et est donnée par l'intégrale suivante:

$$U = -\int_0^{u_1} [-F_1(u_1)] du_1 \quad (27)$$

Si la dérivée dans l'équation (27) est effectuée par rapport au déplacement  $u_1$ , on obtient la force appliquée au ressort:

$$\frac{dU}{du_1} = F_1(u_1) \quad (28)$$

À partir des équations (27) et (28), nous concluons que  $u_1$  et  $F(u_1)$  sont des conjugués énergétiques [177]. Jusqu'à présent, l'énergie de déformation du ressort et la force appliquée sont établies en fonction du déplacement subi par l'extrémité libre. Pour transformer la variable de déplacement en variable de position, il suffit de noter que le déplacement est donné par la différence entre la position actuelle  $y_1$  et la position initiale  $x_1$  de la fin du ressort.

De cette différence, nous établissons également la relation différentielle entre  $y_1$  et  $u_1$ :

$$u_1 = y_1 - x_1 \longrightarrow du_1 = dy_1 \quad (29)$$

En appliquant la règle de la chaîne dans l'équation (28) pour modifier la variable dérivée, on montre que la position actuelle et la force appliquée sont également conjuguées énergétiquement [177]:

$$F_1(u_1) = \frac{dU}{du_1} = \frac{dU}{dy_1} \frac{dy_1}{du_1} \longrightarrow F_1(y_1) = \frac{dU}{dy_1} \quad \text{donc : } U = - \int_{x_1}^{y_1} [-F_1(y_1)] dy_1 \quad (30)$$

Dans lequel les limites d'intégration sont données par la position  $x_1$  de l'extrémité du ressort dans la configuration initiale et sa position  $y_1 = x_1 + u_1$  dans la configuration actuelle.

Dans le cas bidimensionnel, cette idée est élargie avec la définition de la fonction de changement de configuration  $f$  à partir des positions occupées par le solide dans la configuration courante, comme présenté au point 2.3, et du calcul de l'énergie de déformation en déterminant une densité d'énergie, appelée énergie spécifique de déformation.

Le modèle constitutif considéré pour le matériau est Hyperélastique. Pour ce type de matériau, le principe de conservation de l'énergie est valable. Ainsi, la dénomination l'énergie potentielle de déformation est adéquate, puisqu'il n'y a que la dépendance de l'état de déformation actuelle (courante), quel que soit le changement de configuration du solide [135].

Afin de déterminer l'énergie potentielle de déformation, il faut intégrer l'énergie spécifique présentée dans l'équation (24), par rapport au volume initial de l'élément, car comme déjà mentionné, la formulation suit une description lagrangienne totale. Ainsi, il faut:

$$U = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (31)$$

Comme présenté au point 2.3, les formulations positionnelles adoptent un système de référence paramétrique sans dimension pour décrire la fonction de changement de configuration et les fonctions de mappage de position des configurations initiale et actuelle. Par conséquent, les tenseurs de déformations de Green  $\mathbf{E}$  et l'élongation de la droite de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ , ont été écrites via les équations (11), (12) (13) (14) (19) et (21) en fonction des variables sans dimension  $(\xi_1, \xi_2)$ . Par conséquent, l'énergie spécifique de déformation est également écrite en fonction de ces variables.

Ainsi, l'intégrale de l'énergie spécifique dans le volume initial ( $V_0$ ) de l'équation (31) peut être réalisée par rapport au domaine adimensionnel au moyen du changement de variables suivant:

$$U = b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_e(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (32)$$

Dans laquelle  $b$  est la largeur d'une section rectangulaire ou largeur moyenne d'une section trapézoïdale et  $J(\xi_1, \xi_2)$  est le jacobien de la transformation du système de coordonnées de la configuration initiale  $(x_1, x_2)$  pour le système de coordonnées de la configuration de référence sans dimension  $(\xi_1, \xi_2)$ . Ce jacobien est donné par le déterminant de la matrice  $A^0$ , c'est-à-dire :

$$J(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}$$

En effectuant une série d'opérations matricielles pour obtenir la déformation de Green et la remplacer dans l'équation (24), il est possible d'arriver à une fonction scalaire pour l'énergie spécifique de déformation. Cette fonction dépend uniquement des coordonnées adimensionnelles  $(\xi_1, \xi_2)$  et des positions de la configuration courante, puisque les positions de la configuration initiale et les paramètres élastiques de la loi de comportement sont connus et constants.

Cependant, l'expression mathématique de cette fonction scalaire est assez étendue, rendant son intégration analytique difficile dans l'équation (32). Heureusement, il est possible d'effectuer l'intégration numérique avec l'utilisation, par exemple, de la quadrature de Gauss, qui est utilisée dans ce travail. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'obtenir une expression analytique pour la fonction énergétique spécifique de la déformation, et il est possible de travailler directement avec les valeurs numériques des gradients  $A^0$  et  $A^I$  pour la détermination de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{E}$ . Ces valeurs numériques dépendent des coordonnées points de Gauss sans dimension et les positions de la

configuration courante, qui supposent des valeurs connues pendant la résolution du problème non linéaire basé sur un processus itératif d'essai et de correction. Ainsi, l'intégrale de l'équation (32) est déterminée numériquement par:

$$U = \mathbf{b} \mathbf{u}_e (\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) J(\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) w_{(ig)} w_{(jg)} \quad \text{avec : } ig = 1, \dots, n_1 \text{ et } jg = 1, \dots, n_2 \quad (33)$$

qui représente une sommation des produits entre les valeurs numériques prises par  $u_e(\xi_1, \xi_2)$  et  $J(\xi_1, \xi_2)$  à chaque point gaussien et poids d'intégration respectifs. Dans l'équation (33),  $\xi_{1ig}$  et  $\xi_{2jg}$  représentent les coordonnées adimensionnelles des points de Gauss,  $w_{(ig)}$  et  $w_{(jg)}$  représentent les poids d'intégration et  $n_1$  et  $n_2$  sont le nombre de points répartis le long de la direction longitudinale et transversal, respectivement. Dans les éléments développés dans ce travail, cette intégration numérique se produit dans des domaines rectangulaires.

Pour calculer l'énergie potentielle de déformation, il faut encore déterminer les termes qui composent les gradients  $A^0$  et  $A^l$ . Ces termes dépendent de la cinématique adoptée dans la cartographie positionnelle pour les éléments finis du portique planaire homogène et stratifié dont les définitions se produiront dans les deux chapitres suivants.

Similaire au cas simple du ressort unidimensionnel (équation (30) et figure 18), la force interne peut être obtenue par la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à la position actuelle. Un vecteur de force interne est défini à la place d'une seule composante de force interne et la dérivée est remplacée par le gradient par rapport au vecteur de position actuel. Ainsi, il faut:

$$\nabla U(y) = F_{\text{int}} \quad \longleftrightarrow \quad F_{\text{int}} = \int_{V_0} \nabla u_e dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial y} dV_0 \quad (34)$$

Avec la définition de l'énergie de déformation, il ne reste plus qu'à décrire la deuxième partie de l'énergie potentielle totale qui est relative aux actions externes.

## 2.6 Énergie potentielle relative aux actions extérieures

Les actions externes considérées sont constituées par des forces concentrées, des forces réparties et des moments concentrés. Il est supposé que toutes les forces externes sont conservatrices, c'est-à-dire que le travail effectué dépend uniquement de positions initiales  $x$  et actuelles  $y$ , ne dépendant pas de la trajectoire effectuée par la force pendant le mouvement. Ainsi, l'intégrale de ligne définissant le travail effectué par la force externe  $F_{ext}$  le long d'un chemin de déplacement  $C$  devient une intégrale dans les positions occupées par la force dans la configuration courante et initiale:

$$W = \int_C F_{ext}(u) \cdot du \longrightarrow W = \int_x^y F_{ext} \cdot dy \quad (35)$$

Dans lequel la force, étant conservatrice, est indépendante du déplacement ou de la position et l'intégrale n'est pas liée à la trajectoire  $C$ , mais seulement aux positions initiales  $x$  et courantes  $y$ . Le changement de coordonnées est possible compte tenu de la relation entre le déplacement et la position actuelle:

$$u = y - x \longrightarrow du = dy \quad (36)$$

Pour les forces conservatrices, une énergie potentielle est assignée et sa relation avec le travail est donnée par:

$$\Delta\Omega(u) = -W \quad (37)$$

Considérant l'équation (35) et la caractéristique conservatrice de la force, nous avons ceci:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega(u) &= \Delta\Omega(y) - \Delta\Omega(x) \\ \Omega(y) - \Omega(x) &= - \int_x^y F_{ext} \cdot dy \iff \Omega(y) - \Omega(x) = -(F_{ext} \cdot y - F_{ext} \cdot x) \end{aligned} \quad (38)$$

Du point de vue physique, seules les variations d'énergie potentielles sont pertinentes. Ainsi, une énergie potentielle nulle peut être définie à l'origine du référentiel global, telle que:

$$\Omega(0) = 0 \quad (39)$$

Considérant un changement de la position de la force de l'origine en  $x = 0$  à la position actuelle  $y$ , nous déterminons la fonction d'énergie potentielle associée à la force externe  $F_{ext}$ :

$$\Omega(y) = -F_{ext} \cdot y \quad \longrightarrow \quad \Omega(y) = -(F_{ext1}y_1 + F_{ext2}y_2) \quad (40)$$

Dans laquelle la partie droite est limitée au cas bidimensionnel, avec  $y_1$  et  $y_2$  représentant les positions actuelles du point d'application de la force dans les directions globales 1 et 2, respectivement.

Le gradient d'énergie potentielle par rapport au vecteur de position donne le négatif de la force appliquée:

$$\nabla \Omega(y) = -F_{ext} \quad (41)$$

Les équations (40) et (41) ci-dessus montrent que, tout comme le déplacement, la position est également couplée énergétiquement à la force.

Pour compléter la définition de l'énergie potentielle associée aux actions externes, il reste à déterminer la position  $y$  dans l'équation (40). Dans les deux chapitres suivants, les éléments finis positionnels sont définis pour un portique planaire homogène et stratifié. Pour chaque élément, le vecteur de position  $y$  est décrit par une fonction qui cartographie les positions dans l'élément à partir d'une interpolation des positions nodales  $y_k^i$ . De cette manière, l'énergie potentielle des actions externes est écrite comme un produit de forces nodales externes concentrées ou équivalentes et de paramètres nodaux représentés par des positions et des vecteurs généralisés. L'équation (40) est alors représentée par:

$$\Omega(y) = -F_{ext} \cdot y_k \quad \longleftrightarrow \quad \Omega(y) = -F_{ext\ k}^i y_k^i \quad (42)$$

Où  $F_{ext}$ , ou  $F_{ext\ k}^i$  en notation indicative, est le vecteur des forces nodales externes ou équivalentes et  $y_k$ , ou  $y_k^i$ , est le vecteur de position nodale, avec  $i$  représentant les degrés de liberté nodaux et  $k$  le nœud.

Ceci résume le calcul de la part d'énergie due aux actions extérieures simplement par le négatif du produit entre la force externe et sa position actuelle. Avec l'énergie potentielle de la déformation, on peut écrire l'énergie potentielle totale associée aux problèmes statiques.

## 2.7 Énergie potentielle totale et équations d'équilibre

Comme indiqué précédemment, l'énergie potentielle totale sera composée des parties de l'énergie de déformation plus le potentiel des actions externes agissantes. Donc, pour un seul élément fini, l'énergie potentielle est donnée par:

$$\text{elm}_{\Pi} (y_k^i) = \text{elm}_{\text{U}} (y_k^i) + \text{elm}_{\Omega} (y_k^i) \quad (43)$$

où  $\text{elm}_{\Pi} (y_k^i)$  est la fonction d'énergie potentielle totale,  $\text{elm}_{\text{U}} (y_k^i)$  est l'énergie potentielle de déformation donnée par Eqs (31), (32) et (33),  $\text{elm}_{\Omega} (y_k^i)$  est l'énergie potentielle des actions externes, donnée par les équations (40) et (42), et  $y_k^i$  est le vecteur contenant les positions (degrés de liberté) de l'élément.

Dans une analyse structurelle basée sur la méthode des éléments finis, le continuum est discrétisé en plusieurs éléments formant un maillage. Puisque l'énergie potentielle est une quantité scalaire, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue simplement en additionnant les contributions de chaque élément individuellement.

Pour réaliser cette somme, l'incidence nodale cesse d'avoir une référence locale de l'élément et a une incidence globale comme le montre la figure 19 pour le cas de deux éléments finis constitués chacun de quatre nœuds.

Le numéro du nœud global  $k$  est utilisé comme référence pour l'assemblage des différents vecteurs et matrices présents dans le développement de la formulation. Sur la figure 19, le vecteur de position nodale  $y_k^i$  est associé au nœud global  $k$  et les degrés de liberté de ce nœud sont représentés par l'indice exposant  $i$ , dont la quantité dépend du type d'élément fini représenté.

Les aspects d'assemblage des différents vecteurs et matrices, ainsi que l'identification des degrés de liberté seront détaillés dans les chapitres suivants se rapportant à la description des éléments finis du portique planaire homogène et laminé.

Après la somme des contributions énergétiques de chaque élément fini et compte tenu de l'équation (42), en référence à la partie du potentiel externe, l'énergie potentielle totale de la structure peut s'écrire comme suit:

$$\Pi(y_k^i) = U(y_k^i) - F_{\text{ext } k^i} y_k^i \quad (44)$$

Dans cette équation, le vecteur de position nodale  $y_k^i$  est la solution du système d'équations non-linéaires d'équilibre, obtenu à partir de l'état stationnaire de l'énergie potentielle totale  $\Pi(y_k^i)$ .

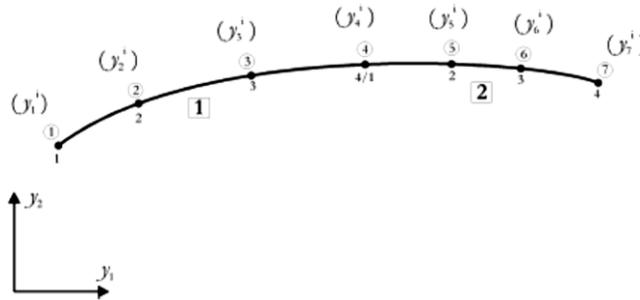


Figure 19 - Association de deux éléments finis[177].

Grâce au principe de l'énergie potentielle totale stationnaire, il est possible de trouver un système d'équations dont la solution consiste en des positions d'équilibre dans la configuration actuelle. Selon ce principe, l'énergie potentielle totale prend une valeur constante lorsque la configuration déformée satisfait aux conditions d'équilibre et satisfait aux conditions de continuité et de contour [135]. Mathématiquement, la stationnarité est représentée par la nullité de la première dérivée de la fonction d'énergie potentielle totale ou, de manière équivalente, par la nullité de son gradient. Dans la formulation des éléments finis positionnels, ce gradient est calculé par rapport aux positions nodales, c'est-à-dire:

$$\nabla \Pi(y_k^i) = 0 \iff \frac{\partial \Pi(y_k^i)}{\partial y_\alpha^\beta} = 0 \quad (45)$$

où  $\alpha$  représente les nœuds globaux des éléments et  $\beta$ , les degrés de liberté nodaux.

En considérant les équations (41) et (44), l'équation (45) donne:

$$\frac{\partial U(y_k^i)}{\partial y_\alpha^\beta} - F_{\text{ext } \alpha}^\beta = 0 \quad (46)$$

Dans cette équation, la première partie est le vecteur des forces internes, comme déjà illustré dans l'équation (34) pour une représentation plus générale, et la seconde partie est le vecteur des forces extérieures  $F_{\text{ext } \alpha}^\beta$  résultant de forces concentrées et les forces nodales équivalents générées par des forces distribuées. Ainsi, l'équation (46) n'est rien de plus que la représentation d'un système d'équations d'équilibre dont les inconnues sont les positions nodales  $y_k^i$ . Par conséquent, il faut:

$$\frac{\partial U(y_k^i)}{\partial y_\alpha^\beta} - F_{\text{ext } \alpha}^\beta = 0 \longrightarrow F_{\text{int } \alpha}^\beta(y_k^i) - F_{\text{ext } \alpha}^\beta = 0 \quad (47)$$

Les composantes des vecteurs de force sont des conjugués énergétiques de degrés de liberté  $\beta$  appartenant au nœud  $\alpha$ . Comme on le verra dans la description des éléments finis, les degrés de liberté sont représentés par des positions de nœuds et par des vecteurs généralisés de la section.

Les forces externes sont considérées comme conservatrices et ne dépendent pas des positions d'application. Les forces internes dépendent des positions de la configuration actuelle, représentée par les positions nodales, et la fonction vectorielle  $F_{\text{int } \alpha}^\beta(y_k^i)$  est fortement non linéaire. Par conséquent, la relation obtenue dans l'équation (47) constitue un système d'équations non linéaires.

Considérant le calcul de l'énergie potentielle de déformation présentée dans L'équation (32), L'expression du vecteur des forces internes dans l'équation (47) devient:

$$F_{\text{int } \alpha}^\beta(y_k^i) = \frac{\partial U(y_k^i)}{\partial y_\alpha^\beta} = \mathbf{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u_e(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^\beta} J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (48)$$

Qui est calculé en utilisant la quadrature gaussienne, alors:

$$F_{\text{int } \alpha}^\beta(y_k^i) = \mathbf{b} \frac{\partial u_e(\xi_{1ig}, \xi_{2jg})}{\partial y_\alpha^\beta} J(\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) w_{(ig)} w_{(jg)} \quad (49)$$

Dans cette expression, le terme encore indéfini est la dérivée partielle de l'énergie de déformation spécifique. En observant la loi de comportement de Saint-Venant-Kirchhoff dans l'équation (24) et en appliquant la règle de la chaîne, on peut écrire:

$$\frac{\partial u_e}{\partial y_\alpha^\beta} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{rs}} \frac{\partial E_{rs}}{\partial y_\alpha^\beta} = S_{rs} \frac{\partial E_{rs}}{\partial y_\alpha^\beta} \quad (50)$$

Où  $E_{rs}$  sont les déformations de Green et  $S_{rs}$  représente le tenseur de contraintes de second ordre de Piola-Kirchhoff, donné par l'équation (26). En utilisant la définition de la déformation de Green :

$$\frac{\partial u_e}{\partial y_\alpha^\beta} = S_{rs} \frac{\partial E_{rs}}{\partial C_{xy}} \frac{\partial C_{xy}}{\partial y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} S_{rs} \frac{\partial C_{rs}}{\partial y_\alpha^\beta} \quad (51)$$

Dans lequel  $C_{rs}$  représente le tenseur d'allongements à la droite de Cauchy-Green, dont la première dérivée peut être obtenue en tenant compte de l'équation (19). Il est à noter que seul le gradient  $A^l$  (équations (13) et (14)) est fonction des positions courantes  $y_k^i$  occupées par la structure, puisque le gradient  $A^0$  (équations (13) et (14)) ne dépend que des positions initiales  $x_k^i$ , qui sont des valeurs connues et constantes. Ainsi, la première dérivée de l'allongement tensoriel à droite de Cauchy-Green se traduit par:

$$\frac{\partial C}{\partial y_\alpha^\beta} = (A^0)^t \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial y_\alpha^\beta} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^t \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta} \cdot (A^0)^{-1} \quad (52)$$

Dans laquelle les indices des matrices  $C$ ,  $A^0$  et  $A^l$  ont été omis pour simplifier la notation. Puisque la dérivée de la transposition est égale à la transposition de la dérivée, l'équation (52) peut être simplifiée pour:

$$\frac{\partial C}{\partial y_\alpha^\beta} = [(A^0)^t \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta} \cdot (A^0)^{-1}]^t + (A^0)^t \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta} \cdot (A^0)^{-1} \quad (53)$$

Avec  $\frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta}$  étant le seul terme de cette expression non encore déterminé, puisqu'il dépend des hypothèses cinématiques représentées dans la fonction de cartographie positionnelle de la configuration courante  $f^l(\xi_1, \xi_2)$  dont la définition se trouve dans les chapitres référant à la description des éléments finis positionnels de portique planaire homogène et stratifié. Dans ces

chapitres, les termes qui composent  $\frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta}$  sont identifiés. À l'exception de cela, le système d'équation d'équilibre de l'équation (47) est entièrement défini.

Comme mentionné précédemment, ce système est non linéaire et, par conséquent, il est nécessaire d'utiliser un processus de solution basé sur une stratégie itérative incrémentale.

## 2.8 Processus de la solution

La stratégie de solution adoptée est basée sur la méthode de Newton-Raphson, qui consiste en un processus incrémental-itératif avec variation contrôlée des incréments de force et une solution itérative du système d'équations non-linéaires correspondant à ces incréments accumulés. Le processus itératif consiste essentiellement en l'adoption d'une première tentative de résolution du système suivie du calcul des corrections sur cette tentative initiale. L'itération est terminée lorsque les critères de convergence sont satisfaits.

La méthode de Newton-Raphson est la stratégie la plus utilisée pour résoudre des systèmes d'équations non-linéaires et a comme principaux avantages la convergence quadratique et la possibilité de déterminer la trajectoire d'équilibre de la structure ([138]; [145]; [143]).

Pendant le processus de solution, puisque les positions actuelles  $y_k^i$  des nœuds du portique ne sont pas connues, les positions d'essai provisoires  $y_k^i \text{ tentative}$  sont attribuées à  $y_k^i$ . Lorsque ces positions ne vérifient pas l'équilibre nodal représenté par l'équation (47), un résidu correspondant au vecteur de déséquilibre mécanique est généré:

$$R_\alpha^\beta (y_k^i \text{ tentative} ) = F_{\text{int } \alpha}^\beta (y_k^i \text{ tentative} ) - F_{\text{ext } \alpha}^\beta \quad (54)$$

En supposant que ce vecteur représente une fonction vectorielle continue pour des positions proches de l'équilibre, on peut obtenir des corrections pour les positions provisoires  $y_k^i \text{ tentative}$  au moyen de la linéarisation de  $R_\alpha^\beta (y_k^i \text{ tentative} )$  avec des séries de Taylor tronquées en deux termes et forçant leur nullité. Cette procédure est décrite dans les équations ci-dessous:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i) &\approx R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i \text{ tentative}) + \frac{\partial R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \Big|_{y_k^i \text{ tentative}} \Delta y_{\gamma}^{\zeta} \\
R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i \text{ tentative}) + H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i \text{ tentative}) \Delta y_{\gamma}^{\zeta} &= 0 \\
H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i \text{ tentative}) \Delta y_{\gamma}^{\zeta} &= -R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i \text{ tentative}) \\
\Delta y_{\gamma}^{\zeta} &= -[H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i \text{ tentative})]^{-1} R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i \text{ tentative}) \quad (55)
\end{aligned}$$

Dans laquelle  $H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i \text{ tentative}) = \frac{\partial R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \Big|_{y_k^i \text{ tentative}}$  est la matrice de Hesse calculée dans les positions provisoires.

Cette matrice est calculée numériquement et présente l'ordre donné par le produit entre le nombre de nœuds de la discrétisation de la structure et le nombre de degrés de liberté nodaux correspondant à l'élément fini employé. Selon Coda (2006) [177], Hessian devient définitivement positif lorsque les positions provisoires approchent les positions d'équilibre de la structure. Cela signifie que la fonction d'énergie potentielle totale se rapproche d'un point stationnaire et peut représenter un équilibre stable (point minimum local) ou instable (point local maximum).

Dans l'équation (55),  $\Delta y_{\gamma}^{\zeta}$  est une correction à ajouter aux positions provisoires pour obtenir des positions plus proches de la solution du système non linéaire. Ainsi, il faut:

$$y_k^i \text{ tentative (corrigé)} = y_k^i \text{ tentative} + \Delta y_k^i \quad (56)$$

Dans lequel les index de la correction étaient comptabilisés avec les indices des positions provisoires.

Une fois que de nouvelles positions sont obtenues tentativement, le vecteur de déséquilibre mécanique est recalculé et les corrections sont à nouveau déterminées en répétant la procédure décrite dans l'équation (55). Le contrôle de ce processus itératif est effectué au moyen de critères de convergence, qui consistent à comparer les erreurs relatives en position et en vigueur à des tolérances préétablies (équation (57)). La tolérance est une valeur arbitrée et petite qui définit quand l'équilibre est atteint de manière satisfaisante [177].

$$\frac{\|\Delta y_k^i\|}{\|x_k^i\|} < \text{tolérance} \quad \frac{\|R_k^i\|}{\|F_{ext k}^i\|} < \text{tolérance} \quad (57)$$

Pour finaliser la définition du processus de solution, il ne reste plus qu'à déterminer l'expression pour le calcul de la matrice de Hesse. Cette matrice est donnée par la dérivée du vecteur de déséquilibre mécanique par rapport aux positions actuelles  $H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i) = \frac{\partial R_{\alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}}$ . Dans l'équation (54), on peut vérifier que pour les actions externes conservatrices, seul le vecteur des forces internes dépend des positions actuelles  $y_k^i$ . Ainsi, la matrice de Hesse est restreinte à  $H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i) = \frac{\partial F_{int \alpha}^{\beta}(y_k^i)}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}}$ . De l'équation (48), nous devons:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i) &= \frac{\partial^2 U}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} \\ H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i) &= b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u_e(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (58)$$

De la même manière que dans le calcul du vecteur des forces internes dans l'équation (49), cette intégrale est obtenue numériquement via la quadrature de Gauss, en étant transformée en la sommation suivante:

$$H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_k^i) = b \frac{\partial^2 u_e(\xi_{1ig}, \xi_{2jg})}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} J(\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) w_{(ig)} w_{(jg)} \quad (59)$$

Dans cette expression, il est nécessaire de calculer la dérivée seconde de l'énergie de déformation spécifique par rapport aux positions nodales actuelles. Pour cela, en appliquant la règle de la chaîne à la première dérivée déjà calculée dans l'équation (50), nous avons:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} = \frac{\partial}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \left( S_{rs} \frac{\partial E_{rs}}{\partial y_{\alpha}^{\beta}} \right) = \frac{\partial S_{rs}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \frac{\partial E_{rs}}{\partial y_{\alpha}^{\beta}} + S_{rs} \frac{\partial^2 E_{rs}}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} \quad (60)$$

La dérivée du tensoriel de contraintes de Piola-Kirchhoff du second ordre peut être définie à partir de l'équation (26), résultant en:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{11}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial E_{11}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} + \nu \frac{\partial E_{22}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \right) \\
\frac{\partial S_{rs}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} &\longleftrightarrow \frac{\partial S_{22}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial E_{22}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} + \nu \frac{\partial E_{11}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \right) \\
\frac{\partial S_{12}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} &= G \left( \frac{\partial E_{12}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} + \frac{\partial E_{21}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \right) \\
\frac{\partial S_{21}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} &= G \left( \frac{\partial E_{12}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} + \frac{\partial E_{21}}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \right)
\end{aligned} \tag{61}$$

Dans les équations (60) et (61), la première dérivée des déformations de Green apparaît par rapport aux positions nodales actuelles. Cette dérivée a déjà été déterminée dans les équations (50) à (53).

Par conséquent, le premier terme de l'équation (60) est entièrement défini, avec seulement la deuxième dérivée des déformations de Green restant dans le second terme. Considérant la définition de ces déformations dans l'équation (21), nous avons:

$$\frac{\partial^2 E_{rs}}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{rs}}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} \tag{62}$$

A partir de l'équation (53), la dérivée seconde de l'allongement tensoriel à droite de Cauchy-Green, avec les indices omis pour simplifier la notation, est définie comme suit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} &= \left[ (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_{\alpha}^{\beta}} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial^2 A^1}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} \cdot (A^0)^{-1} \right]^t + \\
&\quad (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial y_{\gamma}^{\zeta}} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_{\alpha}^{\beta}} \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial^2 A^1}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}} \cdot (A^0)^{-1}
\end{aligned} \tag{63}$$

Les termes  $\frac{\partial^2 A^1}{\partial y_{\alpha}^{\beta} \partial y_{\gamma}^{\zeta}}$  sont tous nuls, puisque la dérivée première de  $A^l$  ne dépend pas des positions nodales actuelles, puisque les fonctions de mappage de position  $f^l$  ne dépendent que linéairement du vecteur de position nodale  $y_k^i$ . Ceci sera mis en évidence dans les deux chapitres suivants en référence à la définition des éléments finis du portique planaire homogène et stratifié.

Ainsi, la dérivée seconde de l'allongement tensoriel à droite de Cauchy-Green est définie par l'expression suivante:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta} = \left[ (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial(A^1)^t}{\partial y_\gamma^\zeta} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta} \cdot (A^0)^{-1} \right]^t + (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial(A^1)^t}{\partial y_\gamma^\zeta} \cdot \frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta} \cdot (A^0)^{-1} \quad (64)$$

Avec ce dernier terme, la matrice de Hesse dans l'équation (58) est totalement déterminée. Il convient de souligner à nouveau que cette matrice donne une matrice numérique, Equation (59), pour une paire  $(\xi_1, \xi_2)$  de coordonnées adimensionnelles correspondant aux points de Gauss utilisés dans l'intégration numérique et à un vecteur de position-tentative adopté  $y_k^i$  tentative .

Avec cela, le processus de la solution est complètement défini, et il est maintenant possible de trouver la configuration actuelle de la structure pour chaque incrément associé aux actions externes et, ainsi, de déterminer la trajectoire d'équilibre de la structure. Un organigramme de base résumant l'ensemble du processus de la solution basé sur la méthode de Newton-Raphson est présenté à la Figure 20.

Dans les chapitres suivants, les deux éléments finis développés dans ce travail sont décrits. Les aspects particuliers que la formulation positionnelle assume dans chaque élément sont identifiés et les résultats des analyses numériques effectuées sur des exemples de vérification sont présentés afin de démontrer la cohérence, l'efficacité et la robustesse de la formulation.

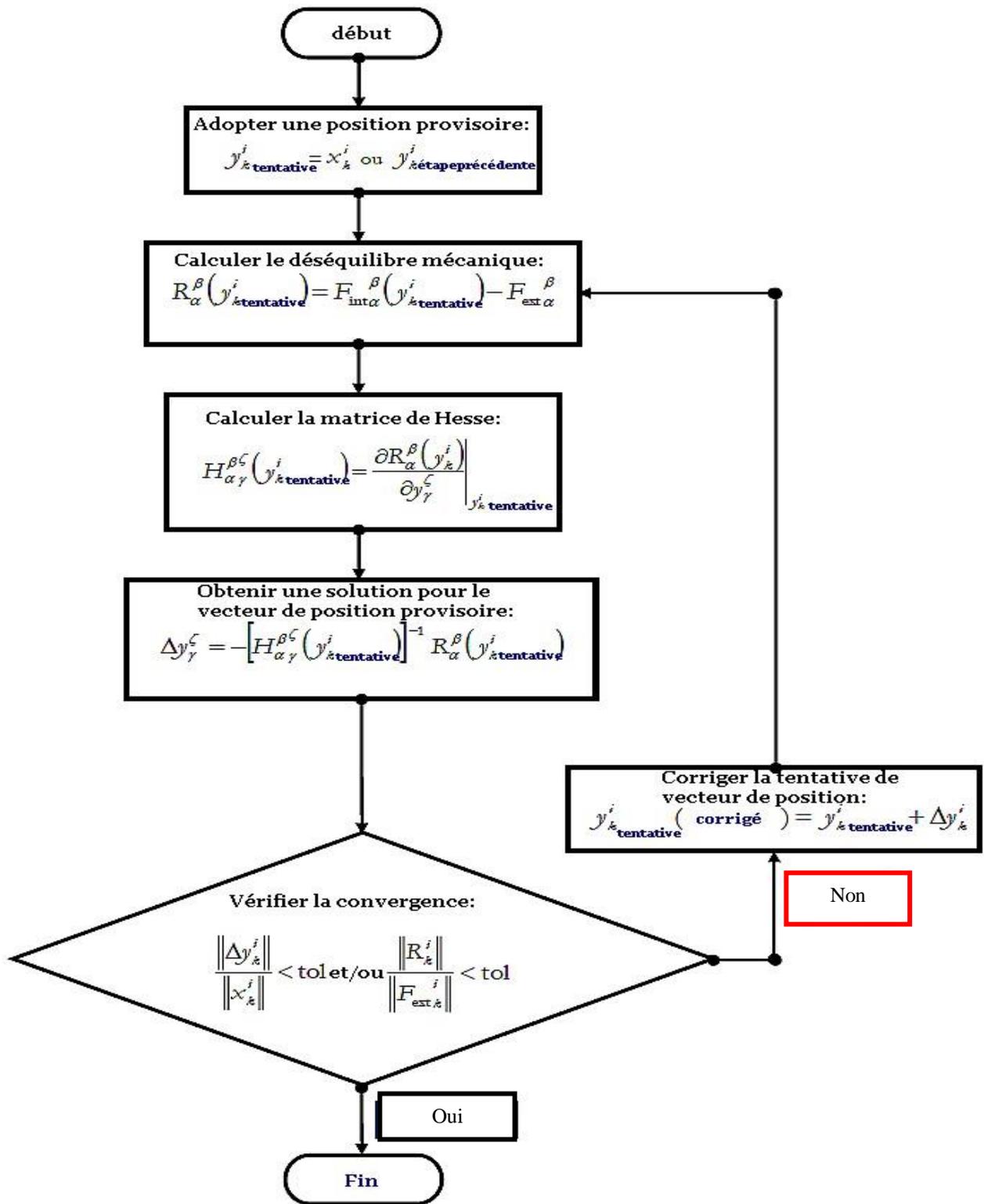


Figure 20 - Organigramme de base de la méthode de Newton-Raphson.

# **CHAPITRE 03**

## **ELEMENTS FINIS D'UN PORTIQUE PLAN HOMOGENE**

### **3 ELEMENTS FINIS D'UN PORTIQUE PLAN HOMOGENE**

#### **3.1 Introduction**

Dans ce chapitre, la formulation de l'élément fini de portique plan homogène est présentée et détaillée. Ses caractéristiques générales sont identiques à celles présentées dans le chapitre précédent et, par conséquent, seuls les aspects particuliers sont présentés. Certains travaux ayant donné lieu à la formulation de cet élément sont ceux de Coda (2009) [8] et de Coda et Paccola (2010[178], 2011[9]). Acquis

Les cadres plats sont des modèles bidimensionnels utilisés pour représenter des structures réticulées dont la caractéristique la plus frappante est la géométrie de leurs éléments qui ont un axe longitudinal bien défini et dont la dimension est supérieure d'au moins un ordre de grandeur aux dimensions de la section transversale. En raison de cette caractéristique, le modèle structural suppose des hypothèses cinématiques qui permettent d'analyser un solide tridimensionnel par l'union de barres unidimensionnelles situées dans l'axe longitudinal des éléments et contenues dans un plan commun. Les actions externes sont appliquées directement sur les barres et sont également contenues dans le même plan de la structure [179].

En ce sens, il convient de classer l'élément fini développé dans ce chapitre comme un élément plat, puisque les hypothèses cinématiques adoptées permettent de déterminer les positions de n'importe quel point de la barre à partir de l'interpolation polynomiale des degrés de liberté nodaux appartenant à une ligne de référence positionnée au milieu de la section transversale. Les degrés de liberté sont constitués par les positions des nœuds et par des vecteurs généralisés qui définissent le plan de cette section.

L'élément est également appelé homogène, puisque la barre est constituée d'un seul matériau homogène. Le modèle utilisé pour représenter le comportement du matériau est celui présenté au point 2.4. La dénomination d'élément homogène est également adoptée pour se différencier de l'élément fini du portique plan stratifié décrit dans le chapitre suivant.

En plus de la description de l'élément fini, il est également prévu d'effectuer des analyses géométriques non linéaires dans des exemples de portiques plats qui ont des résultats numériques et analytiques disponibles dans la littérature. Pour cela, un code de calcul a été développé avec

l'implémentation de la formulation en langage de programmation FORTRAN. Les résultats des analyses sont fournis par le programme à travers deux fichiers de sortie de données qui permettent la construction de trajectoires d'équilibre et la visualisation des barres dans les configurations actuelles en utilisant le logiciel de post-traitement AcadView.

Le but de ce travail est de vérifier la cohérence, l'efficacité et la robustesse de la formulation par rapport à sa capacité à représenter le comportement géométrique non-linéaire de différents problèmes impliquant des modèles structurels de cadres plats.

### 3.2 Mappage positionnel des paramètres initiaux et actuels

Selon Coda et Paccola (2011) [9], la cartographie de l'élément fini du portique plat est réalisée à partir de l'interpolation des positions et des vecteurs généralisés des points nodaux situés dans une ligne de référence. A partir de cette interpolation, il est possible de définir les positions de tout point contenu ou non dans la ligne de référence. Ce mappage est utilisé à la fois pour la configuration initiale et la configuration actuelle. Dans la configuration initiale, les vecteurs généralisés sont unitaires, normaux à la ligne de référence et peuvent être obtenus à partir du vecteur tangent. La figure 21 illustre l'idée de la cartographie positionnelle pour un élément avec interpolation cubique.

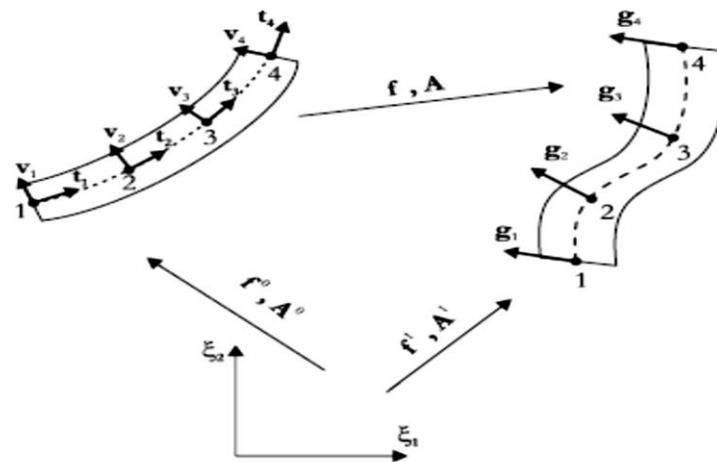


Figure 21 - Cartographie de position de l'élément portique homogène [9].

Le mappage de position pour la configuration initiale peut être écrit comme:

$$f^0(\xi_1, \xi_2) = x(\xi_1, \xi_2) \quad \text{et} \quad x^i(\xi_1, \xi_2) = \Phi_k(\xi_1)x_k^i + \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_k(\xi_1)v_k^i \quad (65)$$

avec  $i = 1, 2$  et  $k = 1, 2, 3, 4$ ,

Dans laquelle  $f^0(\xi_1, \xi_2)$  représente la fonction de mappage positionnel de la configuration initiale  $x(\xi_1, \xi_2)$  de l'espace sans dimension,  $x^i(\xi_1, \xi_2)$  représente la position initiale dans la direction  $i$  de tout point situé sur l'élément,  $x_k^i$  est la position dans la direction  $i$  du nœud  $k$ ,  $v_k^i$  est un composant dans la direction  $i$  du vecteur appartenant au plan de la section traversant le nœud  $k$ ,  $b_0$  est la hauteur de cette section et  $\Phi_k(\xi_1)$  est la fonction de forme constituée par un polynôme de Lagrange cubique associé au nœud  $k$ . Dans cette cartographie, le premier tracé identifie les positions de tous les points appartenant à la ligne de référence et, étant donné un point sur cette ligne de référence, le deuxième tracé identifie les positions de tous les points dans la section transversale. Dans la figure 22, la cartographie de n'importe quel point de coordonnées adimensionnelles ( $\xi_1=a, \xi_2=b$ ) est illustrée.

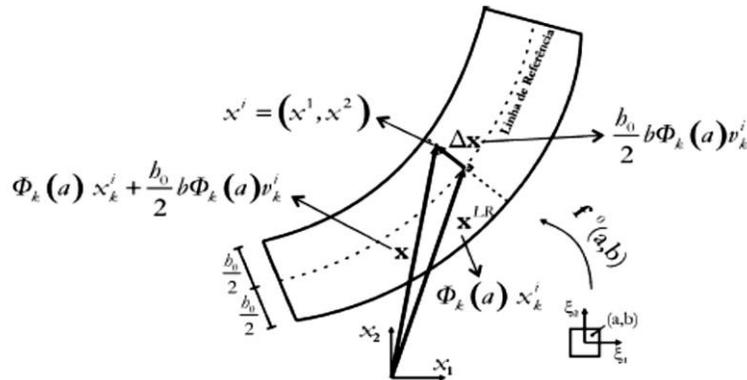


Figure 22 - Mappage positionnel de n'importe quel point de la configuration initiale

Dans l'équation (65), les informations géométriques connues sont les positions nodales  $x_k^i$  à la hauteur  $b_0$ . Les sommets nodaux  $v_k^i$  sont déterminés à partir des vecteurs nodaux tangents  $t_k^i$  jusqu'à la ligne de référence. En appliquant les concepts de calcul différentiel dans la première partie de l'équation (65), les composantes des vecteurs tangents nodaux sont exprimées par:

$$t_k^i = \left. \frac{d\Phi_e(\xi_1)}{d\xi_1} \right|_{\xi_k} x_k^i \quad \text{Avec } e = 1, 2, 3, 4 \quad (66)$$

Où  $\xi_k$  est la coordonnée  $\xi_1$  correspondant au nœud  $k$ ,  $t_k^i$  est la composante dans la direction  $i$  du vecteur tangent au nœud  $k$  et  $x_k^i$  est la position initiale dans la direction  $i$  du nœud dont la fonction associée est  $\Phi_e(\xi_1)$ .

De la nullité dans le produit scalaire, les composants du verneur normal sont déterminés comme:

$$v_k^1 = \frac{-t_k^2}{J(\xi_{(k)})} \quad v_k^2 = \frac{-t_k^1}{J(\xi_{(k)})} \quad (67)$$

Dans laquelle  $v_k^1$  et  $v_k^2$  représentent les composantes dans les directions 1 et 2 de la version normale de la ligne de référence au nœud  $k$  et  $J(\xi_{(k)})$  est le module du vecteur tangent nodal avec  $\xi_1 = \xi_{(k)}$ .  $J(\xi_1)$  correspond aussi au jacobien de la transformation de l'espace sans dimension à la configuration initiale de la ligne de référence. Ce Jacobien est donné par:

$$J(\xi_1) = \sqrt{t^1(\xi_1)t^1(\xi_1)} \quad \longleftrightarrow \quad J(\xi_1) = \sqrt{[t^1(\xi_1)]^2 + [t^2(\xi_1)]^2} \quad (68)$$

Pour la configuration actuelle, une cartographie similaire est utilisée, mais les positions et les composantes des vecteurs généralisés associés aux nœuds d'éléments finis ne sont pas connues et constituent les inconnues du problème non linéaire. Le mappage positionnel pour la configuration actuelle peut alors être écrit comme:

$$f^l(\xi_1, \xi_2) = y(\xi_1, \xi_2) \quad \text{et} \quad y^i(\xi_1, \xi_2) = \Phi_k(\xi_1) y_k^i + \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_k(\xi_1) g_k^i \quad (69)$$

avec  $i = 1, 2$  et  $k = 1, 2, 3, 4$ ,

Dans laquelle la signification des termes est analogue à celle du mappage de configuration initial, mais sont maintenant référencés à la configuration actuelle. Dans cette cartographie, l'élément cubique a dans tous les seize degrés de liberté inconnus, quatre dans chaque nœud, qui sont les deux positions  $y_k^i$  et les deux composantes du vecteur généralisé  $g_k^i$ .

$$b(\xi_1) = b_0 \Phi_k(\xi_1) \|g_k\| \quad (70)$$

La cartographie décrite dans l'équation (69) génère une cinématique dont les coupes transversales montrent une variation de hauteur et restent plates, mais non orthogonales à la ligne de référence. Le niveau auquel la section cesse d'être orthogonale à la ligne de référence est associé aux contraintes de cisaillement impliquées et au module d'élasticité transversal.

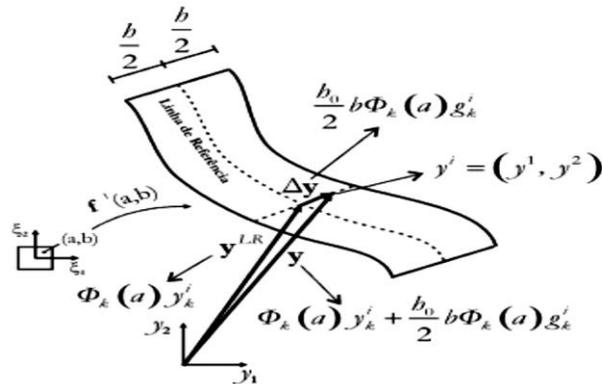


Figure 23 - Mappage positionnel de n'importe quel point de la configuration actuelle

La cinématique représentée par cette cartographie considère l'effet de Poisson dans le plan contenant l'élément et conduit à une distribution de contrainte de cisaillement transverse linéaire et à une contrainte axiale transversale constante, donc une cinématique plus précise que les formulations basées sur les hypothèses cinématiques Euler-Bernoulli et Reissner-Timochenko.

### 3.3 Particularités de l'élément de portique plan homogène

Dans le chapitre 2, la séquence entière des opérations mathématiques de la formulation positionnelle appliquée aux problèmes bidimensionnels a été développée et, dans l'article précédent, la cinématique de l'élément de portique plat homogène a été décrite. Par conséquent, pour définir complètement la formulation des éléments finis, il suffit d'identifier les termes qui dépendent de la fonction de mappage positionnelle utilisée. Ceci est illustré dans les éléments suivants.

### 3.3.1 Gradient des fonctions de mappage de position

Avec la définition des mappages de position, la fonction de changement de configuration peut être déterminée par la composition des fonctions spécifiées dans l'équation (11) et illustrée sur la figure 16.

Par conséquent, il ne reste plus qu'à décrire les composantes des gradients  $A^0(\xi_1, \xi_2)$  et  $A^1(\xi_1, \xi_2)$  qui dépendent des fonctions de mappage présentées dans les équations (65) et (69), respectivement. Les termes de ces gradients ont été identifiés dans l'équation (14) et, en observant les fonctions de cartographie, sont exprimés par:

$$A^0(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \Phi_{k,1}(\xi_1)x_k^1 + \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_{k,1}(\xi_1)v_k^1 & \frac{b_0}{2} \Phi_k(\xi_1)v_k^1 \\ \Phi_{k,1}(\xi_1)x_k^2 + \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_{k,1}(\xi_1)v_k^2 & \frac{b_0}{2} \Phi_k(\xi_1)v_k^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$A^1(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \Phi_{K,1}(\xi_1)y_k^1 + \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_{k,1}(\xi_1)g_k^1 & \frac{b_0}{2} \Phi_k(\xi_1)g_k^1 \\ \Phi_{K,1}(\xi_1)y_k^2 + \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_{k,1}(\xi_1)g_k^2 & \frac{b_0}{2} \Phi_k(\xi_1)g_k^2 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Avec  $\Phi_{k,1}(\xi_1) = \frac{\partial \Phi_k(\xi_1)}{\partial \xi_1}$ . Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire d'expliquer les équations qui composent le gradient  $A = A^1(\xi_1, \xi_2) \cdot [A^0(\xi_1, \xi_2)]^{-1}$ , parce que les opérations mathématiques impliquées sont effectuées numériquement.

### 3.3.2 Énergie potentielle de déformation

Avec les gradients définis  $A^0(\xi_1, \xi_2)$  et  $A^1(\xi_1, \xi_2)$ , l'énergie potentielle de déformation de l'élément peut être calculée selon la procédure décrite au point 2.5. Une autre observation à faire est liée à l'intégration numérique de l'énergie de déformation dans l'équation (33). Pour l'élément d'approximation cubique, douze points de Gauss répartis en quatre points dans la direction de  $\xi_1$  et trois points dans la direction de  $\xi_2$  sont utilisés.

### 3.3.3 Énergie potentielle relative aux actions extérieures

Dans la partie de l'énergie potentielle relative aux actions extérieures, on considère les contributions des forces concentrées et des moments et des forces distribuées. L'énergie associée à ces deux dernières actions est expliquée au moyen de forces nodales équivalentes. Dans le cas de l'élément de portique plat homogène, toutes les actions externes sont considérées comme appliquées dans la ligne de référence, car les problèmes analysés sont tous constitués de barres fines, ce qui est l'une des conditions préalables à l'utilisation de modèles de portique.

Les actions externes sont considérées comme conservatives et, comme indiqué au point 2.6, la relation entre la force et la position est conjuguée énergétiquement. Ainsi, une énergie potentielle externe peut être définie, calculée par le négatif du produit scalaire entre le vecteur de force externe et le vecteur de position actuelle du point d'application de cette force (équation (40)).

Dans le cas de forces réparties, des forces nodales équivalentes sont déterminées afin de maintenir la même énergie potentielle. La figure 24 illustre cette transformation:

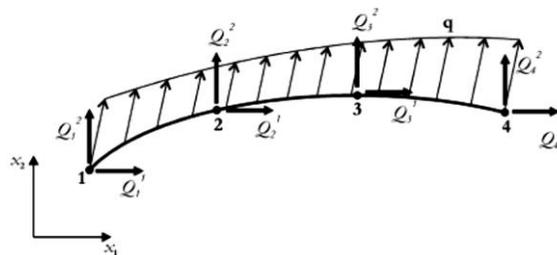


Figure 24 - Charge répartie et forces nodales équivalentes [177].

Comme les positions de la ligne de référence, la force distribuée  $q^i$  est également représentée par une fonction d'interpolation polynomiale des valeurs  $q_e^i$  aux nœuds de l'élément. Par conséquent, il faut:

$$q^i(\xi_1) = \Phi_e(\xi_1) q_e^i \quad (73)$$

Où  $q_e^i$  est la valeur assumée par la force distribuée dans le nœud  $e = 1,2,3,4$ , avec des composantes dans les directions globales  $i = 1,2$ .

En utilisant l'équation (73) et la première partie de l'équation (69) qui représente le mappage de ligne de référence dans la configuration actuelle, la partie de l'énergie potentielle externe due aux forces distribuées est déterminée par:

$$\begin{aligned}\Omega &= - \int_{-1}^1 q^i(\xi_1) y^i(\xi_1) J(\xi_1) d\xi_1 \\ \Omega &= - \int_{-1}^1 [\Phi_e(\xi_1) q_e^i][\Phi_k(\xi_1) y_k^i] J(\xi_1) d\xi_1 \\ \Omega &= - \left\{ \int_{-1}^1 [\Phi_e(\xi_1) q_e^i][\Phi_k(\xi_1)] J(\xi_1) d\xi_1 \right\} y_k^i \\ \Omega &= - Q_k^i y_k^i\end{aligned}\tag{74}$$

Où  $J(\xi_1)$  est le jacobien de la transformation d'espace sans dimension pour la ligne de référence dans la configuration initiale (équation (68)) et  $Q_k^i = \int_{-1}^1 [\Phi_e(\xi_1) q_e^i][\Phi_k(\xi_1)] J(\xi_1) d\xi_1$  est la force nodale équivalente agissant sur le nœud  $k = 1,2,3,4$  avec la direction  $i = 1,2$ . L'intégrale pour calculer  $Q_k^i$  est résolue numériquement avec la quadrature de Gauss, étant représentée par la sommation suivante:

$$Q_k^i = [\Phi_e(\xi_{1ig}) q_e^i][\Phi_k(\xi_{1ig})] J(\xi_{1ig}) w_{(ig)}\tag{75}$$

Où  $\xi_{1ig}$  est la coordonnée  $\xi_1$  du point gaussien avec le poids  $w_{(ig)}$ .

Dans le modèle discret d'éléments finis, l'action d'une charge répartie appliquée sur une petite région nodale peut être considérée au moyen d'une force concentrée équivalente appliquée directement sur le nœud. Ainsi, il est logique d'établir une énergie potentielle associée à des forces concentrées appliquées aux nœuds de l'élément. Cette énergie est définie par: la quadrature gaussienne, représentée par la sommation suivante:

$$\Omega = - P_k^i y_k^i\tag{76}$$

où  $P_k^i$  est le vecteur de force externe appliqué au nœud  $k = 1,2,3,4$  avec des composantes dans les directions globales  $i = 1,2$  et  $y_k^i$  est le vecteur de position du nœud.

Par conséquent, l'énergie potentielle d'un élément fini soumis à l'action de forces externes concentrées et distribuées est déterminée simplement par la somme des contributions des équations (74) et (76):

$$\Omega = -(P_k^i + Q_k^i)y_k^i \quad (77)$$

Les moments concentrés représentent une autre action externe qui apparaît dans les modèles structuraux des portiques. Comme il n'y a pas de paramètres de rotation associés à la section nodale, l'effet des moments concentrés est pris en compte par une paire de forces formant un couple appliqué perpendiculairement au vecteur généralisé nodal, comme le montre la figure 25.

Au point 2.6, il a été montré que la force et la position sont conjuguées énergétiquement. Ainsi, une énergie potentielle équivalente associée au couple peut être définie par le négatif du produit scalaire entre le vecteur de force qui constitue le couple et le vecteur de position actuelle du point d'application (équation (40)). L'utilisation du terme équivalent deviendra claire lorsqu'il est démontré que la force de couple n'est pas conservatrice.

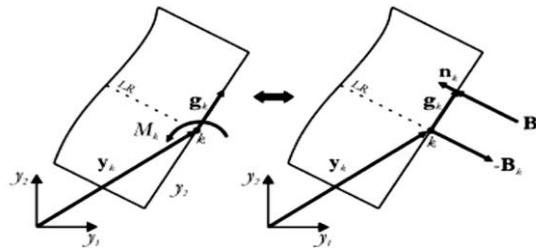


Figure 25 - Binaires correspondant au moment concentré

En observant la figure 25, l'énergie potentielle équivalente peut s'écrire:

$$\Omega = -[B_k \cdot (y_k + g_k)] - [(-B_k) \cdot y_k] \longleftrightarrow \Omega = -B_k \cdot g_k = -B_k^i g_k^i \quad (78)$$

Où  $y_k$  est le vecteur de position actuel du nœud  $k$  où le moment est appliqué,  $g_k$  est le vecteur généralisé de la section nodale et  $B_k$  est la force qui compose le couple avec des composantes dans les directions globales  $i = 1, 2$ .

Pour déterminer le vecteur de force du couple, il est nécessaire de définir son module et sa direction. Le sens peut être observé sur la figure 25. Le module de  $B_k$  est obtenu de sorte que son produit avec le module vecteur généralisé nodal correspond au moment concentré  $M$  appliqué au nœud  $k$ . Par conséquent, il faut:

$$\|B_k\| = \frac{M_k}{\|g_k\|} \longleftrightarrow \sqrt{B_{(k)}^i B_{(k)}^i} = \frac{M_k}{\sqrt{g_{(k)}^i g_{(k)}^i}} \quad (79)$$

La direction de  $B_k$  est donnée par le vecteur unitaire orthogonal au vecteur généralisé  $g_k$ .

$$n_k = \frac{1}{\|g_k\|} (-g_k^2, g_k^1) \longleftrightarrow n_k = \frac{1}{\sqrt{g_{(k)}^i g_{(k)}^i}} (-g_k^2, g_k^1) \quad (80)$$

Le module et la direction de la force qui compose le couple étant défini, on peut alors représenter le vecteur  $B_k$  comme:

$$B_k = \|B_k\| n_k \longleftrightarrow B_k = \frac{M_k}{\|g_k\|^2} (-g_{(k)}^2, g_{(k)}^1) \longleftrightarrow B_k = \frac{M_k}{g_{(k)}^i g_{(k)}^i} (-g_{(k)}^2, g_{(k)}^1) \quad (81)$$

En retournant l'expression de l'énergie potentielle équivalente dans l'équation (78), nous identifions les conjugués d'énergie associés aux composants  $g_k^1$  et  $g_k^2$  du vecteur généralisé appartenant au nœud à moment concentré appliqué. D'après l'équation (81), ces conjugués sont donnés respectivement par:

$$\begin{aligned} B_k^1 &= -\frac{M_k}{g_{(k)}^i g_{(k)}^i} g_{(k)}^2 && \text{conjugué de } g_k^1, \\ B_k^2 &= \frac{M_k}{g_{(k)}^i g_{(k)}^i} g_{(k)}^1 && \text{conjugué de } g_k^2, \end{aligned} \quad (82)$$

Comme on peut le voir dans l'équation (82), les conjugués d'énergie  $B_k^1$  et  $B_k^2$  ne sont pas une action externe conservatrice, puisqu'ils dépendent des valeurs prises par  $g_k^1$  et  $g_k^2$ . Ainsi, le terme équivalent attribué à l'énergie potentielle associée aux forces qui composent le couple est justifié. Le dispositif de définition d'une énergie potentielle équivalente est utilisée seulement pour identifier des conjugués d'énergie  $g_k^1$  et  $g_k^2$ .

Par conséquent, comme la formulation développée ici utilise des actions externes conservatrices qui permettent de définir une énergie potentielle associée, la façon de considérer l'effet de ces conjugués d'énergie non conservatrice est de les insérer directement dans les équations d'équilibre correspondant aux degrés de liberté où le moment est appliqué. Ainsi, pour satisfaire l'équilibre compte tenu de la présence du moment, les conjugués  $B_k^1$  et  $B_k^2$  sont mis à jour à chaque itération au cours du processus de solution [9].

Cette procédure sera clarifiée à nouveau aux points 3.3.4 et 3.3.5, en se référant aux équations d'équilibre et au processus de solution, respectivement.

### 3.3.4 Énergie potentielle totale et équations d'équilibre

L'énergie potentielle totale de l'élément fini est composée des parties de l'énergie de déformation plus le potentiel des actions agissantes externes (équation (43)). Dans un modèle discret, plusieurs éléments finis sont utilisés pour modéliser la structure et l'énergie potentielle totale est donnée par la somme des contributions de chaque élément individuellement.

Pour simplifier la contribution de plusieurs éléments finis à l'énergie potentielle totale, l'association suivante est adoptée pour identifier les degrés de liberté:

$$\begin{array}{llll}
 g_1^l : y_1 & \longrightarrow & y_k^1 & \\
 g_2^l : y_2 & \longrightarrow & y_k^2 & \\
 g_3^l : g_1 & \longrightarrow & g_k^1 & \longrightarrow y_k^3 \\
 g_4^l : g_2 & \longrightarrow & g_k^2 & \longrightarrow y_k^4
 \end{array} \quad (83)$$

où  $k = 1, 2, 3, 4$  identifie localement le nœud,  $l = 1, 2, 3, 4$  identifie le degré de liberté. Les degrés de liberté 1 et 2 représentent les positions, 3 et 4 représentent les composantes  $g_1(g_k^1)$  et  $g_2(g_k^2)$  du vecteur généralisé qui sont ensuite identifiées comme  $y_k^3$  et  $y_k^4$ .

En utilisant cette identification, un vecteur de position locale  $y_k^l$  de l'élément fini contenant les seize degrés de liberté est défini. L'emplacement d'un degré de liberté donné dans ce vecteur de position est déterminé à l'aide du nombre de nœuds  $k$  et du degré de liberté nodale  $i$  lui-même. La règle pour la localisation de vecteurs est donnée par:

$$y_{k(\text{nœud local})}^{i(\text{degré de liberté})} \longrightarrow 4(k-1)+i \quad (84)$$

Une identification analogue à l'équation (83) est également utilisée pour définir le vecteur des forces internes  $F_{int\ k}^i$  et le vecteur des forces externes  $F_{ext\ k}^i$  de l'élément. Dans ces vecteurs, les termes avec  $i$  égal à 1 et 2 sont des composantes des forces nodales agissant dans les directions globales 1 et 2, respectivement, et les termes avec  $i$  égal à 3 et 4 sont des conjugués énergétiques des composants  $g_1(g_k^1)$  et  $g_2(g_k^2)$  du vecteur généralisé nodal, respectivement.

Dans les modèles discrets, il existe de nombreux éléments finis et le même nœud peut appartenir à plusieurs éléments. Ainsi, nous définissons la position des vecteurs  $y_k^i$ , la force interne  $F_{int k}^i$  et la force externe  $F_{ext k}^i$  globales qui reçoivent la contribution de tous les éléments utilisés dans la discrétisation de la structure. Pour l'assemblage de ces vecteurs globaux, on utilise la même règle d'identification présentée dans les équations (83) et (84), mais la numérotation du nœud  $k$  n'est plus locale et devient le numéro global attribué lors de la génération du maillage, selon la figure 26.

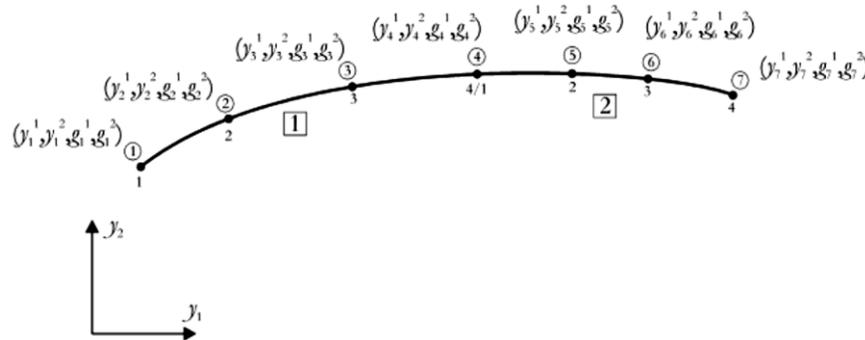


Figure 26 - Association de deux éléments finis de portique plan homogène [177].

La relation de l'équation (84) devient:

$$y_{k(\text{noeud local})}^{i(\text{degré de liberté})} \longrightarrow 4(k-1)+i \quad \text{avec } i = 1,2,3,4 \text{ et } k = 1,\dots,N \quad (85)$$

où  $N$  est le nombre de nœuds de discrétisation.

En supposant la relation de l'équation (85), la somme des contributions de chaque élément fini dans la fonction d'énergie potentielle totale de la structure peut être réalisée. Considérant la part d'énergie des actions externes (Equation (77)), nous pouvons réécrire l'équation (44) comme:

$$\Pi(y_k^i) = U(y_k^i) - (P_k^i + Q_k^i)y_k^i \quad (86)$$

dans laquelle  $\Pi(y_k^i)$  représente la fonction d'énergie potentielle totale dont la détermination ne dépend que du vecteur de position actuel  $y_k^i$  qui contient les degrés de liberté de tous les nœuds utilisés dans la discrétisation. La détermination de  $y_k^i$  est faite par la solution du système d'équations non linéaires défini dans l'équation (47), qui a la signification physique de l'équilibre nodal.

Dans l'équation (86), il n'y a pas de part d'énergie équivalente due aux moments concentrés. L'effet de ces moments n'est considéré que dans l'équation d'équilibre avec la contribution du couple correspondant  $B_k$  donné par les équations (81) et (82) dans le vecteur des forces externes.

Les équations d'équilibre ont été obtenues au moyen du principe d'énergie potentielle totale stationnaire et sont définies dans l'équation (47). Considérant la fonction d'énergie potentielle totale de l'élément fini du portique plan homogène, déterminée dans l'équation (86), et les conjugués d'énergie des équations (81) et (82) dues à l'effet des moments concentrés, les équations d'équilibre peuvent s'écrire :

$$F_{int\ \alpha}^\beta(y_k^i) - [P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta + B_\alpha^\beta(y_k^i)] = 0 \quad (87)$$

Dans cette équation, le vecteur des forces internes a été défini dans l'équation (48) et calculé avec la quadrature gaussienne dans l'équation (49). Pour l'élément de portique plan homogène décrit ici, douze points de Gauss sont utilisés dans toutes les intégrations numériques. Ces points sont répartis dans un domaine rectangulaire avec quatre points dans la direction longitudinale et trois points dans la direction transversale.

Lors de la définition du vecteur des forces internes à l'item 2.7, la description des termes qui composent  $\frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta}$  dans l'équation (53) reste en suspens, puisqu'ils dépendent de la fonction de cartographie positionnelle adoptée. Avec la définition de  $f^1(\xi_1, \xi_2)$  dans l'équation (69), de  $A^1(\xi_1, \xi_2)$  dans l'équation (72) et compte tenu de la notation présentée dans l'équation (83),  $\frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta}$  est représenté par des matrices constituées de termes différents en fonction du degré de liberté auquel la dérivée est évaluée. Ainsi, les termes de  $\frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta}$  sont définis comme on peut le voir dans les équations suivantes:

$$\frac{\partial A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^1} = \begin{bmatrix} \Phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^3} = \begin{bmatrix} \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_{\alpha,1}(\xi_1) & \frac{b_0}{2} \Phi_\alpha(\xi_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{b_0}{2} \xi_2 \Phi_{\alpha,1}(\xi_1) & \frac{b_0}{2} \Phi_\alpha(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (88)$$

Il est à noter que les termes de ces matrices ne dépendent pas des positions nodales actuelles  $y_k^i$ . Ainsi, sa dérivée seconde  $\frac{\partial^2 A^1}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta}$ , qui apparaît dans la définition de la matrice de Hesse dans l'équation (63), est nulle. En définissant tous les termes nécessaires pour calculer le vecteur des forces internes  $F_{int \alpha}^\beta(y_k^i)$  le problème est maintenant résumé en déterminant les positions actuelles  $y_k^i$  satisfaisant l'Equation d'Equilibre (87).

### 3.3.5 Processus de la solution

Le processus de résolution utilisé dans ce travail a déjà été présenté au point 2.8. Voici quelques détails qui dépendent de la formulation de l'élément fini développé.

Pendant le processus de solution, les positions  $y_k^i$  actuelles des nœuds du portique ne sont pas connues et des positions provisoires  $y_k^i tentative$  sont attribuées. Ces positions ne vérifiant pas l'équilibre nodal représenté par l'équation (87), un résidu correspondant au vecteur de déséquilibre mécanique est généré:

$$R_\alpha^\beta(y_k^i tentative) = F_{int \alpha}^\beta(y_k^i tentative) - [P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta + B_\alpha^\beta(y_k^i tentative)] \quad (89)$$

Bien que l'énergie potentielle due à des moments concentrés n'ait pas été définie, le tracé  $B_\alpha^\beta(y_k^i tentative)$  est ajouté au calcul du vecteur de déséquilibre mécanique de sorte que les positions d'équilibre trouvées tiennent compte de l'effet de ces moments.

La matrice de Hesse  $H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}((y_k^i tentative))$  de l'élément plan et homogène a une dimension égale  $4N$ ,  $N$  étant le nombre de nœuds de discrétisation et 4 le nombre de degrés de liberté nodaux. La localisation des termes de cette matrice est faite suivant une règle d'affectation semblable à celle

présentée dans l'équation (84), dans le cas de l'élément Hessian, et dans l'équation (85), dans le cas du Hessian global de la structure. L'allocation globale suit la règle ci-dessous:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{ligne : } 4(\alpha-1)+\beta & \\
 H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta} (y_k^i \text{ tentative}) \longrightarrow & & \text{avec } \beta \text{ et } \zeta = 1,2,3,4 \text{ et } \alpha \text{ et } \gamma = 1,\dots,N \\
 & \text{colonne : } 4(\gamma-1)+\zeta & (90)
 \end{array}$$

Cette matrice est déterminée numériquement comme indiqué dans l'équation (59) et le nombre de points de Gauss utilisés est le même que celui utilisé pour obtenir le vecteur de forces internes dans l'équation (49).

Avant l'analyse numérique pour la vérification de la formulation, il est nécessaire de décrire comment la liaison entre les éléments avec des directions différentes est effectuée. Il est évident que pour les éléments colinéaires, il n'est pas nécessaire de faire la connexion car le vecteur généralisé représentant la section est le même pour les deux éléments.

Comme il n'y a pas de degrés de liberté de rotation dans la cartographie utilisée, une procédure de couplage spéciale entre les éléments avec des directions différentes est nécessaire. Cette procédure est basée sur la technique de pénalisation.

### 3.3.6 Connexions entre éléments non colinéaires

Le couplage entre éléments de directions différentes est réalisé à travers un modèle de ressorts qui permet de représenter des liaisons rigides, semi-rigides et articulées. Le modèle développé permet de coupler tous les degrés de liberté nodale. Pour les positions, le ressort travaille avec un déplacement relatif entre les nœuds des éléments et, pour le vecteur généralisé, le ressort travaille avec la rotation relative entre les vecteurs généralisés des éléments. La figure 27 montre le modèle de couplage et présente la nomenclature adoptée pour identifier les paramètres de rigidité.

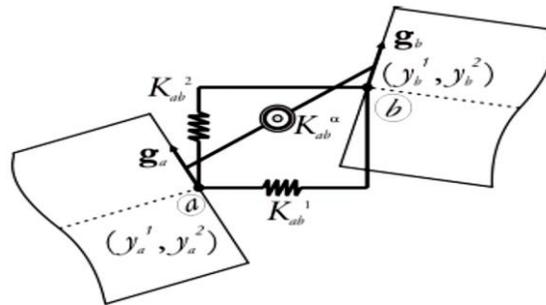


Figure 27 - Modèle de couplage entre éléments

Avec ce modèle, il est possible de représenter les différentes formes de couplage entre les éléments et la possibilité d'avoir toujours la rigidité allant de la liaison articulée à parfaitement rigide. Il est également possible de représenter des conditions aux limites flexibles. Certaines possibilités de couplage sont illustrées à la figure 28.

D'un point de vue mathématique, ce modèle de couplage entre barres n'est rien de plus que l'utilisation d'une technique pour imposer des contraintes dites de pénalité. Certains modèles similaires appliqués aux formulations positionnelles peuvent être trouvés dans Coda et Paccola (2014) [180], Reis et Coda (2014) [181] et Silva (2014) [171], qui démontrent la simplicité et l'efficacité de cette technique.

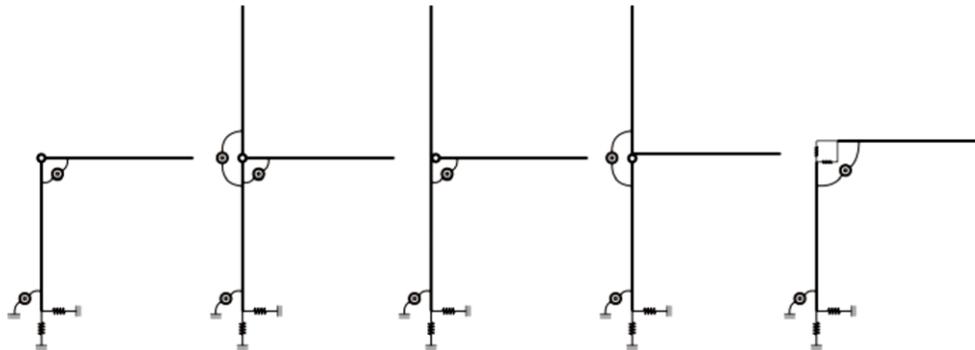


Figure 28 - Exemples de possibilités d'éléments de liaison [180].

Une fois le modèle de couplage présenté, il reste à déterminer les expressions pour le calcul de l'énergie de déformation accumulée dans les ressorts et, par conséquent, à considérer sa contribution dans l'énergie potentielle totale, exprimée dans l'équation (86).

L'énergie accumulée dans les ressorts dépend des magnitudes relatives entre les nœuds des éléments couplés. Les ressorts de couplage des positions nodales relatent la force et le déplacement relatif et l'énergie de déformation accumulée peut être obtenue par:

$$U = \frac{1}{2} K_{ab}^i (\Delta y_b^i - \Delta y_a^i)^2 \quad (91)$$

Où  $\Delta y_a^i$  et  $\Delta y_b^i$  sont les composantes dans la direction  $i = 1, 2$  des déplacements nodaux de  $a$  et  $b$ , respectivement.  $K_{ab}^i$  est la raideur du ressort ou le facteur de pénalité correspondant à la direction  $i$  (Figure 27).  $\Delta y_a^i$  et  $\Delta y_b^i$  sont obtenus par la différence entre la position du nœud dans la configuration actuelle et la position dans la configuration initiale:

$$\begin{aligned} \Delta y_a^i &= y_a^i - x_a^i \\ \Delta y_b^i &= y_b^i - x_b^i \end{aligned} \quad (92)$$

Les ressorts de couplage des vecteurs généralisés relient l'impulsion et la rotation relative entre les vecteurs. L'énergie potentielle de la déformation accumulée peut être obtenue par:

$$U = \frac{1}{2} K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a)^2 \quad (93)$$

dans lequel  ${}^P\alpha_a$  et  ${}^P\alpha_b$  sont les rotations cumulées des vecteurs généralisés en  $g_a$  et  $g_b$ , respectivement, de la configuration initiale à la configuration correspondant à l'incrément de chargement  $p$ .  $K_{ab}^\alpha$  est le facteur de rigidité ou de pénalité (Figure 27). Les rotations cumulatives sont calculées par:

$$\begin{aligned} {}^P\alpha_a &= {}^{P-1}\alpha_a + \theta_a \\ {}^P\alpha_b &= {}^{P-1}\alpha_b + \theta_b \end{aligned} \quad (94)$$

Où  ${}^{P-1}\alpha_a$  et  ${}^{P-1}\alpha_b$  sont des rotations cumulées de la configuration initiale à la configuration correspondant à l'incrément de charge précédent  $p - 1$ .  $\theta_a$  et  $\theta_b$  sont les rotations qui se produisent entre les étapes de chargement. Sur la figure 29, ces rotations sont tracées pour le vecteur généralisé en  $g_a$ . L'identification est analogue au vecteur  $g_b$ .

Dans l'équation (94) et la figure 29, les valeurs  ${}^{P-1}\alpha_a$ ,  ${}^{P-1}\alpha_b$ ,  ${}^{P-1}g_a$  et  ${}^{P-1}g_b$  sont des valeurs connues de l'incrément de chargement précédent. Ainsi, pour déterminer  ${}^P\alpha_a$  et  ${}^P\alpha_b$ ,  $\theta_a$  et  $\theta_b$ ,

il est nécessaire de calculer les rotations  ${}^P\alpha_a$  et  ${}^P\alpha_b$  intervenant entre les incréments précédents et actuels. Une relation pour calculer  $\theta_a$ , et de manière analogue pour  $\theta_b$ , peut être obtenue en considérant les produits vectoriels et scalaires entre les vecteurs généralisés  ${}^{P-1}g_a$  et  ${}^P g_a$ .

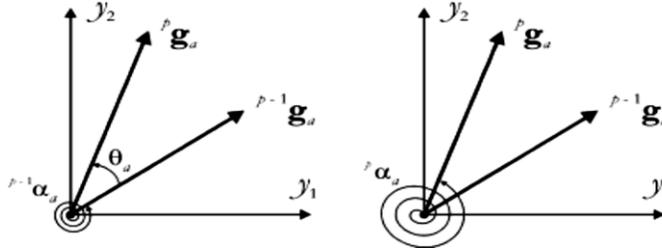


Figure 29 - Identification des rotations d'un vecteur nodal généralisé

A partir du produit vectoriel, on peut exprimer le sinus d'un  $\theta_a$ :

$$\begin{aligned} {}^{P-1}g_a \times {}^P g_a &= ({}^{P-1}g_a^1 {}^P g_a^2 - {}^{P-1}g_a^2 {}^P g_a^1) e_3 \\ \|{}^{P-1}g_a \times {}^P g_a\| &= \|{}^{P-1}g_a\| \|{}^P g_a\| \sin \theta_a \\ \sin \theta_a &= \frac{{}^{P-1}g_a^1 {}^P g_a^2 - {}^{P-1}g_a^2 {}^P g_a^1}{\|{}^{P-1}g_a\| \|{}^P g_a\|} \end{aligned} \quad (95)$$

Où  $e_3$  est le vecteur unitaire de la direction 3 avec direction positive sortant du plan. Dans l'expression sinus, le numérateur donne le signal correspondant au sens de rotation de  $g_a$  entre les incréments de chargement  $p - 1$  et  $p$ . En utilisant la même idée et le produit scalaire, on peut exprimer le cosinus d'un  $\theta_a$  :

$$\begin{aligned} {}^{P-1}g_a \cdot {}^P g_a &= {}^{P-1}g_a^1 {}^P g_a^1 + {}^{P-1}g_a^2 {}^P g_a^2 \\ \|{}^{P-1}g_a \times {}^P g_a\| &= \|{}^{P-1}g_a\| \|{}^P g_a\| \cos \theta_a \\ \cos \theta_a &= \frac{{}^{P-1}g_a^1 {}^P g_a^1 + {}^{P-1}g_a^2 {}^P g_a^2}{\|{}^{P-1}g_a\| \|{}^P g_a\|} \end{aligned} \quad (96)$$

Connaissant le sinus et le cosinus, la tangente peut être calculée par:

$$\tan \theta_a = \frac{{}^{P-1}g_a^1 {}^P g_a^2 - {}^{P-1}g_a^2 {}^P g_a^1}{{}^{P-1}g_a^1 {}^P g_a^1 + {}^{P-1}g_a^2 {}^P g_a^2} \quad (97)$$

et l'angle  $\theta_a$  est déterminé par l'inverse:

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{P^{-1}g_a^1 P g_a^2 - P^{-1}g_a^2 P g_a^1}{P^{-1}g_a^1 P g_a^1 + P^{-1}g_a^2 P g_a^2}\right) \quad \text{avec } |\theta_a| < \frac{\pi}{2} \quad (98)$$

Pour que l'angle fourni par la fonction arc tangente soit cohérent avec la rotation du vecteur  $g_a$  entre les incréments de chargement  $p - I$  et  $p$ , il faut que la taille de cet incrément n'entraîne pas de rotation hors de la plage  $-\frac{\pi}{2} < |\theta_a| < \frac{\pi}{2}$ . Avec cette restriction, la fonction de l'arc tangente donne la valeur d'angle correcte, puisque le dénominateur prend toujours des valeurs positives et le numérateur est cohérent avec le sens de rotation (positif si sens antihoraire et négatif si sens horaire). Ceci n'est pas une limitation importante, puisque le processus de solution incrémentielle-itérative lui-même nécessite déjà l'utilisation d'incrément de charge adéquats pour la convergence. Analogiquement  $\theta_b$  est donné par:

$$\theta_b = \arctan\left(\frac{P^{-1}g_b^1 P g_b^2 - P^{-1}g_b^2 P g_b^1}{P^{-1}g_b^1 P g_b^1 + P^{-1}g_b^2 P g_b^2}\right) \quad \text{avec } |\theta_b| < \frac{\pi}{2} \quad (99)$$

En définissant tous les termes nécessaires pour calculer l'énergie potentielle de déformation des ressorts de couplage dans les équations (91) et (93), on peut déterminer la contribution dans le vecteur de force interne et dans la matrice globale Hessienne de la structure. En considérant initialement les ressorts de couplage des positions nodales, la contribution au vecteur des forces internes peut être obtenue avec la dérivée de l'énergie de déformation (Equation (91)) par rapport aux positions nodales couplées. Par conséquent, il faut:

$$\begin{aligned} F_{int a}^i &= \frac{\partial U}{\partial y_a^i} & \longrightarrow & F_{int a}^i = -K_{ab}^{(i)}(\Delta y_b^i - \Delta y_a^i) \\ F_{int b}^i &= \frac{\partial U}{\partial y_b^i} & \longrightarrow & F_{int b}^i = K_{ab}^{(i)}(\Delta y_b^i - \Delta y_a^i) \quad \text{avec } i = 1,2 \end{aligned} \quad (100)$$

Dans laquelle l'équation (92) a été observée pour définir le dérivé. La contribution de ces composantes au vecteur de force interne suit la même règle d'assignation présentée dans l'équation (85).

Pour déterminer la contribution dans la matrice de Hesse, la dérivée seconde est appliquée à l'énergie de déformation par rapport aux positions nodales couplées. En considérant la dérivée première calculée dans l'équation (100) et en regardant à nouveau l'équation (92), on arrive aux termes non nuls de la matrice de Hesse:

$$\begin{aligned}
H_{aa}^{i(i)} &= \frac{\partial F_{int a}^i}{\partial y_a^{(i)}} & \longrightarrow & H_{aa}^{i(i)} = K_{ab}^i \\
H_{ab}^{i(i)} &= \frac{\partial F_{int a}^i}{\partial y_b^{(i)}} & \longrightarrow & H_{ab}^{i(i)} = -K_{ab}^i \\
H_{bb}^{i(i)} &= \frac{\partial F_{int b}^i}{\partial y_b^{(i)}} & \longrightarrow & H_{bb}^{i(i)} = K_{ab}^i \\
H_{ba}^{i(i)} &= \frac{\partial F_{int b}^i}{\partial y_a^{(i)}} & \longrightarrow & H_{ba}^{i(i)} = -K_{ab}^i \quad \text{avec } i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{101}$$

La contribution de ces termes dans la matrice de Hesse est effectuée selon la règle d'affectation présentée dans l'équation (90).

En relation avec les ressorts de couplage des vecteurs nodaux généralisés, la contribution dans le vecteur de force interne globale de la structure peut être obtenue avec la dérivée de l'énergie de déformation (Equation (93)) par rapport aux composantes des vecteurs généralisés de l'incrément de charge. Les forces internes résultant des ressorts de couplage des vecteurs généralisés constituent des conjugués énergétiques de ces vecteurs. Ainsi, l'association présentée dans l'équation (83) pour identifier les degrés de liberté nodaux dans l'élément de portique plan homogène et la règle de l'équation (85) pour l'assignation dans le vecteur de force interne global doivent être considérées.

Afin de simplifier la notation, les vecteurs généralisés pour l'incrément de charge  $p$  seront représentés dans les équations suivantes simplement par un  $g_a = (g_a^1, g_a^2)$  et  $g_b = (g_b^1, g_b^2)$ .

Pour calculer la dérivée, il est important de noter que les vecteurs généralisés de l'incrément précédent  $p - 1$  sont des valeurs constantes connues et ne sont donc pas inconnus du problème. En outre, les équations (94), (98), (99) et l'application de la règle de la chaîne doivent être respectées. Par exemple, le calcul du conjugué d'énergie pour les composants  $g_a^1$  est obtenu par:

$$F_{int a}^3 = \frac{\partial U}{\partial y_a^3} = \frac{\partial U}{\partial g_a^1} \quad \longleftrightarrow \quad F_{int a}^3 = \frac{\partial U}{\partial^P \alpha_a} \frac{\partial^P \alpha_a}{\partial \theta_a} \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^1} \tag{102}$$

En observant l'expression de l'énergie dans l'équation (93) et celle de la rotation dans l'équation (94), nous avons:

$$F_{int a}^3 = -K_{ab}^\alpha ({}^P \alpha_b - {}^P \alpha_a) \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^1} \tag{103}$$

D'une manière analogue, il est procédé pour les autres conjugués énergétiques. Tous les composants sont exprimés par:

$$\begin{aligned}
 F_{int a}^3 &= -K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^1} \\
 F_{int a}^4 &= -K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^2} \\
 F_{int b}^3 &= K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{\partial \theta_b}{\partial g_b^1} \\
 F_{int b}^4 &= K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{\partial \theta_b}{\partial g_b^2}
 \end{aligned} \tag{104}$$

Les dérivées de  $\theta_a$  et  $\theta_b$  par rapport aux composantes des vecteurs généralisés peuvent être déterminées à partir de leurs équations (98) et (99), respectivement. Ces dérivés sont données par:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^1} &= -\frac{g_a^2}{\|g_a\|^2} & \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^2} &= \frac{g_a^1}{\|g_a\|^2} \\
 \frac{\partial \theta_b}{\partial g_b^1} &= -\frac{g_b^2}{\|g_b\|^2} & \frac{\partial \theta_b}{\partial g_b^2} &= \frac{g_b^1}{\|g_b\|^2}
 \end{aligned} \tag{105}$$

Qui se substituent dans l'équation (104), aboutissent aux expressions finales pour les conjugués énergétiques des vecteurs généralisés couplés:

$$\begin{aligned}
 F_{int a}^3 &= K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{g_a^2}{\|g_a\|^2} \\
 F_{int a}^4 &= -K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{g_a^1}{\|g_a\|^2} \\
 F_{int b}^3 &= -K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{g_b^2}{\|g_b\|^2} \\
 F_{int b}^4 &= K_{ab}^\alpha ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a) \frac{g_b^1}{\|g_b\|^2}
 \end{aligned} \tag{106}$$

La contribution du ressort de couplage des vecteurs généralisés dans la matrice de Hesse est obtenue à partir de la dérivée seconde de l'énergie de déformation (équation (93)) par rapport aux composantes des vecteurs généralisés de l'incrément de charge courant  $p$ . Les résultats de la première dérivée sont déjà représentés dans l'équation (106). Encore une fois, la contribution dans la matrice globale hessienne de la structure est faite selon la règle d'assignation présentée dans l'équation (90).

En considérant l'équation (106) et en observant les équations (94), (98) et (99), les termes non nuls de Hessian dus au ressort de couplage des vecteurs généralisés peuvent être déterminés.

Prenez, par exemple, le terme de la matrice de Hesse  $H_{aa}^{33}$  :

$$H_{aa}^{33} = \frac{\partial F_{int a}^3}{\partial y_a^3} = \frac{\partial F_{int a}^3}{\partial g_a^1}$$

$$H_{aa}^{33} = -K_{ab}^\alpha \frac{\partial^P \alpha_a}{\partial g_a^1} \frac{g_a^2}{\|g_a\|^2} + K_{ab}^\alpha ({}^P \alpha_b - {}^P \alpha_a) \begin{bmatrix} 0 - g_a^2 \frac{\partial \|g_a\|^2}{\partial g_a^1} \\ \frac{\partial \|g_a\|^2}{\partial g_a^1} \\ \|g_a\|^4 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Grâce à la règle de la chaîne, la dérivée  $\frac{\partial^P \alpha_a}{\partial g_a^1}$  est exprimée par:

$$\frac{\partial^P \alpha_a}{\partial g_a^1} = \frac{\partial^P \alpha_a}{\partial \theta_a} \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^1} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^P \alpha_a}{\partial g_a^1} = \frac{\partial \theta_a}{\partial g_a^1} \quad (108)$$

Considérant l'équation (105), nous obtenons:

$$\frac{\partial^P \alpha_a}{\partial g_a^1} = -\frac{g_a^2}{\|g_a\|^2} \quad (109)$$

Pour compléter la définition de l'équation (107), la dérivée  $\frac{\partial \|g_a\|^2}{\partial g_a^1}$  peut être exprimée par:

$$\frac{\partial \|g_a\|^2}{\partial g_a^1} = \frac{\partial [(g_a^1)^2 + (g_a^2)^2]}{\partial g_a^1} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \|g_a\|^2}{\partial g_a^1} = 2g_a^1 \quad (110)$$

par conséquent, le terme  $H_{aa}^{33}$  est déterminé par:

$$H_{aa}^{33} = \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^4} [(g_a^2)^2 - 2g_a^1 g_a^2 ({}^P \alpha_b - {}^P \alpha_a)] \quad (111)$$

En opérant de manière analogue, tous les termes de la matrice de Hessian dus au ressort de couplage des vecteurs généralisés peuvent être déterminés et sont représentés par l'ensemble des équations (112).

$$H_{aa}^{33} = \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^4} [(g_a^2)^2 - 2g_a^1 g_a^2 ({}^P \alpha_b - {}^P \alpha_a)]$$

$$H_{aa}^{34} = \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^4} \{-g_a^1 g_a^2 + [(g_a^1)^2 - (g_a^2)^2] ({}^P \alpha_b - {}^P \alpha_a)\} \quad \text{et} \quad H_{aa}^{43} = H_{aa}^{34}$$

$$H_{ab}^{33} = -\frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^2 \|g_b\|^2} g_a^2 g_b^2 \quad \text{et} \quad H_{ba}^{33} = H_{ab}^{33}$$

$$H_{ab}^{34} = \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^2 \|g_b\|^2} g_a^2 g_b^1 \quad \text{et} \quad H_{ba}^{43} = H_{ab}^{34}$$

$$H_{aa}^{44} = \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^4} [(g_a^1)^2 + 2g_a^1 g_a^2 ({}^P \alpha_b - {}^P \alpha_a)]$$

$$\begin{aligned}
H_{ab}^{43} &= \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^2 \|g_b\|^2} g_a^1 g_b^2 & \text{et} & & H_{ba}^{34} &= H_{ab}^{43} \\
H_{ab}^{44} &= -\frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_a\|^2 \|g_b\|^2} g_a^1 g_b^1 & \text{et} & & H_{ba}^{44} &= H_{ab}^{44} \\
H_{bb}^{33} &= \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_b\|^4} [(g_b^2)^2 + 2g_b^1 g_b^2 ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a)] \\
H_{bb}^{34} &= -\frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_b\|^4} \{g_b^1 g_b^2 + [(g_b^1)^2 - (g_b^2)^2]({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a)\} & \text{et} & & H_{bb}^{43} &= H_{bb}^{34} \\
H_{bb}^{44} &= \frac{K_{ab}^\alpha}{\|g_b\|^4} [(g_b^1)^2 - 2g_b^1 g_b^2 ({}^P\alpha_b - {}^P\alpha_a)] & & & & (112)
\end{aligned}$$

Afin de vérifier la formulation de l'élément de portique plat homogène, plusieurs exemples ont été analysés et les résultats obtenus sont présentés dans le point suivant et comparés aux résultats des solutions analytiques et numériques trouvées dans la littérature.

### 3.4 Exemples numériques

Dans cet article, les résultats d'analyses réalisées dans des exemples avec des solutions analytiques et numériques disponibles dans la littérature sont présentés. Les exemples ont été organisés en trois séries afin d'évaluer différents aspects de la formulation développée ici.

Dans le premier ensemble, une poutre avec des extrémités encastées et libres est analysée, soumise aux trois types d'actions externes qui peuvent être considérées dans la formulation de l'élément: force concentrée, moment concentré et force distribuée. L'objectif principal est de vérifier la capacité de la formulation à résoudre les problèmes soumis à ces différents types d'actions externes. De plus, une analyse de convergence est également effectuée pour évaluer l'efficacité de l'élément fini positionnel.

Dans le second ensemble, trois portiques à géométrie symétrique sont analysés. Les portiques sont le losange avec des nœuds articulés et rigides, le carré avec tous les nœuds rigides et arc plat sinusoidal. Le plus grand intérêt dans l'analyse de ces portiques réside dans la vérification de la capacité à résoudre des problèmes avec des géométries et des conditions aux limites différentes.

Enfin, le troisième ensemble d'exemples est formé par un portique à deux niveaux ou étages. Différentes analyses sont effectuées dans lesquelles les conditions de contour sont constituées par des supports simples, des supports avec une rigidité élastique à la rotation et à l'encastrement. Les liens entre les barres sont considérés comme rigides et semi-rigides avec trois valeurs

différentes de rigidité à rotation. De cette manière, il est prévu de vérifier principalement la capacité de la formulation à représenter le comportement des portiques formés par des connexions semi-rigides.

Les résultats obtenus sont comparés à des solutions analytiques et numériques trouvées dans la littérature, ainsi qu'à des résultats numériques fournis par des analyses réalisées dans le logiciel Ansys. L'élément fini BEAM188 avec fonctions de forme cubique a été utilisé pour modéliser les barres du portique. La formulation de BEAM188 adopte les hypothèses cinématiques de Reissner-Timochenko qui correspondent aux mêmes hypothèses de l'élément développé dans ce travail. L'élément de couplage COMBIN40 à comportement linéaire-élastique pour les relations de moment de rotation et de force de déplacement a été utilisé pour modéliser les liaisons semi-rigides.

Le but de ces analyses est de vérifier les différents aspects de la formulation de l'élément de portique plat homogène et également d'évaluer son efficacité et sa consistance.

#### ***3.4.1 Exemple 3.1: Poutre en équilibre soumise à diverses actions externes***

Dans ce premier exemple, une poutre soumise à trois types d'actions externes est analysée, comme le montre la figure 30. Les caractéristiques géométriques de la section transversale et les paramètres élastiques du matériau sont également représentés sur ladite figure.

Dans toutes les analyses, les actions externes ont été appliquées en 10 incréments égaux et le processus de solution basé sur la méthode de Newton-Raphson a été contrôlé au moyen des critères de convergence en position et force avec des tolérances de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$  respectivement. Afin d'évaluer la capacité convergente de la formulation, la poutre a été discrétisée avec un nombre fini d'éléments allant de 1, 2, 4, 8 et 16.

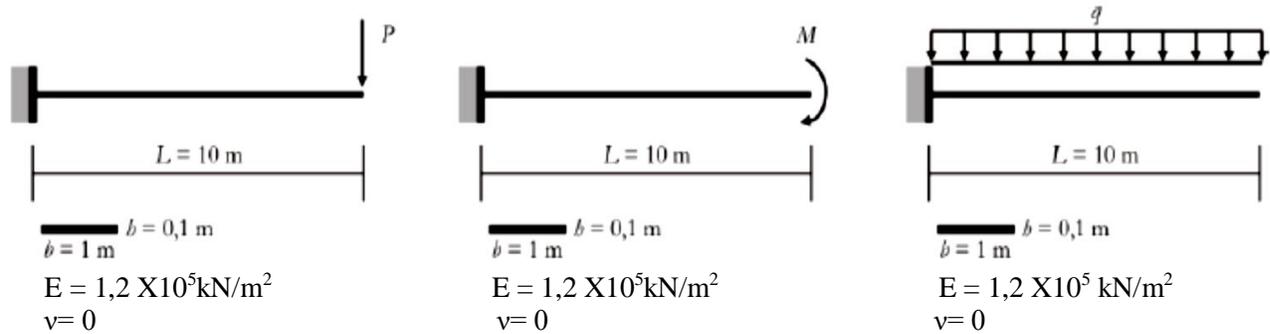


Figure 30 - Géométrie, chargement et paramètres élastiques de l'exemple 3.1

Les résultats des analyses sont présentés à travers les trajectoires d'équilibre se référant aux déplacements horizontaux ( $u$ ) et verticaux ( $v$ ) du nœud terminal droit. Pour la comparaison et la vérification des résultats obtenus :

- ✚ Analyse présentée par Mattiasson (1981) [148] pour le cas avec force concentrée dans l'extrémité droite;
- ✚ L'analyse de Hsiao (1987) [182] pour le cas avec un moment concentré à l'extrémité droite;
- ✚ Wang, Lee et Zienkiewicz (1961) [183] et Yang (1973) [184] pour le cas à force distribuée.

Dans tous les cas, des analyses numériques ont également été effectuées sur Ansys. La poutre a été discrétisée avec seize éléments BEAM188.

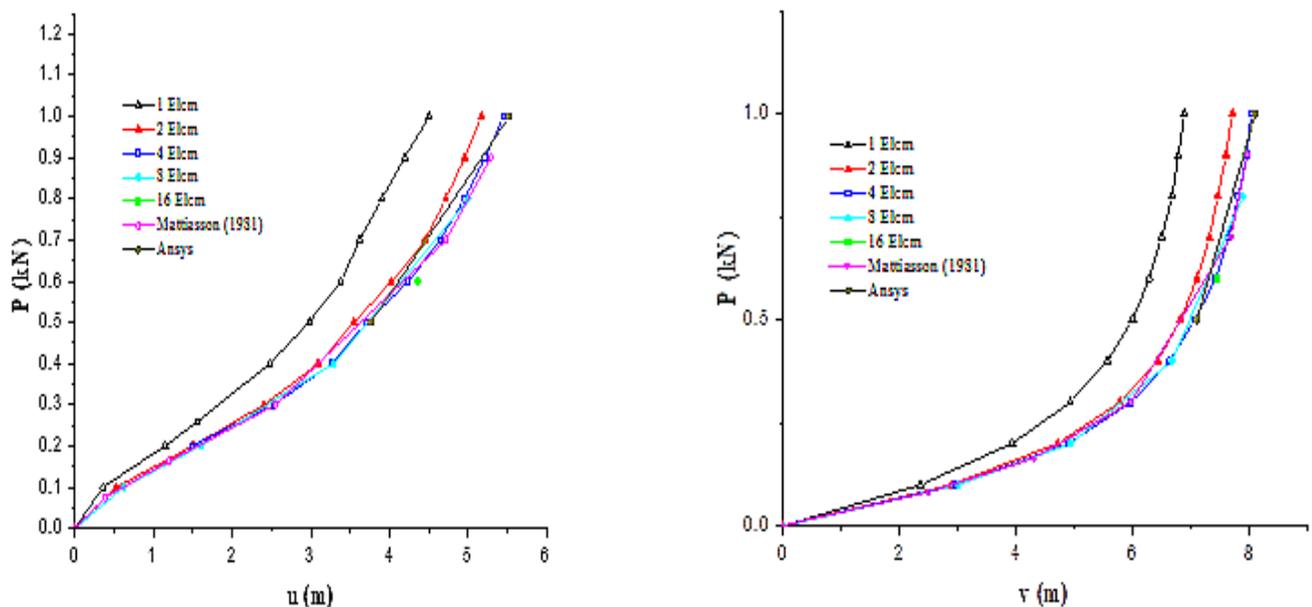


Figure 31 - trajectoire d'équilibre pour la poutre avec une force concentrée.

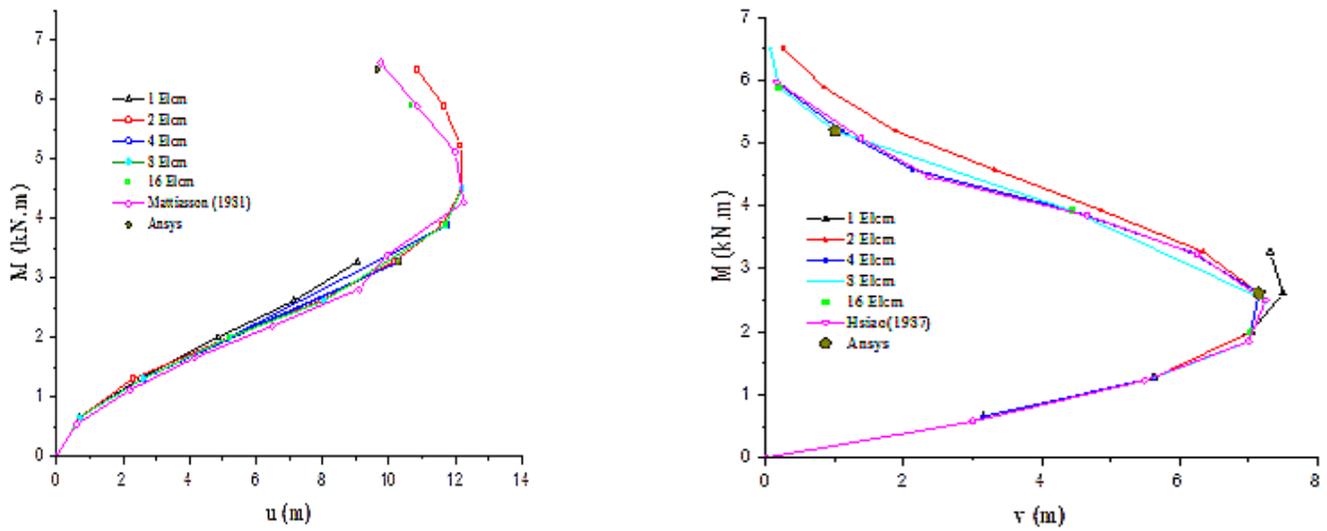


Figure 32 - trajectoire d'équilibre pour la poutre avec un moment concentré.

Les résultats des analyses pour les trois cas de charge considérés dans cet exemple ont montré un excellent accord avec les différents résultats analytiques et numériques utilisés comme référence. Seul le cas de la force distribuée présentait une différence significative par rapport aux résultats obtenus avec l'Ansys qui représentait un comportement beaucoup plus flexible. Néanmoins, les comparaisons avec les résultats numériques de Wang, Lee et Zienkiewicz (1961) [183] et Yang (1973) [184] vérifient la cohérence de la formulation de position.

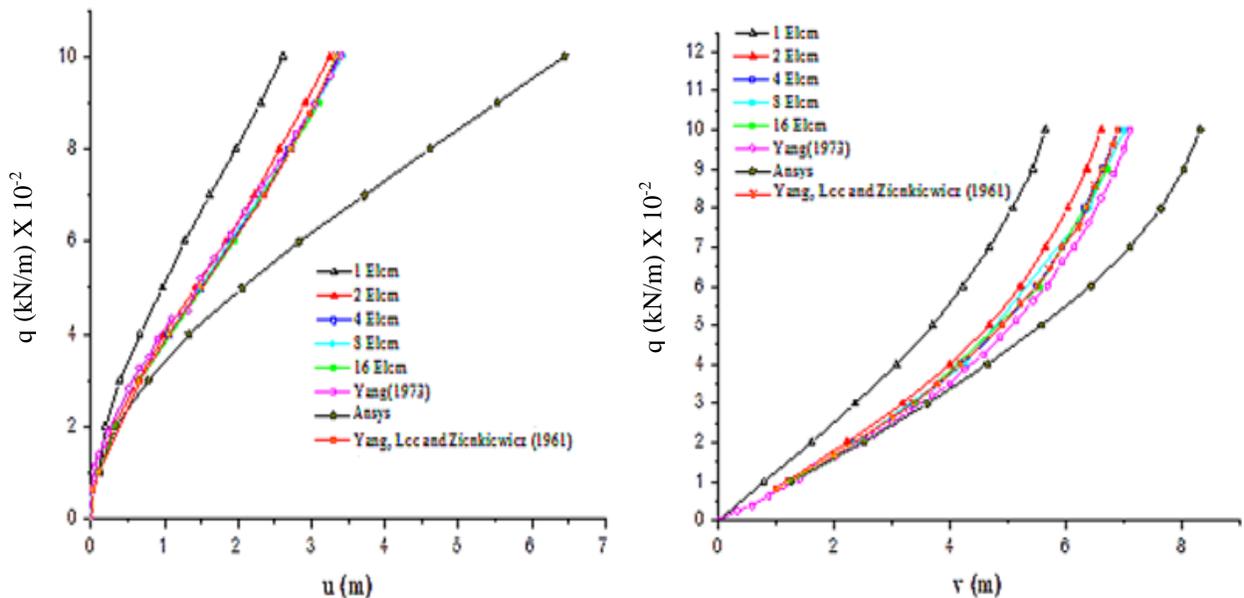


Figure 33 - Trajectoire d'équilibre de la poutre avec une force répartie.

Une vérification de la procédure correcte d'application de la charge distribuée a été effectuée et aucune erreur n'a été trouvée dans la façon dont l'exemple a été modélisé sur Ansys. La justification de la divergence significative des résultats nécessite donc une étude plus minutieuse de la transformation de la force distribuée en forces nodales équivalentes dans la formulation de l'élément BEAM188 et ne constitue pas un objectif de la présente recherche.

En raison de la grande concordance des résultats présentés par l'élément de portique de position avec les résultats de référence analytiques et numériques, la capacité de la formulation à représenter correctement l'effet des principales actions externes présentes dans les modèles de portiques est vérifiée. En relation avec l'analyse de convergence, une convergence quadratique du raffinement  $h$  a été observée, et il n'y a pratiquement pas eu d'amélioration significative de la réponse à partir d'une discrétisation avec quatre éléments finis.

Sur la figure 34, un certain nombre de configurations de poutres déformées sont représentées avec des déplacements correspondant aux directions globales 1 et 2 représentées au moyen d'un schéma de couleurs. Les images ont été obtenues avec le logiciel de post-traitement AcadView.

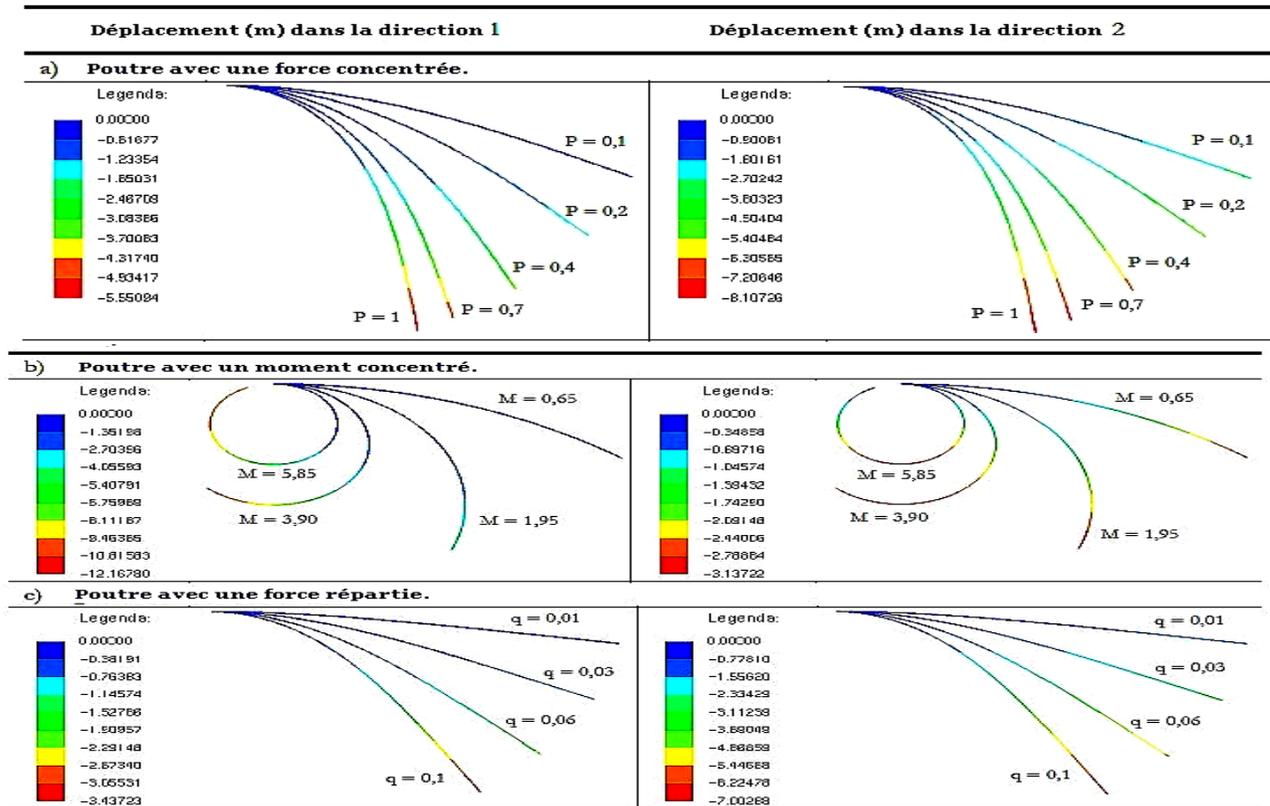


Figure 34 - Configurations de décalage des poutres pour certains incréments de charge.

### 3.4.2 Exemple 3.2: Portique plan avec différentes géométries et conditions aux limites

Dans ce deuxième ensemble d'exemples, deux cadres avec des formes de losange et de carré sont analysés. La géométrie, le chargement et les paramètres élastiques des matériaux utilisés sont représentés sur la figure 35. Du fait de la double symétrie, seul un quart des cadres a été pris en compte, ce qui a permis de représenter différentes conditions aux limites.

Un troisième portique dont la forme est représentée par un arc plat sinusoïdal est également analysé. Dans cet exemple, on apprécie principalement: le couplage rigide entre des éléments de directions différentes, la représentation approximative d'une géométrie sinusoïdale à partir d'une géométrie polynomiale cubique et la solution au moyen d'une procédure dans laquelle la position est contrôlée au lieu de la force. Les caractéristiques de l'arc sont également montrées sur la figure 35.

Dans l'analyse des cadres, le processus de solution basé sur la méthode de Newton-Raphson est employé. La force concentrée est appliquée en 10 incréments égaux et les critères de convergence adoptés sont en position et force avec des tolérances de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$  respectivement.

Deux situations sont considérées: une avec force positive (traction) et une avec force négative (compression). Les résultats des analyses sont présentés à travers les trajectoires d'équilibre liées aux déplacements horizontaux ( $u$ ) des nœuds droit et vertical ( $v$ ) du nœud supérieur (Figure 36 et Figure 37). De plus, les résultats de la solution analytique fournie par Mattiasson (1981) [148] et les analyses numériques effectuées sur l'Ansys sont également représentés dans les trajectoires d'équilibre pour permettre une évaluation de la réponse obtenue. Dans Ansys, la structure a encore été discrétisée avec l'élément BEAM188.

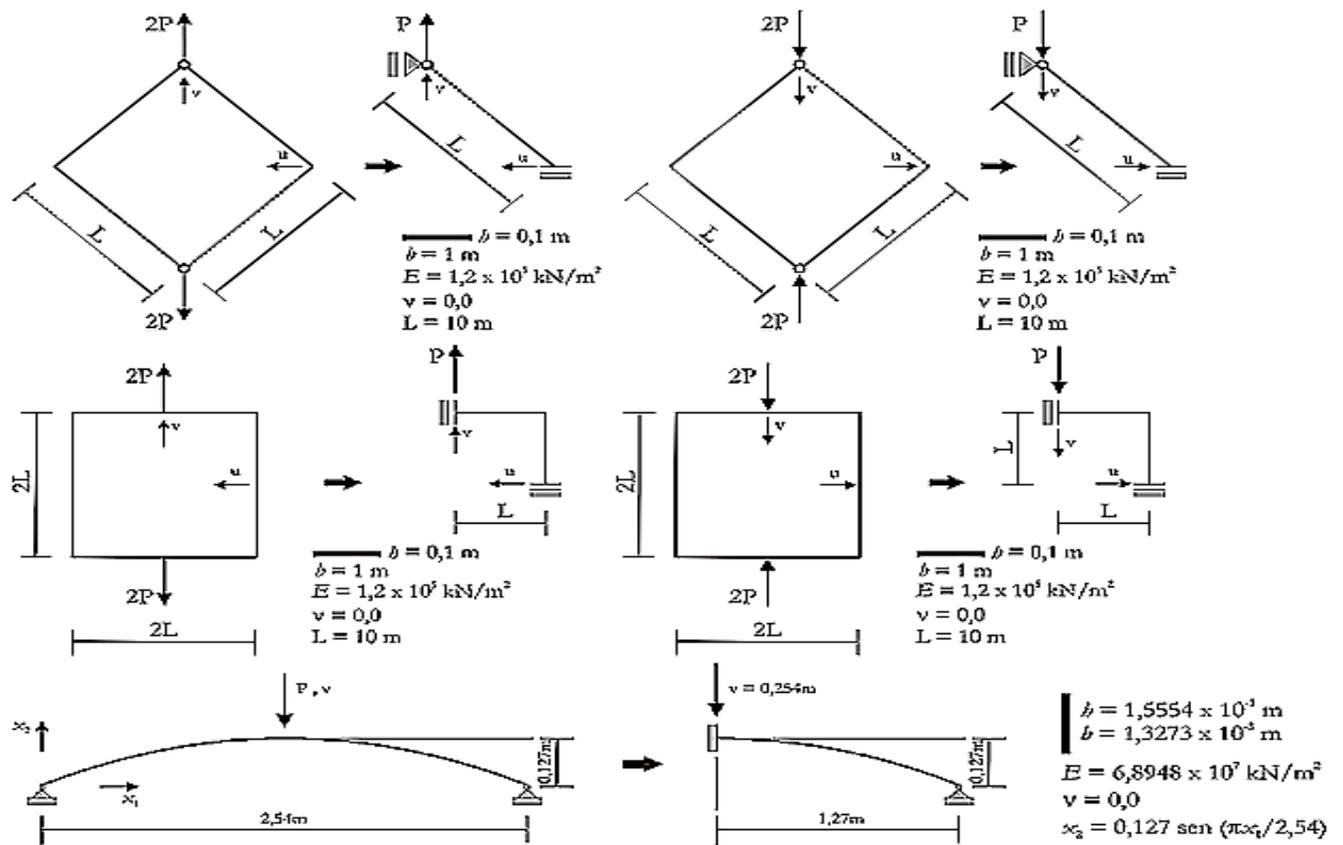


Figure 35 - Géométrie, chargement et paramètres élastiques de l'exemple 3.2.

Dans l'analyse de l'arc plat sinusoïdal, le processus de solution avec contrôle de position est effectué en limitant la position verticale du nœud supérieur. Dans ce processus, un déplacement prescrit de 0,254 m est appliqué en 10 incréments égaux et, à chaque incrément, la méthode Newton-Raphson est à nouveau utilisée pour déterminer les positions dans la configuration actuelle des autres nœuds libres. Le contrôle de la position est nécessaire parce que les configurations actuelles d'arc aplaties ont des points limites et des tronçons alternés d'équilibre stable et instable, caractérisant le phénomène d'accrochage. Les critères de convergence adoptés sont les mêmes que ceux des cadres.

Ce problème a été présenté par Meek et Tan (1984) [51] dont les résultats numériques sont utilisés comme référence pour la comparaison. De plus, les résultats d'une analyse numérique effectuée sur Ansys avec l'élément BEAM188 sont également utilisés. La comparaison et l'évaluation des résultats obtenus avec l'élément de position sont faites à partir de la trajectoire d'équilibre en se référant au déplacement vertical ( $v$ ) du nœud supérieur, comme montré sur la figure 38.

Afin d'évaluer la capacité convergente de la formulation, tous les cas ont été analysés en faisant varier la discrétisation en 1, 2, 4, 8 et 16 éléments finis par barre ou section. Encore une fois, la convergence des résultats a été identifiée à partir de 4 éléments. De cette façon, c'est la discrétisation adoptée.

En analysant les courbes d'équilibre pour les trois problèmes considérés, il existe un excellent accord entre les résultats obtenus avec la formulation positionnelle de l'élément homogène à portique plat et les résultats analytiques et numériques utilisés comme référence. Ainsi, il est démontré la robustesse de l'élément fini pour modéliser et résoudre des problèmes de portiques plats avec diverses géométries et conditions de contour.

Le processus de la solution de contrôle de position s'est également avéré très efficace pour résoudre les problèmes dont les configurations actuelles traversent des points limites et des équilibres stables et instables. En plus de tout cela, on peut vérifier que les configurations courantes obtenues et représentées sur la figure 39 sont qualitativement cohérentes avec le comportement structural attendu en fonction de la géométrie et de la charge agissant sur les structures analysées.

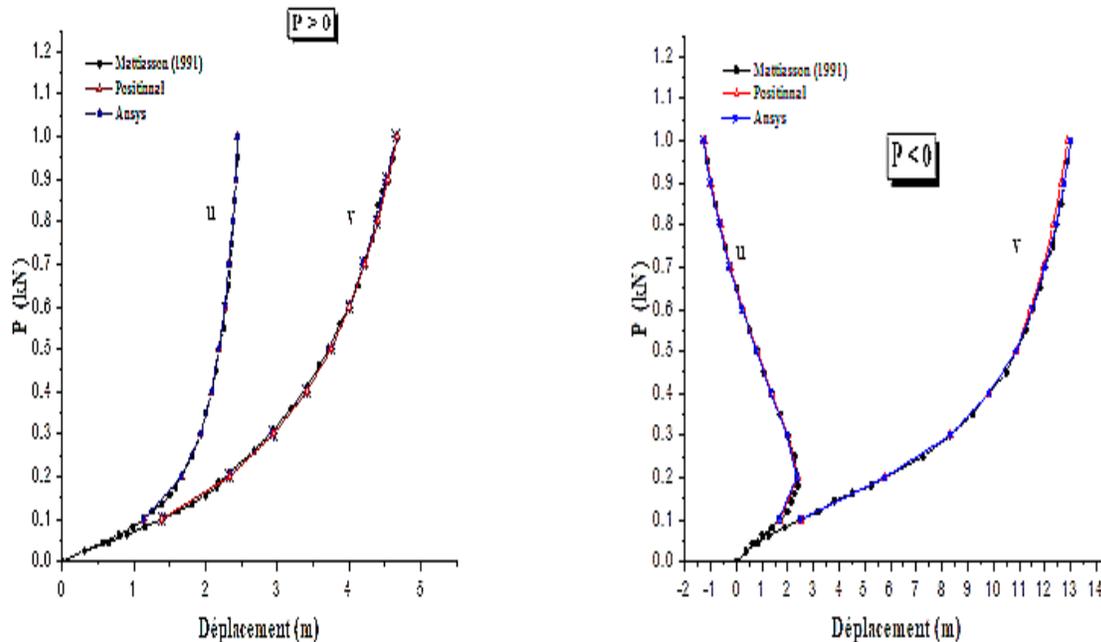


Figure 36 - Trajectoire d'équilibre pour le cadre en forme de losange.

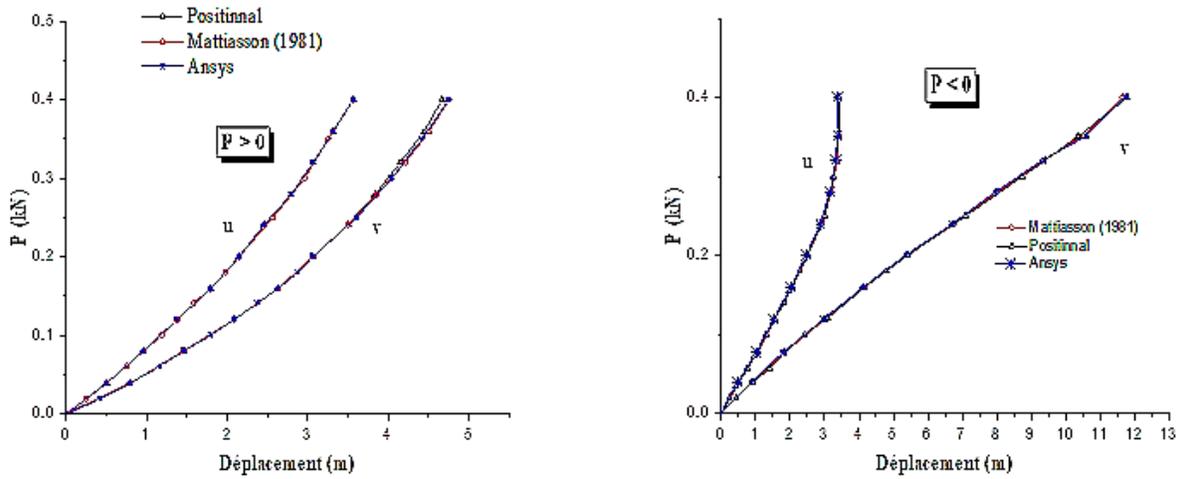


Figure 37 - Trajectoire d'équilibre pour le cadre en forme de carré.

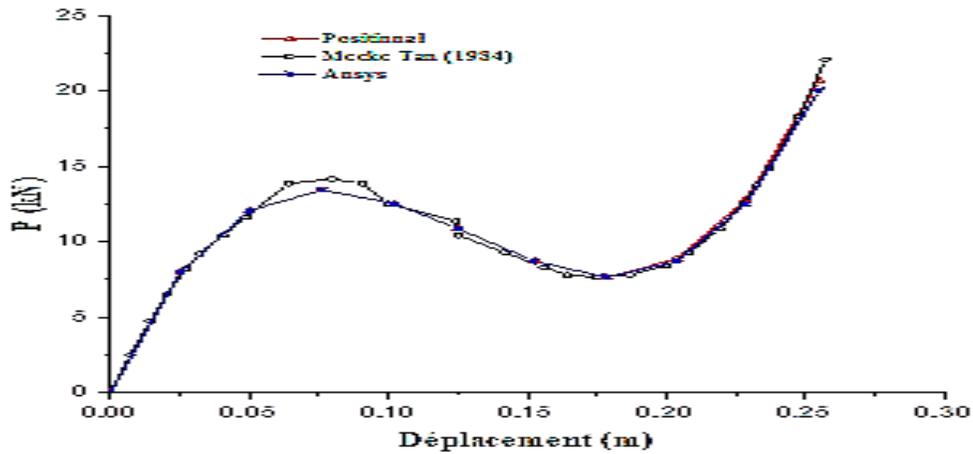
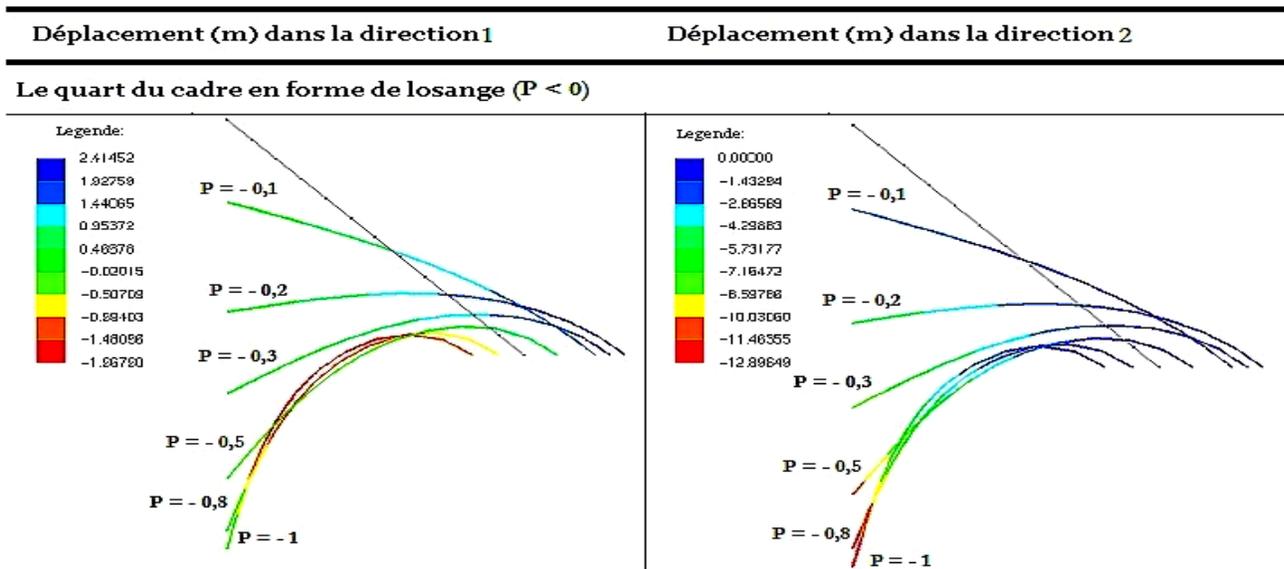


Figure 38 - Trajectoire d'équilibre pour l'arc plat sinusoïdal.



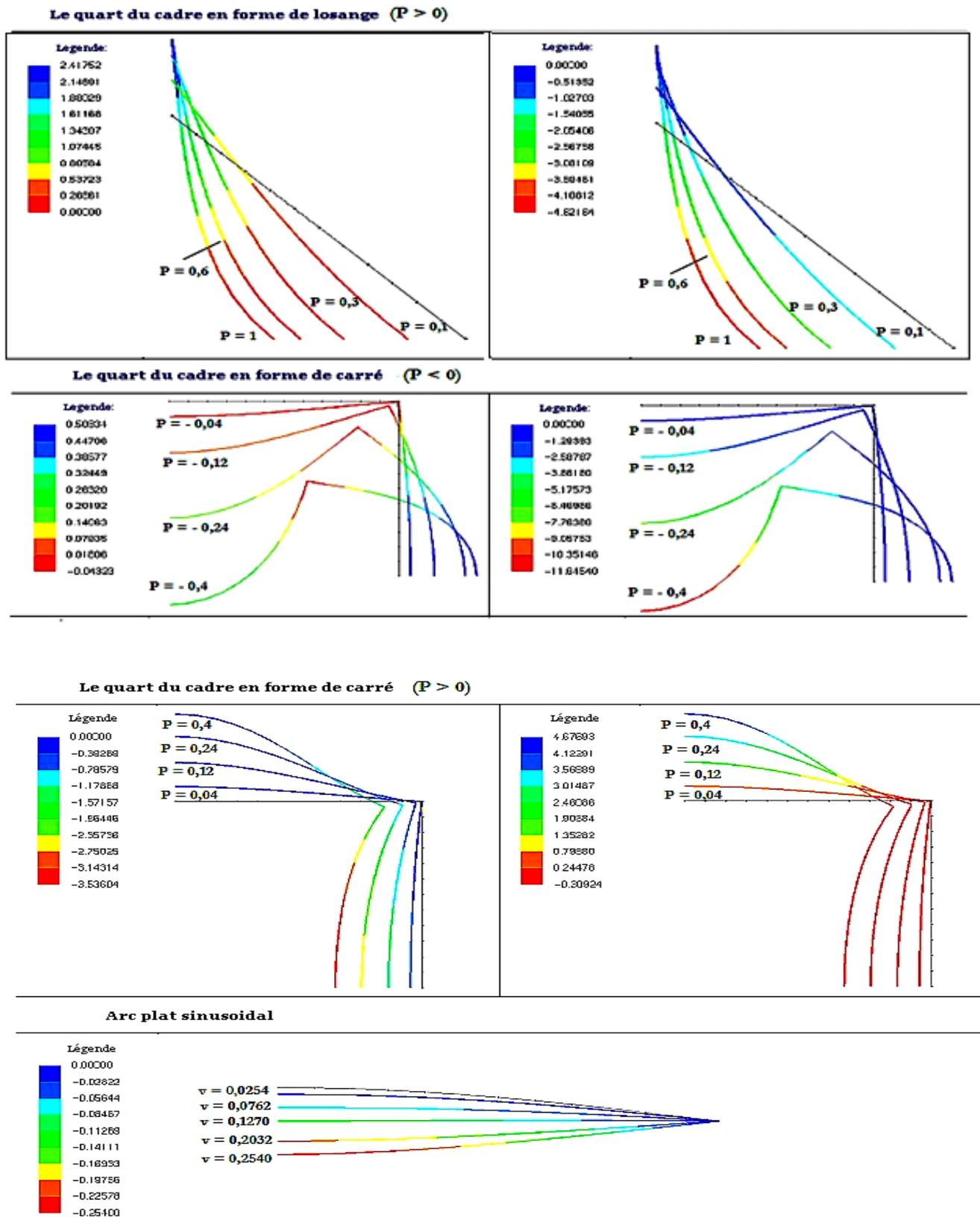


Figure 39 - Paramètres actuels des trames et de l'arc pour certains incréments de charge ou de position.

### 3.4.3 Exemple 3.3: Portique avec connexions semi-rigides

Dans l'exemple précédent, l'efficacité de la formulation a été vérifiée pour représenter des problèmes avec différentes conditions aux limites et avec des liaisons articulées ou rigides entre les barres de portique. Comme indiqué au point 3.3.6, toute relation élastique linéaire pour les connexions et les supports peut être modélisée avec la technique de pénalisation. En ce sens, ce dernier ensemble d'exemples évalue principalement cet aspect.

Pour cela, trois problèmes de portiques avec des connexions semi-rigides sont étudiés. Les cadres ont une géométrie et des charges similaires, ne modifiant que les conditions aux limites, qui sont formées par des supports simples dans le premier problème, par des supports simples avec une raideur élastique en rotation dans le second et par des encastremets dans le troisième. Dans le second problème, la raideur à la rotation du support est de 1990.7 kN.m correspondant à  $0,1(EI/L)$  au pilier.

Dans chacun des portiques, quatre analyses sont réalisées: l'une considérant les connexions rigides et les trois autres considérant les connexions semi-rigides avec une rigidité à la rotation de 4491 kNm, 9730 kNm et 30705 kNm, respectivement.

Ces problèmes sont une référence importante trouvée dans la littérature et ont été initialement proposés par Liu et Chen (1988) [185]. Certains articles qui les ont utilisés pour vérifier les formulations proposées sont ceux de Chan et Chui (2000) [186], Pinheiro et Silveira (2005) [187] et Reis et Coda (2014) [181].

Liu et Chen (1988) [185] ont examiné les relations moment-rotation non linéaires pour les liaisons semi-rigides. Dans le présent travail, ces relations sont considérées élastiques-linéaires et, par conséquent, seuls les résultats pour le cas étudié par ces auteurs avec des connexions rigides ont été utilisés comme référence pour la comparaison.

Pour les problèmes de liaisons semi-rigides, ainsi que de liaisons rigides, les résultats obtenus des analyses Ansys utilisant l'élément BEAM188 pour modéliser les barres et l'élément de couplage COMBIN40 pour modéliser les liaisons semi-rigides sont utilisés. Le processus incrémental-itératif utilisé était identique à celui des analyses avec la formulation de position, qui consistait à appliquer des incréments égaux de 50 kN jusqu'à la perte de stabilité du portique. Les configurations actuelles correspondant à chaque incrément ont été déterminées en utilisant la

méthode de Newton-Raphson avec des tolérances de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$  pour les critères de convergence en position et en force, respectivement.

La géométrie, le chargement et les paramètres élastiques des matériaux sont présentés sur la figure 40. Liu et Chen (1988) [185] a examiné des sections transversales correspondant aux profilés métalliques : W14x48 ( $I=2,0146 \times 10^{-4} \text{m}^4$ ,  $A=9,0968 \times 10^{-3} \text{m}^2$ ) aux poutres et W12x96 ( $I=3,4672 \times 10^{-4} \text{m}^4$ ,  $A=1,8194 \times 10^{-2} \text{m}^2$ ) aux piliers. Dans les modèles à portique structural, les sections transversales peuvent être représentées par des paramètres géométriques généraux tels que l'inertie et la surface. Ainsi, toutes les analyses ont considéré des coupes rectangulaires avec des dimensions telles que l'inertie et la surface sont équivalentes à celles des profilés métalliques utilisés par Liu et Chen (1988) [185].

Considérant les résultats des deux exemples précédents, la discrétisation adoptée pour la modélisation des cadres est composée de quatre éléments finis par section dans les colonnes et de six éléments finis dans les poutres. Ce nombre de six éléments n'a été utilisé que pour maintenir la même proportion dimensionnelle des éléments finis des sections de colonnes, puisque quatre éléments par barre conduisent déjà à des résultats convergents.

Comme mentionné précédemment, le chargement a été augmenté jusqu'à ce que la déstabilisation du portique ait été identifiée par la formation d'étirements à très faible raideur dans les trajectoires d'équilibre se référant au déplacement horizontal du nœud supérieur gauche. Ces trajectoires sont illustrées sur la figure 41, la figure 42 et la figure 43 et ont été représentées jusqu'à un déplacement correspondant à 0,30 m. Pour ce niveau de déplacement, il est possible d'identifier la perte de stabilité dans tous les cas étudiés.

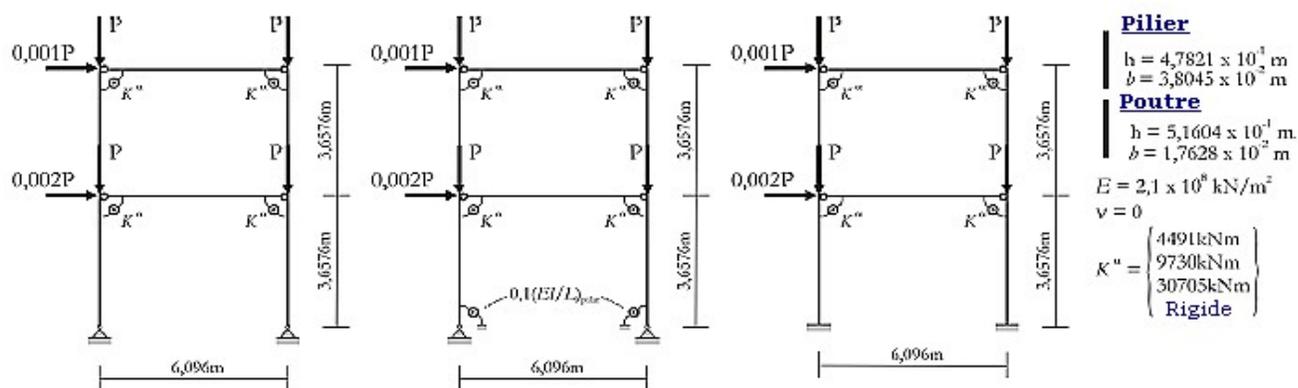


Figure 40 - Géométrie, chargement et paramètres élastiques de l'exemple 3.3.

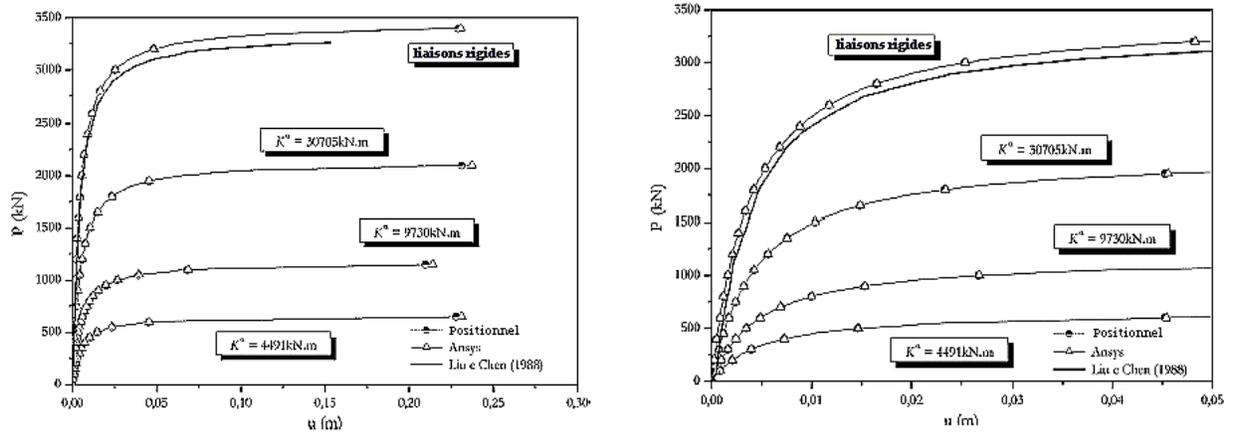


Figure 41 - Trajectoires d'équilibre pour le portique avec des supports simples (supérieur). Étirement Initial (inférieur)

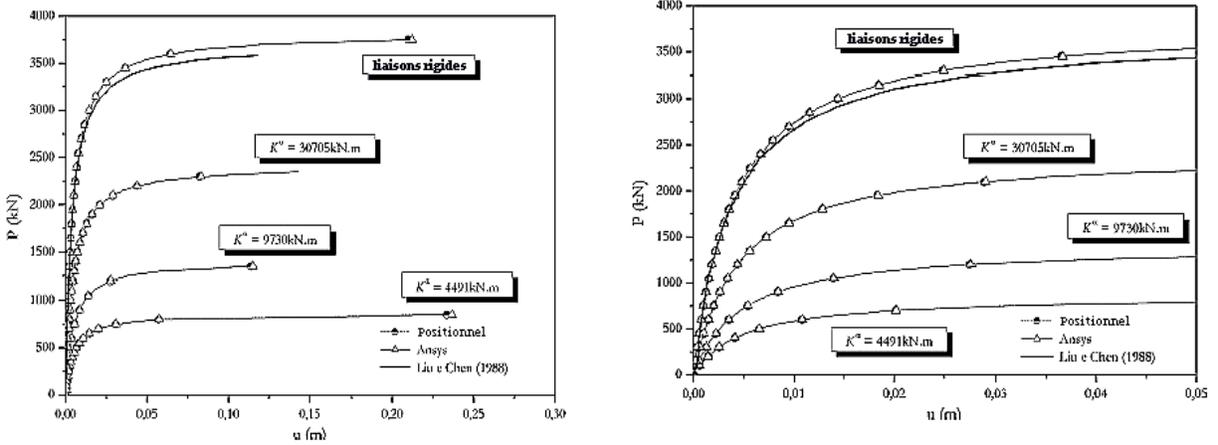


Figure 42 - Trajectoires d'équilibre pour le portique avec des supports simples avec une raideur élastique à la rotation (supérieure). Étirement initial (inférieur).

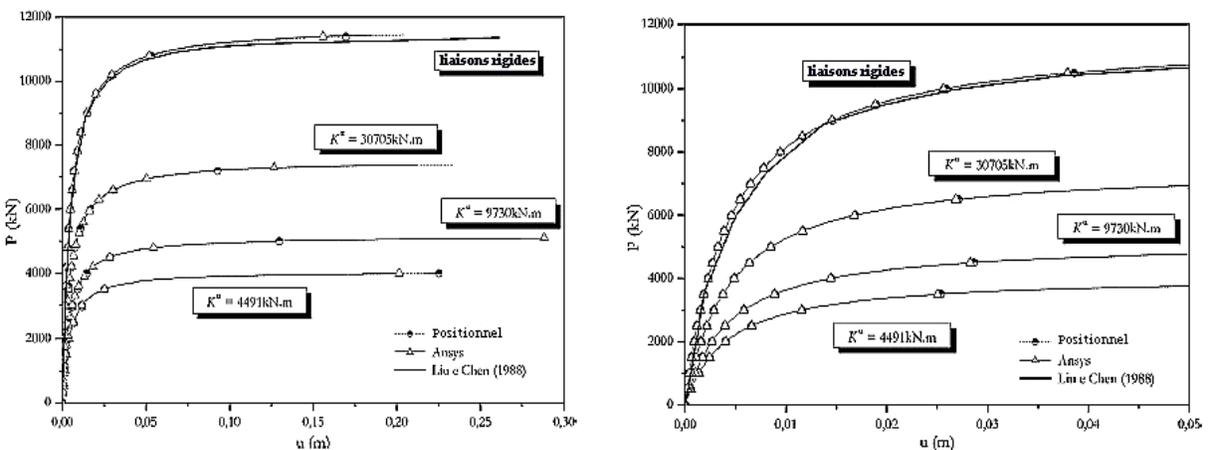


Figure 43 - Trajectoires d'équilibre pour le portique avec des supports fixes (en haut). Étirement initial (inférieur).

Les résultats obtenus avec la formulation de position étaient assez cohérents, car dans toutes les analyses, les cadres avaient une capacité de charge plus élevée à mesure que la rigidité des liaisons augmentait. De plus, en comparant les résultats des analyses de la même rigidité de la liaison, on observe une plus grande capacité de charge avec l'augmentation de la rigidité à la rotation des supports. Par conséquent, l'influence significative de la rigidité des connexions et des supports pour la stabilité d'un portique non verrouillable a été vérifiée et est conforme aux conclusions similaires trouvées par Liu et Chen (1988) [185] et Chan et Chui (2000) [186].

Dans toutes les trajectoires d'équilibre, les résultats de la formulation positionnelle coïncident pratiquement avec ceux obtenus avec Ansys, montrant la consistance de la formulation. Néanmoins, les résultats fournis par Liu et Chen (1988) [185] dans le cas de connexions rigides représentaient un comportement légèrement plus flexible dans les sections où il y a perte de stabilité. Cependant, les différences dans les forces appliquées représentent une erreur maximale, en relation avec les résultats de Liu et Chen (1988) [185], de 0,4%, 1,3% et 0,5% pour les cas avec un support simple, un support élastique pour la rotation et un support fixe, respectivement. Cette erreur est donc faible dans les aspects suivants:

- ✚ Caractéristiques assez distinctes entre la formulation positionnelle et la formulation de Liu et Chen (1988) [185] qui est corrotationnelle en utilisant la cinématique d'Euler-Bernoulli et la loi de comportement de Hooke et en adoptant un élément fini hybride pour modéliser les barres avec des connexions semi-rigides;
- ✚ Aucune identification des tolérances utilisées dans les critères de convergence, ainsi que du processus incrémental adopté par Liu et Chen (1988) [185];
- ✚ Représentation de la section dans la formulation de position et dans les analyses effectuées sur l'Ansys avec une section rectangulaire équivalente.

### **3.5 Considérations**

L'analyse des trois séries d'exemples a montré que la formulation positionnelle de l'élément portique homogène proposé dans ce chapitre est assez cohérente, efficace et robuste pour résoudre les problèmes structuraux représentés par des modèles de portique plat soumis à des effets non linéaires résultant de grands déplacements et rotations. L'élément a un degré de liberté

supplémentaire (4 par nœud) par rapport aux formulations qui travaillent avec la rotation de la section nodale comme un degré de liberté. Cependant, les distributions des contraintes de cisaillement et des contraintes axiales dans la direction transversale peuvent être représentées plus précisément et justifier pleinement une augmentation possible du coût de calcul généré par ce degré de liberté supplémentaire.

La capacité à représenter différents types de charges en tant que forces et moments concentrés et forces réparties a été vérifiée dans le premier ensemble d'exemples. La convergence a également été démontrée à partir d'une discrétisation en quatre éléments par barre. Les résultats obtenus étaient excellents, car ils coïncidaient pratiquement avec les résultats analytiques et numériques trouvés dans la littérature.

Dans le deuxième ensemble d'exemples, différents types de conditions aux limites et le couplage entre des éléments ayant des directions différentes ont été évalués. Les résultats étaient à nouveau très bien. Le processus de solution de contrôle de position a été utilisé pour résoudre le problème de l'arc plat sinusoïdal et s'est avéré efficace pour déterminer les configurations d'équilibre critiques et instables, typiques du phénomène de rupture instantanée.

Enfin, l'accent a été mis sur l'évaluation de la cohérence de la technique de pénalisation adoptée pour réaliser le couplage entre barres et également pour représenter des connexions semi-rigides et des supports flexibles à comportement élastique linéaire. Les résultats des analyses des trois porches avec différentes conditions aux limites et différentes raideurs des connexions étaient très cohérents et représentaient de manière cohérente l'effet des connexions et des conditions aux limites sur le comportement structural. Les résultats obtenus avec Ansys coïncident pratiquement avec les résultats de la formulation positionnelle.

Au vu de toutes ces observations, on peut affirmer que la formulation a une grande capacité à résoudre des problèmes géométriques non-linéaires de modèles structuraux formés par des portiques plats soumis à diverses actions externes et constitués par des liaisons rigides et des conditions aux limites différentes, étant rigide ou flexible. Il est également important de souligner que la mise en œuvre computationnelle effectuée dans le langage FORTRAN a été faite correctement et, par conséquent, est vérifiée.

# **CHAPITRE 04**

## **ÉLÉMENTS FINIS POUR PORTIQUE PLAN STRATIFIÉ**

## 4 ÉLÉMENTS FINIS POUR PORTIQUE PLAN STRATIFIÉ

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la formulation de l'élément fini pour portique plan laminé est détaillée. Ses caractéristiques générales sont identiques à celles présentées au chapitre 2 et, par conséquent, seuls les aspects particuliers sont décrits. La cinématique de l'élément stratifié est similaire à celle de l'élément homogène lorsque la section transversale est composée d'une seule couche. Dans le cas de sections stratifiées, une dilatation de la cinématique de l'élément homogène est réalisée de manière à permettre aux couches d'avoir la possibilité d'une rotation indépendante et d'une variation d'épaisseur, mais avec des positions d'interface compatibles. Cela se fait en affectant des vecteurs généralisés nodaux indépendants à la section de chaque pli.

Le mappage de position de l'élément dans les paramètres initial et actuel est effectué à partir des positions d'une ligne de référence pouvant être situées sur n'importe quelle couche. Ainsi, les degrés de liberté de l'élément sont constitués par les positions des nœuds dans la ligne de référence et par des vecteurs généralisés définissant le plan de la section de chaque pli.

L'élément développé permet d'avoir différents matériaux homogènes et isotropes dans chaque couche et le modèle constitutif utilisé pour représenter le comportement de ces matériaux est celui présenté au point 2.4.

Aux chapitres 1 et 2, il a été décrit les aspects importants à prendre en compte dans les formulations pour l'analyse de stratifiés en vue de détecter le processus de défaillance. Comme discuté, la théorie des couches suppose des hypothèses permettant la représentation de l'anisotropie dans le plan du stratifié, de l'hétérogénéité transversale, de l'effet Zig-Zag et de la continuité inter laminaire.

L'élément fini proposé dans ce travail présente une cinématique basée sur la théorie des couches, mais avec des positions intrinsèquement compatibles par les fonctions de mappage de position elles-mêmes. La formulation est non linéaire géométrique avec la possibilité de grands déplacements et rotations et la cinématique proposée permet de représenter l'effet Zig-Zag et

l'hétérogénéité transversale. L'anisotropie dans le plan du stratifié n'est pas prise en compte car le modèle structural est un portique plat.

Les répartitions de tension axiale dans le sens longitudinal et principalement de tension axiale et de cisaillement dans le sens transversal sont obtenues avec une excellente précision. La continuité inter laminaire des tensions transversales n'est pas garantie, mais la discontinuité est plus petite car les déformations transversales sont discontinues du fait de la rotation indépendante des couches. Cette discontinuité des contraintes transversales peut être réduite en augmentant la discrétisation de la section, car le nombre de couches du modèle numérique est indépendant du nombre de plis composant le stratifié. Ensuite, la continuité inter laminaire est facilement récupérée en calculant la moyenne des tensions obtenues pour les couches adjacentes à une interface donnée.

L'élément proposé permet l'analyse de portiques plats constitués de stratifiés minces ou épais, ne présentant pas de problèmes de dysfonctionnement de la matrice pour ce type de problèmes. Le mauvais conditionnement survient dans la modélisation des stratifiés minces et en raison de la présence de couches minces, même dans les stratifiés épais. De grandes variations des propriétés élastiques des matériaux constitutifs des couches peuvent également entraîner des problèmes de dysfonctionnement de la matrice.

Ainsi, lorsque des éléments finis bidimensionnels ou des éléments finis développés sur la base de la théorie de Layerwise (2004a) de Reddy [5] sont utilisés pour analyser les cadres plans stratifiés, des résultats inexacts concernant les distributions de tension, en particulier transversales, peuvent nécessiter un affinement excessif du maillage d'éléments finis pour éviter un mauvais conditionnement.

L'élément fini proposé dans ce travail est une alternative, car avec des mailles beaucoup moins raffinées, il est possible d'obtenir des résultats précis sur la répartition des déplacements et des contraintes le long de la section transversale du stratifié, permettant ainsi la modélisation future du processus de délamination ou de rupture par glissement.

En plus de la description de l'élément fini dans ce chapitre, nous présentons également les résultats d'analyses géométriques non linéaires réalisées dans des exemples de poutres stratifiées pour lesquelles des résultats numériques et analytiques sont disponibles dans la littérature. Des

exemples de cadres plats stratifiés sont également proposés et analysés. Dans tous les exemples, des analyses numériques sont effectuées sur le logiciel Ansys à l'aide d'éléments finis à deux dimensions. L'objectif est de vérifier les résultats obtenus avec l'élément proposé dans ce travail et de comparer son efficacité par rapport aux éléments finis bidimensionnels. En outre, les analyses sont effectuées afin de vérifier la cohérence, l'efficacité et la robustesse de la formulation en ce qui concerne principalement la représentation correcte des distributions de contraintes.

Un code informatique a été développé avec la mise en œuvre de la formulation dans le langage de programmation FORTRAN. Les résultats des analyses sont fournis par le programme à travers des fichiers de sortie de données qui permettent la construction de trajectoires d'équilibre, la visualisation des configurations actuelles et la visualisation des déplacements, des déformations et des distributions de déformations. Le logiciel de post-traitement permet de visualiser les résultats.

#### **4.2 Mappage positionnel des configurations initiales et actuelles**

La cartographie de l'élément fini du portique stratifié est réalisée en interpolant les positions des points nodaux situés sur une ligne de référence ( $l_r$  - en minuscule) et les vecteurs généralisés tangents aux plans nodaux de chaque pli. Avec cette interpolation, on peut définir les positions de n'importe quel point de l'élément.

Le mappage de position est effectué de manière à ce que la ligne de référence puisse être affectée à une couche quelconque et qu'il ne soit pas nécessaire de la placer au centre de la couche. Cette liberté de choisir le positionnement de la ligne de référence permet d'affecter des contraintes aux positions de nœuds situées en un point quelconque de la section transversale de l'élément et non seulement au centre de la section comme dans le cas de l'élément à portique plat homogène.

La configuration initiale et la configuration actuelle ont leurs positions mappées de la même manière. Dans la configuration initiale, l'emplacement de la ligne de référence et les positions des nœuds sont des informations fournies lors du prétraitement. Les vecteurs généralisés sont unitaires, normaux à la ligne de référence et peuvent être obtenus à partir du vecteur tangent.

Dans la configuration actuelle, les positions des nœuds de la ligne de référence et des vecteurs généralisés de chaque couche constituent les degrés de liberté de l'élément, les inconnues du problème étant non linéaires. La figure 44 illustre l'idée de la cartographie de position pour un élément constitué de cinq couches et d'un degré cubique pour l'interpolation polynomiale longitudinale utilisée.

Pour permettre de localiser la ligne de référence sur n'importe quelle couche et à n'importe quelle position dans cette couche, le mappage de position d'une couche donnée dans les configurations initiale et actuelle dépend du fait que cette couche coïncide avec la couche de référence (LR - avec lettres majuscules) ou que ce soit au-dessus ou au-dessous de cela. Ainsi, trois expressions distinctes pour le mappage de position sont requises.

Soit  $k$  une carte de correspondance dans la configuration initiale. Les équations de la cartographie de position sont exprimées par:

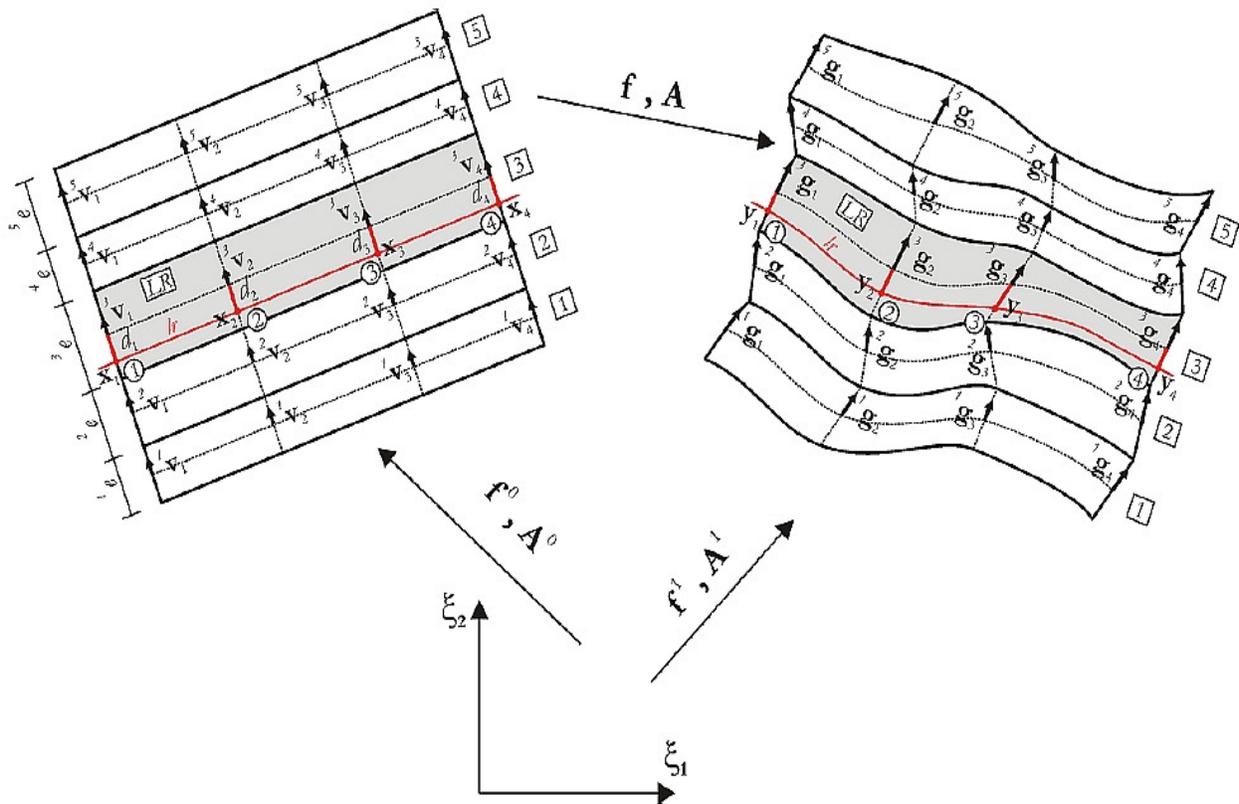


Figure 44 - Cartographie de la position de l'élément de portique plat laminé.

a) Cartographie pour la couche  $k$  égale à la couche de référence (LR):

$${}^k f^0(\xi_1, \xi_2) = {}^k x(\xi_1, \xi_2)$$

$${}^k x^i(\xi_1, \xi_2) = [x_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} [{}^k v_w^i \Phi_w(\xi_1)] \quad (113)$$

Avec :  $i = 1, 2$  et  $j, w = 1, \dots, (gr + 1)$ .

Dans cette équation,  ${}^k f^0(\xi_1, \xi_2)$  représente la fonction de mappage de position de la configuration initiale  ${}^k x(\xi_1, \xi_2)$  à partir de l'espace sans dimension de la couche  $k = LR$ ,  ${}^k x^i(\xi_1, \xi_2)$  représente la position initiale dans la direction  $i$  de tout point situé dans  $k$ ,  $x_j^i$  est la position dans la direction  $i$  du nœud  $j$  sur la ligne de référence ( $lr$ ),  $d_j$  est la distance entre le nœud  $j$  sur la ligne de référence et le centre de la couche  $k$ , et  $k_e$  est l'épaisseur de la couche  $k$ ,  ${}^k v_w^i$  est la composante dans la direction  $i$  du vecteur appartenant au plan de la section de la couche  $k$  passant par le nœud  $w$  et  $\Phi_w(\xi_1)$  est la fonction de forme associée au nœud  $w$  constituée d'un polynôme de Lagrange de degré correspondant à la variable  $gr$ . Les versions  ${}^k v_w^i$  normales à l'axe situé au centre des couches sont obtenues de manière analogue aux versions de l'élément de portique plat homogène, comme présenté au point 3.2. Les plis étant toujours considérés comme parallèles dans la configuration initiale, donc le vecteur unitaire de chaque feuille est identique au vecteur unitaire normal sur la ligne de référence.

Dans cette cartographie, le premier tracé identifie les positions de tous les points appartenant à la ligne de référence et, à partir d'un point situé sur cette ligne de référence, le deuxième tracé identifie les positions de tous les points dans la section transversale de la couche  $k$ . Lorsque  $\xi_2 = -1$  le point est situé à l'interface inférieure de  $k$ , lorsque  $\xi_2 = -2 \frac{|dj\Phi_j(\xi_1)|}{k_e}$  le point est situé sur la ligne de référence, lorsque  $\xi_2 = 0$  le point est situé au centre de  $k$  et lorsque  $\xi_2 = 1$  le point est situé dans l'interface supérieure de  $k$ . La figure 45 illustre la cartographie de tout point de coordonnées sans dimension ( $\xi_1 = a, \xi_2 = b$ ).

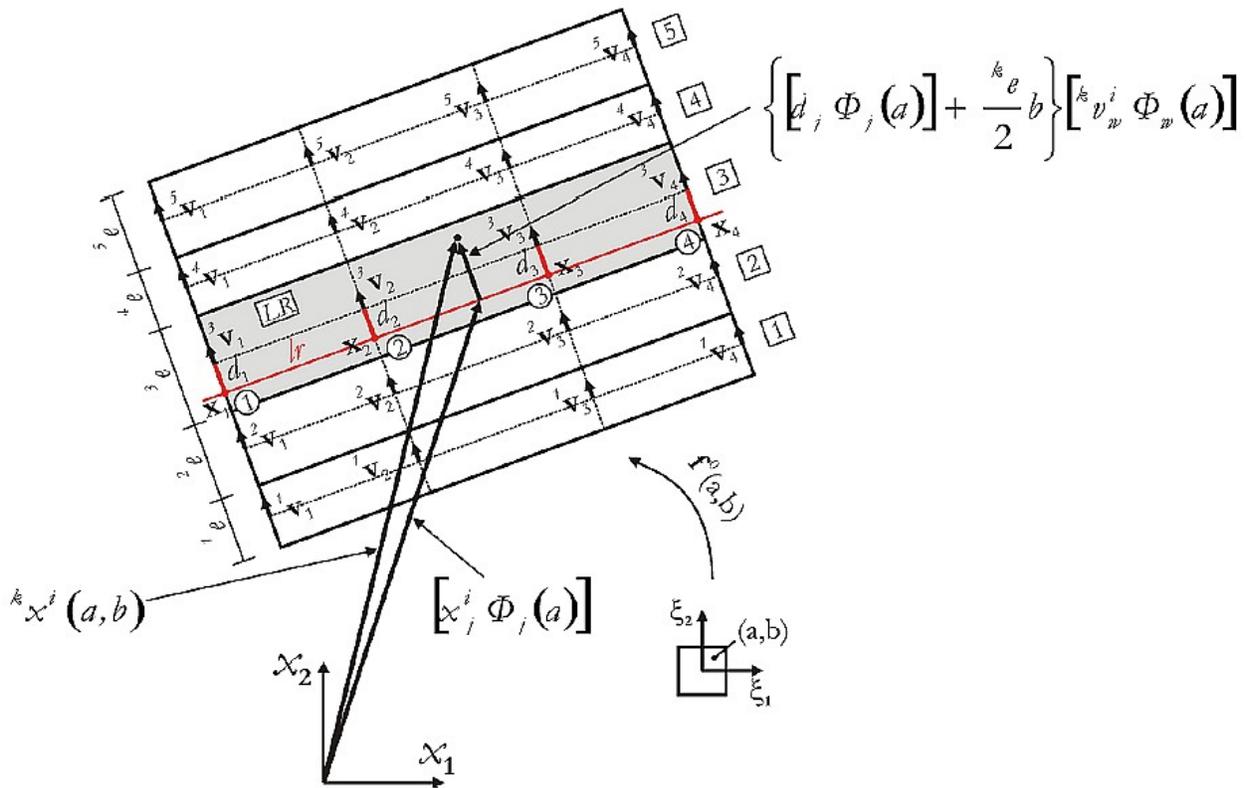


Figure 45 - Mappage de position de tout point de la couche de référence dans la configuration initiale.

b) Cartographie des pales  $k$  sous la couche de référence (LR):

$${}^k f^0(\xi_1, \xi_2) = {}^k x(\xi_1, \xi_2)$$

$${}^k x^i(\xi_1, \xi_2) = [x_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR e}{2} \right\} [{}^{LR} v_w^i \Phi_w(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m e [{}^m v_j^i \Phi_j(\xi_1)] + k e [{}^k v_j^i \Phi_j(\xi_1)] \frac{\xi_2 - 1}{2} \quad (114)$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w = 1, \dots, (gr + 1)$ .

Dans cette équation,  ${}^{LR} e$  et  ${}^{LR} v_w^i$  sont l'épaisseur de la LR et la composante dans la direction  $i$  du plan de la coupe transversale de la LR passant par le nœud  $w$ , respectivement,  $m e$  et  ${}^m v_w^i$  sont analogues aux couches inférieures à LR, de la couche  $k + 1$  à LR - 1. Les autres variables ont une description similaire à celle de l'équation (113).

Dans la cartographie représentée dans l'équation (114), le premier tracé identifie les positions de tous les points appartenant à la ligne de référence et, étant donné un point de cette ligne de référence, le second tracé identifie la position du point situé à l'interface inférieure de la *LR* et le troisième tracé localise le point situé à l'interface inférieure de la couche immédiatement au-dessus de la couche cartographiée. Enfin, le quatrième graphique représente tous les points de la section transversale de la couche *k*. Lorsque  $\xi_2 = -1$  le point est situé à l'interface inférieure de *k*, lorsque  $\xi_2 = 0$  le point est situé au centre de *k* et quand  $\xi_2 = 1$  le point est situé à l'interface supérieure de *k*.

La figure 46 illustre la cartographie de tout point dont les coordonnées sans dimension sont ( $\xi_1 = a, \xi_2 = b$ ).

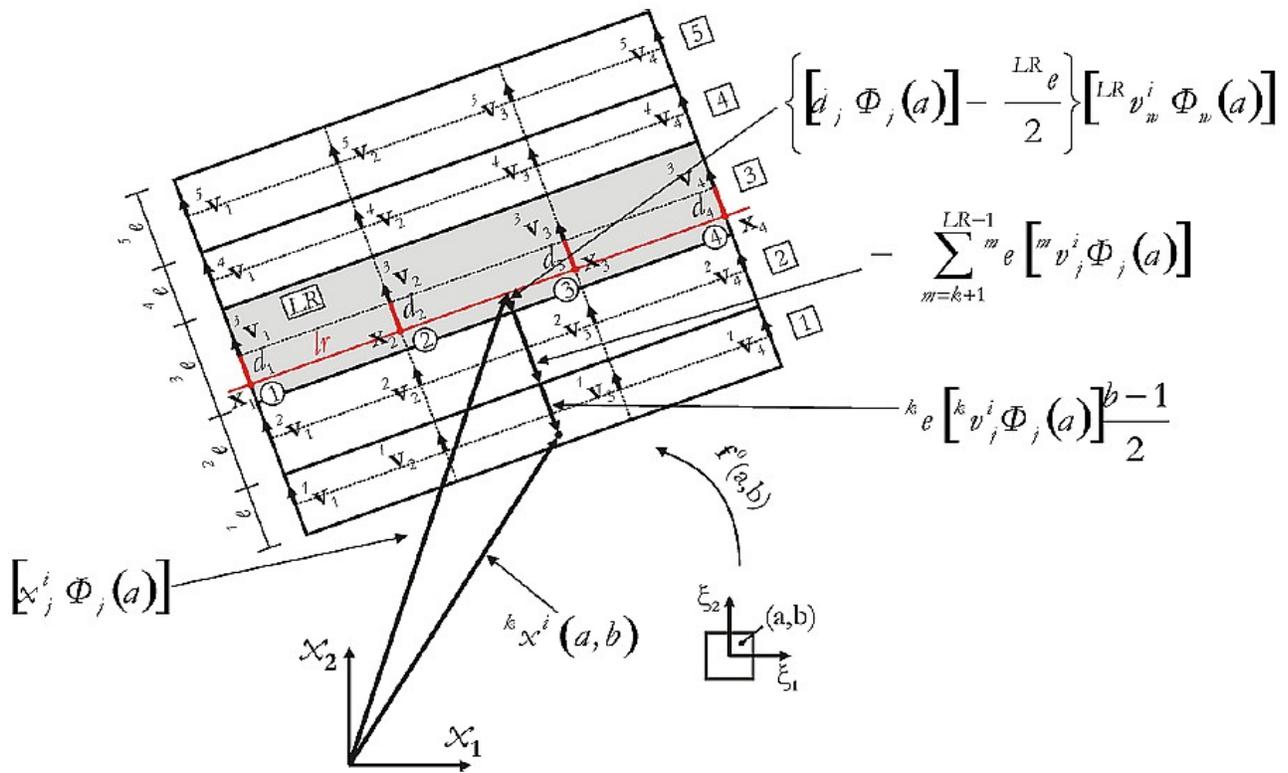


Figure 46 - Mappage de position de tout point de la configuration initiale d'une couche inférieure à la couche de référence.

c) Cartographie pour les pales  $k$  au-dessus de la couche de référence (LR):

$$\begin{aligned}
 {}^k f^0(\xi_1, \xi_2) &= {}^k x(\xi_1, \xi_2) \\
 {}^k x^i(\xi_1, \xi_2) &= [x_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \{[d_j \Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2}\} [{}^{LR} v_w^i \Phi_w(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m_e [{}^m v_j^i \\
 \Phi_j(\xi_1)] + k_e [{}^k v_j^i \Phi_j(\xi_1)] \frac{\xi_2+1}{2}
 \end{aligned} \tag{115}$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w = 1, \dots, (gr + 1)$ .

Dans cette équation,  $m_e$  et  ${}^m v_w^i$  sont, pour chaque couche  $m$  de  $LR+1$  à  $k-1$ , l'épaisseur et la composante dans la direction  $i$  du vecteur appartenant au plan de la section transversale de la couche  $m$  dans le plan nodal  $w$ , respectivement. Les autres variables ont des descriptions similaires aux descriptions des équations (113) et (114).

Dans cette cartographie, le premier tracé identifie les positions de tous les points appartenant à la ligne de référence et, à partir d'un point situé sur cette ligne de référence, le deuxième tracé identifie la position du point situé dans l'interface supérieure du  $LR$  et la troisième parcelle localise le point dans l'interface supérieure de la couche immédiatement inférieure à la couche cartographiée. Enfin, le quatrième graphique représente tous les points de la section transversale de la couche  $k$ . Lorsque  $\xi_2 = -1$  le point est situé à l'interface inférieure de  $k$ , lorsque  $\xi_2 = 0$  le point est situé au centre  $k$  et quand  $\xi_2 = 1$  le point est situé à l'interface supérieure de  $k$ . La figure 47 illustre le mappage de tout point dont les coordonnées sans dimension sont à  $(\xi_1 = a, \xi_2 = b)$ .

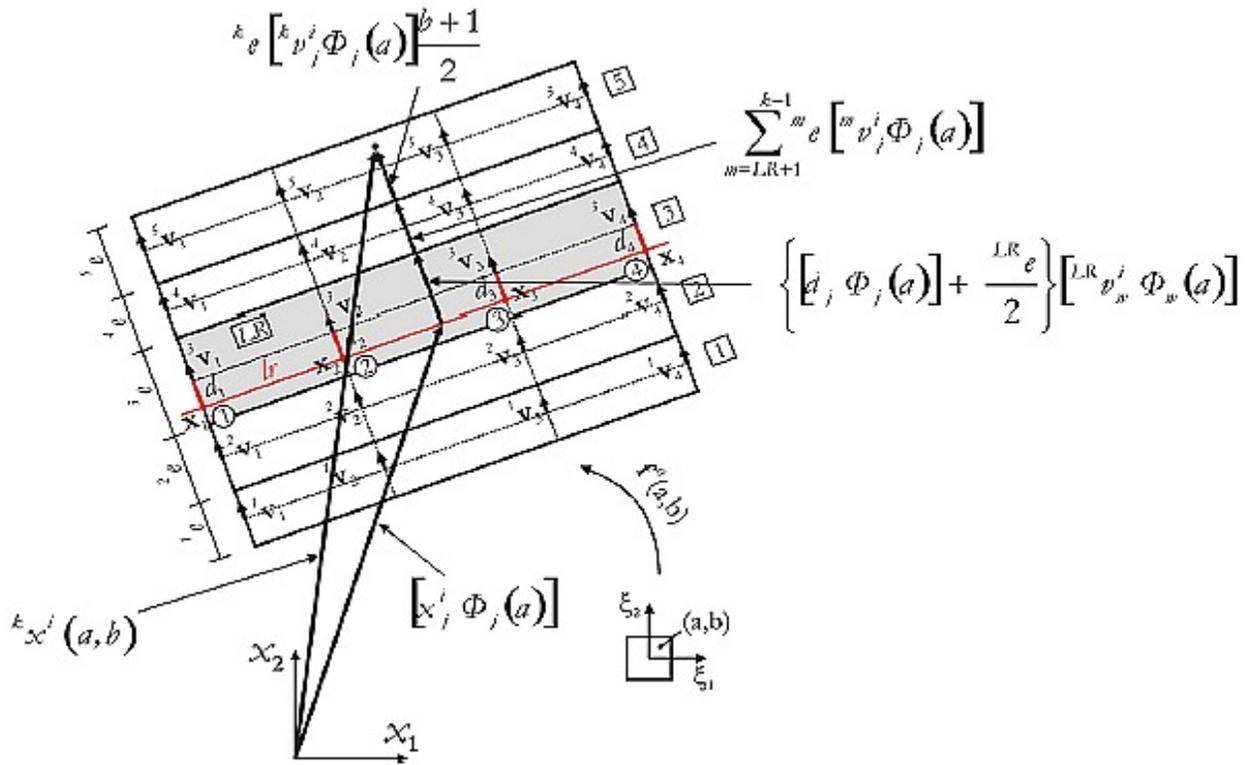


Figure 47 - Mappage de position d'un point quelconque dans la configuration initiale d'une couche au-dessus de la couche de référence.

Le mappage de position pour la configuration actuelle est totalement analogue à celui de la configuration initiale, les positions initiales  $k x^i$  et  $x_j^i$  étant remplacées par les positions actuelles  $k y^i$  et  $y_j^i$  et les sommets  $LR v_j^i$ ,  $m v_j^i$  et  $k v_j^i$  par les vecteurs généralisés  $LR g_j^i$ ,  $m g_j^i$  et  $k g_j^i$  dans toutes les expressions de mappage.

Ainsi, les mappages des couches dans la configuration actuelle sont exprimés par:

a) Cartographie de la couche  $k$  égale à la couche de référence ( $LR$ ):

$$k f^1(\zeta_1, \zeta_2) = k y(\zeta_1, \zeta_2)$$

$$k y^i(\zeta_1, \zeta_2) = [y_j^i \Phi_j(\zeta_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\zeta_1)] + \frac{k_e}{2} \zeta_2 \right\} [k g_w^i \Phi_w(\zeta_1)] \quad (116)$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w = 1, \dots, (gr + 1)$ .

b) Cartographie des couches k au-dessous la couche de référence (LR):

$${}^k f^1(\xi_1, \xi_2) = {}^k y(\xi_1, \xi_2)$$

$${}^k y^i(\xi_1, \xi_2) = [y_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} [{}^{LR} g_w^i \Phi_w(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m e [{}^m g_j^i \Phi_j(\xi_1)] + {}^k e [{}^k g_j^i \Phi_j(\xi_1)] \frac{\xi_2 - 1}{2} \quad (117)$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w = 1, \dots, (gr + 1)$ .

c) Cartographie des couches k au-dessus de la couche de référence (LR):

$${}^k f^1(\xi_1, \xi_2) = {}^k Y(\xi_1, \xi_2)$$

$${}^k y^i(\xi_1, \xi_2) = [y_j^i \Phi_j(\xi_1)] + \left\{ [d_j \Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} [{}^{LR} g_w^i \Phi_w(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m e [{}^m g_j^i \Phi_j(\xi_1)] + {}^k e [{}^k g_j^i \Phi_j(\xi_1)] \frac{\xi_2 + 1}{2} \quad (118)$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w = 1, \dots, (gr + 1)$ .

Dans ces expressions, les positions actuelles des nœuds situés sur la ligne de référence, représentées par  $y_j^i$ , et les vecteurs généralisés des sections nodales de chaque couche  ${}^k g_j^i$  constituent les degrés de liberté de l'élément fini laminé. L'élément a été développé afin de permettre l'utilisation d'un nombre quelconque de couches pour composer la section transversale et d'un degré quelconque pour les fonctions d'approximation polynomiale. Ainsi, le nombre de degrés de liberté ( $ngl$ ) de l'élément est écrit en fonction du nombre de couches utilisées dans le modèle numérique ( $nlam$ ) et du degré d'approximation utilisé:

$$ngl = 2 (gr+1)(nlam+1), \quad (119)$$

$(gr+1)$  Représente le nombre de nœuds de l'élément et  $2(nlam+1)$  le nombre de degrés de liberté par nœud.

Bien que  $d_j$  et  ${}^k e$  aient été maintenus constants dans les expressions de la cartographie de la configuration actuelle, l'élément permet la variation de la position de la ligne de référence ( $lr$ ) et de l'épaisseur des couches, le vecteur généralisé pouvant alors cesser d'être unitaire dans la configuration actuelle. Ainsi, la distance  $D(\xi_1)$  de la ligne de référence ( $lr$ ) au centre de la couche de référence ( $LR$ ) et l'épaisseur des couches  ${}^k E(\xi_1)$  dans la configuration actuelle deviennent:

$$\begin{aligned} D(\xi_1) &= [d_j \Phi_j(\xi_1)] \left\{ \left\| {}^{LR} \mathbf{g}_w \right\| \Phi_w(\xi_1) \right\} \\ {}^k E(\xi_1) &= {}^k e \left\{ \left\| {}^k \mathbf{g}_w \right\| \Phi_w(\xi_1) \right\} \end{aligned} \quad (120)$$

Avec  $j$  et  $w = 1, \dots, (gr + 1)$  représentant les nœuds d'élément.

La cartographie décrite dans les équations (116), (117) et (118) génère une cinématique dont les sections transversales restent plates uniquement sur les couches, ce qui permet de représenter l'effet particulier de Zig-Zag sur les composites stratifiés. Le niveau auquel les sections des couches cessent d'être orthogonales à la ligne de référence ( $lr$ ) est associé aux contraintes de cisaillement et au module d'élasticité transversal du matériau de chaque couche. Cette cartographie correspond à une cinématique similaire à celle des théories complètes en couches, car outre l'effet Zig-Zag, on prend en compte la variation d'épaisseur dans les glissières.

Une fois que les fonctions de mappage de position des paramètres initial et actuel pour l'élément stratifié sont définies, les aspects de la formulation générale présentée au chapitre 2 qui dépendent de ces fonctions de mappage sont décrits.

### 4.3 Particularités de l'élément fini du portique plat laminé

Au chapitre 2, la séquence complète des opérations mathématiques de la formulation de position appliquée aux problèmes bidimensionnels a été développée et, dans le point précédent, la cinématique de l'élément de portique plat stratifié a été décrite. Par conséquent, pour définir complètement la formulation par éléments finis, il suffit d'identifier les termes qui dépendent de la fonction de mappage de position utilisée. Ceci est montré dans les éléments suivants.

### 4.3.1 Gradient des fonctions de mappage de position

Dans la section 2.3, la fonction de changement de configuration a été déterminée à partir d'une composition entre les fonctions de mappage des configurations initiale et actuelle (équation (11)). Comme indiqué dans l'élément précédent, les fonctions de mappage sont définies pour chaque pli. Ainsi, la fonction de changement de configuration  $f$  et son gradient  $A$  sont également définis pour chaque pli  $k$ . Il s'agit d'une différence importante par rapport à l'élément de portique plat homogène, qui avait  $f$  et  $A$  calculés pour la barre entière.

De la même manière que les fonctions de mappage de position, les gradients  $A^0(\xi_1, \xi_2)$  et  $A^1(\xi_1, \xi_2)$  sont spécifiés en trois groupes: pour la couche de référence (LR) pour les plis inférieurs de LR et pour les plis au-dessus de LR. Les termes des matrices constituant ces gradients sont calculés en regardant l'équation (14) et les fonctions de mappage de la configuration initiale (équations (113), (114) et (115) et la configuration actuelle (Equations (116), (117) et (118)). Ainsi, les termes de ces gradients sont exprimés par:

a) Gradients du pli  $k$  égaux au pli de référence (LR):

$${}^k A^0(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} [x_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)] [{}^k v_w^1 \Phi_w(\xi_1)] \\ + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} [{}^k v_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] \end{array} \right] & \frac{k_e}{2} [{}^k v_w^1 \Phi_w(\xi_1)] \\ \left[ \begin{array}{l} [x_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)] [{}^k v_w^2 \Phi_w(\xi_1)] \\ + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} [{}^k v_w^2 \Phi_{w,1}(\xi_1)] \end{array} \right] & \frac{k_e}{2} [{}^k v_w^2 \Phi_w(\xi_1)] \end{bmatrix} \quad (121)$$

$${}^k A^1(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} [y_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^k \mathbf{g}_w^1 \Phi_w(\xi_1)] & \frac{k_e}{2} [{}^k \mathbf{g}_w^1 \Phi_w(\xi_1)] \\ + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} [{}^k \mathbf{g}_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] & \\ \\ [y_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^k \mathbf{g}_w^2 \Phi_w(\xi_1)] & \\ + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} [{}^k \mathbf{g}_w^2 \Phi_{w,1}(\xi_1)] & \frac{k_e}{2} [{}^k \mathbf{g}_w^2 \Phi_w(\xi_1)] \end{bmatrix} \quad (122)$$

b) Gradients des plis k sous le pli de référence (LR) :

$${}^k A^0(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} [x_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR} v_w^1 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} & \frac{k_e}{2} [{}^k v_j^1 \Phi_j(\xi_1)] \\ X[{}^{LR} v_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m e [{}^m v_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k v_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2-1}{2} & \\ \\ [x_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR} v_w^2 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} & \\ X[{}^{LR} v_w^2 \Phi_{w,1}(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m e [{}^m v_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k v_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2-1}{2} & \frac{k_e}{2} [{}^k v_j^2 \Phi_j(\xi_1)] \end{bmatrix} \quad (123)$$

$${}^k A^1(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} [y_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR} \mathbf{g}_w^1 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} & \frac{k_e}{2} [{}^k \mathbf{g}_j^1 \Phi_j(\xi_1)] \\ X[{}^{LR} \mathbf{g}_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m e [{}^m \mathbf{g}_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k \mathbf{g}_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2-1}{2} & \\ \\ [y_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR} \mathbf{g}_w^2 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} & \\ X[{}^{LR} \mathbf{g}_w^2 \Phi_{w,1}(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m e [{}^m \mathbf{g}_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k \mathbf{g}_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2-1}{2} & \frac{k_e}{2} [{}^k \mathbf{g}_j^2 \Phi_j(\xi_1)] \end{bmatrix} \quad (124)$$

c) Gradients des pales  $k$  au-dessus de la couche de référence (LR) :

$${}^k A^0(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} [x_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR}v_w^1 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} \frac{k_e}{2} [{}^k v_j^1 \Phi_j(\xi_1)] \\ X[{}^{LR}v_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m e [{}^m v_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k v_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2+1}{2} \\ \\ [x_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR}v_w^2 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} \frac{k_e}{2} [{}^k v_j^2 \Phi_j(\xi_1)] \\ X[{}^{LR}v_w^2 \Phi_{w,1}(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m e [{}^m v_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k v_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2+1}{2} \end{bmatrix} \quad (125)$$

$${}^k A^1(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} [y_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR}g_w^1 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} \frac{k_e}{2} [{}^k g_j^1 \Phi_j(\xi_1)] \\ X[{}^{LR}g_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m e [{}^m g_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k g_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2+1}{2} \\ \\ [y_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR}g_w^2 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} \frac{k_e}{2} [{}^k g_j^2 \Phi_j(\xi_1)] \\ X[{}^{LR}g_w^2 \Phi_{w,1}(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m e [{}^m g_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k g_j^2 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_2+1}{2} \end{bmatrix} \quad (126)$$

Dans les équations (121) à (126),  $\Phi_{j,1}(\xi_1) = \frac{\partial \Phi_j(\xi_1)}{\partial \xi_1}$  et  $\Phi_{w,1}(\xi_1) = \frac{\partial \Phi_w(\xi_1)}{\partial \xi_1}$

Il convient de noter que, bien que les termes qui composent les gradients  ${}^k A^0(\xi_1, \xi_2)$  et  ${}^k A^1(\xi_1, \xi_2)$  dans les équations ci-dessus soient assez étendus, les opérations mathématiques impliquant ces gradients sont plus faciles, car elles sont effectuées numériquement. Ainsi, il n'est pas nécessaire de rendre explicites les équations qui composent le gradient  ${}^k A = {}^k A^1(\xi_1, \xi_2) \cdot [{}^k A^0(\xi_1, \xi_2)]^{-1}$ .

### 4.3.2 Energie potentielle de déformation

Au point 2.4, la loi de comportement du matériau a été décrite. Dans le cas de l'élément stratifié, cette loi est attribuée au niveau des couches qui peuvent avoir ou non des paramètres élastiques différents des autres. Ainsi, l'énergie de déformation spécifique décrite dans l'équation (24) est maintenant appliquée à chaque pli séparément. Avec les gradients  ${}^k A^0(\xi_1, \xi_2)$  et  ${}^k A^1(\xi_1, \xi_2)$  définis pour tout pli  $k$  du stratifié, l'énergie de déformation potentielle de la couche peut être calculée selon la procédure décrite dans le point 2.5. En partant des équations (24), (31) et (32), l'énergie potentielle de déformation d'un pli  $k$  peut s'écrire comme suit:

$${}^k u_e = \frac{1}{2} \frac{{}^k E}{1 - ({}^k \nu)^2} [({}^k E_{11})^2 + ({}^k E_{22})^2 + 2({}^k \nu)({}^k E_{11})({}^k E_{22}) + \frac{1 - {}^k \nu}{2} ({}^k E_{12} + {}^k E_{21})^2]$$

$${}^k U = \int_{V_0} {}^k u_e dV_0 \quad (127)$$

$${}^k U = {}^k b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^k u_e(\xi_1, \xi_2) J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

Dans lequel la répétition de l'indice  $k$  n'implique pas la somme. Cette intégrale est calculée numériquement avec la quadrature de Gauss d'une manière analogue à l'équation (33).

L'énergie calculée dans l'équation (127) fait référence à une seule couche  $k$ . Comme l'énergie est une grandeur scalaire, l'énergie de déformation de l'élément stratifié peut être obtenue par une simple somme des énergies de chaque pli. Par conséquent, il faut:

$${}^{elm} U = \sum_{k=1}^{nlam} {}^k U \quad (128)$$

### 4.3.3 Energie potentielle relative aux actions extérieures

Dans la partie de l'énergie potentielle relative aux actions extérieures, les contributions des forces et moments concentrés et des forces distribuées sont prises en compte. L'énergie associée à cette dernière action est représentée par des forces nodales équivalentes.

La formulation de l'élément de portique plat stratifié a été développée de manière à permettre l'application de forces externes à n'importe quelle position de l'élément, car les problèmes

analysés vont des stratifiés minces à épais. Surtout dans les stratifiés épais, il est important de considérer la force dans la position correcte pour que les distributions de tension obtenues soient plus précises et pour permettre une meilleure comparaison avec les résultats obtenus à partir de l'analyse utilisant des éléments finis bidimensionnels.

C'est une caractéristique intéressante qui constitue une contribution de l'élément fini proposé. Bien qu'il s'agisse d'un élément de portique plat, la formulation offre une souplesse dans l'application de chargements similaire aux éléments finis bidimensionnels.

Les actions externes sont considérées comme conservatrices et la relation entre force et position est énergiquement conjuguée. Ainsi, une énergie potentielle externe peut être calculée par le négatif du produit scalaire entre le vecteur de force externe et le vecteur de position actuelle du point d'application de cette force (équation (40)).

Les forces concentrées sont considérées comme appliquées à n'importe quel point d'une section nodale. Étant donné que la cartographie des positions varie selon que la couche correspond à la couche de référence (LR) ou en dessous ou au-dessus de celle-ci, l'énergie potentielle associée dépend de la couche à laquelle la force est appliquée. De plus, étant donné que la force peut être appliquée dans une position ne coïncidant pas avec le nœud situé dans la ligne de référence (lr), il existe des conjugués d'énergie équivalente associés aux composants des vecteurs généralisés des plis.

Considérant les fonctions de mappage de position de la configuration actuelle présentées dans les équations (116), (117) et (118) et remplaçant  $\Phi_n(\xi_1 = \xi_{1n}) = 1$  par la fonction de forme associée au nœud  $n$  dont la section contient la force appliquée et nulle dans les autres fonctions de la forme, l'énergie potentielle par rapport à une force concentrée peut être calculée avec les expressions suivantes:

a) Force appliquée sur la couche  $k$  égale à la couche de référence (LR):

$$\Omega = - P_n \cdot {}^k y(\xi_{1n}, \xi_{2n})$$

$$\Omega = - P_n^i \cdot y_n^i - \left[ P_n^i \left( d_n + \frac{k_e}{2} \xi_{2n} \right) \right] {}^k g_n^i \quad (129)$$

$$\Omega = - P_n^i \cdot y_n^i - {}^k M_n^i {}^k g_n^i$$

Où  $i = 1, 2$

b) Force appliquée sur une couche  $k$  en dessous de la couche de référence (LR):

$$\Omega = - P_n \cdot {}^k y(\xi_{1n}, \xi_{2n})$$

$$\Omega = - P_n^i \cdot y_n^i - \left[ P_n^i \left( d_n - \frac{LR_e}{2} \right) \right] {}^{LR} g_n^i - \sum_{m=k+1}^{LR-1} [(-P_n^i m e)^m g_n^i] - \left[ P_n^i \left( {}^k e^{\frac{\xi_{2n}-1}{2}} \right) \right] {}^k g_n^i \quad (130)$$

$$\Omega = - P_n^i \cdot y_n^i - {}^{LR} M_n^i {}^{LR} g_n^i - \sum_{m=k+1}^{LR-1} ({}^m M_n^i m g_n^i) - {}^k M_n^i {}^k g_n^i$$

Où  $i = 1, 2$

c) Force appliquée sur une couche  $k$  au-dessus de la couche de référence (LR):

$$\Omega = - P_n \cdot {}^k y(\xi_{1n}, \xi_{2n})$$

$$\Omega = - P_n^i \cdot y_n^i - \left[ P_n^i \left( d_n + \frac{LR_e}{2} \right) \right] {}^{LR} g_n^i - \sum_{m=LR+1}^{k-1} [(P_n^i m e)^m g_n^i] - \left[ P_n^i \left( {}^k e^{\frac{\xi_{2n}+1}{2}} \right) \right] {}^k g_n^i \quad (131)$$

$$\Omega = - P_n^i \cdot y_n^i - {}^{LR} M_n^i {}^{LR} g_n^i - \sum_{m=LR+1}^{k-1} ({}^m M_n^i m g_n^i) - {}^k M_n^i {}^k g_n^i$$

Où  $i = 1, 2$

Dans ces expressions, la répétition des indices  $k$  et  $n$  n'implique pas la somme. Les termes écrits avec la lettre  $M$  sont les conjugués énergétiques associés aux vecteurs généralisés des couches de la section nodale  $n$  qui contient la force concentrée et  $\xi_{2n}$  est la coordonnée sans dimension correspondant à la position dans l'épaisseur de la couche  $k$  sur laquelle la force est appliquée.

La procédure de prise en compte des forces distribuées est similaire à celle présentée pour l'élément de portique plat homogène (rubrique 3.3.3). Cependant, dans l'élément stratifié, la force répartie peut être appliquée à n'importe quelle position et pas seulement à la ligne de référence (lr). Ainsi, l'énergie potentielle associée peut être calculée selon l'équation (74), mais en tenant compte de la cartographie des positions de puissance réparties sur une couche donnée  $k$ . Le point d'application de la force par rapport à l'épaisseur de la couche est identifié en calculant la coordonnée sans dimension  $\xi_2 = \xi_{2q}$ .

L'expression pour le calcul de l'énergie potentielle s'écrit:

$$\Omega = - \int_{-1}^1 {}^k q^i(\xi_1) {}^k y^i(\xi_1, \xi_{2q}) {}^k J(\xi_1) d\xi_1, \quad \text{Où } i = 1, 2. \quad (132)$$

Dans laquelle  ${}^k q^i(\xi_1)$  est la force distribuée, représentée par une interpolation polynomiale selon l'équation (73),  ${}^k y^i(\xi_1, \xi_{2q})$  est la cartographie des positions actuelles de la force distribuée sur la couche k et  ${}^k J(\xi_1)$  est le jacobien de la transformation d'espace sans dimension pour la ligne de mappage de ces positions dans la configuration initiale, calculée selon l'équation (68). La répétition de l'indice k n'implique pas la somme.

En appliquant la force distribuée en dehors de la ligne de référence (lr), en plus des forces nodales équivalentes, des énergies conjuguées équivalentes associées aux composants des vecteurs généralisés des couches influencées par la force et dans toutes les sections nodales apparaissent. De la même manière que dans le cas des forces concentrées, il est nécessaire d'examiner les possibilités d'application de la force répartie sur la couche de référence (LR) et au-dessous ou au-dessus de celle-ci. Pour chacune de ces trois situations, les fonctions de mappage de position correspondantes de la configuration actuelle (équations (116), (117) et (118)) et de mappage de position de la configuration initiale (équations (113), (114) et (115)). Ces derniers sont nécessaires à la détermination jacobienne  ${}^k J(\xi_1)$ .

Pour cela, il suffit de définir les composantes du vecteur tangent à la ligne d'application de la force répartie dans la configuration initiale, comme on peut le constater dans l'équation (68). Ces composants sont obtenus avec la dérivée de la position initiale par rapport à la coordonnée sans dimension  $\xi_1$ :

$${}^k t^i(\xi_1) = \frac{d {}^k x^i(\xi_1, \xi_{2q})}{d \xi_1}, \quad \text{où } i = 1, 2 \quad (133)$$

Où  ${}^k t^i(\xi_1)$  est la composante dans la direction i du vecteur tangent à la ligne d'application de la force répartie située sur la couche k et  ${}^k x^i(\xi_1, \xi_{2q})$  est la fonction de mappage de cette ligne dans la configuration initiale.

Par conséquent, les expressions pour la détermination de l'énergie potentielle par rapport à la force répartie appliquée sur une couche k de l'élément, ainsi que celles dérivées de l'équation (133), sont définies par:

a) Pour une couche k égale à la couche de référence (LR):

$$\begin{aligned} \frac{d^k x^i(\xi_1, \xi_{2q})}{d\xi_1} &= [x_j^i \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^k v_w^1 \Phi_w(\xi_1)] \\ &\quad + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_{2q} \right\} [{}^k v_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] \Phi_j(\xi_1) {}^{kj}(\xi_1) d\xi_1 \right\} y_j^i \\ &\quad - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_j^i \Phi_j(\xi_1)] \left\{ [d_z \Phi_z(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_{2q} \right\} \Phi_w(\xi_1) {}^{kj}(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^k g_w^1 \end{aligned} \quad (134)$$

$$\Omega = - Q_j^i y_j^i - {}^k M_w^i {}^k g_w^i$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w, z = 1, \dots, (gr + 1)$ .

b) Pour les couches k inférieures à la couche de référence (LR) :

$$\begin{aligned} \frac{d^k x^i(\xi_1, \xi_{2q})}{d\xi_1} &= [x_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj\Phi_{j,1}(\xi_1)][{}^{LR} v_w^1 \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj\Phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} \\ &\quad X [{}^{LR} v_w^1 \Phi_{w,1}(\xi_1)] - \sum_{m=k+1}^{LR-1} m_e [{}^m v_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k_e [{}^k v_j^1 \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_{2q}-1}{2} \\ \Omega &= - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] \Phi_j(\xi_1) {}^{kj}(\xi_1) d\xi_1 \right\} y_j^i \\ &\quad - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_j^i \Phi_j(\xi_1)] \left\{ [d_z \Phi_z(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} \Phi_w(\xi_1) {}^{kj}(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^{LR} g_w^i \\ &\quad - \sum_{m=k+1}^{LR-1} \left\{ - \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] {}^m e \Phi_j(\xi_1) {}^{kj}(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^m g_j^i \\ &\quad - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] {}^k e \Phi_j(\xi_1) \frac{\xi_{2q}-1}{2} {}^{kj}(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^k g_j^i \\ \Omega &= - Q_j^i y_j^i - {}^{LR} M_w^i {}^{LR} g_w^i - \sum_{m=k+1}^{LR-1} ({}^m M_j^i {}^m g_j^i) - {}^k M_j^i {}^k g_j^i \end{aligned} \quad (135)$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w, z = 1, \dots, (gr + 1)$ .

c) Pour les couches k au-dessus de la couche de référence (LR) :

$$\begin{aligned} \frac{d^k x^i(\xi_1, \xi_{2q})}{d\xi_1} &= [x_j^i \Phi_{j,1}(\xi_1)] + [dj \Phi_{j,1}(\xi_1)] [{}^{LR}v_w^i \Phi_w(\xi_1)] + \left\{ [dj \Phi_j(\xi_1)] + \frac{{}^{LR}e}{2} \right\} \\ &X [{}^{LR}v_w^i \Phi_{w,1}(\xi_1)] + \sum_{m=LR+1}^{k-1} m e [{}^m v_j^i \Phi_{j,1}(\xi_1)] + k e [{}^k v_j^i \Phi_{j,1}(\xi_1)] \frac{\xi_{2q}+1}{2} \\ \Omega &= - \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] \Phi_j(\xi_1) {}^k j(\xi_1) d\xi_1 \right\} y_j^i \\ &- \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_j^i \Phi_j(\xi_1)] \left\{ [d_z \Phi_z(\xi_1)] + \frac{{}^{LR}e}{2} \right\} \Phi_w(\xi_1) {}^k j(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^{LR}g_w^i \\ &- \sum_{m=LR+1}^{K-1} \left\{ \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] {}^m e \Phi_j(\xi_1) {}^k j(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^m g_j^i \right\} \\ &- \left\{ \int_{-1}^1 [{}^k q_w^i \Phi_w(\xi_1)] {}^k e \Phi_j(\xi_1) \frac{\xi_{2q}+1}{2} {}^k j(\xi_1) d\xi_1 \right\} {}^k g_j^i \end{aligned} \quad (136)$$

$$\Omega = - Q_j^i y_{j-}^i - {}^{LR}M_w^i {}^{LR}g_w^i - \sum_{m=LR+1}^{k-1} ({}^m M_j^i {}^m g_j^i) - {}^k M_j^i {}^k g_j^i$$

Avec  $i = 1, 2$  et  $j, w, z = 1, \dots, (gr + 1)$ .

Dans ces expressions, la répétition de k-index n'implique pas la somme. Les termes écrits avec les lettres Q et M représentent les forces nodales équivalentes et les conjugués d'énergie équivalente associés aux vecteurs généralisés de la couche, respectivement. Toutes les intégrales ci-dessus sont calculées numériquement par quadrature gaussienne.

Au vu de tout cela, l'énergie potentielle externe de l'élément fini stratifié soumis à l'action des forces concentrées et distribuées appliquées à n'importe quelle position de l'élément peut être déterminée comme étant la somme des courbes définies dans les équations (129), (130) et (131) pour les forces concentrées et définies dans les équations (134), (135) et (136) pour les forces réparties. Une forme résumée pour représenter l'énergie potentielle par rapport aux actions extérieures est la suivante:

$$\Omega = -(P_j^i + Q_j^i) y_{j-}^i - {}^m M_j^i {}^m g_j^i \quad (137)$$

Dans laquelle  $i = 1$  et  $2$ ,  $j = 1, \dots, (gr + 1)$  et  $m = 1, \dots, n_{lam}$ .  $P_j^i$  et  $Q_j^i$  Représentent les forces concentrées et les forces nodales équivalentes, respectivement, avec des composantes dans les directions  $i$  appliquées au nœud  $j$  situé sur la ligne de référence. Le terme  ${}^m M_j^i$  représente les conjugués énergétiques associés aux vecteurs généralisés des couches  $m$ . Comme on peut le constater, toutes les actions externes sont conservatrices car elles sont indépendantes de la configuration actuelle représentée dans l'équation (137) par les positions nodales  $y_j^i$  et par les vecteurs généralisés  ${}^m g_j^i$ .

Outre ces actions externes, il est également possible de considérer l'action des moments concentrés ( $M_n$ ) appliquée dans une section nodale donnée  $n$ . Lorsque la section transversale est stratifiée, la quantité de mouvement attribuée à chacune des couches  $k$  ( ${}^k M_n$ ) est définie par le produit du moment concentré par un facteur égal au rapport de l'épaisseur de la pale  ${}^k e$  sur l'épaisseur totale du stratifié ( $h_0$ ). Ainsi, il faut:

$${}^k M_n = M_n \frac{{}^k e}{h_0} \quad (138)$$

De cette manière, l'effet des moments concentrés sur chaque couche est tout à fait analogue à la procédure présentée pour l'élément fini homogène (rubrique 3.3.3). Ainsi, les conjugués d'énergie définis dans l'équation (82) sont désormais écrits comme suit:

$$\begin{aligned} {}^k B_n^1 &= - \frac{{}^{(k)} e}{h_0} \frac{M_{(n)}}{{}^{(k)} g_{(n)}^i {}^{(k)} g_{(n)}^i} {}^k g_n^2 \quad \text{conjugué de } {}^k g_n^1 \\ {}^k B_n^2 &= \frac{{}^{(k)} e}{h_0} \frac{M_{(n)}}{{}^{(k)} g_{(n)}^i {}^{(k)} g_{(n)}^i} {}^k g_n^1 \quad \text{conjugué de } {}^k g_n^2 \end{aligned} \quad (139)$$

Avec :  $i = 1$  et  $2$ , et  $k=1, \dots, n_{lam}$ . L'indice  $n$  fait référence à la section nodale dans laquelle le moment est appliqué.

Ces conjugués d'énergie ne sont pas conservatifs comme définis pour les forces concentrées et distribuées, car ils dépendent des valeurs prises par  ${}^k g_n^1$  et  ${}^k g_n^2$ . Par conséquent, pour satisfaire l'équilibre avec la présence du moment, les conjugués énergétiques  ${}^k B_n^1$  et  ${}^k B_n^2$  ne sont considérés que dans l'équation d'équilibre, mis à jour à chaque itération pendant le processus de résolution.

### 4.3.4 Équations d'énergie potentielle totale et d'équilibre

Comme défini dans l'équation (43), l'énergie potentielle totale de l'élément fini est composée des parties de l'énergie de déformation plus le potentiel des actions externes. Dans un modèle discret, plusieurs éléments finis sont utilisés pour analyser la structure et l'énergie potentielle totale est donnée par la somme des contributions de chaque élément individuellement.

La représentation utilisée pour considérer la contribution de divers éléments dans les différents vecteurs de position et de forces est analogue à celle présentée pour l'élément fini homogène. Le changement est lié uniquement à la quantité de degrés de liberté. Ainsi, la séquence de texte est très similaire à celle présentée dans la rubrique 3.3.4 en ce qui concerne l'élément homogène.

La contribution de plusieurs éléments finis à l'énergie potentielle totale peut être réalisée en supposant que l'association suivante identifie les degrés de liberté:

$$\begin{array}{l}
 gl_1 : y_1 \longrightarrow y_j^1 \\
 gl_2 : y_2 \longrightarrow y_j^2 \\
 gl_{2k+1} : {}^k g_1 \longrightarrow {}^k g_j^1 \longrightarrow y_j^{2k+1} \\
 gl_{2k+2} : {}^k g_2 \longrightarrow {}^k g_j^2 \longrightarrow y_j^{2k+2}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \longrightarrow y_j^i \begin{array}{l} \text{(degré de liberté)} \\ \text{(noeud local)} \end{array} \quad (140)$$

Où  $j = 1, \dots, (\text{deg} + 1)$  le numéro de nœud local,  $k = 1, \dots, \text{nlam}$  numéro de couche,  $l = 1, \dots, 2(\text{nlam} + 1)$  le degré de liberté nodale. L'interprétation donnée pour  $i$  est la suivante: 1 et 2 se réfèrent aux positions du nœud situé dans la ligne de référence,  $2k + 1$  et  $2k + 2$  se réfèrent aux composants des vecteurs généralisés  ${}^k g_1$  ( ${}^k g_j^1$ ) et  ${}^k g_2$  ( ${}^k g_j^2$ ) de chaque couche, respectivement.

Cette même règle est également utilisée pour le vecteur de position dans la configuration initiale  $x_j^i$ . En utilisant cette identification, un vecteur de position locale  $y_k^i$  de l'élément fini contenant tous les degrés de liberté peut être défini. L'emplacement d'un degré de liberté donné dans ce vecteur de position est déterminé à l'aide du numéro de nœud local  $j$  et du degré de liberté nodale  $i$  lui-même. La règle de localisation dans le vecteur est donnée par:

$$y_j^i \begin{array}{l} \text{(degré de liberté)} \\ \text{(noeud local)} \end{array} \longrightarrow 2(\text{nlam}+1)(j-1) + i \quad (141)$$

Une identification analogue à l'équation (140) est également utilisée pour définir le vecteur des forces internes  $F_{int j}^i$  et le vecteur des forces externes  $F_{ext j}^i$  de l'élément. Dans ces vecteurs, l'interprétation donnée pour  $i$  est la suivante: 1 et 2 désignent les composantes des forces nodales agissant dans les directions globales 1 et 2, respectivement, et les termes avec  $i$  égal à  $2k + 1$  et  $2k + 2$  sont des conjugués énergétiques de composants des vecteurs généralisés  ${}^k g_1$  ( ${}^k g_j^1$ ) et  ${}^k g_2$  ( ${}^k g_j^2$ ) de chaque lame, respectivement.

Dans les modèles discrets, il existe de nombreux éléments finis et un même nœud peut appartenir à plusieurs éléments. Ainsi, nous définissons les vecteurs  $y_k^i$ , la force interne  $F_{int j}^i$  et la force externe  $F_{ext j}^i$  globalement. Ces vecteurs reçoivent une contribution de tous les éléments utilisés dans la discrétisation de la structure. Pour l'assemblage de ces vecteurs globaux, la même règle d'identification présentée dans les équations (140) et (141) est utilisée, mais la numérotation du nœud  $j$  n'est plus locale et devient le numéro global attribué lors de la génération du maillage. La relation devient:

$$y_j^i \begin{matrix} \text{(degré de liberté)} \\ \text{(nœud local)} \end{matrix} \longrightarrow 2(nlam+1)(j-1) + i \quad \text{avec } j= 1, \dots, N \quad (142)$$

Où  $N$  est le nombre de nœuds de discrétisation.

En supposant la relation de l'équation (142), la somme des contributions de chaque élément fini dans la fonction d'énergie potentielle totale de la structure peut être réalisée. En considérant l'énergie de déformation (équations (127) et (128)) et l'énergie des actions externes (équation (137)) adaptées à la relation de l'équation (142), nous pouvons réécrire l'équation (44) comme suit:

$$\Pi(y_j^i) = U(y_j^i) - (P_j^i + Q_j^i + M_j^i)y_j^i \quad (143)$$

$\Pi(y_j^i)$  Représente la fonction d'énergie potentielle totale dont la détermination ne dépend que du vecteur de position actuelle  $y_j^i$  qui contient les degrés de liberté nodaux de tous les éléments finis utilisés dans la discrétisation. La détermination de  $y_j^i$  est faite à partir de la solution du système d'équations non linéaires défini dans l'équation (47), qui a la signification physique de l'équilibre nodal. Les termes  $P_j^i$  et  $Q_j^i$  représentent les forces concentrées et les forces nodales

équivalentes, respectivement. Ces forces ne sont nulles que pour les degrés de liberté  $i$  égaux à 1 et 2. Le terme  $M_j^i$  représente les conjugués énergétiques associés aux vecteurs généralisés des couches, résultant de l'application de forces concentrées et réparties hors de la ligne de référence (lr). Le terme  $M_j^i$  n'est pas nul que pour les degrés de liberté  $i$  autres que 1 et 2.

Dans l'équation (143), il n'y a pas de conjugués énergétiques générés par l'action de moments concentrés, car ils ne sont pas conservateurs. L'effet de ces moments n'est pris en compte que dans l'équation d'équilibre par la contribution de l'énergie calculée conjuguée à l'équation (139).

Les équations d'équilibre ont été obtenues sur la base du principe de l'énergie potentielle totale stationnaire et sont définies dans l'équation (47). Considérant la fonction d'énergie potentielle totale de l'élément fini du portique stratifié déterminée dans l'équation (143) et l'énergie conjuguée de l'équation (139) en raison de l'effet des moments concentrés, les équations d'équilibre peuvent s'écrire comme suit:

$$F_{int\ \alpha}^\beta(y_j^i) - [P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta + M_\alpha^\beta + B_\alpha^\beta(y_j^i)] = 0 \quad (144)$$

Dans cette équation, le vecteur d'efforts internes est calculé comme défini dans l'équation (48), mais puisque l'énergie de déformation dans l'élément de portique stratifié est définie pour chaque couche (équation (127)), l'équation (48) est transformée en somme d'intégrales. Par conséquent, nous avons:

$$F_{int\ \alpha}^\beta(y_j^i) = \sum_{k=1}^{nlam} k_b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^k u_e(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^\beta} k_j(1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (145)$$

Qui est calculé en quadrature gaussienne, puis:

$$F_{int\ \alpha}^\beta(y_j^i) = \sum_{k=1}^{nlam} k_b \frac{\partial^k u_e(\xi_{1ig}, \xi_{2jg})}{\partial y_\alpha^\beta} k_j(1ig, \xi_{2jg}) w_{(ig)} w_{(jg)} \quad (146)$$

Lors de la définition du vecteur des efforts internes dans la rubrique 2.7, la description des termes qui composent  $\left(\frac{\partial A^1}{\partial y_\alpha^\beta}\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial^k A^1}{\partial y_\alpha^\beta}\right)$  dans l'équation (53) reste en attente, car ils dépendent de la fonction de mappage de position adoptée. Dans le cas du stratifié, le gradient  $^k A^1(\xi_1, \xi_2)$  varie selon que la couche est la couche de référence ou s'il s'agit d'une couche

inférieure ou supérieure, tels que définis dans les équations (122), (124) et (126). Considérant la notation présentée dans l'équation (140), la dérivée du gradient  $\left(\frac{\partial^k A^1}{\partial y_\alpha^\beta}\right)$  est représentée par des matrices dont les termes dépendent à la fois de la lame considérée et du degré de liberté avec lequel la dérivée est évaluée. Ainsi, un ensemble de possibilités pour  $\left(\frac{\partial^k A^1}{\partial y_\alpha^\beta}\right)$  sont identifiées, comme on peut le constater dans les équations suivantes:

a) Couche k égale à la couche de référence (LR):

- Pour  $\beta = 1$  et 2

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^1} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

- Pour  $\beta = 2k+1$ ,  $\beta = 2k+2$  et  $k = \text{LR}$  :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2k+1}} = \begin{bmatrix} [d_j \phi_{j,1}(\xi_1)] \phi_\alpha(\xi_1) + \left\{ [d_j \phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & \frac{k_e}{2} \phi_\alpha(\xi_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (147)$$

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2k+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [d_j \phi_{j,1}(\xi_1)] \phi_\alpha(\xi_1) + \left\{ [d_j \phi_j(\xi_1)] + \frac{k_e}{2} \xi_2 \right\} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & \frac{k_e}{2} \phi_\alpha(\xi_1) \end{bmatrix}$$

- Pour les autres degrés de liberté ( $\beta \neq 1, 2$  et  $\beta \neq 2\text{LR} + 1, 2\text{LR} + 2$ ):

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (147)$$

b) Couche k au-dessous de la couche de référence (LR):

- Pour  $\beta = 1$  et 2

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^1} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

- Pour  $\beta = 2LR + 1$  et  $2LR + 2$ :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2LR+1}} = \begin{bmatrix} [d_j \phi_{j,1}(\xi_1)] \phi_\alpha(\xi_1) + \left\{ [d_j \phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2LR+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [d_j \phi_{j,1}(\xi_1)] \phi_\alpha(\xi_1) + \left\{ [d_j \phi_j(\xi_1)] - \frac{LR_e}{2} \right\} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

Pour  $2(k+1) + 1 \leq \beta \leq 2(LR-1) + 2$  :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2m+1}} = \begin{bmatrix} -^m e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2m+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -^m e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (148)$$

Avec :  $k+1 \leq m \leq LR-1$

- Pour  $\beta = 2k + 1$  et  $2k + 2$ :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2k+1}} = \begin{bmatrix} ^k e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) \frac{\xi_2-1}{2} & \frac{^k e}{2} \phi_\alpha(\xi_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2k+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ^k e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) \frac{\xi_2-1}{2} & \frac{^k e}{2} \phi_\alpha(\xi_1) \end{bmatrix}$$

- Pour les autres degrés de liberté ( $\beta \neq 1, 2$  et  $\beta < 2k + 1$  et  $\beta > 2LR + 2$ ):

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Couche k au-dessus de la couche de référence (LR):

- Pour  $\beta = 1$  et  $2$

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^1} = \begin{bmatrix} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

- Pour  $\beta = 2LR + 1$  et  $2LR + 2$ :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2LR+1}} = \begin{bmatrix} [d_j \phi_{j,1}(\xi_1)] \phi_\alpha(\xi_1) + \left\{ [d_j \phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2LR+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [d_j \phi_{j,1}(\xi_1)] \phi_\alpha(\xi_1) + \left\{ [d_j \phi_j(\xi_1)] + \frac{LR_e}{2} \right\} \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix}$$

• Pour  $2(LR+1) + 1 \leq \beta \leq 2(k-1) + 2$  :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2m+1}} = \begin{bmatrix} m e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2m+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) & 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

Avec  $LR + 1 \leq m \leq k - 1$

• Pour  $\beta = 2k + 1$  et  $2k + 2$  :

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2k+1}} = \begin{bmatrix} k e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) \frac{\xi_2+1}{2} & \frac{k_e}{2} \phi_\alpha(\xi_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^{2k+2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k e \phi_{\alpha,1}(\xi_1) \frac{\xi_2+1}{2} & \frac{k_e}{2} \phi_\alpha(\xi_1) \end{bmatrix}$$

• Pour les autres degrés de liberté ( $\beta \neq 1, 2$  et  $\beta < 2LR + 1$  et  $\beta > 2k + 2$ ):

$$\frac{\partial^k A^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial y_\alpha^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est à noter que tous les termes dans les matrices ci-dessus ne dépendent pas du vecteur de position nodale actuel  $y_j^i$ . Ainsi, la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 ({}^k A^1)}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta}$ , qui apparaît dans la définition de la matrice de Hesse dans l'équation (63), est zéro.

Définissant tous les termes nécessaires pour calculer le vecteur des forces internes, le problème est maintenant résumé en déterminant les positions actuelles en satisfaisant l'équation d'équilibre (144).

### 4.3.5 Processus de solution

Le processus de résolution utilisé dans ce travail a déjà été décrit à la rubrique 2.8. Ici, seuls quelques détails particuliers du stratifié à éléments finis sont présentés.

Pendant le processus de résolution, les positions actuelles  $y_k^i$  des nœuds de portique ne sont pas connues et les positions d'essai provisoires  $y_k^i \text{ tentative}$  sont attribuées. Puisque ces positions ne vérifient pas l'équilibre nodal représenté par l'équation d'équilibre (144), un résidu correspondant au vecteur de déséquilibre mécanique est généré:

$$R_\alpha^\beta(y_j^i \text{ tentative}) = F_{int \alpha}^\beta(y_j^i \text{ tentative}) - [P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta + M_\alpha^\beta + B_\alpha^\beta(y_j^i \text{ tentative})] \quad (150)$$

Bien que l'énergie potentielle due aux moments concentrés n'ait pas été définie, le graphique  $B_\alpha^\beta(y_j^i \text{ tentative})$  est ajouté au calcul du vecteur de déséquilibre mécanique afin que les positions d'équilibre trouvées tiennent compte de l'effet de ces moments.

La matrice de Hesse  $H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_j^i \text{ tentative})$  pour l'élément de portique plat stratifié a une dimension égale  $2(nlam + 1)N$ , où  $N$  est le nombre de nœuds de discrétisation et  $2(nlam + 1)$  le nombre de degrés de liberté nodale. Le calcul de cette matrice est effectué à partir d'une somme de l'équation (58) appliquée à chaque couche de l'élément. Ainsi, nous avons que le hessien est obtenu par:

$$H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_j^i) = \sum_{k=1}^{nlam} \left[ k b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 [{}^k u_e(\xi_1, \xi_2)]}{\partial y_\alpha^\beta \partial y_\gamma^\zeta} \right] k_j(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (151)$$

La localisation des termes de cette matrice est effectuée suivant une règle d'affectation similaire à celle présentée dans l'équation (141) dans le cas de l'élément hessien et dans l'équation (142) dans le cas de la hessienne globale de la structure. L'allocation globale suit la règle ci-dessous:

$$H_{\alpha\gamma}^{\beta\zeta}(y_j^i \text{ tentative}) \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Ligne : } 2(nlam + 1)(\alpha - 1) + \beta \\ \text{Colonne : } 2(nlam + 1)(\gamma - 1) + \zeta \end{array} \quad (152)$$

Avec  $\beta$  et  $\zeta = 1, \dots, 2(nlam+1)$  et  $\alpha$  et  $\gamma = 1, \dots, N$

Cette matrice est déterminée numériquement comme indiqué dans l'équation (59) appliquée à chaque couche et la quantité de points de Gauss utilisée est la même que celle utilisée pour obtenir le vecteur de force interne dans l'équation (146).

Les derniers aspects particuliers de la formulation en position de l'élément stratifié sont liés à l'utilisation de la technique utilisée pour réaliser la liaison (couplage) entre des barres.

#### 4.3.6 Connexions entre éléments non colinéaires

La procédure de connexion de stratifiés de directions différentes est similaire à la procédure indiquée à la rubrique 3.3.6 pour l'élément de portique plat homogène. La seule différence est qu'il existe maintenant un nombre de ressorts de couplage des vecteurs généralisés égal au nombre de couches de l'élément. La figure 48 illustre le raccordement pour un cas particulier de cinq couches. Sur cette figure,  $K_{ab}^i$  ( $i=1,2$ ) représente la raideur du ressort de couplage des positions  $y_a^i$  et  $y_b^i$  des nœuds a et b situés sur la ligne de référence et  ${}^k K_{ab}^\alpha$  représente la raideur du ressort de couplage des vecteurs généralisés  ${}^k g_a^i$  et  ${}^k g_b^i$  des couches  $k = 1, \dots, n_{lam}$  appartenant aux deux éléments couplés.

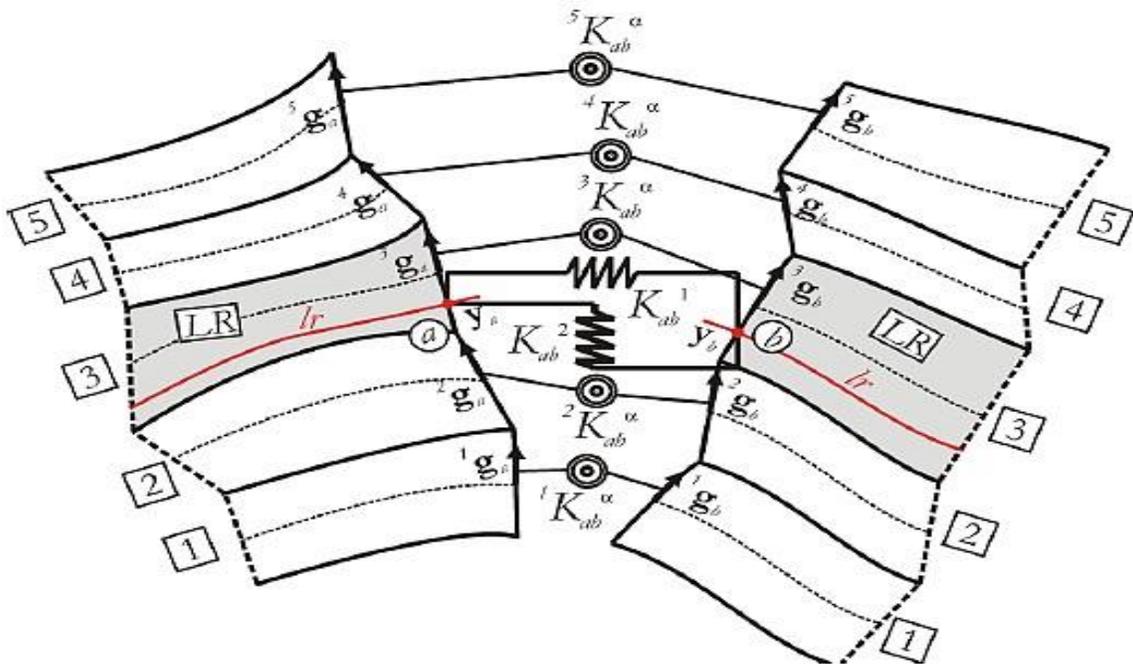


Figure 48 - Modèle de couplage entre éléments stratifiés.

La contribution des ressorts dans le vecteur des forces internes et dans la matrice globale de Hesse se fait avec la même règle d'assignation présentée dans l'équation (142).

Après avoir déterminé les positions dans la configuration actuelle, procédez à la description de la procédure nécessaire au calcul des déplacements, des déformations et des contraintes.

#### 4.4 Post-traitement

Avec la détermination des positions de la configuration actuelle pour un incrément de charge donné, les résultats des déplacements, des déformations et des contraintes ne dépendent que des coordonnées sans dimensions  $(\xi_1, \xi_2)$  correspondant à un point quelconque de l'élément.

Afin d'évaluer les résultats des analyses, des routines de post-traitement ont été mises en place. Elles calculent les déplacements, les déformations et les contraintes en des points situés dans les sections nodales de l'élément,  $\xi_1 = \xi_{1j}$  avec  $j$  représentant les nœuds, et aux interfaces et moyens des couches dont les coordonnées sans dimension sont données par  $\xi_2 = 1, 0$  et  $1$ . Les résultats sont organisés dans des fichiers de sortie permettant d'assembler des trajectoires d'équilibre et des distributions de déplacements, de déformations et de contraintes le long d'une section. En outre, des fichiers de données sont générés qui nous permettent d'afficher les images de structure dans la configuration actuelle avec une carte de couleurs représentant les résultats. Le logiciel AcadView a été utilisé pour la génération d'images.

Ensuite, les séquences d'étapes nécessaires sont présentées pour calculer les résultats des déplacements, des déformations de Green et des contraintes de second ordre de Piola-Kirchhoff en un point donné d'une couche  $k$  de l'élément de coordonnées sans dimension  $(\xi_1, \xi_2)$ .

- Déplacements  ${}^k u(\xi_1, \xi_2) = \begin{Bmatrix} {}^k u^1(\xi_1, \xi_2) \\ {}^k u^2(\xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} :$

a) Détermination de la position initiale  ${}^k x^i(\xi_1, \xi_2)$  à l'aide des fonctions de mappage de la configuration initiale, équations (113), (114) et (115);

b) Déterminez la position actuelle  ${}^k y^i(\xi_1, \xi_2)$  à l'aide des fonctions de mappage de la configuration actuelle, équations (116), (117) et (118);

c) Calcul du déplacement au moyen de la différence  ${}^k u^i(\xi_1, \xi_2) = {}^k y^i(\xi_1, \xi_2) - {}^k x^i(\xi_1, \xi_2)$  ;

• Déformations de vert  ${}^k E(\xi_1, \xi_2)$  :

a) Détermination de  ${}^k A^0(\xi_1, \xi_2)$  à travers les équations (121), (123) et (125);

b) Détermination de  ${}^k A^1(\xi_1, \xi_2)$  au moyen des équations (122), (124) et (126);

c) Détermination du gradient de la fonction de changement de configuration  ${}^k A(\xi_1, \xi_2)$  conformément à l'équation (12);

d) Détermination de l'allongement en traction à droite de Cauchy-Green  ${}^k C(\xi_1, \xi_2)$  selon l'équation (19);

e) Calcul des déformations de Green telles que définies à l'équation (21);

• Le second ordre de Piola-Kirchhoff souligne  ${}^k S(\xi_1, \xi_2)$  :

a) Connaissant les déformations de Green, il suffit de remplacer les valeurs obtenues dans la loi de comportement de Saint-Venant-Kirchhoff, représentée dans l'équation (26).

Ces contraintes utilisent la configuration initiale comme référence. L'un des objectifs de ce travail étant d'obtenir une distribution de contrainte plus précise en vue de la représentation de la défaillance du stratifié, il est important de déterminer également les contraintes réelles connues sous le nom de contraintes de Cauchy  ${}^k T(\xi_1, \xi_2)$  qui utilisent la configuration actuelle pour référence. Connues sous les noms de  ${}^k A(\xi_1, \xi_2)$  et  ${}^k S(\xi_1, \xi_2)$ , les contraintes de Cauchy sont déterminées par (Ogden, 1984) [134]:

$${}^k T(\xi_1, \xi_2) = \frac{[{}^k A(\xi_1, \xi_2)]^t \cdot {}^k S(\xi_1, \xi_2) \cdot {}^k A(\xi_1, \xi_2)}{{}^k J(\xi_1, \xi_2)} \quad (153)$$

Avec  ${}^k J(\xi_1, \xi_2) = \det [{}^k A(\xi_1, \xi_2)]$

Dans cette équation,  ${}^k A(\xi_1, \xi_2)$ ,  ${}^k S(\xi_1, \xi_2)$  et  ${}^k T(\xi_1, \xi_2)$  constituent des matrices d'ordre deux.

$[{}^k A(\xi_1, \xi_2)]^t$  est la matrice transposée de  ${}^k A(\xi_1, \xi_2)$ . La répétition de l'indice k n'implique pas la somme.

Tous les résultats calculés ci-dessus sont liés aux directions du système de référence global. Cependant, il est intéressant d'obtenir ces résultats également dans le système de référence local de l'élément afin de faciliter l'interprétation physique. Dans cette référence, il est possible d'identifier les composants de déformation et de contraintes dans les sens longitudinal et transversal du stratifié.

La figure 49 illustre les systèmes de référence globaux et locaux pour un élément de la configuration initiale:

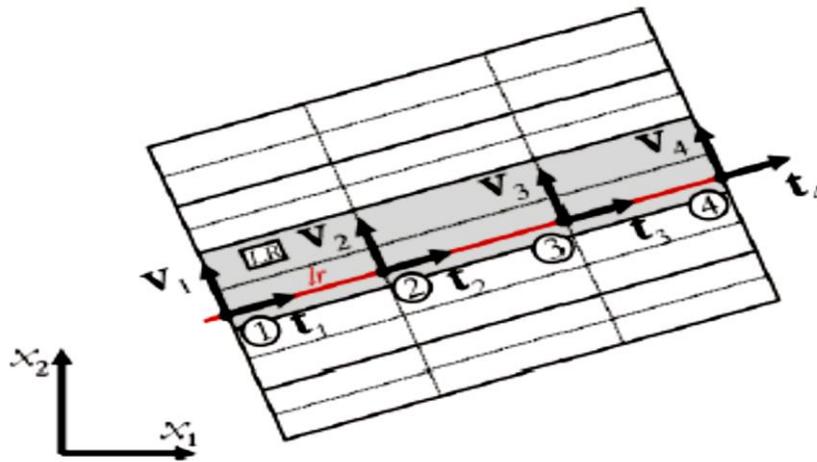


Figure 49 - Systèmes de référence locaux et globaux dans l'élément stratifié

À l'exception de la contrainte de Cauchy, les résultats restants sont relatifs à la configuration initiale. Ainsi, une matrice de rotation du système global pour la localisation peut être obtenue à partir de la cartographie de la ligne de référence de l'élément dans la configuration initiale (équation (113)). Le sommet tangent  $t_j$  à l'élément est donné par:

$${}^{LR}x^i(\xi_1, 0) = x_j^i \phi_j(\xi_1) \longrightarrow t^i(\xi_1) = \frac{x_j^i \phi_{j,1}(\xi_1)}{\sqrt{[x_w^a \phi_{w,1}(\xi_1)] [x_z^a \phi_{z,1}(\xi_1)]}} \quad (154)$$

Avec  $a, i = 1$  et  $2$  représentant la direction et  $j, w, z = 1, \dots, (\text{degré} + 1)$  représentant les nœuds d'élément.

Le sommet normal  $v_j$  est obtenu de telle manière que le produit vectoriel avec la version tangente  $t_j$  ait toujours pour résultat la direction du verseur sortant du plan. Avec cela, il faut:

$$v^i(\xi_1) = (-t^2(\xi_1), t^1(\xi_1)). \quad (155)$$

La matrice de rotation s'écrit alors:

$$R(\xi_1) = \begin{bmatrix} t^1(\xi_1) & t^2(\xi_1) \\ v^1(\xi_1) & v^2(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (156)$$

Ainsi, les déplacements, les déformations de Green et les contraintes de Piola-Kirchhoff de second ordre obtenues dans les directions globales peuvent être tournés vers les directions locales de l'élément, respectivement:

$$\begin{aligned} {}^k u(\xi_1, \xi_2)_{\text{local}} &= R(\xi_1) \cdot {}^k u(\xi_1, \xi_2)_{\text{global}} \\ {}^k E(\xi_1, \xi_2)_{\text{local}} &= R(\xi_1) \cdot {}^k E(\xi_1, \xi_2)_{\text{global}} \cdot [R(\xi_1)]^t \\ {}^k S(\xi_1, \xi_2)_{\text{local}} &= R(\xi_1) \cdot {}^k S(\xi_1, \xi_2)_{\text{global}} \cdot [R(\xi_1)]^t \end{aligned} \quad (157)$$

Afin de vérifier la formulation de l'élément de portique plat stratifié, plusieurs exemples ont été analysés et les résultats obtenus sont comparés aux résultats des solutions analytiques et numériques trouvées dans la littérature.

#### 4.5 Exemples numériques

Au total, cinq exemples analysés ont permis d'évaluer différents aspects de la formulation. Les résultats obtenus avec l'élément fini proposé dans ce travail sont comparés aux résultats obtenus avec des solutions analytiques et aux résultats obtenus grâce à des analyses numériques avec éléments finis à deux dimensions effectuées dans le logiciel Ansys. Dans ce dernier cas, l'élément fini utilisé était PLANE42. Il s'agit d'un élément rectangulaire bidimensionnel fini à quatre nœuds qui utilise des fonctions de forme linéaires pour interpoler les déplacements nodaux.

Dans les analyses effectuées avec Ansys, une discrétisation très fine a été utilisée, dont les résultats servent de référence. De plus, nous avons également effectué des analyses avec des discrétisations équivalentes aux discrétisations utilisées dans les analyses effectuées avec les éléments finis laminés. Pour ce faire, un nombre d'éléments PLANE42 égal au nombre de couches a été ajouté entre deux nœuds de la discrétisation avec l'élément de portique plat laminé.

Ce travail visait à comparer les performances de l'élément proposé dans ce travail par rapport aux éléments finis bidimensionnels pouvant poser des problèmes de désadaptation à la matrice lorsqu'ils sont utilisés dans l'analyse de cadres plats stratifiés. Cela peut entraîner la nécessité d'affiner le maillage d'éléments finis bidimensionnels et, par conséquent, d'augmenter les coûts de calcul.

L'objectif de l'analyse des quatre premiers exemples est de vérifier les différents aspects de la formulation. Ainsi, le premier exemple consiste en une poutre bidimensionnelle homogène soumise à l'action d'un chargement uniformément réparti. Dans cet exemple, l'objectif principal est de vérifier la convergence de la discrétisation à la fois par rapport au nombre d'éléments et par rapport au nombre de couches utilisées pour représenter la section transversale. Le problème a été analysé pour trois situations avec la relation entre l'envergure et la hauteur du faisceau ( $S = L / h_0$ ) en prenant les valeurs de 2, 4 et 10. Dans toutes les analyses, les distributions de déplacement et de contrainte le long de sections transversales en différents points de la poutre sont vérifiées.

Dans le deuxième exemple, une poutre en sandwich bidimensionnelle à charge répartie uniforme appliquée sur la face supérieure est analysée. La poutre est similaire au premier problème et a également été analysé pour les trois rapports de portée et de hauteur ( $S = 2, 4$  et 10). L'objectif principal de cet exemple est de vérifier l'exactitude des déplacements et des distributions de contrainte le long de la section transversale du boîtier laminé, ainsi que d'évaluer l'efficacité de l'élément dans des problèmes dont le rapport  $S$  varie de mince à épais. De plus, la possibilité d'appliquer des forces distribuées en dehors de la ligne de référence est vérifiée.

Dans le troisième exemple, une poutre sandwich polarisée semblable aux deux cas précédents a été analysée. Une relation unique entre la portée et la hauteur de la poutre ( $S = 4$ ) a été envisagée, mais trois combinaisons entre le module d'élasticité des lames sur les faces et la lame du noyau ont été considérées: modèles AAA, ABA et ACA. La poutre est soumise à l'action d'une force concentrée appliquée sur la face supérieure de la section située au milieu de la travée. Dans cet exemple, la capacité de l'élément à représenter avec précision le déplacement et la distribution des contraintes lorsque le module d'élasticité du noyau est réduit ( $A \rightarrow B \rightarrow C$ ) est vérifiée. De plus, les résultats obtenus permettent d'évaluer l'efficacité de la formulation dans la prise en compte des forces concentrées appliquées en dehors de la ligne de référence.

Le quatrième exemple consiste à vérifier la technique utilisée pour effectuer le couplage entre les barres. Pour cela, le problème du porche semi-rigide déjà étudié en utilisant l'élément de portique plat homogène (rubrique 3.4.3) est à nouveau analysé. Le but de cet exemple étant de vérifier la technique de couplage entre les barres, une discrétisation de section a été envisagée dans cinq couches du même matériau. Seul le cas dont les supports présentent une raideur élastique à la rotation a été analysé. Les résultats obtenus sont comparés à ceux déjà présentés à la figure 42.

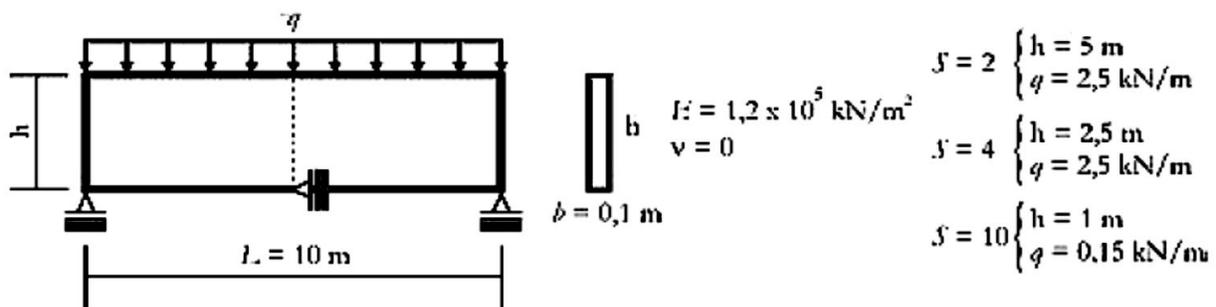
Après avoir vérifié la formulation dans les exemples précédents, deux portiques constitués d'un à cinq ponts avec des sections stratifiées ont été proposés et analysés. Les résultats des distributions de déplacement le long de la section de certains points sont présentés.

Pour autant que la révision bibliographique de ce travail se poursuive, aucun exemple de cadre plat laminé n'a été trouvé dans la littérature. Tous les problèmes rencontrés se limitaient aux poutres laminées analysées en régime linéaire. Ainsi, cet exemple contribue aux résultats pouvant être utilisés lors de la vérification future de formulations qui traitent du problème de l'analyse géométrique non linéaire des cadres plats stratifiés.

En résumé, ces analyses ont permis de vérifier les différents aspects de la formulation de l'élément du portique stratifié, en plus d'évaluer son efficacité et sa cohérence.

#### 4.5.1 Exemple 4.1: Poutre homogène bidimensionnelle avec force distribuée

Dans ce premier exemple, une poutre unique bidimensionnelle et homogène soumise à l'action d'un chargement uniformément réparti est analysée, comme illustré à la figure 50. Les caractéristiques géométriques de la section et les paramètres d'élasticité du matériau sont également représentés sur cette figure.



Dans toutes les analyses, la force distribuée a été appliquée par incréments uniques, car la valeur de la force considérée est faible pour maintenir le problème en régime de petites déformations et pour permettre une comparaison avec la solution analytique obtenue à partir de la théorie classique des poutres (TCP) qui repose sur les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli. De plus, un coefficient de Poisson ( $\nu$ ) nul est également adopté. Il est à noter que la force répartie est appliquée sur la face supérieure de la poutre, tandis que la ligne de référence est située sur la face inférieure, où se trouvent les supports.

Le problème a été analysé pour trois situations avec la relation entre l'envergure et la hauteur du faisceau ( $S = L / h$ ), en prenant les valeurs de 2, 4 et 10. Nous avons cherché à vérifier la capacité de la formulation à représenter avec précision les distributions de déplacement et des contraintes dues à des problèmes de relation entre la portée et la hauteur correspondant à des poutres minces et des poutres hautes (poutres de mur).

Afin d'évaluer la capacité convergente de la formulation, la poutre a été discrétisée avec un nombre d'éléments finis cubiques compris entre 2, 4, 8 et 16. Vingt couches ont été utilisées pour discrétiser la section, puisqu'il s'agissait du nombre de couches fournies qui permettaient une bonne répartition de la contrainte de cisaillement transverse. Ceci a été vérifié pour le cas de la poutre avec  $S = 10$ , qui a été analysée par une discrétisation composée de 4 éléments finis et par un nombre de couches allant de 1, 2, 4, 8, 20 et 40.

Le processus de résolution basé sur la méthode de Newton-Raphson a été contrôlé au moyen des critères de convergence en position et en force avec des tolérances respectives de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$ . Le nombre de points de Gauss utilisés dans les intégrations numériques du vecteur des efforts internes et de la matrice de Hesse était de  $4 \times 20$  (étendue  $\times$  hauteur) sur chaque couche. Cette quantité de points de Gauss a été adoptée après une étude comparative des valeurs obtenues pour le déplacement horizontal  $u$  de la face inférieure de la section située à 2,5 m du support gauche, à partir du déplacement vertical  $v$  et de la contrainte axiale  $S_{11}$  de la face inférieure de la section localisée au milieu de la portée de la poutre. Dans cette étude, des intégrations numériques ont été effectuées avec le nombre de variables du point de Gauss jusqu'à une limite de  $20 \times 20$ .

Cette étude a été réalisée pour la poutre du cas  $S = 10$ , discrétisé avec 4 éléments finis et avec un nombre de couches allant de 1, 2, 3, 4, 8 et 20 couches. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 2. Les observations suivantes peuvent être faites:

- Dans les trois premiers blocs du tableau, seul le nombre de points dans la direction transversale a été modifié. Plus le nombre de couches est grand, plus les variations de résultats sont grandes, plus le nombre de points de Gauss augmente;
- Sur le côté gauche du dernier bloc de la table, seule la quantité de points gaussiens dans la direction longitudinale a varié. Il n'y avait pas de changement significatif dans les résultats de 4 points. Le cas à 4 points de Gauss est dans la partie droite du troisième bloc;
- Dans la partie droite du dernier bloc, les quantités de points gaussiens variaient dans les deux sens. Aucune différence significative n'a été observée par rapport aux résultats présentés dans la partie droite du troisième bloc, dans laquelle seuls les points de Gauss dans la direction transversale ont été modifiés.

À partir de ces observations, il est raisonnable de supposer que 4 points de Gauss dans la direction longitudinale sont suffisants pour l'élément fini avec degré d'interpolation cubique et que plus le nombre de couches adoptées est important, plus le nombre de points gaussiens dans la direction transversale est important.

La mise en œuvre informatique de la formulation ne permet pas l'adoption de quantités différentes de points gaussiens dans chaque couche. Ainsi, il n'a pas été possible d'identifier s'il existe des différences dans la quantité de points de Gauss nécessaires pour les couches proches de la couche de référence et pour les couches distantes de la couche.

Ainsi, pour garantir une intégration numérique correcte et comme les problèmes présentés dans ce travail n'ont pas un degré de liberté élevé, 4 x 20 points de Gauss ont été adoptés dans toutes les analyses.

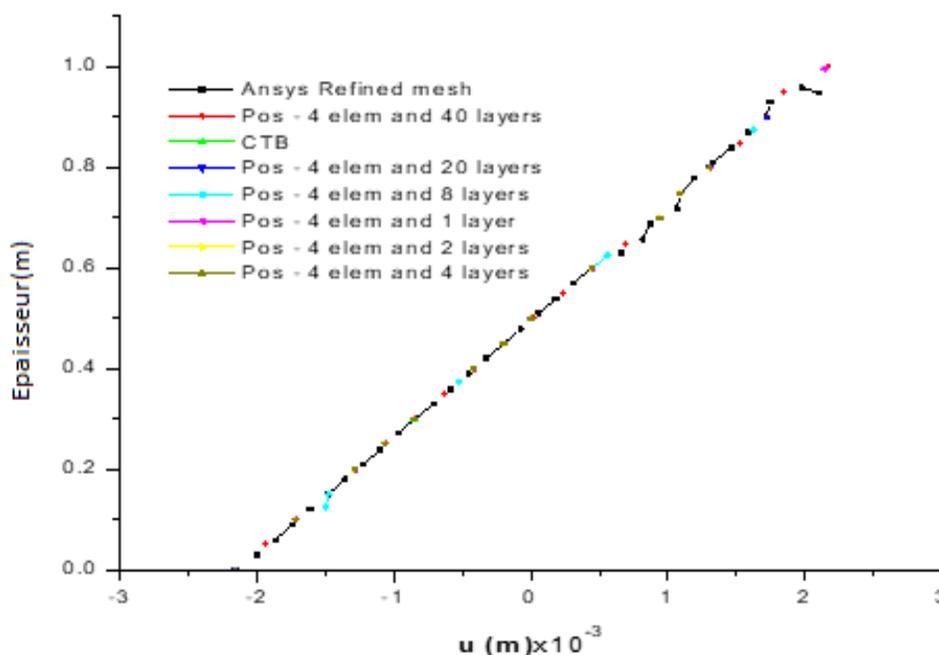
Points de Gauss	1 Couche			Points de Gauss	4 Couches		
	$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )		$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )
4 x 2	-0,002144	-0,019961	113,737024	4 x 2	-0,002548	-0,025574	135,495750
4 x 3	-0,002144	-0,019961	113,737010	4 x 3	-0,002375	-0,022548	126,297080
4 x 5	-0,002144	-0,019961	113,737010	4 x 5	-0,002248	-0,021030	119,572011
4 x 10	-0,002144	-0,019961	113,737010	4 x 10	-0,002179	-0,020327	115,932967
4 x 20	-0,002144	-0,019961	113,737010	4 x 20	-0,002159	-0,020135	114,881454
Points de Gauss	2 Couches			Points de Gauss	8 Couches		
	$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )		$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )
4 x 2	-0,002099	-0,021158	111,449269	4 x 2	-0,003101	-0,030401	165,169914
4 x 3	-0,002124	-0,020207	112,807079	4 x 3	-0,002612	-0,024656	139,076808
4 x 5	-0,002143	-0,020040	113,784196	4 x 5	-0,002332	-0,021803	124,188458
4 x 10	-0,002147	-0,020012	114,014730	4 x 10	-0,002202	-0,020543	117,249456
4 x 20	-0,002147	-0,020007	114,029694	4 x 20	-0,002167	-0,020207	115,364708
Points de Gauss	3 Couches			Points de Gauss	20 Couches		
	$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )		$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )
4 x 2	-0,002334	-0,023585	124,035986	4 x 2	-0,003692	-0,035329	196,978881
4 x 3	-0,002264	-0,021541	120,352736	4 x 3	-0,002813	-0,026404	149,917355
4 x 5	-0,002204	-0,020622	117,158811	4 x 5	-0,002396	-0,022374	127,620487
4 x 10	-0,002166	-0,020202	115,168208	4 x 10	-0,002218	-0,020688	118,123628
4 x 20	-0,002154	-0,020087	114,557295	4 x 20	-0,002171	-0,020248	115,631889
Points de Gauss	20 Couches			Points de Gauss	20 Couches		
	$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )		$u$ (m)	$v$ (m)	S11 (kN/m <sup>2</sup> )
3 x 3	-0,002575	-0,026522	114,567676	3 x 2	-0,003158	-0,035440	120,956560
5 x 3	-0,002813	-0,026404	149,917515	5 x 3	-0,002813	-0,026404	149,917515
8 x 3	-0,002813	-0,026404	149,917515	8 x 5	-0,002396	-0,022374	127,620609
10 x 3	-0,002813	-0,026404	149,917515	10 x 10	-0,002218	-0,020688	118,123734
20 x 3	-0,002813	-0,026404	149,917515	20 x 20	-0,002171	-0,020248	115,631992

Tableau 2 - Évaluation de la quantité de points de Gauss requise pour les intégrations numériques de l'élément de portique plat stratifié de l'exemple 4.1

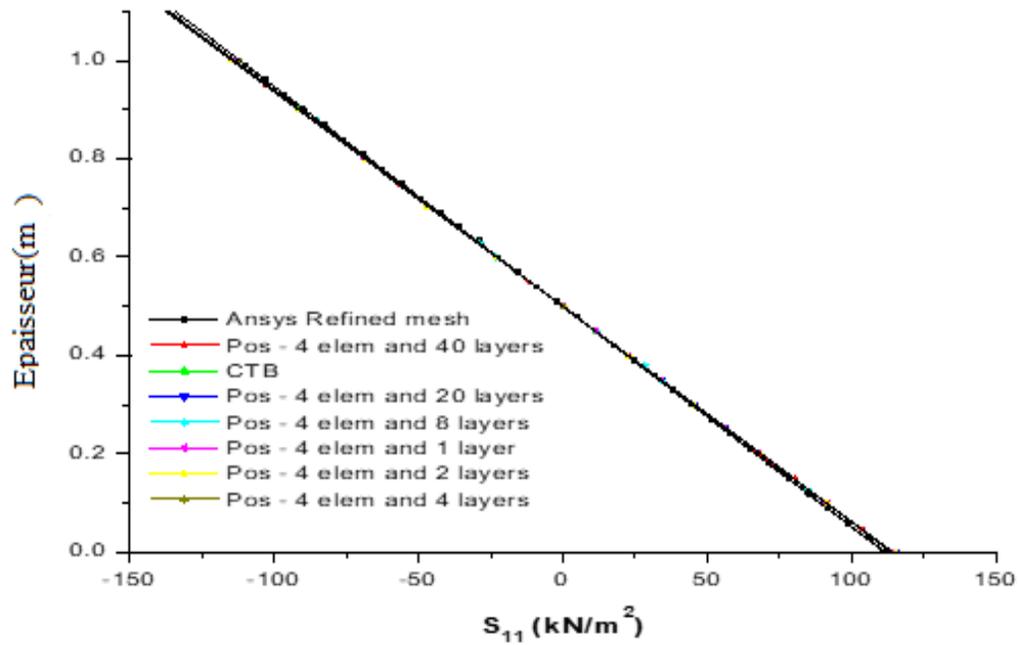
Sur la figure 51, les résultats d'une analyse de convergence pour le cas de la poutre dont la relation entre l'envergure et la hauteur (S) est égale à 10. La poutre est discrétisée avec 4 éléments cubiques et seul le nombre de couches est modifié. Comme on peut le voir, à partir d'une couche dans la discrétisation du profilé, les résultats pour le déplacement  $u$  et pour la contrainte axiale  $S_{11}$  coïncident déjà avec la solution analytique et avec la solution numérique obtenue dans l'Ansys à partir d'une discrétisation très raffinée. Cependant, la contrainte de cisaillement  $S_{12}$  n'était raisonnablement représentée qu'à partir d'une discrétisation à 8 couches. De 20 à 40 couches, l'amélioration de la représentation de la tension  $S_{12}$  s'est produite uniquement sur les faces inférieure et supérieure, où les valeurs sont les plus basses.

Comme il n'y avait pas de gain significatif dans les distributions de contraintes après avoir augmenté de 20 à 40 couches, toutes les autres analyses effectuées dans cet exemple et dans les exemples 4.2, 4.3 et 4.5, ont adopté une discrétisation de la section de 20 couches. Pour l'exemple 4.4, seules 5 couches sont adoptées car seuls les déplacements globaux des nœuds sont évalués.

a) Déplacement dans la direction 1 ( $u$ ) pour la section à 2,5 m du support gauche



b) Tension axiale S11 pour la section située au milieu de la travée



c) Contrainte de cisaillement S12 pour la section à 2,5 m du support gauche

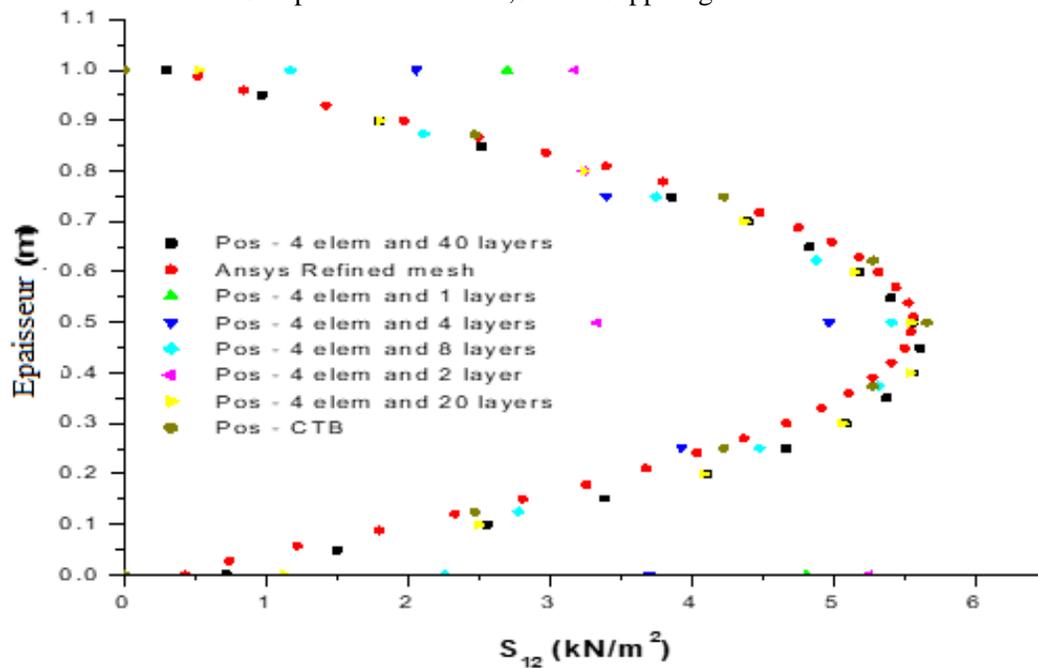


Figure 51 - La discrétisation avec 4 éléments cubiques et la variation du nombre de couches

(Cas de  $S = 10$ ).

L'analyse des poutres avec une relation entre portée et hauteur ( $S$ ) égale à 2, 4 et 10 a été réalisée en faisant varier uniquement le nombre d'éléments finis (4, 8 et 16 éléments). Les résultats des distributions de déplacements horizontaux  $u$ , contrainte axiale dans la direction longitudinale  $S_{11}$ , contrainte axiale dans la direction transversale  $S_{22}$  et contrainte de cisaillement  $S_{12}$  sont représentés respectivement sur les figures 52, 53, 54 et 55. Toutes les contraintes représentées sont moyennes entre éléments et la continuité inter laminaire des contraintes est représentée par la moyenne des valeurs obtenues aux interfaces des couches adjacentes. Sur ces figures, on présente également les résultats moyens obtenus lors d'analyses numériques effectuées avec Ansys avec l'élément fini à deux dimensions PLANE42. L'équivalence entre les mailles de l'élément fini positionnel et l'élément PLANE42 a été réalisée de sorte qu'il existe un élément PLANE42 entre deux nœuds et un élément sur chaque couche. Le nombre de degrés de liberté est également conservé. Cette équivalence résulte en l'association suivante:

- Disposition avec 4 éléments cubiques et 20 couches  $\Leftrightarrow$  PLANE42 avec treillis 12x20 ;
- Disposition avec 8 éléments cubiques et 20 couches  $\Leftrightarrow$  PLANE42 avec un maillage de 24 x 20 éléments ;
- Positionnement avec 16 éléments cubiques et 20 couches  $\Leftrightarrow$  PLANE42 avec un maillage de 48 x 20 éléments.

Les résultats analytiques obtenus à partir du TCP (uniquement pour le cas de  $S = 10$ ) et ceux obtenus à travers des analyses avec Ansys utilisant une discrétisation très fine sont également présentés et adoptés comme référence pour évaluer la précision des résultats obtenus avec l'élément de portique plat laminé.

Les distributions de déplacement illustrées à la figure 52 ont été correctement obtenues avec une discrétisation en 4 éléments finis. La forme de la section a été tracée conformément aux résultats de la solution analytique basée sur la TCP, dans le cas de  $S = 10$ , et de la solution numérique obtenue avec Ansys avec un maillage raffiné. Il est à noter que l'élément fini proposé a pu représenter la forme incurvée de la section pour le cas de la poutre avec  $S = 2$ .

On observe également que les résultats obtenus avec les mailles équivalentes dans l'Ansys montrent une certaine influence du dysfonctionnement de la matrice subi par l'élément fini bidimensionnel.

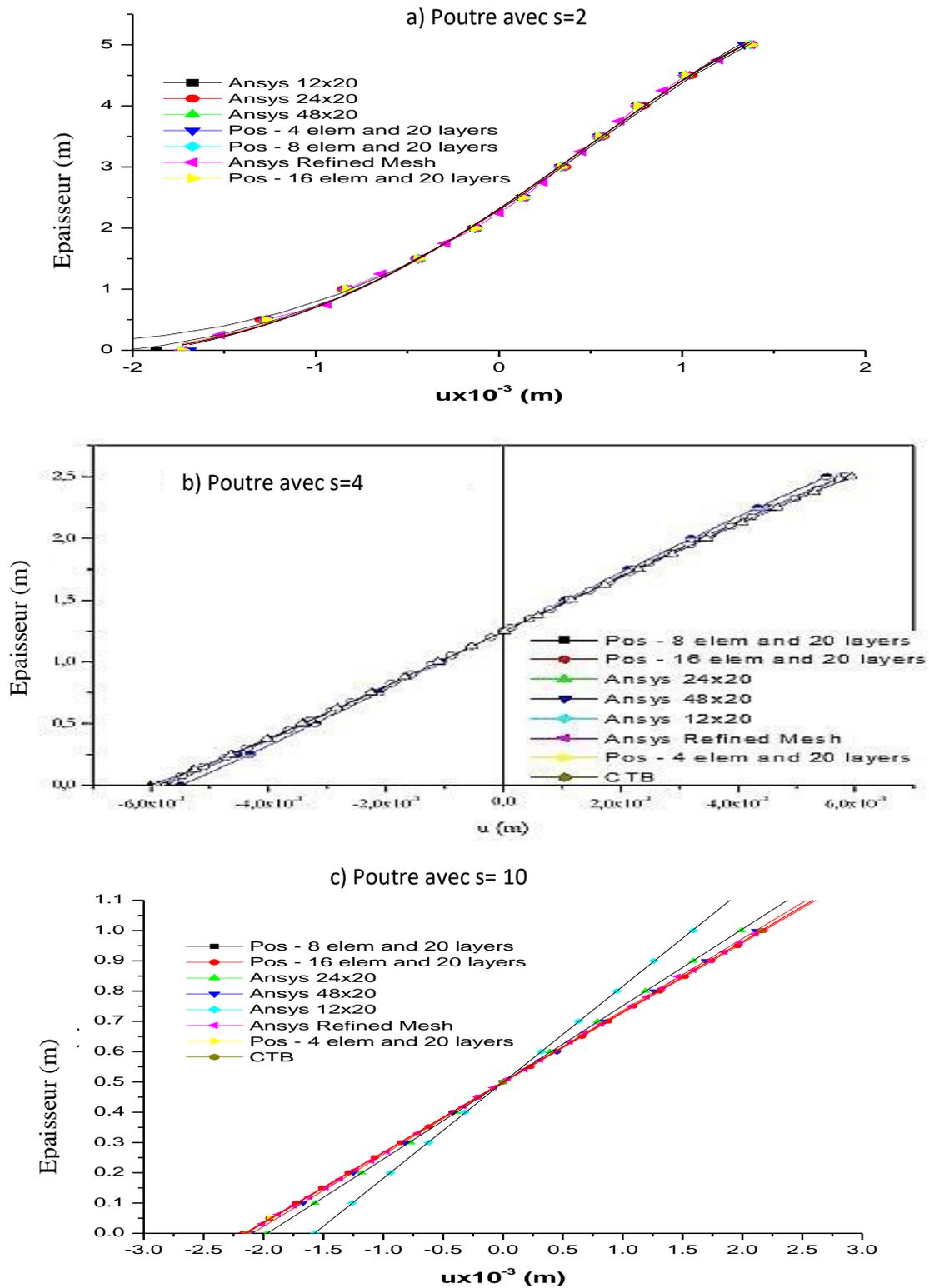


Figure 52 - Exemple 4.1: Déplacement dans la direction 1 (u) pour une section à 2,5 m du support gauche.

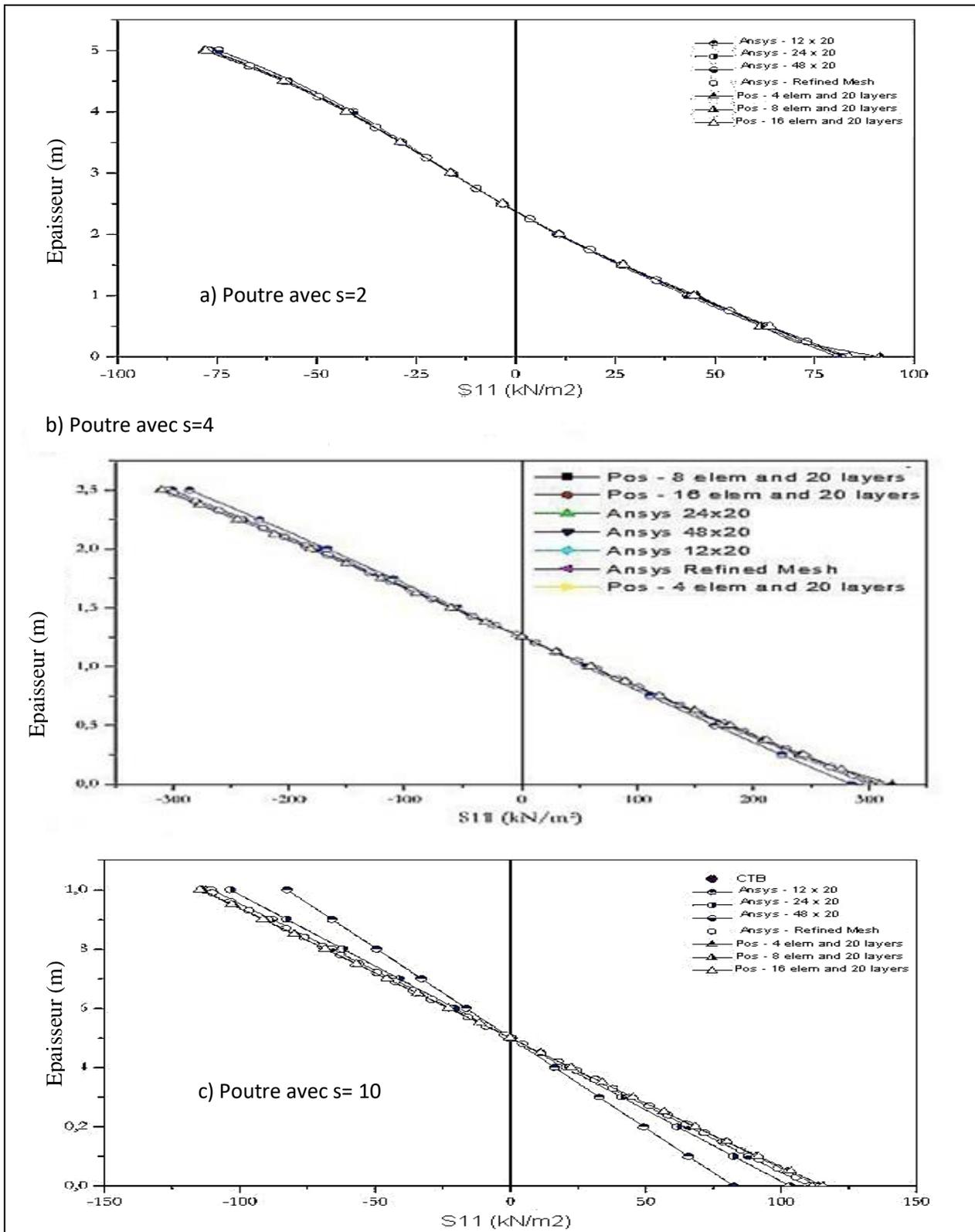


Figure 53 - Exemple 4.1: Contrainte axiale  $S_{11}$  pour une section située au milieu de la travée.

Pour la poutre avec  $S = 10$ , les éléments PLANE42 ont une distorsion plus importante et il y avait des différences dans la distribution de déplacement obtenue. Pour la poutre avec  $S = 2$ , les éléments PLANE42 sont moins déformés en raison de la hauteur plus élevée de la poutre et il n'y a pratiquement aucune différence dans la distribution des déplacements. Tous ces aspects mentionnés ci-dessus sont également vérifiés pour la répartition des contraintes axiales S11 dans le sens longitudinal, comme on peut le voir à la figure 53.

Comme le montrent les figures 54 et 55, les distributions de contrainte axiale S22 et S12 nécessitent une plus grande discrétisation (8 éléments finis) pour une représentation acceptable. Cependant, un bon accord avec les résultats de la solution analytique basée sur la TCP, dans le cas de  $S = 10$  et de la tension S12, et la solution numérique obtenue avec Ansys avec un maillage raffiné a été atteinte pour une discrétisation à 16 éléments finis.

Malgré l'exigence d'une plus grande discrétisation, les résultats obtenus avec Ansys avec des mailles équivalentes n'étaient pas meilleurs que ceux obtenus avec l'élément de portique plat stratifié. Ceci est observé principalement pour les distributions de cisaillement S12 dans le cas des poutres avec  $S = 4$  et  $S = 10$ . Dans ces poutres, l'élément bidimensionnel PLANE42 semble souffrir de problèmes de dysfonctionnement de la matrice dû à une distorsion plus importante de l'élément générée par la discrétisation équivalente par la plus petite hauteur des poutres.

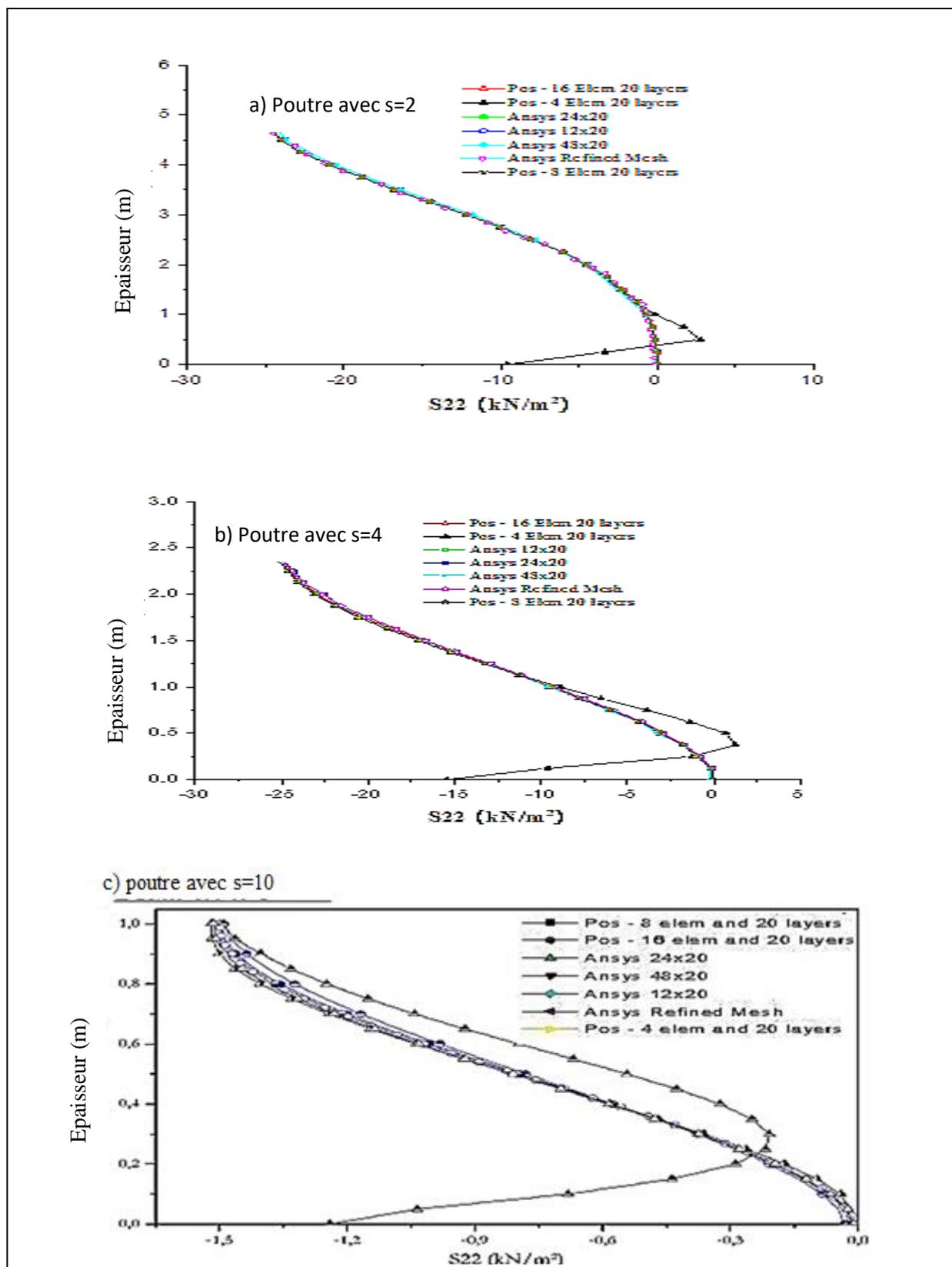


Figure 54 - Exemple 4.1: Contrainte axiale  $S_{22}$  pour une section située au milieu de la travée.

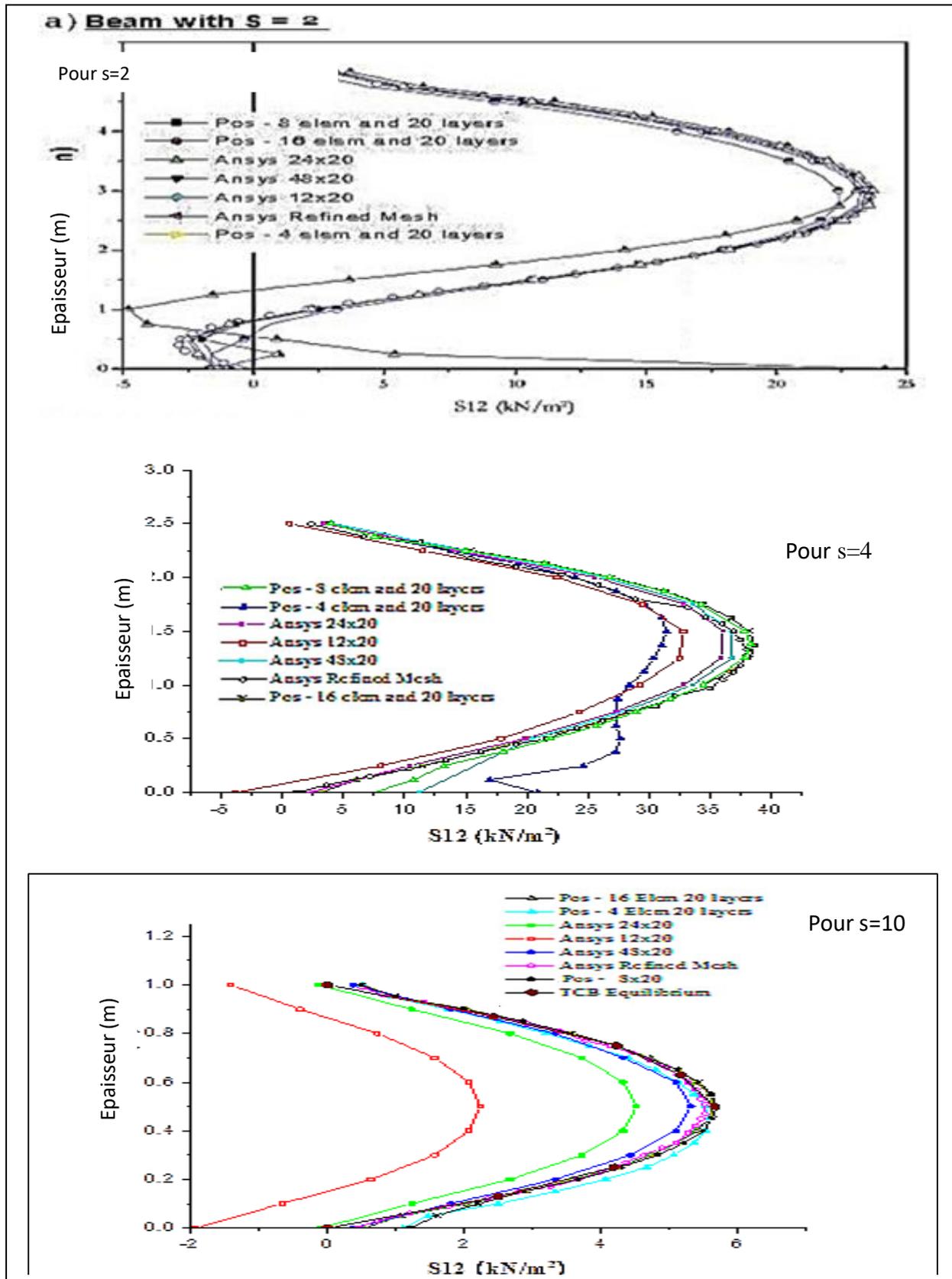


Figure 55 - Exemple 4.1: Contrainte de cisaillement  $S_{12}$  pour une section à 2,5 m du support gauche.

#### 4.4.2 Exemple 4.2: Poutre sandwich bidimensionnelle à force répartie

La même poutre de l'exemple précédent est analysée, mais maintenant la section est composée de trois couches formant un composite stratifié de type sandwich. Les couches des faces ont une épaisseur correspondant à 5% de la hauteur totale et un module d'élasticité égal à 100 fois le module d'élasticité de la couche constituant le noyau. Les caractéristiques géométriques de la section transversale et les paramètres élastiques du matériau sont illustrés à la figure 56 :

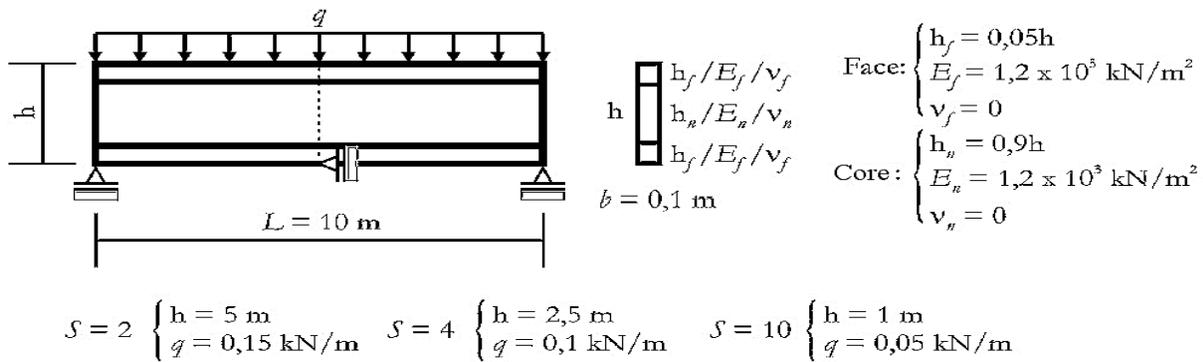


Figure 56 - Paramètres de géométrie, de chargement et d'élasticité du problème: Exemple 4.2.

Le problème a été analysé à nouveau pour trois situations, la relation entre l'envergure et la hauteur du faisceau ( $S = L / h_0$ ) prenant les valeurs de 2, 4 et 10. Il a donc été recherché de vérifier également dans le cas d'une poutre stratifiée la capacité de la formulation à représenter avec précision le déplacement et la distribution des contraintes dans des problèmes avec différents rapports d'élanement. La poutre a été discrétisée avec 16 éléments finis et 20 couches (Figure 57), 4 sur la couche inférieure, 12 sur la couche centrale et 4 sur la couche supérieure (notation 4/12/4).

Cette discrétisation a été adoptée sur la base des observations extraites des analyses de convergence effectuées dans l'exemple précédent.

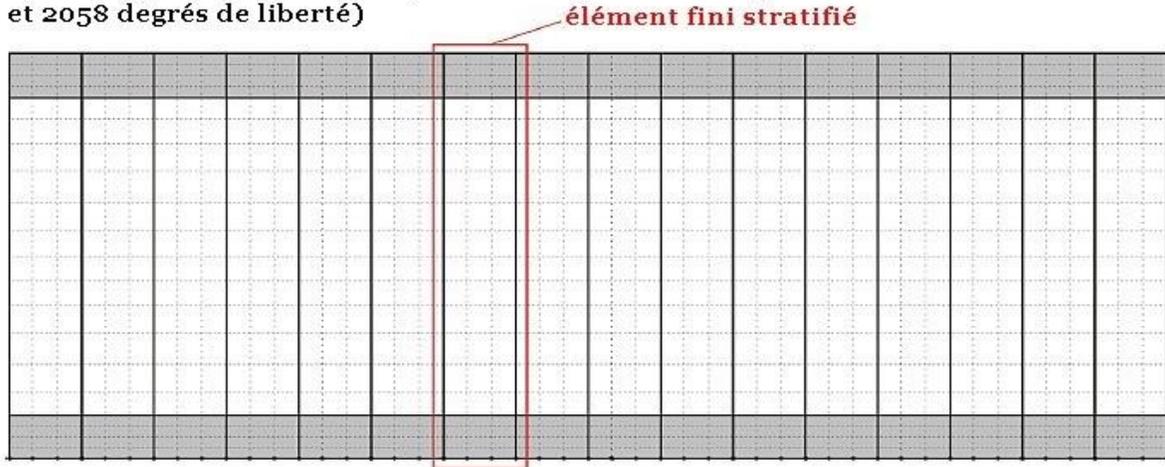
Dans toutes les analyses, la force distribuée a été appliquée en une seule étape et le processus de résolution basé sur la méthode de Newton-Raphson a été contrôlé au moyen des critères de convergence en position et en force avec des tolérances de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$ , respectivement.

Le nombre de points de Gauss employés dans les intégrations numériques du vecteur des efforts internes et de la matrice de Hessien était de  $4 \times 20$  sur chaque couche de discrétisation.

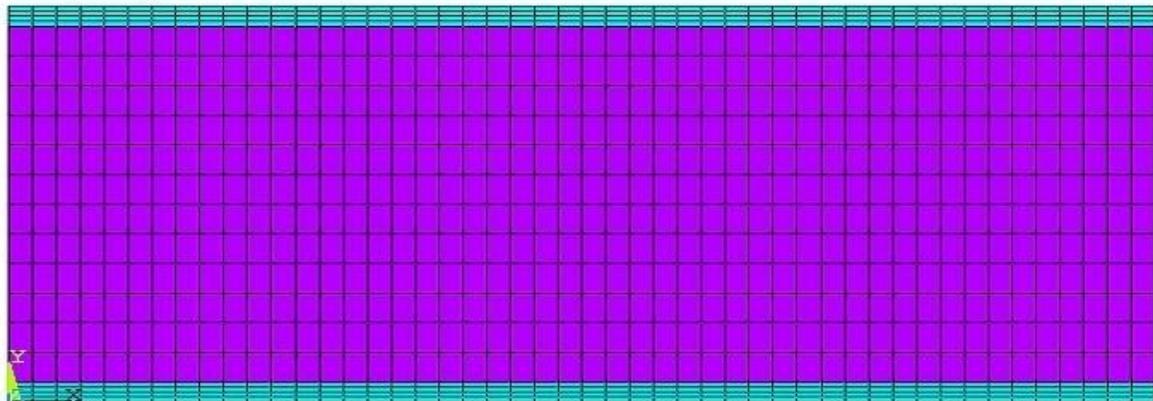
Les résultats des analyses sont présentés par les distributions de déplacement horizontal  $u$  (Figure 58), la contrainte axiale longitudinale  $S_{11}$  (Figure 59), la contrainte axiale transversale  $S_{22}$  (Figure 60) et la contrainte de cisaillement  $S_{12}$  (Figure 61). Toutes les contraintes indiquées sont des moyennes entre les éléments et la continuité inter laminaire de la contrainte axiale  $S_{11}$  entre des couches du même matériau et les contraintes transversales  $S_{12}$  et  $S_{22}$  entre des couches quelconques sont représentées par la moyenne des valeurs obtenues aux interfaces des couches adjacentes. Sur ces figures, sont également présentés les résultats moyens obtenus à partir d'analyses numériques effectuées à Ansys avec l'élément fini à deux dimensions PLANE42. L'équivalence entre le maillage d'éléments de position finis et l'élément PLANE42 (figure 57) a été réalisée de manière analogue à l'exemple précédent. Cette équivalence résulte en l'association suivante:

- Positionnement avec 16 éléments cubiques et 20 couches ( $4/12/4$ )  $\Leftrightarrow$  PLANE42 de  $48 \times 20$  mailles, dont 20 sont réparties le  $4/12/4$ .

a) Maillage d'éléments finis positionnés (16 éléments, 20 couches et 2058 degrés de liberté)



b) Maillage équivalent d'éléments finis PLANE42 (960 éléments et 2058 degrés de liberté)



c) maille raffinée d'éléments finis PLANE42 (20000 éléments et 40602 degrés de liberté)



Figure 57 - Maillages d'éléments finis utilisés dans l'exemple 4.2 pour le cas où  $S = 2$ .

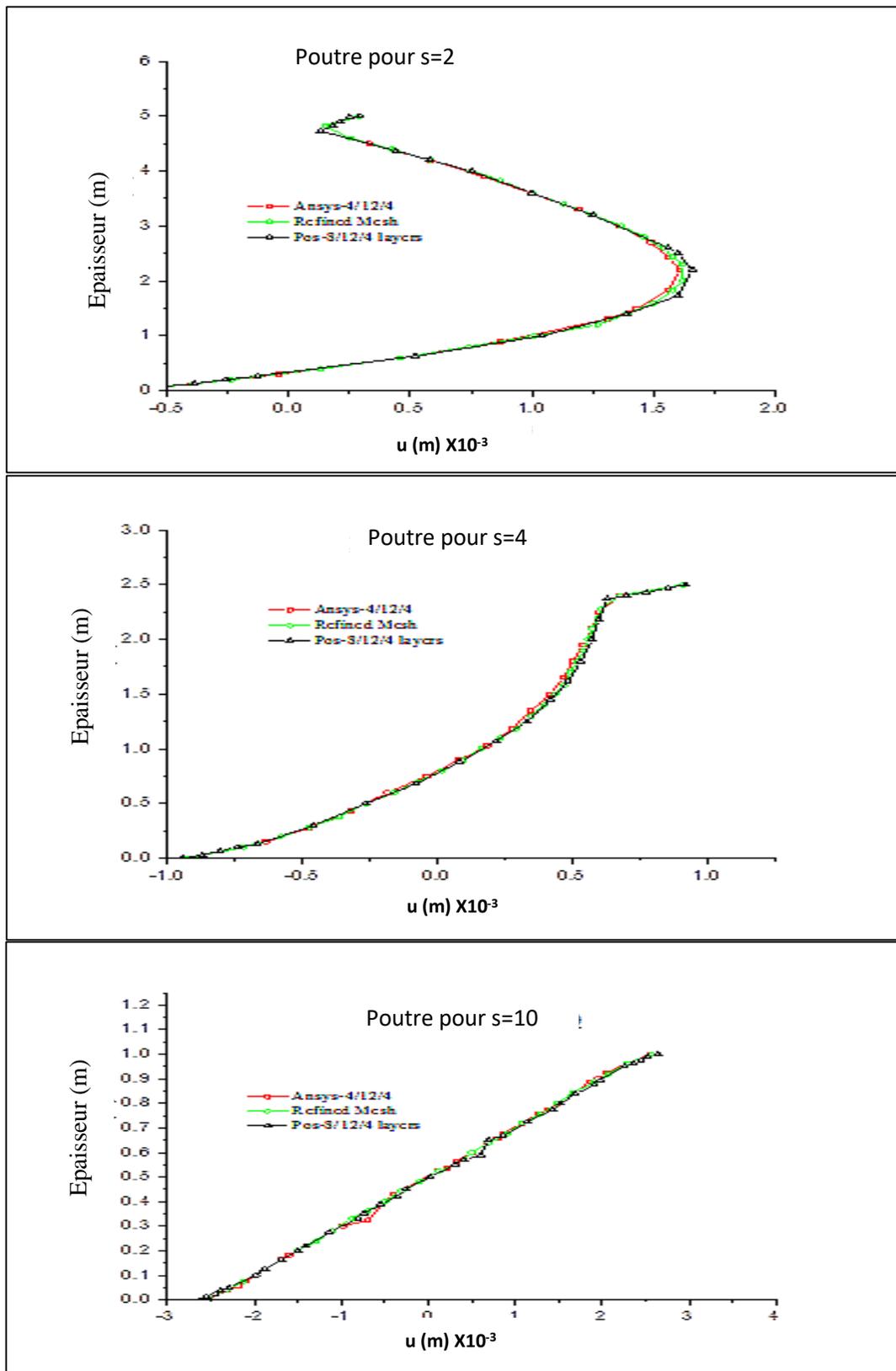


Figure 58 - Exemple 4.2: Déplacement dans la direction 1 ( $u$ ) pour une section à 2,5 m du support gauche.

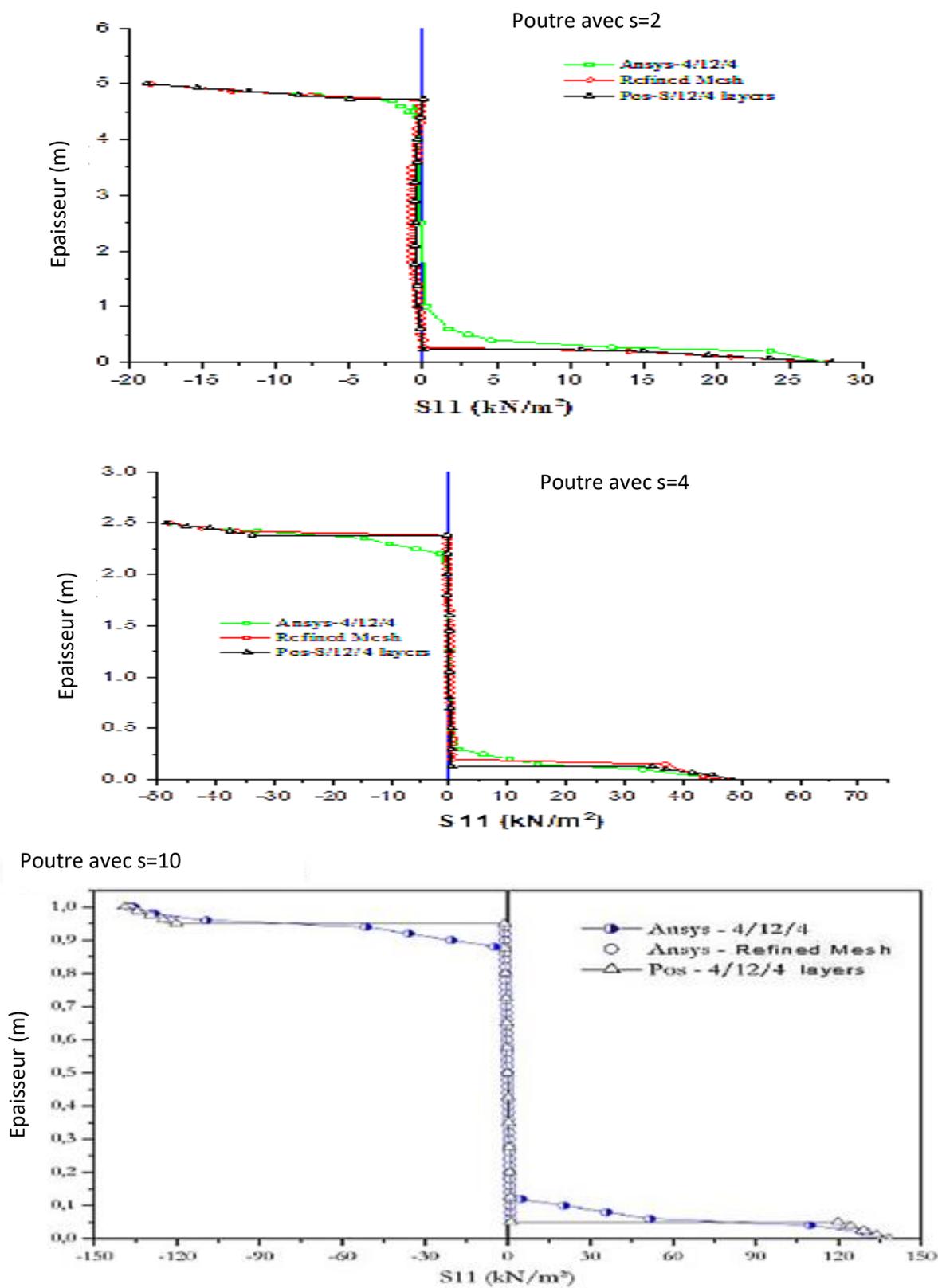


Figure 59 - Exemple 4.2: Contrainte axiale S11 pour une section située au milieu de la travée.

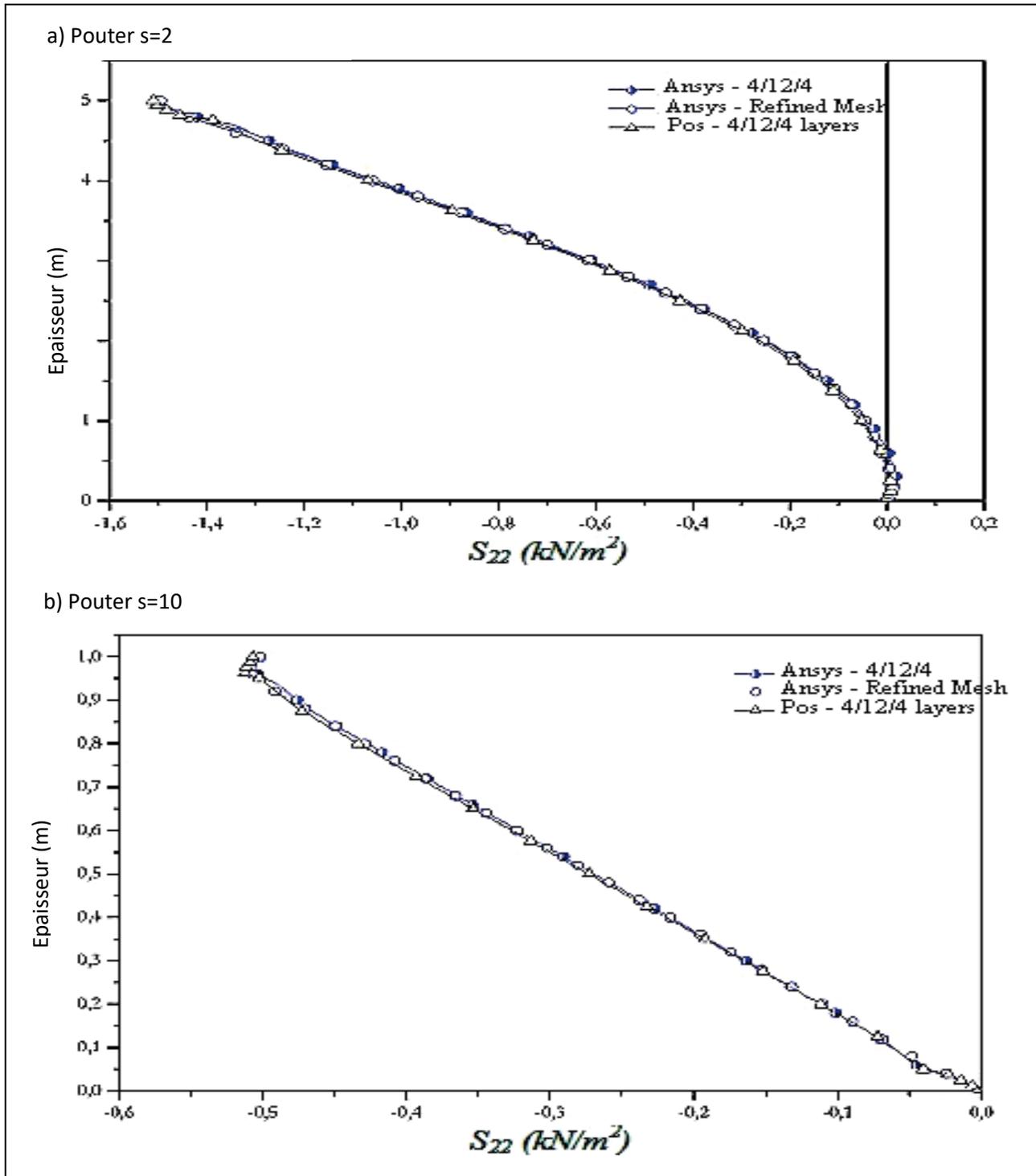


Figure 60 - Résultats de l'exemple 4.2: Contrainte axiale  $S_{22}$  pour une section située au milieu de la travée.

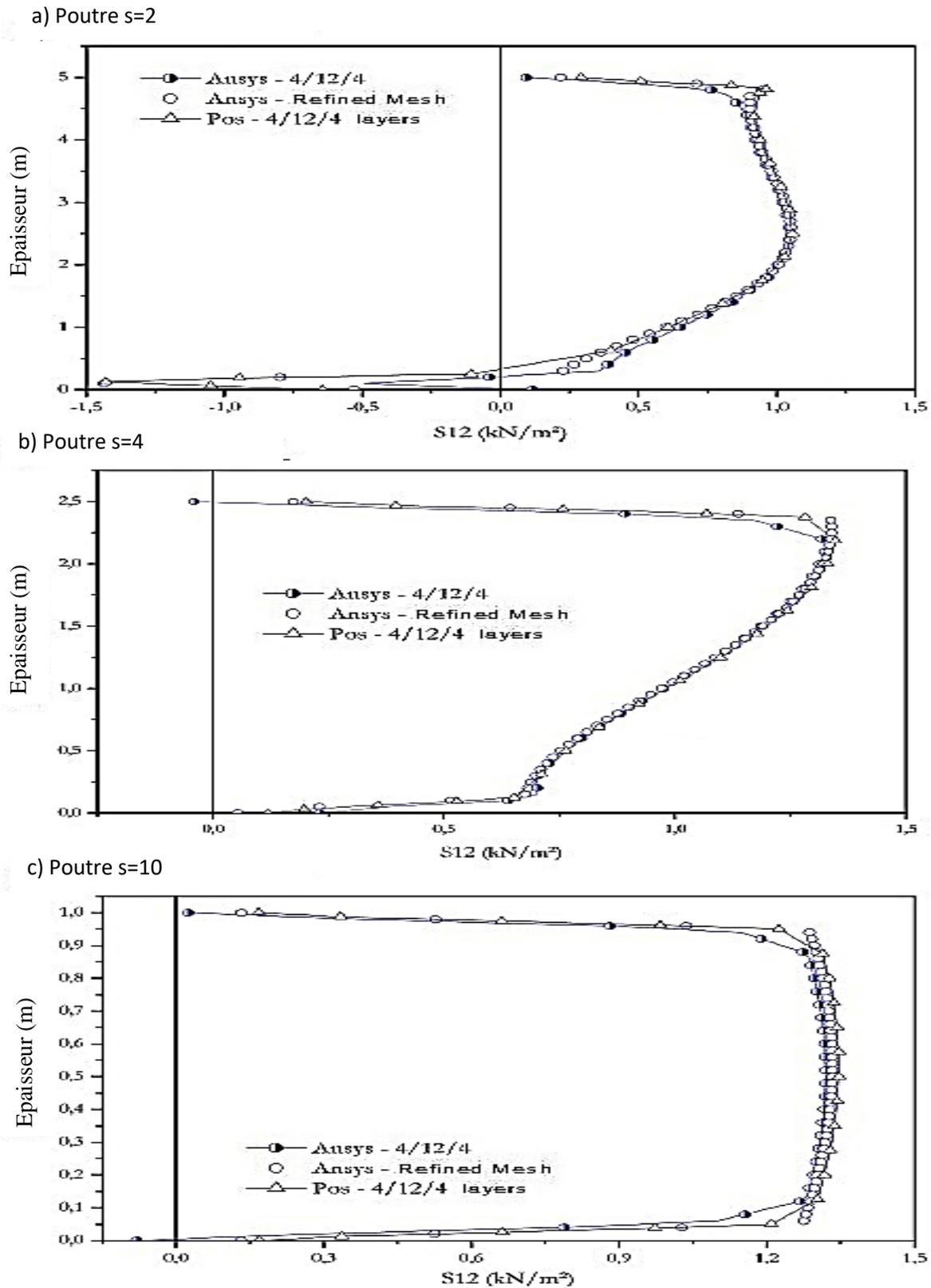


Figure 61 - Exemple 4.2: contrainte de cisaillement S12 pour une section à 2,5 m du support gauche.

Les résultats obtenus à partir d'analyses numériques effectuées sur Ansys à l'aide d'une discrétisation très fine (Figure 57) sont également présentés et adoptés comme référence.

Ainsi, la précision des résultats obtenus avec l'élément de portique plat laminé était excellente, puisqu'un excellent accord avec les résultats de référence a été obtenu, comme le montre la représentation du déplacement horizontal  $u$ , la contrainte axiale longitudinale  $S_{11}$ , la contrainte transversale axiale  $S_{22}$  et la contrainte de cisaillement  $S_{12}$  sur la figure 58, figure 59, figure 60, figure 61, respectivement.

Les résultats obtenus avec Ansys en utilisant l'élément fini bi-dimensionnel PLANE42 à travers un maillage équivalent ont montré une précision moindre pour les contraintes  $S_{11}$  et  $S_{12}$  dans la région autour des interfaces entre les couches. Cette moindre précision est attribuée à un éventuel dysfonctionnement de la matrice provoqué à la fois par la distorsion de l'élément PLANE42 et par la modification des propriétés élastiques du matériau dans la région d'interface.

Selon la performance obtenue, la possibilité d'appliquer des forces réparties à l'extérieur de la ligne de référence de l'élément peut être considérée comme cohérente. Toutes ces observations mettent en évidence l'adéquation et l'efficacité de l'élément proposé pour l'analyse de problèmes de plan mince (portique) ou non (plaque) composés de composites stratifiés.

#### **4.4.3 Exemple 4.3: Poutre sandwich bidimensionnelle à force concentrée**

Dans ce troisième exemple, une poutre sandwich similaire à celle de l'exemple précédent soumise à l'action d'une force concentrée appliquée au sommet de la section située au milieu de la travée et présentant un pas et une hauteur relatifs  $S$  égaux à 4 est analysée. Trois situations sont considérées (AAA, ABA et ACA) dans lesquelles le module d'élasticité de la lame constituant le noyau est divisé par 100 en partant d'un module égal au matériau des aubes situées sur les faces. Les caractéristiques géométriques de la section transversale et les paramètres élastiques du matériau en feuille sont illustrés à la figure 62.

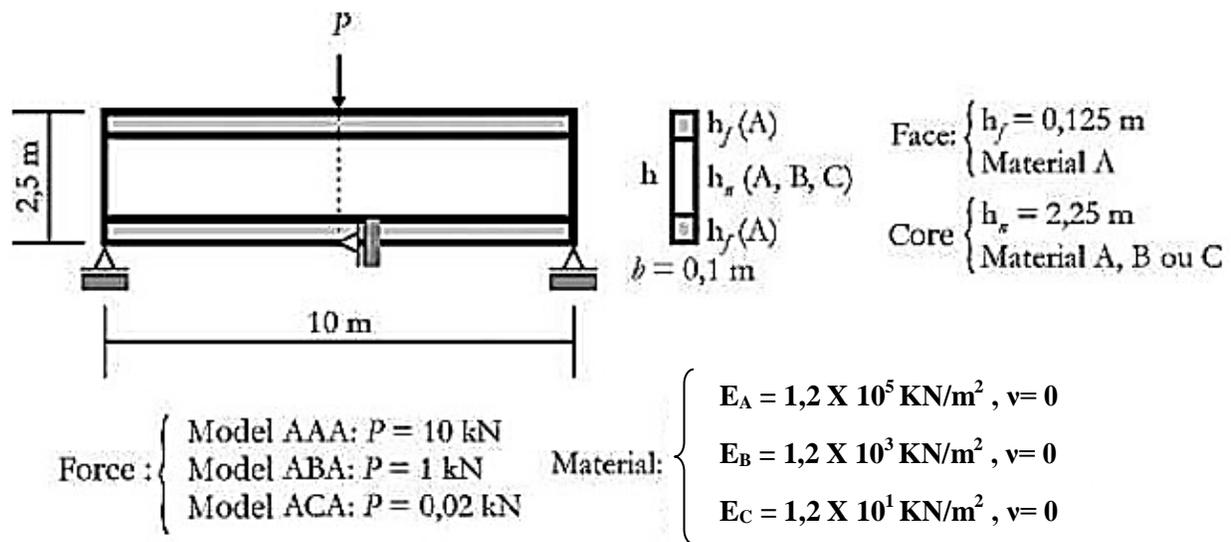


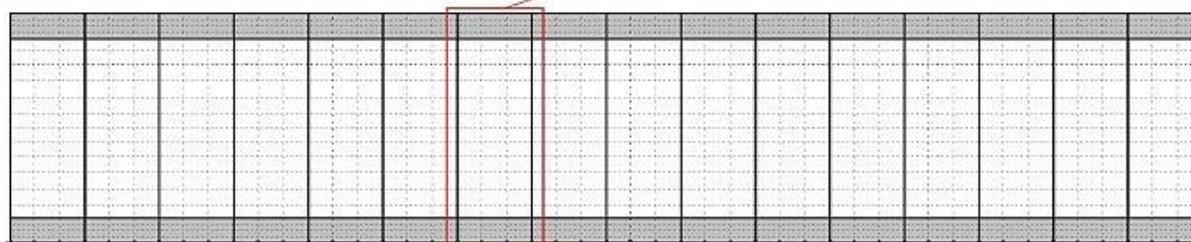
Figure 62 - Paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité de l'exemple 4.3.

Les analyses effectuées dans ces trois situations nous ont permis de vérifier la capacité de la formulation à représenter avec précision le déplacement et la distribution des contraintes dans les problèmes de variations significatives du module d'élasticité des couches, une situation courante principalement dans les composites stratifiés en sandwich. Cela peut entraîner des problèmes de mésappariement de la matrice du modèle des éléments finis discrets en raison du changement soudain de la rigidité entre les éléments adjacents (couches). Les résultats de l'exemple précédent ont déjà indiqué l'existence d'un problème pour les analyses effectuées dans le programme Ansys avec l'élément PLANE42 (avec une discrétisation équivalente), car les résultats obtenus présentaient un désaccord plus important dans la région entourant les interfaces.

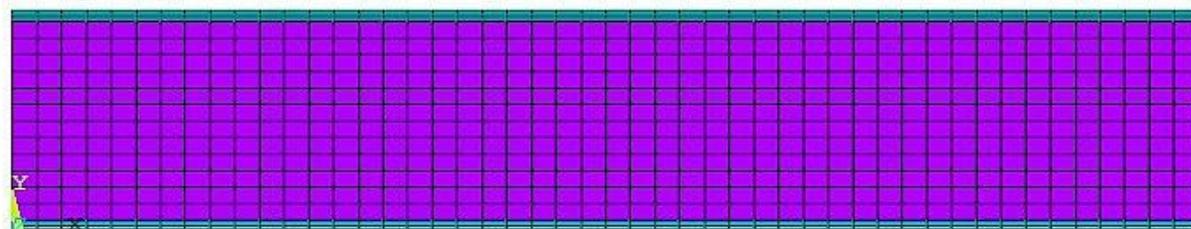
De plus, le problème analysé nous a permis d'évaluer la capacité de la formulation à envisager un autre type d'action externe: une force concentrée appliquée à un point situé en dehors de la ligne de référence de l'élément.

Là encore, la poutre a été discrétisée avec 16 éléments finis et 20 couches (Figure 63), 4 sur la face inférieure, 12 sur le noyau et 4 sur la face supérieure (notation: 4/12/4). Cette discrétisation a été adoptée en fonction des résultats obtenus dans les exemples précédents.

a) Maillage d'éléments finis positionnés (16 éléments, 20 couches et 2058 degrés de liberté)



b) Maillage équivalent d'éléments finis PLANE42 (960 éléments et 2058 degrés de liberté)



c) maille raffinée d'éléments finis PLANE42 (40000 éléments et 81002 degrés de liberté)

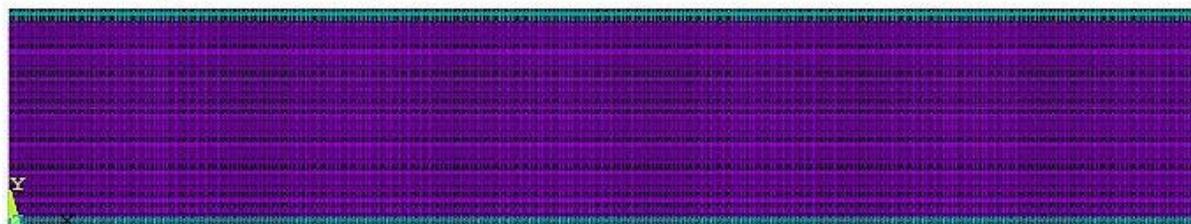


Figure 63 - Maillages d'éléments finis utilisés dans l'exemple 4.3 pour le modèle ABA.

Dans toutes les analyses, la force concentrée a été appliquée en une seule étape et le processus de résolution basé sur la méthode de Newton-Raphson a été contrôlé au moyen des critères de convergence en position et en force avec des tolérances de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$  respectivement.

Le nombre de points de Gauss employés dans les intégrations numériques du vecteur des efforts internes et de la matrice de Hessien était de  $4 \times 20$  dans chaque couche utilisée dans la discrétisation.

Les résultats des analyses sont présentés par les distributions de déplacement horizontal  $u$  (Figure 64), la contrainte axiale longitudinale  $S_{11}$  (Figure 65), la contrainte transversale axiale  $S_{22}$  (Figure 66) et la contrainte de cisaillement  $S_{12}$  (Figure 67). Tous les résultats se réfèrent à la section située à 2,5 m du support gauche. De la même manière que dans l'exemple 4.2, les contraintes indiquées sont des moyennes entre éléments et la continuité inter laminaire de la

contrainte axiale S11 entre couches d'un même matériau et des contraintes transversales S12 et S22 entre des couches quelconques a été représentée en calculant les valeurs moyennes obtenues aux interfaces des couches adjacentes. Sur ces figures, sont également présentés les résultats moyens obtenus à partir d'analyses numériques effectuées avec Ansys avec l'élément fini à deux dimensions PLANE42. La même équivalence entre les mailles de l'élément fini positionnel et de l'élément PLANE42 a été utilisée (Figure 63). Les résultats obtenus à partir d'analyses numériques effectuées sur Ansys à l'aide d'une discrétisation très fine sont à nouveau présentés et adoptés comme référence.

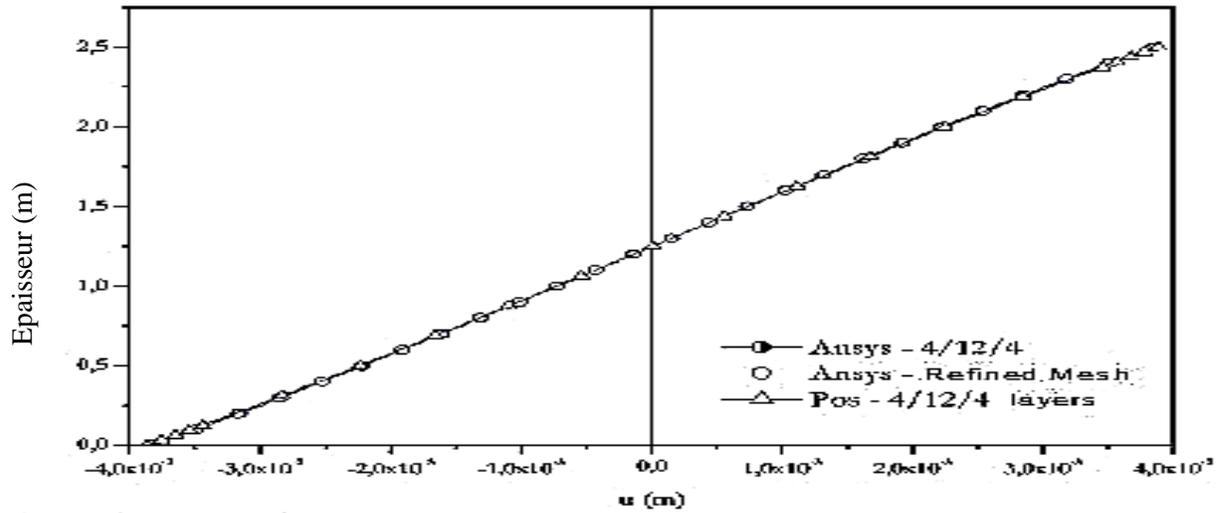
Les résultats fournis par l'élément de portique plat stratifié sont jugés satisfaisants, car les différences observées sont faibles, même dans le cas de l'ACA avec une plus grande variation des modules d'élasticité entre la face et le noyau. Ces différences étaient bien moindres que celles observées pour les résultats obtenus avec Ansys en utilisant l'élément fini à deux dimensions PLANE42 à travers un maillage équivalent. L'influence de la malformation de la matrice causée par le brusque changement de module d'élasticité entre la couche des faces et la couche du noyau était perceptible avec des divergences croissantes dans les résultats obtenus en ordre croissant pour les modèles AAA, ABA et ACA.

La performance vérifiée dans les résultats obtenus avec l'élément proposé est un indicateur de son efficacité à analyser des structures constituées de composites stratifiés, car les problèmes de dysfonctionnement de la matrice n'ont pas été identifiés, même dans les cas les plus extrêmes avec une grande variation de module d'élasticité entre les couches, dans les stratifiés sandwich.

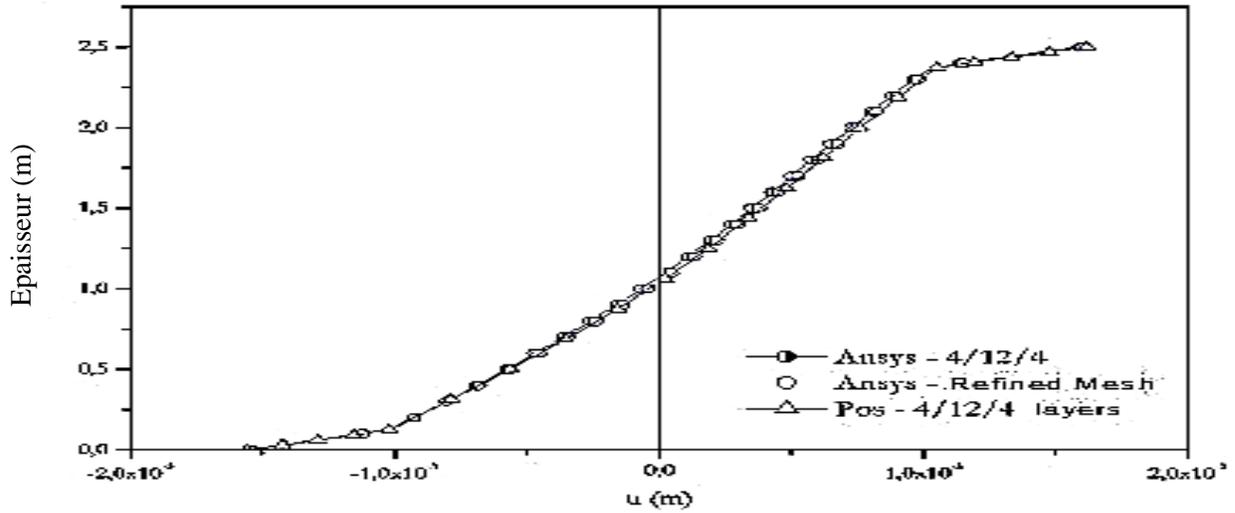
La possibilité d'appliquer une force concentrée en dehors de la ligne de référence de l'élément était également cohérente.

Il est à noter que les résultats satisfaisants obtenus avec l'élément de portique plat laminé ont utilisé une quantité d'éléments finis et de degrés de liberté beaucoup plus faibles que ceux utilisés dans les analyses d'Ansys avec un maillage raffiné, comme il est vérifié lors de la comparaison des maillages illustrés, dans la figure 63.

a) Model AAA



b) Model ABA



c) Model ACA

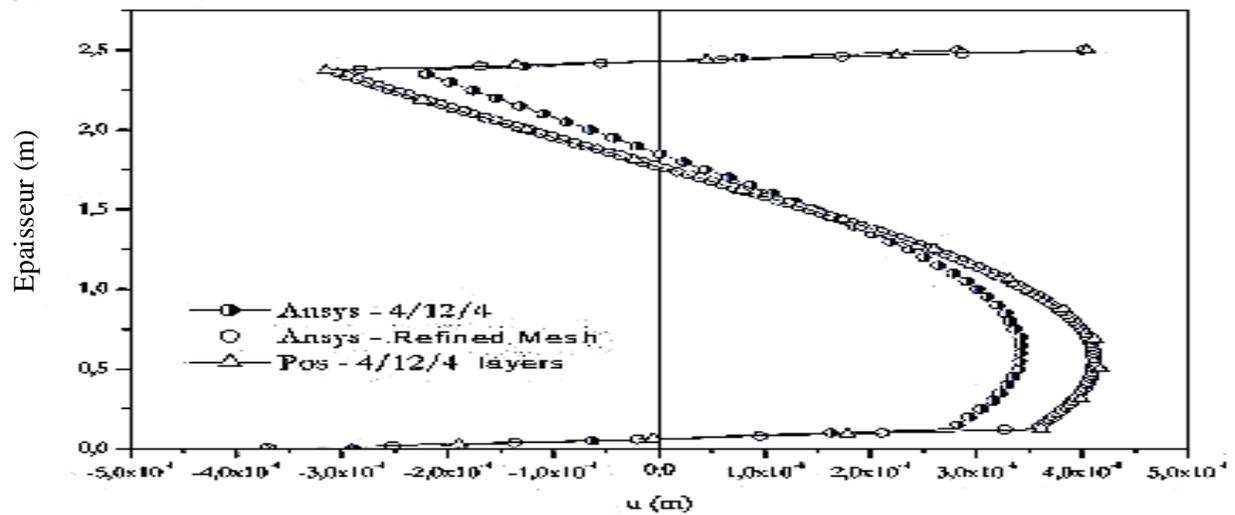


Figure 64 - Exemple 4.3: Déplacement dans la direction 1 (u) pour une section à 2,5 m du support gauche.

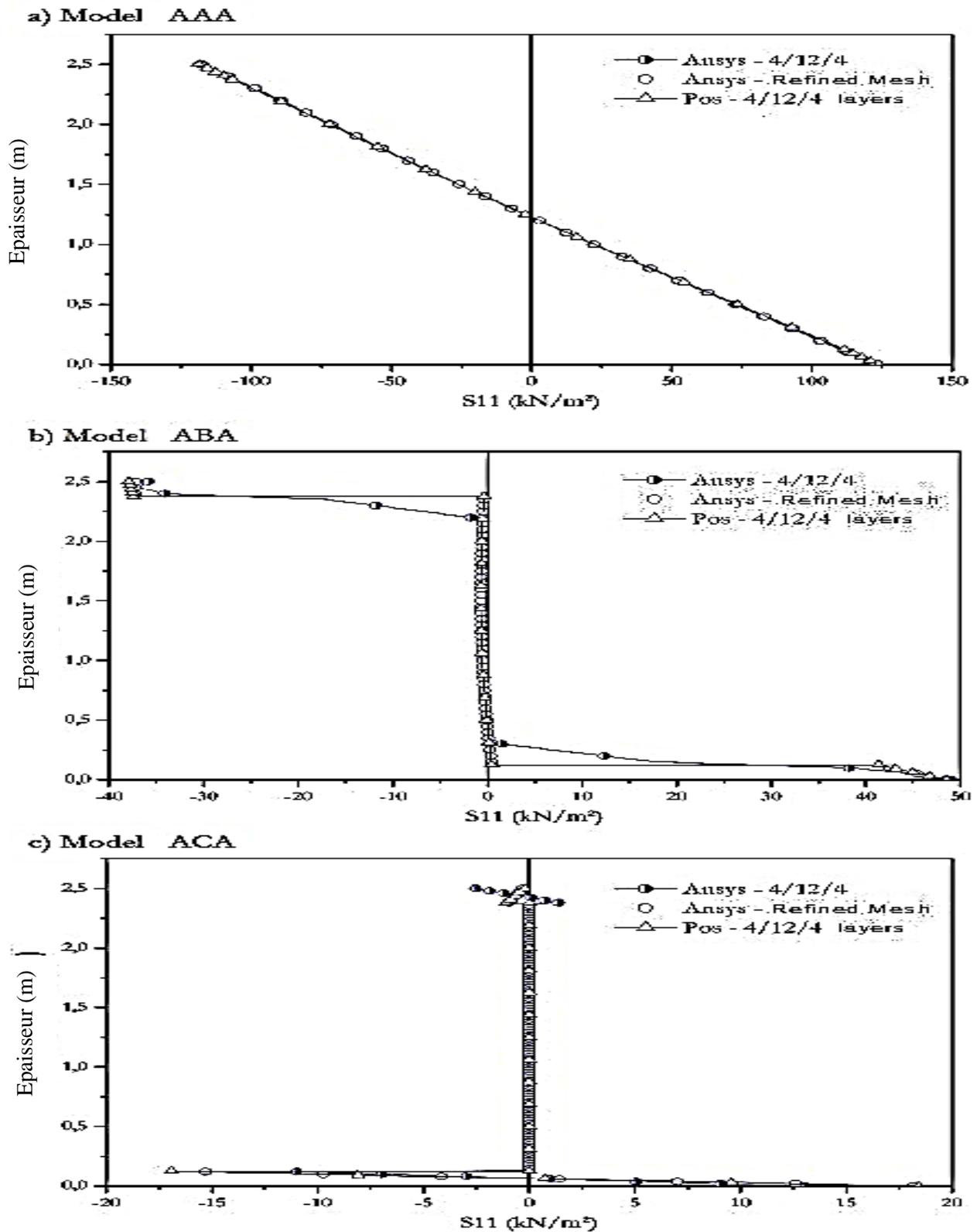
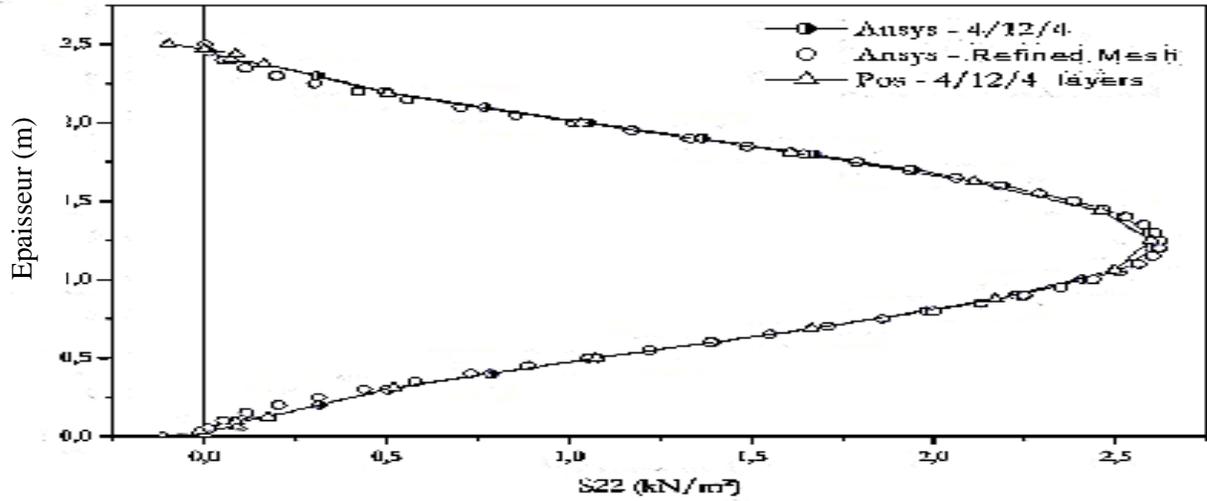
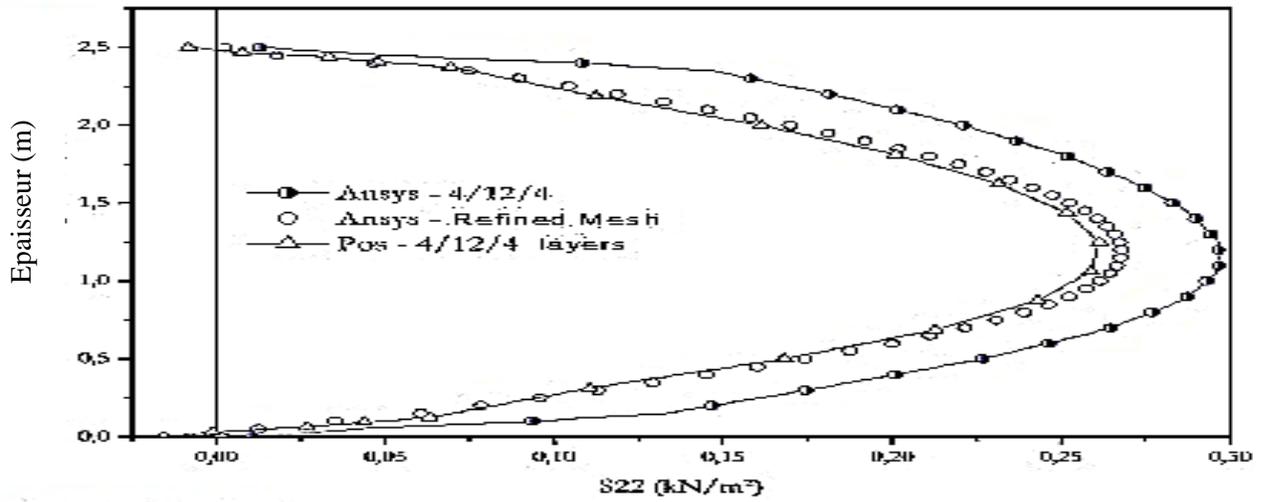


Figure 65 - Résultats de l'exemple 4.3: Contrainte axiale  $S_{11}$  pour une section à 2,5 m du support gauche.

a) Model AAA



b) Model ABA



c) Model ACA

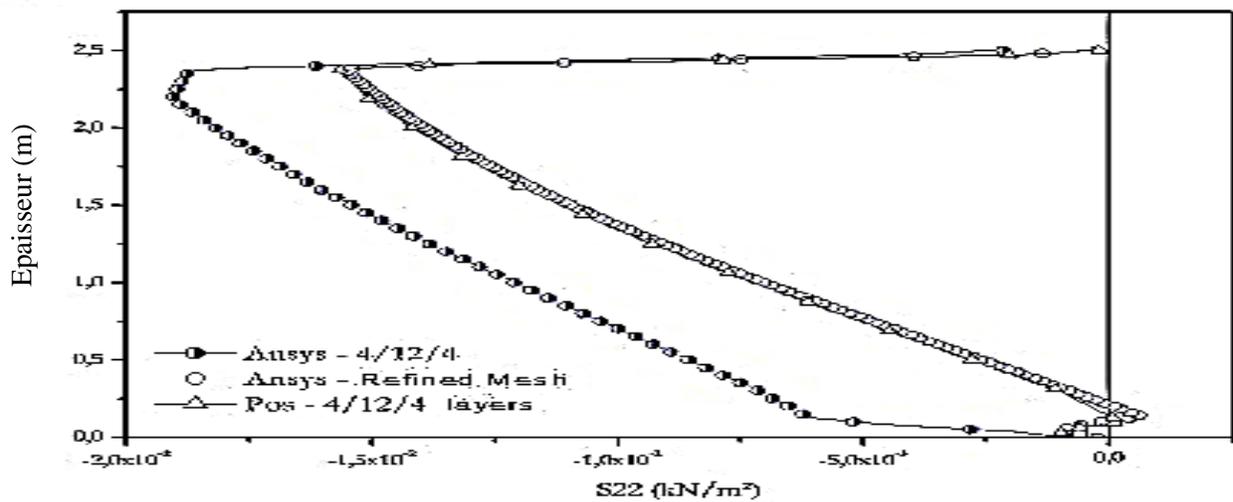
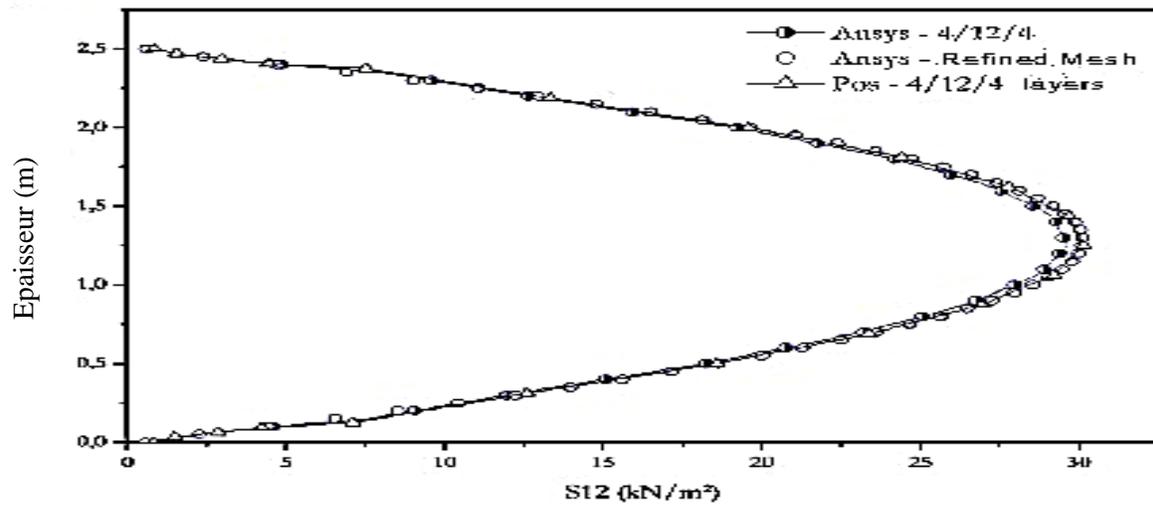
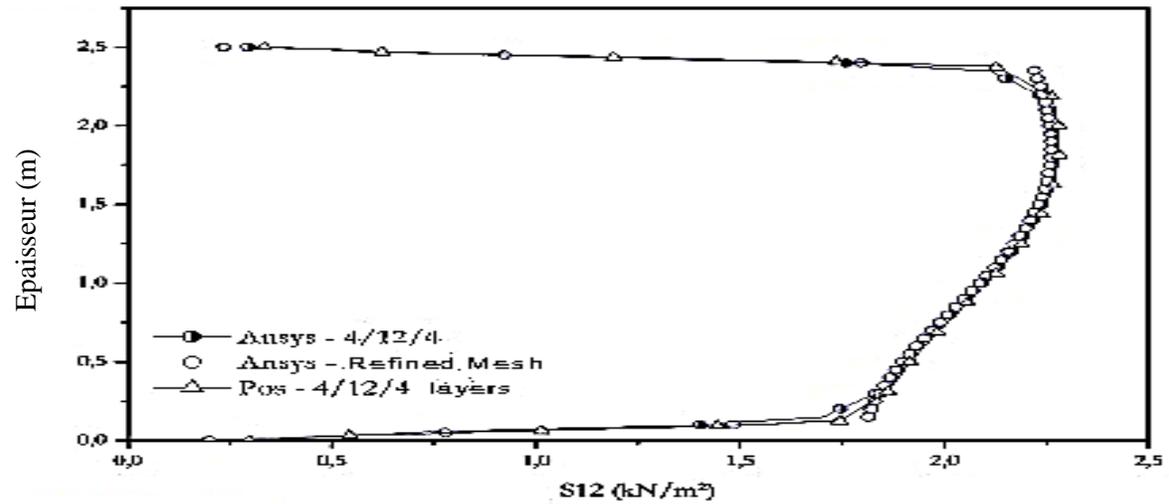


Figure 66 - Résultats de l'exemple 4.3: Contrainte axiale S22 pour une section à 2,5 m du support gauche.

a) Model AAA



b) Model ABA



c) Model ACA

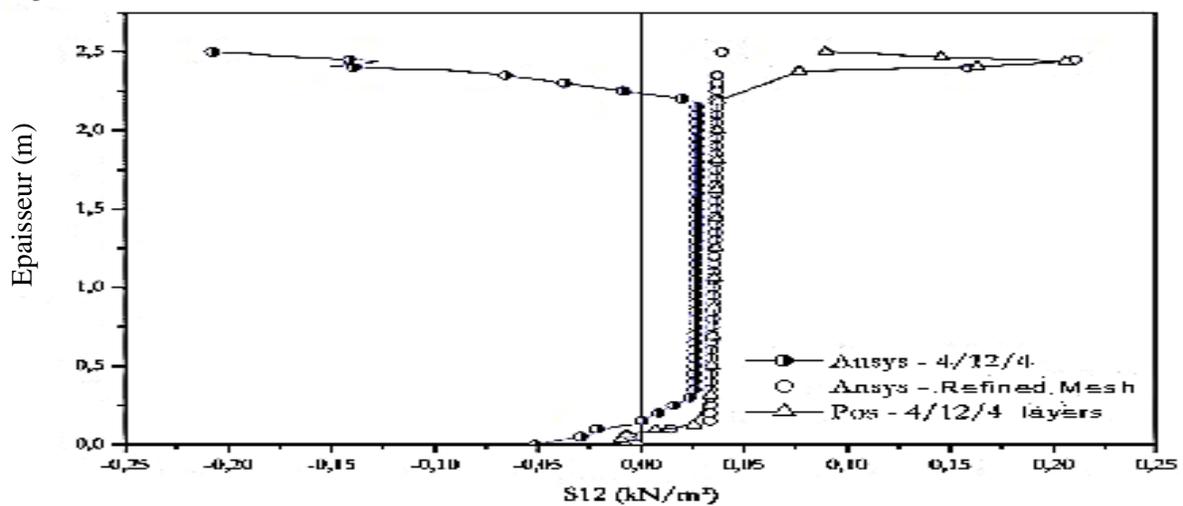


Figure 67 - Exemple 4.3: contrainte de cisaillement S12 pour une section à 2,5 m du support gauche.

#### 4.4.4 Exemple 4.4: Véranda homogène à liaisons semi-rigides

Jusqu'à présent, les exemples analysés ne nécessitaient pas l'utilisation de la technique de pénalité présentée à la rubrique 4.3.6 pour le couplage entre éléments. Ainsi, dans cet exemple, le problème du portique, avec des connections semi-rigides, analysé à la section 3.4.3 est repris. À l'époque, la technique de couplage s'avérait efficace pour le cas d'un élément à portique plat homogène. Afin d'évaluer la technique pour le boîtier laminé, le portique à supports élastiques rotatifs a été à nouveau analysé. Cependant, on considère que la section est constituée de 5 couches de même épaisseur mais de même matériau, car la section est homogène. On a adopté la même discrétisation que celle utilisée dans les analyses utilisant l'élément à portique plat homogène, à savoir: 4 éléments finis par section de couche et 6 éléments finis dans chaque poutre, totalisant 28 éléments. Dans le cas de l'élément stratifié, une discrétisation avec 4 éléments finis par barre est également suffisante pour obtenir une réponse adéquate en déplacements, comme cela a été observé dans les analyses de convergence présentées dans l'exemple 4.1.

Les paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité des matériaux utilisés sont illustrés à la figure 69. La rigidité à la rotation du support est de 1990,7 kNm, ce qui correspond à  $0,1(EI/L)_{\text{pilié}}$ . Quatre analyses sont effectuées: une sur les liaisons rigides et les trois autres sur des liaisons semi-rigides de 4491 kNm, 9730 kNm et 30705 kNm respectivement. Pour définir la rigidité de liaison associée à chaque couche, la rigidité totale de la liaison a été pondérée par le rapport de l'épaisseur de la couche à l'épaisseur totale de la section.

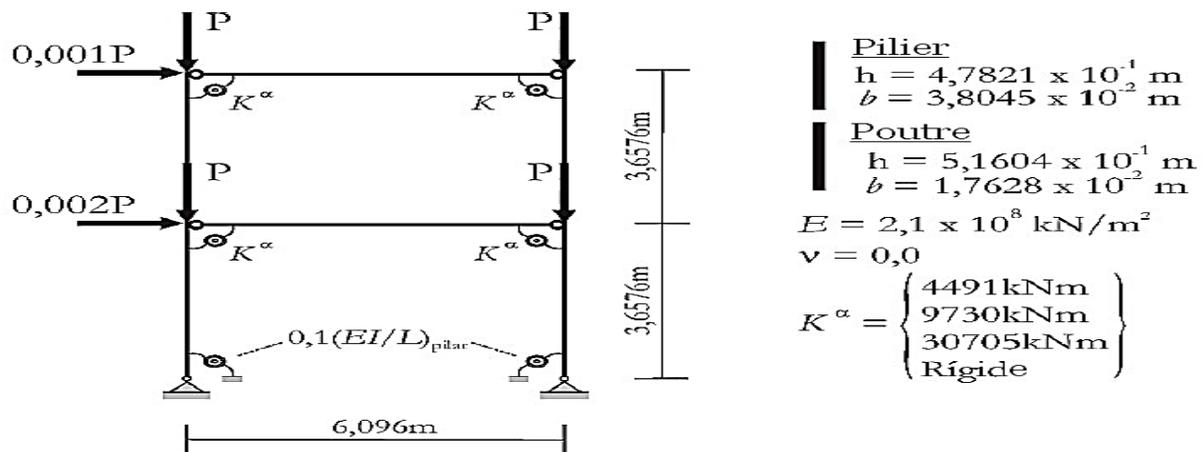


Figure 69 - Paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité de l'exemple 4.4.

Les résultats présentés à la section 3.4.3 (Figure 42) obtenus par Liu et Chen (1988) [185] et à partir d'analyses numériques effectuées sur Ansys à l'aide de BEAM188 pour la modélisation des barres et de l'élément de couplage COMBIN40 pour la modélisation des liaisons semi-rigides sont à nouveau utilisées comme référence pour évaluer les résultats obtenus avec l'élément de portique plat laminé. De plus, les résultats obtenus avec l'élément de portique plat homogène sont également présentés, permettant d'évaluer l'effet généré par l'augmentation du nombre de degrés de liberté associés à la section (tours indépendants et variation d'épaisseur de chaque couche).

De même que dans la section 3.4.3, la charge a été augmentée (pas de 50 kN) jusqu'à ce que la déstabilisation des portails soit identifiée par la formation de tronçons de rigidité très faible dans les trajectoires d'équilibre faisant référence au déplacement horizontal du nœud supérieur gauche. Ces trajectoires sont illustrées à la figure 70 et ont été tracées jusqu'à un déplacement de 0,30 m.

Le processus de résolution basé sur la méthode de Newton-Raphson est utilisé dans toutes les analyses et les critères de convergence adoptés sont en place et en vigueur avec des tolérances de  $10^{-9}$  et  $10^{-6}$ , respectivement. Toutes les intégrations numériques ont été effectuées en utilisant 4 x 20 points de Gauss dans chaque couche de discrétisation.

Les trajectoires d'équilibre obtenues avec l'élément de portique plat stratifié représentaient le comportement de la structure de manière cohérente avec les résultats utilisés comme référence. Ainsi, la technique proposée pour le couplage entre éléments stratifiés est vérifiée et considérée comme cohérente.

Le comportement n'était que légèrement plus souple que celui présenté pour l'élément homogène en raison du plus grand nombre de degrés de liberté présents dans la discrétisation de la section transversale de l'élément stratifié. L'influence de ceci est identifiée par des différences croissantes à mesure que la rigidité de la liaison augmente.

Dans les cas avec des rigidités de 4491 kNm et 9730 kNm, la flexibilité générée par les connexions semble l'emporter sur la flexibilité générée par l'augmentation du nombre de degrés de liberté et les trajectoires d'équilibre des éléments homogènes et laminés coïncident pratiquement.

Dans les cas avec une rigidité de 30705 kNm et une liaison rigide, la flexibilité causée par la liaison était moins grande et l'effet de l'augmentation du nombre de degrés de liberté était plus important sur le comportement du portique. Ainsi, une plus grande différence est identifiée par rapport aux trajectoires d'équilibre obtenues avec l'élément homogène. Malgré cela, les résultats sont tout à fait satisfaisants, car les différences ne reflètent qu'une cohérence avec la cinématique des deux éléments.

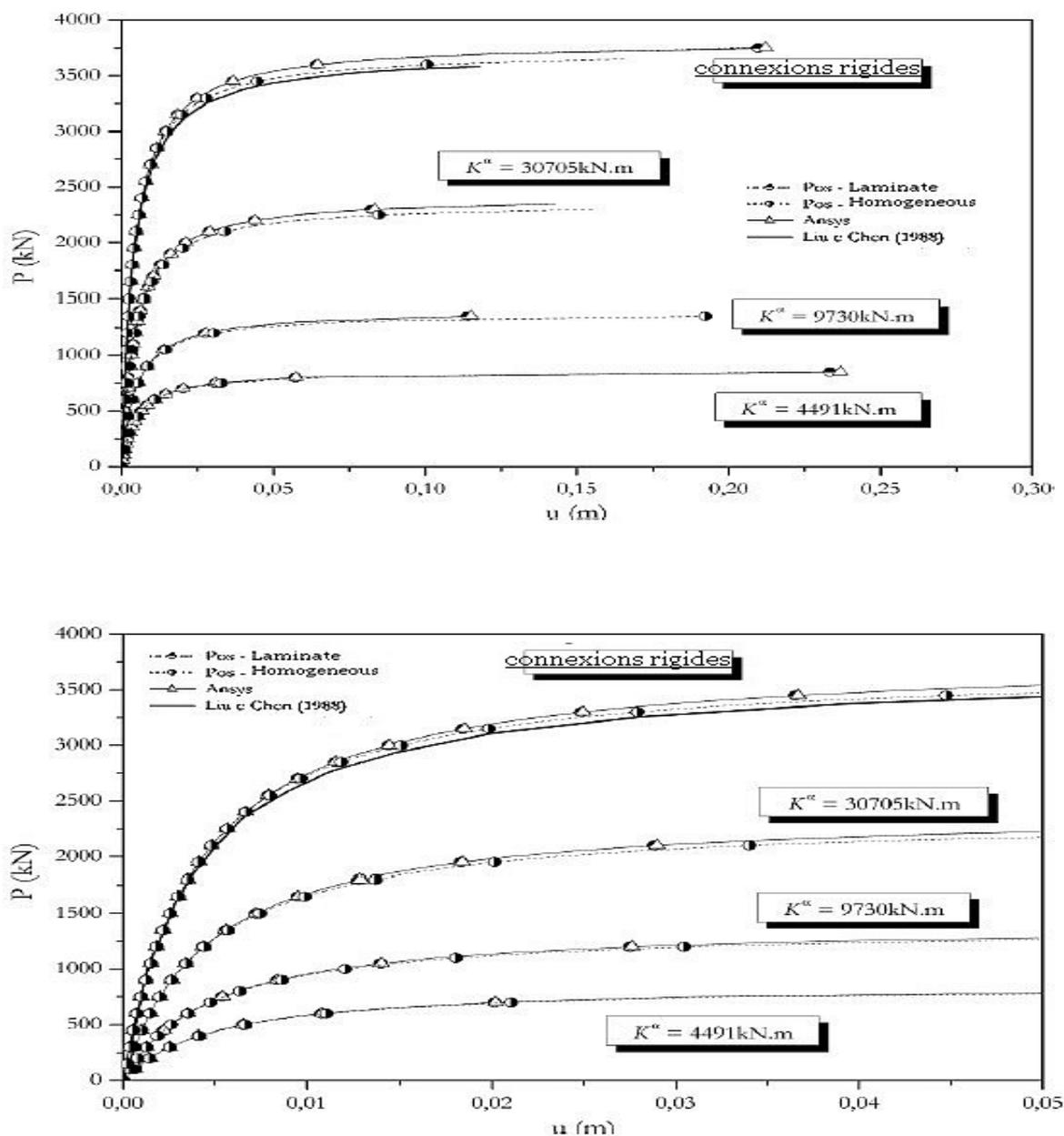


Figure 70 - Trajectoires d'équilibre du portique à connexions semi-rigides analysées avec l'élément stratifié (en haut). Initiale (inférieure).

#### 4.4.5 Exemple 4.5: Portiques laminés

Compte tenu des résultats satisfaisants obtenus dans les analyses effectuées sur les problèmes des quatre exemples précédents, la formulation de l'élément de portique plat stratifié et sa mise en œuvre informatique sont vérifiées. Ainsi, dans le dernier exemple, deux cadres stratifiés ont été analysés et les résultats sont présentés sous forme de distributions de déplacement le long de sections transversales situées à des points spécifiques des cadres.

Comme indiqué ci-dessus, les exemples illustratifs présentés ici contribueront à des résultats pouvant être utilisés comme référence pour la vérification de formulations futures. La plupart des articles consultés dans la revue de littérature contenaient des exemples de plaques ou de coques laminées et seuls quelques exemples contenaient des poutres laminées. Problèmes de portiques plats stratifiés n'ont pas été trouvés. De plus, les exemples disponibles ont été limités au régime de linéarité géométrique.

Cela dit, les deux problèmes proposés sont le portique de cinq étages et le simple portique avec un étage, tous deux avec des appuis fixes, des liaisons rigides et soumis à l'action de forces concentrées et réparties. Les cadres ont des sections transversales laminées composées de cinq couches. La géométrie, les propriétés élastiques des matériaux et le chargement sont décrits à la figure 72.

Pour l'exemple du portique à cinq étages, toutes les barres ont été discrétisées avec 4 éléments et 20 couches réparties dans 2/2/12/2/2. Seuls 4 éléments ont été utilisés car seules les distributions de déplacement sont représentées dans les sections S1, S2, S3, S4, S5 et S6. Dans l'exemple du portique avec un étage, les piliers ont été discrétisés avec 6 éléments et la poutre avec 10 éléments. La section a également été discrétisée avec 20 couches réparties dans 2/2/12/2/2. Les distributions de déplacement sont présentées pour les sections transversales S1 et S2.

Les trajectoires d'équilibre relatives au déplacement horizontal du nœud supérieur gauche sont également présentées pour les deux cadres.

La charge a été augmentée en 4 étapes égales et le processus de résolution basé sur la méthode de Newton-Raphson a été utilisé dans toutes les analyses avec des critères de convergence en position (tolérance de  $10^{-9}$ ) et en force (tolérance de  $10^{-6}$ ). Toutes les intégrations numériques ont été effectuées en utilisant 4 x 20 points de Gauss dans chaque couche de discrétisation.

Les résultats obtenus pour les deux exemples sont illustrés à la Figure 73, Figure 74 et Figure 75.

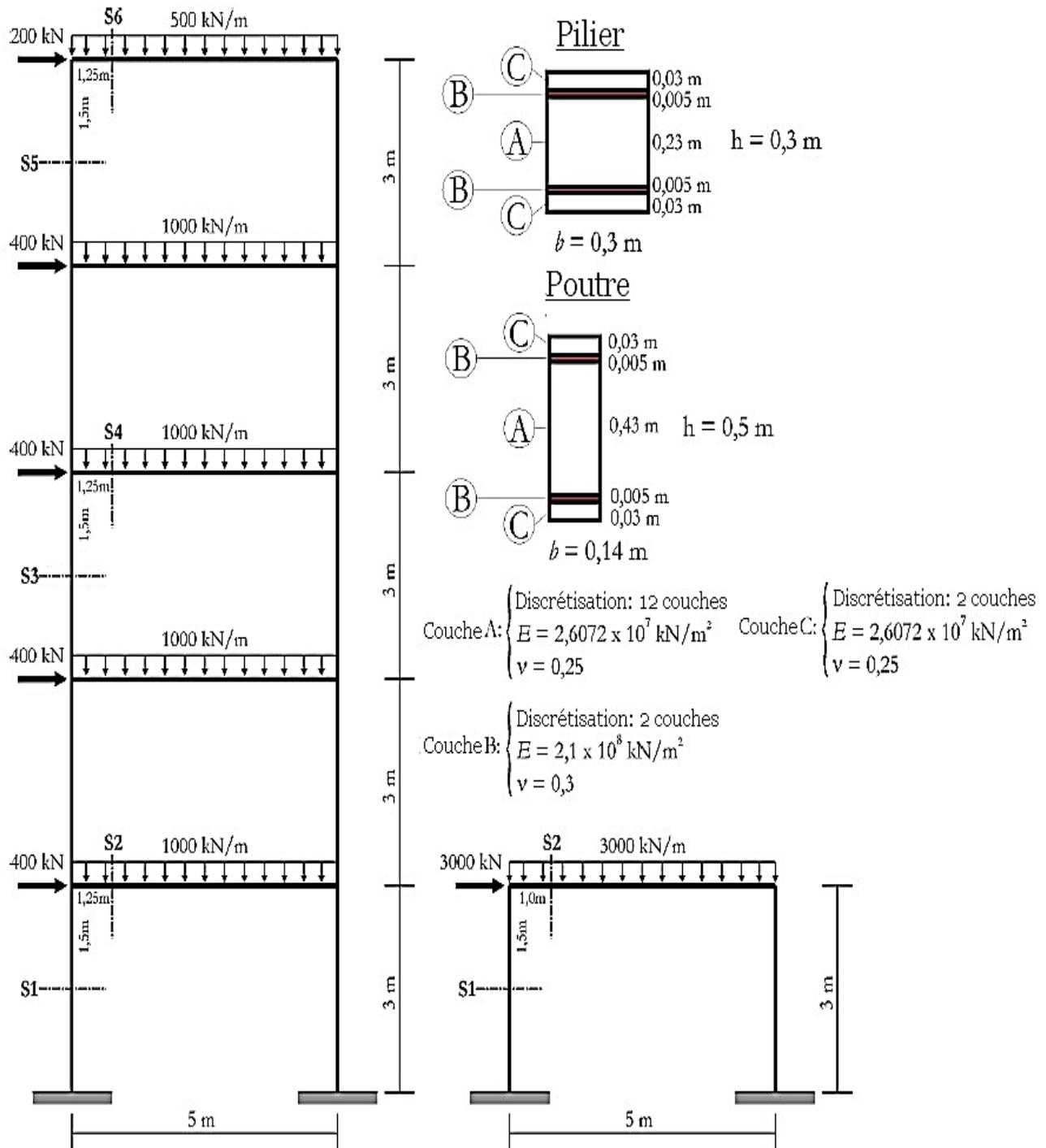
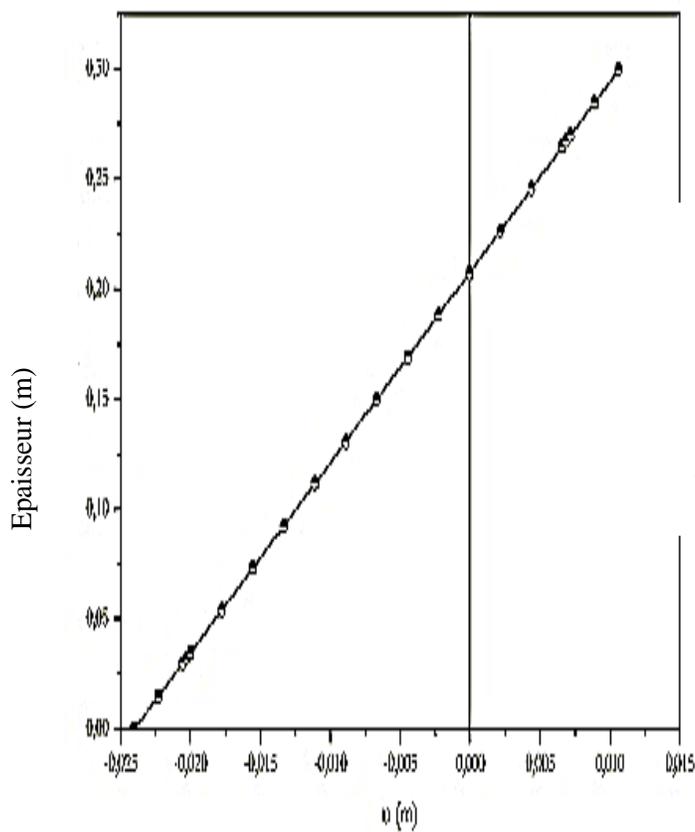


Figure 72 - Paramètres de géométrie, de charge et d'élasticité des cadres stratifiés.

a) Section S1



b) Section S2

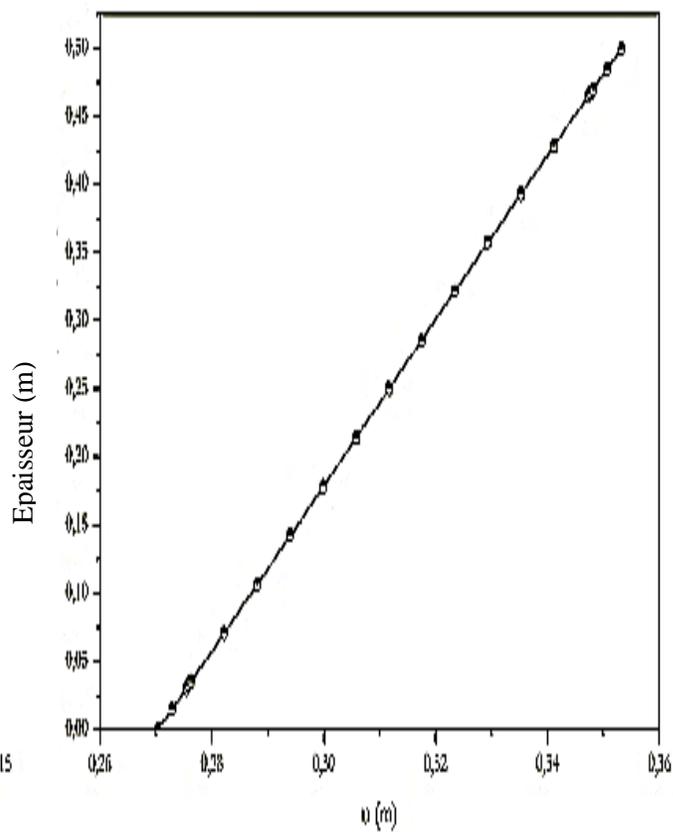


Figure 73 - Répartition des déplacements longitudinaux  $u$  (m) pour certaines sections transversales du portique avec un étage. Résultats de la dernière augmentation de charge.

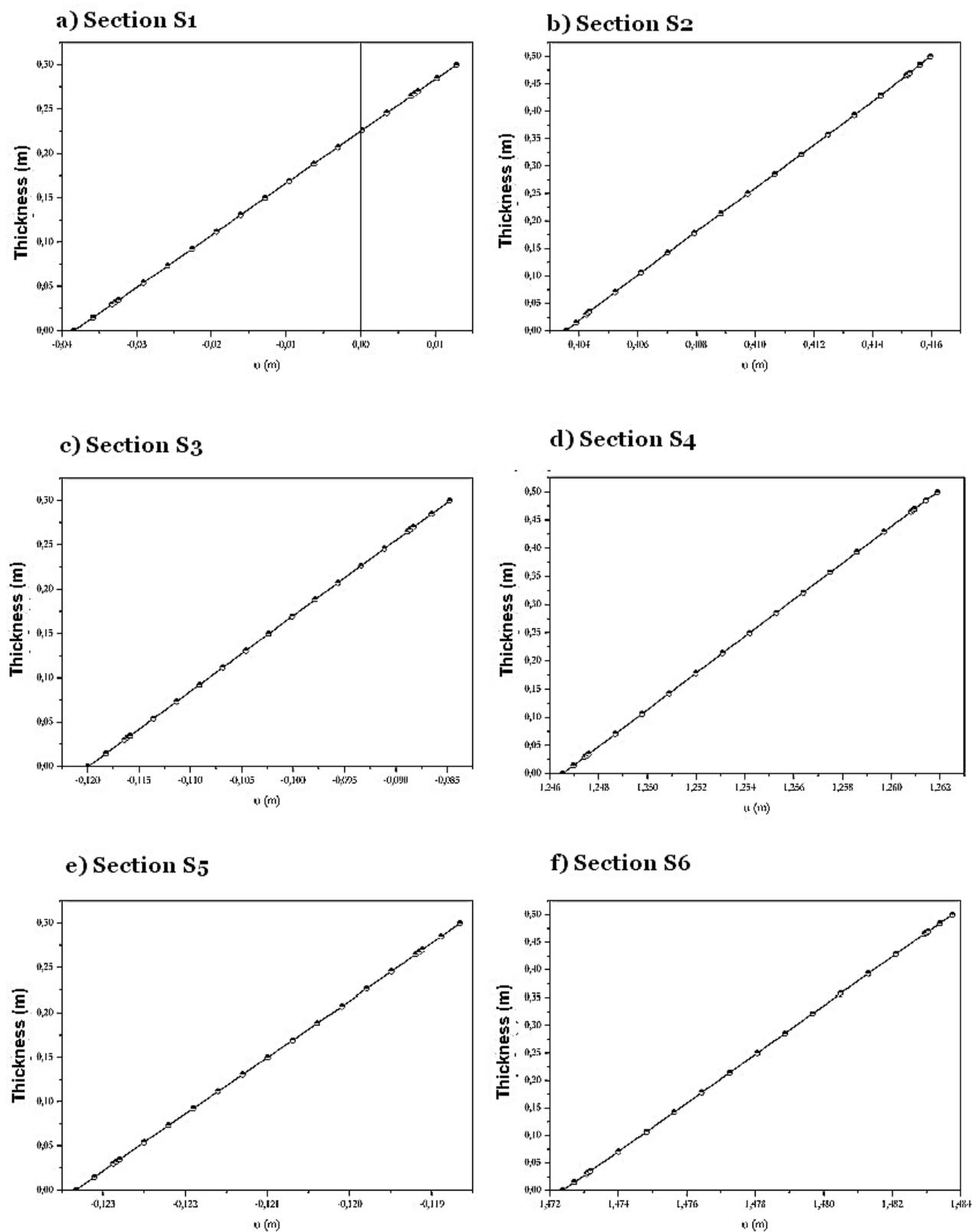


Figure 74 - Répartition des déplacements longitudinaux  $u$  (m) pour certaines sections transversales du portique à cinq ponts. Résultats de la dernière augmentation de charge.

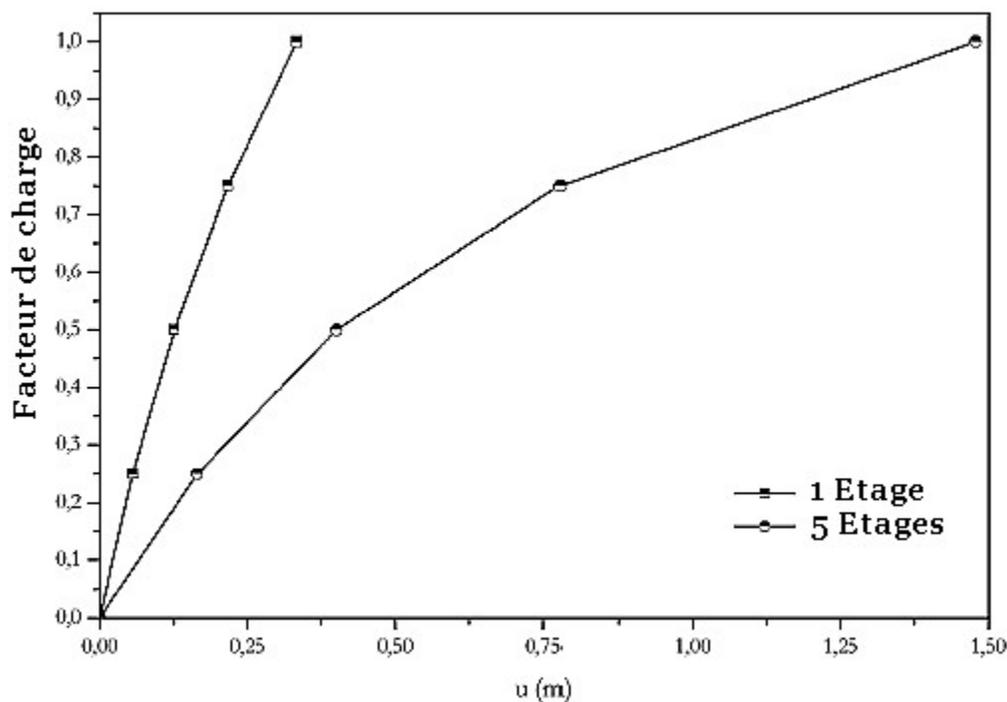


Figure 75 - Trajectoires d'équilibre faisant référence au déplacement horizontal  $u$  (m) du nœud supérieur gauche.

Dans les exemples proposés, les résultats de traction ne sont pas présentés car ils ont été vérifiés de manière exhaustive et présentés dans les exemples précédents.

#### 4.6 Considérations

L'analyse des cinq exemples a permis d'évaluer plusieurs caractéristiques de la formulation de l'élément de portique plat stratifié. Les résultats obtenus ont été satisfaisants et la formulation de l'élément et sa mise en œuvre informatique effectuée dans le langage de programmation FORTRAN ont été vérifiées.

D'après les résultats obtenus à l'exemple 4.1, il a été trouvé qu'un maillage d'éléments finis plus fins est nécessaire pour obtenir une représentation appropriée de la distribution des contraintes le long de la section, en particulier des contraintes de cisaillement. En ce qui concerne les déplacements, une discrétisation beaucoup plus petite converge déjà vers les valeurs adoptées comme référence. Une autre observation importante est qu'un nombre croissant de points de

Gauss répartis le long de l'épaisseur des couches est nécessaire à mesure que la quantité de couches utilisées dans la discrétisation de la section augmente.

Dans les exemples 4.2 et 4.3, la possibilité d'appliquer des forces distribuées et des forces concentrées en dehors de la ligne de référence de l'élément a été évaluée et considérée comme cohérente, car des résultats satisfaisants ont été obtenus pour les distributions de déplacement et de contrainte dans les sections transversales. Dans ces exemples, il a également été constaté que l'utilisation de l'élément bidimensionnel PLANE42 dans le programme Ansys pose des problèmes de désadaptation de matrice provoquée par la déformation des éléments et la variation abrupte des propriétés élastiques du matériau d'une couche à l'autre. Ce fait n'est pas observé dans l'élément de portique stratifié, ce qui démontre son efficacité à analyser des problèmes plats (minces ou non) en composites stratifiés.

La technique de pénalisation utilisée pour effectuer le couplage des éléments était également efficace, selon les résultats de l'exemple 4.4. Leur polyvalence a été vérifiée dans la possibilité de représenter des connexions avec n'importe quelle rigidité.

Enfin, les résultats des distributions de déplacement le long de la section transversale ont été présentés pour deux exemples de portiques proposés. Ainsi, une contribution est apportée pour réduire la difficulté de trouver des résultats d'analyses géométriques non linéaires dans des exemples de cadres plats stratifiés, permettant d'appréhender de futures applications professionnelles.

# **CONCLUSION GENERALE.**

## CONCLUSION GENERALE

Les formulations de deux éléments de position finis ont été développées, mises en œuvre de manière informatique et vérifiées par l'analyse de problèmes de solutions analytiques et numériques disponibles dans la littérature ou provenant d'analyses numériques effectuées dans le logiciel Ansys.

Le premier élément mis au point était le portique homogène à degrés de liberté composé de positions nodales et de vecteurs généralisés représentant la rotation et la variation de la hauteur de la section. Les problèmes liés aux caractéristiques variées de la géométrie, de la charge, du contour et de la rigidité des liens entre les barres ont été analysés. Les résultats ont confirmé la cohérence, l'efficacité et la robustesse de la formulation de l'élément, puisqu'un excellent accord avec les résultats de référence a été vérifié.

Ainsi, l'élément est approprié pour effectuer une analyse géométrique non linéaire dans des modèles structurels de portique plat dont les configurations actuelles peuvent présenter des déplacements et des rotations importants, mais avec un comportement élastique linéaire pour le matériau devant présenter des déformations modérées.

En tant que propositions de travaux futurs liés à cet élément, il convient de souligner:

- Inclusion de la non-linéarité physique en prenant en compte des modèles de comportement élastoplastiques pour l'élément et les liaisons;
- La mise en œuvre de la méthode de résolution basée sur la stratégie de longueur d'arc, dont la formulation mathématique a déjà été développée, ne laissant que sa mise en œuvre et sa vérification par des exemples numériques.
- Élargissement de la formulation des modèles tridimensionnels avec mise au point d'une stratégie permettant de représenter les sections transversales.

Compte tenu des bonnes performances présentées par l'élément de portique plat homogène, une expansion naturelle de sa cinématique a été utilisée pour le développement de l'élément de portique laminé.

L'efficacité de l'élément stratifié a été comparée par rapport à l'élément fini bidimensionnel avec une discrétisation équivalente et un nombre pair de degrés de liberté. Des éléments bidimensionnels ont été identifiés, des problèmes de désadaptation de la matrice causés par des distorsions dans les éléments et par des variations importantes et abrupts des propriétés élastiques des couches. Pour cette raison, un raffinement du maillage était nécessaire.

Ces problèmes n'étant pas vérifiés dans l'élément stratifié, des réductions de coûts de calcul sont donc possibles, car des résultats satisfaisants sont obtenus avec beaucoup moins d'éléments et de degrés de liberté par rapport à un maillage raffiné d'éléments bidimensionnels.

Etant donné que des éléments stratifiés pour l'analyse géométrique non linéaire de cadres plats n'ont pas été trouvés dans la littérature, bien que la formulation actuelle puisse considérer le chargement appliqué en dehors de la ligne de référence des éléments, on peut considérer que les développements présentés ici pour l'élément de portique plat laminé sont des contributions obtenues dans le présent travail.

La formulation de position proposée pour l'élément permet de considérer une section composée de plusieurs couches de matériaux différents, avec rotation indépendante et variation d'épaisseur. Avec cette cinématique, l'hétérogénéité transversale et l'effet Zig-Zag présents dans les stratifiés sont représentés. En outre, il est important de souligner que la compatibilité de position dans les interfaces est assurée intrinsèquement par les fonctions de mappage de position utilisées.

Les résultats obtenus pour les exemples considérés démontrent la capacité de l'élément à effectuer des analyses géométriques non linéaires dans des structures à portique plates constituées de matériaux composites stratifiés de section transversale mince ou épaisse. Les distributions de contrainte axiale dans le sens longitudinal et principalement de contrainte axiale et de cisaillement dans le sens transversal ont été représentées avec une excellente précision.

Par conséquent, la cinématique et l'élément proposés sont considérés comme cohérents et efficaces, ce qui permet de développer ultérieurement les modèles de coque structurelle et de modéliser le processus de défaillance du stratifié par délamination ou par glissement.

Voici quelques propositions de travail pour l'optimisation du code informatique mis en œuvre, le développement de l'élément et la formulation de position appliquée à la résolution de problèmes composés de composites stratifiés:

- Modification du code pour calculer les matrices  $A^0(\xi_1, \xi_2)$  et  $\frac{\partial^k A^1}{y_\alpha^\beta}$  si nécessaire et ne pas les stocker pas au début du traitement;
- Modification du code informatique implémenté afin de permettre un nombre indépendant de couches dans chaque élément et un nombre différent de points de Gauss utilisés pour l'intégration numérique de chaque couche ;
- Utilisation de techniques matricielles rares pour résoudre le système d'équations chargé de déterminer les corrections à apporter aux positions indicatives;
- la parallélisation du code (mettre en œuvre des architectures d'électronique numérique permettant de traiter des informations de manière simultanée, ainsi que les algorithmes spécialisés pour celles-ci);
- Prise en compte d'actions dynamiques communes dans les structures construites en composites stratifiés;
- Expansion de la formulation pour les modèles tridimensionnels à portique et à coque;
- L'adéquation de la formulation pour permettre la prise en compte des matériaux orthotropes;
- Inclusion de la non-linéarité physique au moyen de modèles de comportement élastoplastiques dans les couches et les liaisons;
- Développement de la modélisation du processus de délamination ou de rupture par glissement.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : P. Odru : Calcul et conception des structures composites A 7 792. Techniques de l'ingénieur, traité plastiques et composites.
- [2] : J.Payan (2004). Etude du comportement de composites stratifiés sous chargement statique et de fatigue. Thèse de doctorat à l'université aix-marseille ii.
- [3] : Carrera, E. (2002). Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. Archives of Computational Methods in Engineering, 9(2), 87-140.
- [4] : Jones, R. M(1999). Mechanics of composite materials. 2nd ed. New York: Taylor & Francis.
- [5] : Reddy, J. N(2004a). Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2nd ed. New York: CRC Press,
- [6] :Mendonça, P. R. T(2005). Matériaux composites et structures sandwich; conception et analyse. Barueri: Manole.
- [7] : Coda, H. B.; Paccola, R. R(2007). An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. Computational Mechanics, v. 40, p. 185-200.
- [8] : Coda, H. B(2009). A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 198, p. 3712-3722.
- [9] : Coda, H. B.; Paccola, R. R(2011). A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. Finite Elements in Analysis and Design, v. 47, p. 319-333.
- [10] : Pascon, J. P.; Coda, H. B(2013). Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements. Finite Elements in Analysis and Design, v. 76, p. 21-38.
- [11] :Sampaio, M. S. M(2014). Analyse géométrique non linéaire de coques laminées renforcées de fibres. 2014. 190 f. Thèse (Doctorat en ingénierie des structures).
- [12] : Vinson, J. R.; Sierakowski, R. L(2004). The behavior of structures composed of composite materials. 2nd ed. New York: Kluwer Academic Publishers.

- [13] :Daniel, I. M.; Ishai, O(2006). Engineering mechanics of composite materials. 2 ed. New York: Oxford University Press.
- [14] :Ghugal, Y. M.; Shimpi, R. P(2001). A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams. Journal of Reinforced Plastics and Composites, v. 20, p. 255-272.
- [15] :Ghugal, Y. M.; Shimpi, R. P(2002). A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. Journal of Reinforced Plastics and Composites, v. 21, p. 775-813.
- [16] :Kreja, I(2011). A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. Central European Journal of Engineering, v. 1, p. 59-80.
- [17] : Lo, S. H.; Zhen, W.; Sze, K. Y.; Wanji, C(2011). An improved in-plane displacement model for the stability analysis of laminated composites with general lamination configurations. Composite Structures, v. 93, p. 1584-1594.
- [18] : Hull, D.; Clyne, T. W(1996). An introduction to composite materials. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- [19] : Sousa, S. R. M. Pina Filho, A. C. Dutra, M. S(2007). Production de la colonne montante en matériau composite, son développement et ses tests. Congrès Brésilien de Génie de la Fabrication, 4 , Bureau de Saint-Pierre.
- [20] : Levy Neto, F.; Pardini, L. C(2006). Compósitos estruturais: ciência e tecnologia. São Paulo: Edgard Blücher.
- [21] : Teófilo, F.A.F. Parente Junior, E, Holanda, A. S.; Melo, A. M. C(2008). Analyse de stabilité de plaques stratifiées. Dans: Congres Iberien Latino-Americain Sur Les Methodes Informatiques En Ingenierie, 29.
- [22] : Belo, I. M(2006). Analyse efficace de composites laminés plats à l'aide de la formulation par éléments finis corrigée a priori sans les effets du verrouillage. 162 f.
- [23] : Mendonça, P. R. T(2005). Matériaux composites et structures sandwich : conception et analyse. Barueri: Manole.
- [24] : Koiter, W. T(1960). A Consistent First Approximations in the General Theory of Thin Elastic Shells. In: First Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Proceedings Amsterdam. p.12- 23.

- [25]: Reddy, J. N., Phan, N. D(1985). Stability and Vibration of Isotropic, Orthotropic and Laminated Plates According to a Higher order Shear Deformation Theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 98, n. 2, p. 157-170.
- [26] : J. M. Turner. E. H. Dill. H. C. Martin., R. J. Melosh(1960). Large deflection of structures subject to heating and external load. *J. Aero. Sci.*, 27:97-106.
- [27] : M.J. Turner. H. C. Martin., B. C. Weikel (1964). Further developement and applications of stiffness method. In B. Fraeijs de Veubeke, editor, *Matrix methods in structural analysis*. Pages 203-266.
- [28] : J. H. Argvris. S. Kelsey, H. Kamel (1964). Matrix methods of structural analysis - a precise of recent developement. In B. Fraeijs de Veubeke, Editor. *Matrix methods in structural analysis*, pages 1-164.
- [29] : C.A.Felippa (1966). Refined finite element analysis of linear and nonlinear twodimensional structures. Technical report sesm 66-22, univ. California, berkeley.
- [30] : H. C.martin (1966). On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems. In *proc. Air force 1st conf. Onmatrix methods in structural mechanics*, pages 679-696. Wright-patterson air force base. Ohio. Nov.
- [31] : J.W. Wissmann (1966). Nonlinear structural analysis-tensor formulation. In *Proc. Air force 1st conf. On matrix methods in structural mechanics*, Pages 697-716- wright-patterson air force base, ohio, nov.
- [32] : J. T. Oden (1966). Calcularion of geomerric stiffniess matrices for complex structures. *Aiaa journal*. 4(8): 1480-1482.
- [33] : H.D. Hibbit. P. V.marcal., J. R. Rice (1970). A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. *Int. J. Solids struct.*, 6(8):1069-1086.
- [34] : J.T. Oden (1972). *Finite element of nonlinear continua*. Mc graw hill, new york.
- [35] : S. Yaghmai (1968). Incremental analysis of iarge deformations in mechanics of Solids with applications to axisymmetric shells of revolution. Technical Report sesm 68-17, univ. California.
- [36] : C. Brebbia, J. Connor (1969), Geornerrically nonlinear finite element analysis. *Asce j-eng. Mech. Div.*. 95 (em2) 463-483.

- [37] : L. D. Hofmeister, G. A. Greenbaum, and d. A. Evensen (1971). Large strain elasto-plastic finite element analysis. *Aiaa j.* 9(7):1248-1254.
- [38] : P. Sharifi and E. P. Popov (1971). Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. *Asce j. Eng. Mech. Div.*, 97:1397-1411.
- [39] : k. J. Bathe and H. Ozdemir, and E. L. Wilson (1974). Static and dynamic geometric And material nonlinear analysis. Technical report uc sesm 74-4, univ. California.
- [40] : k.j. bathe and H. Ozdemik (1975). Elastic plastic large de formation static and Dynamic analysis. *Comp. Struct*, 6:81-92.
- [41] : Z. P. Bazant and M. E. Nimeiri (1973). Large-deflection spatial buckling of thinwalled Beams and frames. *Asce j. Eng. Mech. Div.. Em* 6.
- [42] : K. Wishizu (1982). Variational methods in elasticity and plasticity- pergamon press.
- [43] : K.J. Bathe (1982). Finite element procedures in engineering analysis. Prentice- Hall, new jersey.
- [44] : F. Frey (1978). L'analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application a la construction métallique. Thèse de Doctorat. Université de liège. Belgique.
- [45] : S. Jaarnei (1986). Etudes des différentes formulations lagrangiennes pour l'analyse des plaques et coques minces élastoplastiques en grands déplacements et grandes rotations. Thèse de doctorat, université de technologie de compiègne, france.
- [46] : M.A. Crisfield (1990). A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering* v.81 p131-150 (1990).
- [47] : Gadala, Oravas et Dokainish (1983). A consistent eulerian formulation of large deformation problems in statics and dynamics. *Int.j. Non- linear mechanics*. Vol.18. No 1. Pp. 21-35. 1983. Pergamon press ltd.
- [48] : M. Gattass et J. Abel (1987) : Equilibrium considerations of the updated lagrangian formulation of beam-columns with natural concepts. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 24. p2119-2141.

- [49] : D.P. Mondkar et G.H. Powell (1977) : Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. International journal for numerical methods in engineering, vol. 11, 499-520.
- [50] : G. M.S. Gadala et Oravas (1984) : Numerical solutions of nonlinear problems of continua-I Survey of formulation methods and solution techniques. Computers & structures vol. 19, no. 5/6, pp. 865-877.
- [51] : J.L. Meek et H.S.Tan (1984) : Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. Computer methods in applied mechanics and engineering v47. p261-282.
- [52] :Kreja, I(2011). A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. Central European Journal of Engineering, v. 1, p. 59-80.
- [53]: Reddy, J. N(1993). An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates. Composite Structures, v. 25, p. 21-35.
- [54] : Ghugal, Y. M.; Shimpi, R. P(2001). A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams. Journal of Reinforced Plastics and Composites, v. 20, p. 255-272.
- [55]: Ghugal, Y. M.; Shimpi, R. P(2002). A Review of Refined Shear Deformation Theories of Isotropic and Anisotropic Laminated Plates. Journal of Reinforced Plastics and Composites, v. 21, p. 775-813.
- [56] : Lo, S. H.; Zhen, W.; Sze, K. Y.; Wanji, C(2011). An improved in-plane displacement model for the stability analysis of laminated composites with general lamination configurations. Composite Structures, v. 93, p. 1584-1594.
- [57] : Pagano, N. J(1969). Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. Journal of Composite Materials, v. 3, p. 398-411.
- [58] : Pagano, N. J(1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. Journal of Composite Materials, v. 4, p. 20-34.
- [59] : Pagano, N. J.; Hatfield, S. J(1972). Elastic behavior of multilayered bidirectional composites. AIAA Journal, v. 10, p. 931-933.
- [60] : Noor, A. K(1973). Mixed finite-difference scheme for analysis of simply supported thick plates. Computer & Structures, v. 3, p. 967-982.

- [61] : Piskunov, V. G.; Sipetov, V. S.; Tuimetov, SH(1990). Solution of a static problem for laminated orthotropic plates in a three-dimensional formulation. Kiev Highway Institute, translated from *Prikladnaya Mekhanika*, v. 26, p. 41-49.
- [62] : Ren, J. G(1987b). Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending. *Composites Science and Technology*, v. 29, p. 169-187.
- [63] : Varadan, T. K.; Bhaskar, K(1991). Bending of laminated orthotropic cylindrical shells – An elasticity approach. *Composite Structures*, v. 17, p. 141-156.
- [64] : Srinivas, S(1973). A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 30, p. 495-507.
- [65] : Reddy, J. N(1987). A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Communications in ..Applied Numerical Methods*, v. 3, p. 173-180.
- [66] : Barbero, E. J.; Reddy, J. N.; Teply, J(1990). An accurate determination of stresses in thick laminates using a generalized plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29, p. 1-14.
- [67] : Epstein, M.; Huttelmaier, H. P(1983). A finite element formulation for multilayered and thick plates. *Computers & Structures*, v. 16, p. 645-650.
- [68] : Cho, K. N.; Bert, C. W.; Striz, A. G(1990). Bending analysis of thick bimodular laminates by higher-order individual-layer theory. *Composite Structures*, v. 15, p. 1-24.
- [69] : Cho, K. N.; Striz, A. G.; Bert, C. W(1991). Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual layer theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 145, p. 429-442.
- [70] : Lee, C. Y.; Liu, D(1992). An interlaminar stress continuity theory for laminated composite analysis. *Computer & Structures*, v. 42, p. 69-78.
- [71] : Gaudenzi, P(1992). A general formulation of higher-order theories for the analysis of laminated plates. *Composite Structures*, v. 20, p. 103-112.
- [72] : Gaudenzi, P.; Barboni, R.; Mannini, A(1995). A finite element evaluation of single layer and multi-layer theories for the analysis of laminated plates. *Composite Structures*, v. 30, p. 427-440.
- [73] : Negishi, Y.; Hirashima, K(1997). General higher order theory for laminated composite structures with interlayer slip. *JSME International Journal*, v. 40, p. 75-83.

- [74] : Zhu, C.; Lam, Y. C(1998). A Rayleigh Ritz solution for local stresses in composite laminates. *Composites Science and Technology*, v. 58, p. 447-461.
- [75] : Huttelmaier, H. P.; Epstein, M(1985). A finite element formulation for multilayered and thick shells. *Computers & Structures*, v. 21, p. 1181-1185.
- [76] : Epstein, M.; Glockner, P. G(1977). Nonlinear analysis of multilayered shells. *International Journal Solids Structures*, v. 13, p. 1081-1089.
- [77] : Lekhnitskii S.G(1935). Strength calculation of composite beams. - *Vestnik inzhen i tekhnikov*.
- [78] : Ren, J. G(1986a). A new theory of laminated plate. *Composites Science and Technology*, v. 26, p. 225-239.
- [79] : Ren, J. G(1986b). Bending theory of laminated plate. *Composites Science and Technology*, v. 27, p. 225-248.
- [80] : Ren, J. G(1987a). Bending of simply supported, antisymmetrically laminated rectangular plate under transverse loading. *Composites Science and Technology*, v. 28, p. 231-243.
- [81] : Ambartsumian, S. A(1958a). On a theory of bending of anisotropic plates. *Investiia Akad. Nauk SSSR, Ot. Tekh. Nauk.*, n. 4.
- [82] : Ambartsumian, S. A(1958b). On a general theory of anisotropic shells. *PMM*, v. 22, n. 2, p. 226-237.
- [83] : Ambartsumian, S. A(1964). *Theory of anisotropic shells*. Fizmatgiz, Moskwa, 1961; Translated from Russian, NASA TTF-118.
- [84] : Ambartsumian, S. A(1962). Contributions to the theory of anisotropic layered shells. *Applied Mechanics Review*, v. 15, p. 245-249.
- [85] : Ambartsumian, S. A(1969). *Theory of anisotropic plates*, Translated from Russian by T. Cheron and Edited by J.E. Ashton Tech. Pub. Co.
- [86] : Whitney, J. M(1969). The effects of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *Journal of Composite Materials*, v. 3, p. 534-547.
- [87] : Rath, B. K.; Das, Y. C(1973). Vibration of layered shells. *Journal of Sound and Vibration*, v. 28, p. 737-757.

- [88] : Toledano, A.; Murakami, H(1987). A high order laminated plate theory with improved in plane responses. *International Journal Solids Structures*, v. 23, p. 111-131.
- [89] : Spilker, R. L(1980). A hybrid stress finite element formulation for thick multilayer laminates. *Computer & Structures*, v. 11, p. 507-514.
- [90] : Sciuva, M. D(1986). Bending, vibration and buckling of simply supported thick multilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model. *Journal of Sound and Vibration*, v. 105, p. 425-442.
- [91] : Owen, D. R. J.; Li, Z. H(1987a). A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods – I. fundamentals and static analysis. *Computers & Structures*, v. 26, p. 907-914.
- [92] : Owen, D. R. J.; Li, Z. H(1987b). A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods – II. vibration and stability. *Computers & Structures*, v. 26, p. 915-923.
- [93]: Lee, K. H.; Lin, W. Z.; Chow, S. T(1994). Bidirectional bending of laminated composite plates using an improved Zig-Zag model. *Composite Structures*, v. 28, p. 283-294.
- [94]: Soldatos, K. P(1992). A general laminated plate theory accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at material interfaces. *Composite Structures*, v. 20, p. 195-211.
- [95] : Xavier, P. B.; Lee, K. H.; Chew, C. H(1993). An improved Zig-Zag model for the bending of laminated composite shells. *Composite Structures*, v. 26, p. 123-138.
- [96] : Xavier, P. B.; Chew, C. H.; Lee, K. H(1995). Buckling and vibration of multilayer orthotropic composite shells using a simple higher order layerwise theory. *International Journal Solids Structures*, v. 32, p. 3479-3497.
- [97] : He, J. F.; Chou, M.; Zhang, X(1993). Bending analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory. *Composite Structures*, v. 24, p. 125-138.
- [98]: Botello, S.; Oñate, E.; Canet, J. M(1999). A layerwise triangle for analysis of laminated composite plates and shells. *Computers & Structures*, v. 70, p. 635-646.
- [99]: Lee, K. H.; Senthilnathan, N. R.; Lim, S. P.; Chow, S. T(1990). An improved Zig-Zag model for the bending of laminated composite plates. *Composite structures*, v. 15, p. 137-148.

- [100]: Sciuva, M. D(1992). Multilayered anisotropic plate models with continuous interlaminar stresses. *Composite Structures*, v. 22, p. 149-167.
- [101]: Icardi, U(1998). Eight-noded zig-zag element for deflection and stress analysis of plates with general lay-up. *Composites*, v. 29B, p. 425-441.
- [102]: Wu, C. P.; Kuo, H. C(1992). Interlaminar stresses analysis for laminated composite plates based on a local high order lamination theory. *Composite Structures*, v. 20, p. 237-247.
- [103]: Wu, C. P.; Hsu, C. S(1993). A new local high-order laminate theory. *Composite Structures*, v. 25, p. 439-448.
- [104]: He, J. F.; Zhang, S. W(1997). Antisymmetric bending analysis of symmetric laminated plates including transverse shear and normal effects. *Composite Structures*, v. 37, p. 393-417.
- [105]: He, J. F.; Zhang, S. W(1999). Symmetric deformation analysis of symmetric laminated plates including transverse shear and normal effects. *Composite Structures*, v. 45, p. 205-226.
- [106]: Gruttmann, F.; Wagner, W.; Meyer, L.; Wriggers, P(1993). A nonlinear composite shell element with continuous interlaminar shear stresses. *Computational Mechanics*, v. 13, p. 175-188.
- [107]: Četković, M.; Vuksanović, Dj(2011). Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates using a layerwise displacement model. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, v. 5, p. 50-68.
- [108]: Barbero, E. J.; Reddy, J. N(1991). Modeling of delamination in composite laminates using a layer-wise plate theory. *International Journal Solids Structures*, v. 28, p. 373-388.
- [109]: Reddy, Y. S. N.; Reddy, J. N(1992). Linear and non-linear failure analysis of composite laminates with transverse shear. *Composites Science and Technology*, v. 44, p. 227-255.
- [110] : Icardi, U(1994). The nonlinear response of unsymmetric multilayered plates using smeared laminate and layerwise models. *Composite Structures*, v. 29, p. 349-364.
- [111] : Schmidt, R.; Librescu, L(1994). Further results concerning the refined theory of anisotropic laminated composite plates. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 28, p. 407-425.

- [112] : Zinno, R.; Barbero, E. J(1995). Total Lagrangian formulation for laminated composite plates analysed by three-dimensional finite elements with two-dimensional kinematic constraints. *Computers & Structures*, v. 57, p. 455-466.
- [113] : Reddy, Y. S. N.; Moorthy, C. M. D.; Reddy, J. N (1995). Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. *International Journal Non-Linear Mechanics*, v. 30, p. 629-649.
- [114] : Kam, T. Y.; Sher, H. F.; Chao, T. N(1996). Predictions of deflection and first-ply failure load of thin laminated composite plates via the finite element approach. *International Journal Solids Structures*, v. 33, p.375-398.
- [115] : Sciuva, M. D.; Icardi, U.; Villani, M(1998). Failure analysis of composite laminates under large deflection. *Composite Structures*, v. 40, p. 239-255.
- [116] : Andrade, L. G.; Awruch, A. M.; Morsch, I. B(2007). Geometrically nonlinear analysis of laminate composite plates and shells using the eight-node hexahedral element with one-point integration. *Composite Structures*, v. 79, p. 571-580.
- [117] : Toudeshky, H. H.; Hosseini, S.; Mohammadi, B(2010). Buckling and delamination growth analysis of composite laminates containing embedded delaminations. *Applied Composite Materials*, v. 17, p. 95-109.
- [118] : Ćetković, M.; Vuksanović, Dj(2011). Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates using a layerwise displacement model. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, v. 5, p. 50-68.
- [119] : Choudhary, S. S.; Tungikar, V. B(2011). A simple finite element for non-linear analysis of composite plates. v. 3, p. 4897-4907.
- [120] : Kishore, M. D. V. H.; Singh, B. N.; Pandit, M. K(2011). Nonlinear static analysis of smart laminated composite plate. *Aerospace Science and Technology*, v. 15, p. 224-235.
- [121] : Kapoor, H.; Kapania, R. K(2012). Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, v. 94, p. 3434-3447.
- [122] : Chaudhuri, R. A.; Hsia, R. L(1998). Effect of thickness on the large elastic deformation laminated shells. *Composite Structures*, v. 43, p. 117-128.

- [123] : To, C. W. S; Liu, M. L(2001). Geometrically nonlinear analysis of layerwise anisotropic shell structures by hybrid strain based lower order elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 37, p. 1-34.
- [124] : Kim, D.; Chaudhuri, R. A(2005). Influence of localized imperfection on the instability of isotropic/cross-ply cylindrical shells/rings under external pressure. *Composite Structures*, v. 67, p. 57-70.
- [125] : Isoldi, L. A.; Awruch, A. M.; Teixeira, P. R. de F.; Morsch, I. B(2008). Geometrically nonlinear static and dynamic analysis of composite laminates shells with a triangular finite element. *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, v. 30, p. 84-93.
- [126] : Moreira, R. A. S.; Sousa, R. J. A. de; Valente, R. A. F(2010). A solid-shell layerwise finite element for non-linear geometric and material analysis. *Composite Structures*, v. 92, p. 1517-1523.
- [127] : Vo, T. P.; Lee, J(2010). Geometrically nonlinear analysis of thin-walled open-section composite beams. *Computers and Structures*, v. 88, p. 347-356.
- [128] : Singh, J.; Shukla, K. K(2012). Nonlinear flexural analysis of laminated composite plates using RBF based meshless method. *Composite Structures*, v. 94, p. 1714-1720.
- [129] : Icardi, U(2007). Layerwise mixed element with sublaminates approximation and 3D zig-zag field, for analysis of local effects in laminated and sandwich composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, p. 94-125.
- [130] : Eijo, A.; Oñate, E.; Oller, S(2014). Delamination in laminated plates using the 4-noded quadrilateral QLRZ plate element based on the refined zigzag theory. *Composite Structures*, v. 108, p. 456-471.
- [131] : Yazdani, S.; Ribeiro, P.; Rodrigues, J. D(2014). A p-version layerwise model for large deflection of composite plates with curvilinear fibres. *Composite Structures*, v. 108, p. 181-190.
- [132] : M.Cho et R.Parmeter (1992). An efficient higher-order plate theory for laminated composites. *Composite Structures* v.20 p.113-123.
- [133] : Mehdi Moazzami et Ranbir S. Sandhu (1993). A higher order discrete theory for laminated Plates *Composite Structures* v23 p.205-220.

- [134] : Karama. M; HARB, B. A.; MISTOU, S.; CAPERAA, S(1998). Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model. *Composites*, v. 29B, p. 223-234.
- [134]: Ogden, R. W (1984). *Non-linear Elastic Deformation*. England: Ellis Horwood.
- [135]: Chou, P. C.; Pagano, N. J(1992). *Elasticity, Tensor, dyadic and engineering approaches*. 1 ed. New York: Dover.
- [136]:Holzapfel, G. A (2004). *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Chichester: John Wiley & Sons.
- [137]:Bonet, J.; Wood, R. D(2008). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- [138]:Crisfield, M. A(1991). *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: essentials*. New York: John Wiley & Sons.
- [139]: Bonet, J.; Wood, R. D.; Mahaney, J.; Heywood, P(2000). Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 579-595.
- [140]: Coda, H. B.; Greco, M(2004). A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541-3557.
- [141]: Greco, M.; Gesualdo, F. A. R.; Venturini, W. S.; Coda, H.(2006). Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 42, p. 1079-1086.
- [142]: Coda, H. B.; Paccola, R. R(2008). A positional FEM Formulation for geometrical nonlinear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205-223.
- [143]: Cook, R. D.; Malkus, D. S(2002). Plesha, M. E.; Witt, R. J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 4th ed. New York: John Wiley & Sons.
- [144]: Reddy, J. N(2004b). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. New York: Oxford University Press.
- [145]: Bathe, K. J(1996). *Finite element procedures*. New Jersey.
- [146]: Parente JR, E(2012). *Analyse non linéaire de structures*. Fortaleza, CE, Département de génie des structures et de construction civile, UFC.

- [147] : Bisshopp, K. E.; Drucker, D. C(1945). On the deflection of a cantilever beam. Quarterly of Applied Mathematics, v. 3, p. 272-275.
- [148] : Mattiasson, K(1981). Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 17, p. 145-153.
- [149] : Wong, M. B.; Tin-Loi, F(1990). Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. Computers & Structures, v. 34, p. 633-640.
- [150] : Greco, M(2004). Analyse des problèmes de contact / impact dans les structures de comportement non linéaire par la méthode des éléments finis. 2004. 163 f. Université de São Paulo, São Carlos.
- [151] : Felippa, C. A.; Haugen, B(2005). A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 194, p. 2285-2335.
- [152] : Felippa, C. A(2015). Nonlinear Finite Element Methods. University of Colorado at Boulder.
- [153] : Foucard, L.; Aryal, A.; Duddu, R.; Vernerey, F(2015). A coupled Eulerian–Lagrangian extended finite element formulation for simulating large deformations in hyperelastic media with moving free boundaries. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 283, p. 280-302.
- [154] : Hughes, T. J. R.; Liu, W. K.; Zimmermann, T. K(1981). Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 29, p. 329-349.
- [155] : Donea, J.; Huerta, A.; Ponthot, J.-Ph.; Ferran, A. R(2004). Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. In: STEIN, E.; BORST, R. de; HUGHES, T. J. R. Encyclopedia of Computational Mechanics: Fundamentals. John Wiley & Sons. v. 1, cap. 14, p. 413-437.
- [156] : Richter, T. A.( 2013). Fully Eulerian formulation for fluid–structure-interaction problems. Journal of Computational Physics, v. 233, p. 227-240.
- [157] : Demarco, D.; Dvorkin, E. N(2005). An Eulerian finite element formulation for modelling stationary finite strain elastic deformation processes. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 62, p. 1038-1063.

- [158] : Surana, K. S(1983). Geometrically non-linear formulation for bidimensional curved beam elements. *Computer & Structures*, v. 17, p. 105-114.
- [159] : Schulz, M.; Filippou, F. C(2001). Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 50, p. 761-785.
- [160] : Gadala, M. S.; Dokainish, M. A.; Oravas, G. A(1984). Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, p. 887-914.
- [161] : Peterson A.; Petersson H(1985). On finite-element analysis of geometrically nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 51, p. 277-286.
- [162] : Parente JR., E.; Nogueira, G. V. ; Meireles, M. N. ; Moreira, L. S.( 2014) . Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 7, p. 879-904.
- [163] : Ibrahimbegović, A(1995). On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three dimensional curved beam elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 122, p. 11-26.
- [164] : Battini, J. M(2002). Co-rotational beams elements in instability problems. 2002. Phd thesis, Royal Institute of Technology, Sweden.
- [165] : Yshii, Y(2002). Formulation co-rotationnelle pour portique plat. 2002. Mémoire.
- [166] : Monteiro, F. A. C(2004). Une formulation générale de co-rotation - Application aux portiques spatiaux. 2004. Mémoire.
- [167] : Coda, H. B.; Paccola, R. R.; Sampaio, M. S. M.( 2013).Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 67, p. 66-75.
- [168] : Pascon, J. P. et Coda, H. B(2012). Analysis of elastic functionally graded materials under large displacements via high-order tetrahedral elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 50, p. 33-47.
- [169] : Paccola, R. R., Sampaio, M. S. M., et Coda, H B(2015). Fiber-matrix contact stress analysis for elastic 2D composite solids. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 12, no 3, p. 583-611.

- [170] : Vanalli, L., Paccola, R. R., et Coda, H. B(2008). A simple way to introduce fibers into FEM models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, no 7, p. 585-603.
- [171] : Silva, W. Q(2014). Sur l'analyse géométrique non linéaire de bâtiments prenant en compte le gauchissement des noyaux structurels et l'interaction sol-structure. 2014. 186 f. Thèse (Doctorat en ingénierie des structures) - Université de São Paulo, São Carlos.
- [172] : Sanches, R. A. K., Bornemann, P. B., et Cirak, F(2011). Immersed b-spline (i-spline) finite element method for geometrically complex domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no 13-16, p. 1432-1445.
- [173] : Sanches, R. A. K.; Coda, H. B(2014). On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401-3418.
- [174] : Maciel, D. N.; Coda, H. B(2010). Dynamic Positional Finite Element Method Applied to Nonlinear Geometric 3D Solids. *Mecánica Computacional*, v. XXIX, p. 4377-4387.
- [175] : Sampaio, M. S. M.; Paccola, R. R.; Coda, H. B(2015). A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. *Composite Structures*, v. 119, p. 799-814.
- [176] : Mendonça, P. R. T(2005). Composite materials and sandwich structures: design and analysis. Barueri: Manole.
- [177] : Coda, H. B(2006). Nonlinear dynamics - MEF. São Carlos, SP, Department of Structural Engineering, EESC-USP.
- [178] : Coda, H. B.; Paccola, R. R(2010). Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, p. 1107-1137.
- [179] :Martha, L. F(2010). Analyse des structures: concepts de base et méthodes. 1 éd. Rio de Janeiro: Elsevier.
- [180] : Coda, H. B.; Paccola, R. R(2014). A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 91, p. 1-15.

- [181] : Reis, M. C. J.; Coda, H. B.(2014). Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 11, p. 1163-1189.
- [182] : Hsiao, K. M(1987). Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element. *Computers & Structures*, v. 25, p. 665-675.
- [183] : Wang, T. M.; Lee, S. L.; Zienkiewicz, O. C(1961). A numerical analysis of large deflections of beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 3, p. 219-228.
- [184] : Yang, T. Y(1973). Matrix displacement solution to elastica problems of beams and frames. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 9, no 7, p. 829-842.
- [185] : Liu, E. M.; Chen, W. F(1988). Behavior of braced and unbraced semi-rigid frames. *International Journal Solids Structures*, v. 24, p. 893-913.
- [186] : Chan, S. L.; Chui, P. P. T(2000). *Nonlinear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections*. Elsevier, Oxford.
- [187] : Pinheiro, L. Silveira, R. A. M(2005). Computational procedures for nonlinear analysis of frames with semi-rigid connections. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 2, p. 339-367.