

---

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

---

## THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de docteur en Sciences

Spécialité : **génie mécanique**

Présentée par

**BENALOUACH Mohamed El Amine Khaled**

Thème

---

---

**ANALYSE DE L'INFLUENCE DES CARACTÉRISTIQUES  
GÉOMÉTRIQUES DES JOINTS D'ÉTANCHÉITÉ  
APPLIQUÉS AUX ROTORS**

---

---

Soutenue publiquement, le: **10 Octobre 2019**

devant le Jury composé de :

<b>M. BOUZIDANE</b> Ahmed	<i>Professeur</i>	Université Ibn-Khaldoun de Tiaret	Président
<b>M. YUCEFI</b> Abdelkader	<i>Professeur</i>	Université Mohamed Boudiaf d'Oran	Examineur
<b>M. SAD-CHEMLOUL</b> Noureddine	<i>Maître de conférences A</i>	Université Ibn-Khaldoun de Tiaret	Examineur
<b>M. AMEUR</b> Houari	<i>Professeur</i>	Centre universitaire de Naâma	Examineur
<b>M. KHERRIS</b> Sahraoui	<i>Professeur</i>	Centre universitaire de Tissemsilt	Examineur
<b>M. SAHLI</b> Ahmed	<i>Professeur</i>	Université Ibn-Khaldoun de Tiaret	Encadrant

---

---

# *R E M E R C I E M E N T S*

Ce travail a été mené sous la direction de Monsieur le Professeur Ahmed SAHLI à qui j'exprime ma profonde gratitude de m'avoir encadré et ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a faite en me donnant la chance de travailler avec lui. Je le remercie très chaleureusement pour l'intérêt qui a été porté de sa part à mon travail.

Je tiens vraiment à remercier très chaleureusement Monsieur Docteur GUEMMOUR Mohamed Boutkhil enseignant au département de Génie Mécanique à l'université Ibn khaldoun de Tiaret pour sa sympathie, ses conseils judicieux et son aide efficace qui ont permis une progression concrète de ce travail. Je le remercie très chaleureusement pour l'intérêt qui a été porté de sa part à mon travail ; qu'il soit également remercié de m'avoir aidé avec tout ce qu'il a pu, pour me faciliter le travail et l'accélérer. Je le remercie également pour son soutien permanent et ses précieux conseils.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Professeur Ahmed BOUZIDANE, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le Jury de soutenance, qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus vifs, pour ses encouragements incessants, l'aide sincère et les conseils judicieux qu'il m'a apportés.

Mes vifs remerciements vont aussi à Monsieur Professeur Abdelkader YUCEFI pour avoir bien voulu porter une attention particulière à ce travail en faisant partie du Jury.

Je remercie vivement Monsieur Nouredine SAD-CHEMLOUL, qui m'a grandement honoré en acceptant d'être examinateur.

Je remercie vivement Monsieur Professeur Houari AMEUR, qui m'a grandement honoré en acceptant d'être examinateur.

Je remercie vivement Monsieur Professeur Sahraoui KHERRIS, qui m'a grandement honoré en acceptant d'être examinateur.

Mes remerciements vont également à mes enseignants à l'Université Ibn Khaldoun de TIARET et à l'Université ABOU BEKER BELKAID TLEMCEN.

Mes remerciements vont également à mes chers parents, mes sœurs, mes frères, qu'Allah les garde pour leur soutien moral,

Enfin, merci à ma très chère épouse, à toi qui a su me captiver et me guider vers des études supérieures me permettant de nouveaux horizons et a su être mon inspiration quand j'avais des baisses de régime, l'aboutissement de ce travail n'aurait pas été possible sans ton soutien permanent, encore merci.

---

# *DEDICACES*

*Je dédie ce travail*

*À*

*ma chère mère,*

*mon cher père,*

*ma chère épouse*

*mes fils Fayçal*

*Ibrahim*

*et Farés*

*mes sœurs et frères,*

*et à toute ma famille.*

# SOMMAIRE

---

<b>Introduction générale</b> .....	2
------------------------------------	---

---

<b>CHAPITRE 01: Etanchéité mécanique pour arbres tournants</b> .....	5
--	---

---

<b>1.1. Introduction</b> .....	6
<b>1.2. Position du problème</b> .....	7
1°. Les engins marins .....	7
2°. Les turbomachines .....	7
3°. Industries type process.....	8
4°. Organes de transmission de puissance.....	9
<b>1.3. Etanchéité mécanique</b> .....	10
1.3.1 Définition et rôle.....	10
1.3.2 Choix d'un système d'étanchéité mécanique .....	10
1.3.2.1 Variables d'étanchéité et variables d'exploitation .....	10
1.3.2.2 Critères de choix d'une étanchéité .....	11
<b>1.4. Classification des étanchéités</b> .....	12
1.4.1. Etanchéité pour mouvement de rotation .....	12
1.4.1.1 Etanchéité avec contact .....	12
1°. Le presse étoupe .....	13
2°. Etanchéité avec joint à lèvres .....	14
3°. Etanchéité avec garniture mécanique .....	14
1.4.1.2 Etanchéité sans contact .....	15
1°. Douille d'étanchéité .....	15
2°. Etanchéité en labyrinthe .....	16
3°. Visco-Etanchéité .....	16
4°. Etanchéité à Ferro fluides .....	17
1.4.2. Sélectivité d'une étanchéité mécanique dynamique .....	18

---

<b>CHAPITRE 02: Joint d'étanchéité annulaire</b> .....	19
--	----

---

<b>2.1. Revue bibliographique</b> .....	20
<b>2.2. Mise en situation</b> .....	25
2.2.1. Introduction .....	25
2.2.2. Système d'axes.....	26

---

## SOMMAIRE

---

2.2.3. Paramétrage.....	27
2.2.3.1. Paramétrage en section transversale .....	27
2.2.3.2. Paramétrage en section longitudinale .....	28
2.2.4. Echelles d'étude .....	31
1°. Echelle microscopique .....	32
2°. Echelle mésoscopique .....	32
3°. Echelle macroscopique.....	32
<b>2.3. Equations gouvernantes .....</b>	<b>33</b>
2.3.1. Grandeurs physiques macroscopiques .....	33
2.3.1.1 Grandeurs cinétique .....	33
2.3.1.2 Grandeurs énergétique macroscopique .....	33
2.3.1.3 Grandeurs locales et globales.....	34
2.3.2. Description de l'écoulement fluide .....	35
2.3.2.1 Approche Eulérienne.....	35
2.3.2.2 Approche Lagrangienne.....	35
2.3.3. Equation générique du bilan .....	36
2.3.4. Bilan des actions élémentaires .....	38
2.3.5. Formulation des équations gouvernantes .....	40
2.3.5.1 Forme générique pour la conservation de la masse .....	40
2.3.5.2 Forme générique pour la quantité de mouvement.....	41
<hr/> <b>CHAPITRE 03: Résolution avec la méthode des volumes finis.....</b>	<b>46</b>
<hr/> <b>3.1. Introduction.....</b>	<b>47</b>
<b>3.2. Adimensionalisation des équations gouvernantes .....</b>	<b>47</b>
<b>3.3. Solution par volumes finis pour rotor centré .....</b>	<b>50</b>
3.3.1. Hypothèses simplificatrices .....	50
1°. Simplification de l'équation de continuité .....	50
2°. Simplification des équations de quantité de mouvement .....	51
3.3.2. Conditions aux limites .....	51
3.3.3. Solution par volumes finis .....	54
3.3.3.1 Solution pour joints cylindriques et coniques .....	54
3.3.3.2 Solution pour joints étagés.....	58

## S O M M A I R E

---

<b>3.4. Solution par volumes finis pour rotor excentré</b> .....	60
3.4.1. Simplification des équations gouvernantes.....	60
1°. Simplification de l'équation de conservation de masse .....	60
2°. Simplification de L'équation de quantité de mouvement axial.....	60
3°. Simplification de L'équation de quantité de mouvement circonférentiel .....	61
3.4.2. Conditions aux limites .....	63
3.4.3. Solution par volumes finis .....	66
3.4.3.1 Solution pour joints cylindriques et coniques .....	66
3.4.3.2 Solution pour joints étagé .....	71
<b>3.5. Détermination des coefficients dynamiques</b> .....	73
3.5.1. Evaluation de la force de rappel.....	73
3.5.2. Forces de rappel et coefficients dynamiques .....	75
<hr/>	
<b>CHAPITRE 04:Resultats et discussions pour joints d'étanchéité</b> .....	79
<hr/>	
<b>4.1. Introduction</b> .....	80
<b>4.2. Joints plats cylindriques</b> .....	80
4.2.1. Vitesse circonférentielle.....	80
4.2.2. Pression .....	83
4.2.3. Coefficients dynamiques.....	88
<b>4.3. Joints plats conique</b> .....	101
<b>4.4. Joints plats étages</b> .....	106
<hr/>	
<b>CHAPITRE 05: Comportement dynamique du système rotor complet</b> .....	111
<hr/>	
<b>5.1. Modélisation par éléments finis</b> .....	112
5.1.1. Considérations générales .....	112
5.1.2. Considérations supplémentaires .....	113
<b>5.2. Analyses par éléments finis</b> .....	113
5.2.1. Système rotor sans joints d'étanchéité .....	113
5.2.2. Système rotor avec joints d'étanchéité.....	118
5.2.2.1 Système rotor avec joints cylindriques.....	118
1°. Système rotor sur fondation rigide.....	118
2°. Système rotor sur fondation flexible.....	124

---

## S O M M A I R E

---

5.2.2.2. Système rotor avec joints conique.....	130
1°. Système rotor sur fondation rigide.....	131
2°. Système rotor sur fondation flexible.....	135
5.2.2.3. Système rotor avec joints étagés.....	141
<b>Conclusion générale</b> .....	152
<b>Références bibliographiques</b> .....	155
<b>Annexes</b> .....	157
Annexe 1 .....	158
Annexe 2 .....	160

1. Lettre latines

Symbole	Désignation	Unité
<i>F</i>	Forces de restitution	<i>N</i>
<i>K</i>	Coefficient de rigidité direct	<i>kg/s<sup>2</sup></i>
<i>R</i>	Rayon du Joint	<i>m</i>
<i>Y</i>	Décalage sur l'axe <i>Y</i>	<i>m</i>
<i>X</i>	Décalage dans la direction de <i>X</i>	<i>m</i>
<i>y</i>	Variable adimensionnelle du déplacement de l'axe dans la direction <i>Y</i>	-
<i>x</i>	Variable adimensionnelle de déplacement dans la direction <i>X</i>	-
<i>L</i>	Longueur axiale de l'arbre	<i>m</i>
<i>C<sub>r</sub></i>	Jeu moyen du joint	<i>m</i>
<i>Dh</i>	Diamètre hydraulique	<i>m</i>
<i>S</i>	Zone de coupe transversale	<i>m<sup>2</sup></i>
<i>P<sub>er</sub></i>	Périmètre se section humide	<i>m</i>
<i>R<sub>e</sub></i>	Nombre de Reynolds	-
<i>p1</i>	Pression a l'entrée du joint	-
<i>p2</i>	Pression a la sortie du joint	<i>N/m<sup>2</sup></i>
<i>ΔP</i>	Différence de pression a l'entrée et a la sortie du joint	<i>N/mm<sup>2</sup></i>
<i>M</i>	Coefficient d'inertie du fluide	<i>kg</i>
<i>C</i>	Coefficient d'amortissement direct	<i>Kg/s</i>
<i>c</i>	Coefficient d'amortissement transversal	<i>Kg/s</i>
<i>K</i>	Coefficient de rigidité direct	<i>kg/s<sup>2</sup></i>
<i>k</i>	Coefficient de rigidité croisée	<i>kg/s<sup>2</sup></i>
<i>N</i>	Propriété extensive arbitraire	-
<i>V</i>	Vitesse linéaire	-
<i>Z</i>	Direction axiale	<i>N</i>
<i>H</i>	Jeu variable en fonction de la moyenne entre le jeu max et min	<i>m</i>
<i>W</i>	Vitesse axial	<i>m/s</i>
<i>U</i>	Vitesse circonférentielle	<i>m/s</i>
<i>P</i>	Quantité de mouvement linéaire	<i>kg.m/s</i>
<i>FS</i>	Forces de surface	<i>N</i>
<i>FB</i>	Forces de champ	<i>N</i>
<i>C<sub>0</sub></i>	Jeu du joint sur l'arbre d'entrée ( <i>Z = 0</i> )	<i>m</i>
<i>C<sub>1</sub></i>	Jeu du joint sur l'arbre de sortie ( <i>Z = L</i> )	<i>m</i>
<i>Q</i>	Débit volumétrique	<i>m<sup>3</sup>/s</i>
<i>P</i>	La Pression	<i>N/m<sup>2</sup></i>
<i>W<sub>o</sub></i>	Vitesse axiale moyenne	<i>m/s</i>
<i>T</i>	Temps d'écoulement du fluide le long de l'axe	<i>s</i>
<i>t</i>	Temps au moment analysé	<i>s</i>
<i>z</i>	Variable adimensionnelle de longueur	-
<i>P</i>	Variable adimensionnelle de pression	-
<i>u</i>	Variable adimensionnelle de vitesse circonférentielle	-

$w$	<i>Variable adimensionnelle de vitesse axiale</i>	-
$h$	<i>Variable adimensionnelle du jeu</i>	-
$b$	<i>Paramètre adimensionnel</i>	-
$U^s$	<i>Vitesse relative du stator</i>	<b><i>m</i></b>
$U^r$	<i>Vitesse relative du rotor</i>	<b><i>m</i></b>
$u^s$	<i>Vitesse relative adimensionnelle du stator</i>	-
$u^r$	<i>Vitesse relative adimensionnelle du rotor</i>	-
$a^1$	<i>Coefficient de solution de Moody</i>	-
$a^2s$	<i>Coefficient de solution de Moody</i>	-
$a^2r$	<i>Coefficient de solution de Moody</i>	-
$a^3$	<i>Coefficient de solution de Moody</i>	-
$e_s$	<i>Rugosité absolue du stator</i>	<b><i>m</i></b>
$e_r$	<i>Rugosité absolue du rotor</i>	<b><i>m</i></b>
$Pd$	<i>Pression du fluide en amont du joint</i>	<b><math>N/m^2</math></b>
$pd$	<i>Pression adimensionnelle du fluide en amont du joint</i>	-
$p(0)$	<i>Pression adimensionnelle du fluide a l'entrée du joint</i>	-
$p(1)$	<i>Pression adimensionnelle du fluide a la sortie du joint</i>	-
$p^2(0)$	<i>Pression adimensionnelle du fluide a l'entrée du deuxième joint étagé</i>	-
$p^2(1)$	<i>Pression adimensionnelle du fluide a la sortie du deuxième joint étagé</i>	-
$P_e$	<i>Pression de récupération de la charge a la sortie du joint</i>	<b><math>N/m^2</math></b>
$p_e$	<i>Pression de récupération adimensionnelle a la sortie du joint</i>	<b><math>N/m^2</math></b>
$i$	<i>Indice de discrétisation en volume fini</i>	-
$f$	<i>Fréquence adimensionnelle</i>	-
$R_0$	<i>Rayon de précession du joint</i>	<b><i>m</i></b>
$r_0$	<i>Relation entre le rayon précession du joint et le jeu radial moyen</i>	<b><i>mm</i></b>
$C_d$	<i>Coefficient de trainée</i>	-
$F_0$	<i>Force auxiliaire pour adimensionalisation</i>	<b><i>N</i></b>
$q3sen$	<i>Variable se référant a la partie imaginaire de distribution de la pression calculée pour une perturbation appliquée</i>	-
$q3cos$	<i>Variable se référant a la partie réelle de distribution de la pression calculée pour une perturbation appliquée</i>	-
$F_{rad1}$	<i>Force radiale</i>	<b><i>N</i></b>
$F_{\theta1}$	<i>Force tangentielle</i>	<b><i>N</i></b>
$\overline{M}$	<i>Variable adimensionnel d'inertie</i>	-
$\overline{K}$	<i>Variable adimensionnel du coefficient de rigidité direct</i>	-
$\overline{k}$	<i>Variable adimensionnel du coefficient de rigidité croisée</i>	-
$\overline{C}$	<i>Variable adimensionnel du coefficient d'amortissement direct</i>	-
$\overline{c}$	<i>Variable adimensionnel du coefficient d'amortissement transversal</i>	-
$q_r$	<i>Vecteur de déplacement du rotor</i>	-
$q_f$	<i>Vecteur de décalage de fondation</i>	-
$F_r$	<i>Force externe due au déséquilibre du rotor</i>	-

**2. Lettre grecques**

Symbole	Désignation	Unité
$\lambda$	<i>Facteur de friction pour l'écoulement axial</i>	-
$\omega$	<i>Vitesse angulaire</i>	-
$\eta$	<i>Propriété intensive correspondant a <math>N</math></i>	-
$\rho$	<i>Masse spécifique</i>	-
$\mu$	<i>Viscosité cinématique</i>	$(m^2/s)$
$\tau$	<i>Contrainte de cisaillement</i>	$(N/m^2)$
$\tau$	<i>Variable adimensionnelle du temps</i>	-
$\theta$	<i>Coordonnées angulaires</i>	-
$\varepsilon_s$	<i>Rugosité relative du stator</i>	-
$\varepsilon_r$	<i>Rugosité relative du rotor</i>	-
$\xi$	<i>Coefficient de perte d'entrée du joint</i>	-
$\xi_e$	<i>Coefficient de récupération a la sortie du joint</i>	-
$\sigma$	<i>Facteur de friction</i>	-
$\varepsilon$	<i>Perturbation appliquée</i>	-
$\Omega$	<i>Vitesse de précession du joint</i>	$(rad/s)$
$\phi(f, z)$	<i>Matrice de transition</i>	-
<b>Indice</b>		
	<i>Surface tournante</i>	-
<i>r</i>		
	<i>Surface stationnaire</i>	-
<i>s</i>		
	<i>Composant dans la direction <math>Z</math></i>	-
<i>z</i>		
	<i>Composant dans la circonférentielle <math>\theta</math></i>	-
$\theta$		
<i>o</i>	<i>Analyse pour axe centrée</i>	-
<i>i</i>	<i>Analyse pour axe excentrée</i>	-
<i>x</i>	<i>Composant dans la direction <math>x</math></i>	-
<i>y</i>	<i>Composant dans la direction <math>y</math></i>	-

---

## LISTE DES FIGURES

<b>Fig 1.1:</b> <i>Étanchéité pour propulsion navale</i> .....	8
<b>Fig 1.2:</b> <i>Étanchéité pour turbomachines</i> .....	8
<b>Fig-1.3:</b> <i>Étanchéité pour agitateurs, mélangeurs et malaxeurs</i> .....	9
<b>Fig-1.4 :</b> <i>Étanchéité dans une transmission de puissance</i> .....	9
<b>Fig 1.5:</b> <i>Étanchéité avec presse-étoupe en tresse</i> .....	13
<b>Fig-1.6:</b> <i>Étanchéité avec joint torique "V"</i> .....	13
<b>Fig-1.7:</b> <i>Étanchéité avec joint à lèvres [7]</i> .....	14
<b>Fig 1.8:</b> <i>Étanchéité avec garnitures mécaniques</i> .....	15
<b>Fig 1.9:</b> <i>Douille d'étanchéité fixe</i> .....	15
<b>Fig 1.10:</b> <i>Étanchéité à labyrinthe</i> .....	16
<b>Fig 1.11:</b> <i>Viscoétanchéité</i> .....	16
<b>Fig 1.12:</b> <i>Étanchéité ferromagnétique [8]</i> .....	17
<b>Fig 1.13:</b> <i>Arbre de décision pour la sélection d'un type d'étanchéité dynamique en rotation [5] ...</i>	18
<hr/>	
<b>Fig 2.1 :</b> <i>Concept d'étanchéité d'un arbre tournant à travers une paroi</i> .....	25
<b>Fig 2.2 :</b> <i>Système d'axes pour joint d'étanchéité</i> .....	26
<b>Fig 2.3 :</b> <i>Paramétrage transversal pour joint d'étanchéité</i> .....	27
<b>Fig 2.4 :</b> <i>Géométrie d'un joint cylindrique</i> .....	28
<b>Fig 2.5 :</b> <i>Géométrie d'un joint conique [14]</i> .....	29
<b>Fig 2.6:</b> <i>Géométrie d'un joint étagé</i> .....	30
<b>Fig 2.7:</b> <i>Différentes échelles spatiales et temporelles pour l'étude d'un phénomène[24]</i> .....	31
<b>Fig 2.8 :</b> <i>Niveaux d'observation d'un phénomène [25]</i> .....	32
<b>Fig 2.9 :</b> <i>Ecoulement d'un fluide convergent à deux instants <math>t</math> et <math>t + \Delta t</math></i> .....	35
<b>Fig 2.10 :</b> <i>Evaluation du produit scalaire <math>\vec{v} \cdot d\vec{S}</math> [33]</i> .....	37
<b>Fig 2.11 :</b> <i>Paramétrage d'un joint [10]</i> .....	38
<b>Fig 2.12 :</b> <i>Forces dans les direction <math>Z</math> et <math>\theta</math> de l'élément fluide différentiel [10]</i> .....	39
<b>Fig 2.13 :</b> <i>Décomposition circonférentielle et axiale du vecteur vitesse d'une particule fluide</i> .....	45
<hr/>	
<b>Fig 3.1:</b> <i>Répartition de pression le long du joint d'étanchéité cylindrique [34]</i> .....	52
<b>Fig 3.2 :</b> <i>Répartition de pression le long du joint d'étanchéité conique [34]</i> .....	52
<b>Fig 3.3:</b> <i>Répartition de pression le long du joint d'étanchéité étagé [34]</i> .....	53
<b>Fig 3.4 :</b> <i>Organigramme de résolution pour <math>\mathbf{u}_0</math>, <math>\mathbf{p}_0</math> et <math>\mathbf{W}_0</math> pour joints cylindrique et conique</i> .....	54
<b>Fig 3.5:</b> <i>Balance de pression dans un volume de contrôle</i> .....	57
<b>Fig 3.6 :</b> <i>Organigramme de résolution pour <math>\mathbf{u}_0</math>, <math>\mathbf{p}_0</math> et <math>\mathbf{W}_0</math> pour joint étagé</i> .....	58
<b>Fig 3.7:</b> <i>Organigramme de la solution du joint cylindrique et conique avec perturbation</i> .....	70

---

<b>Fig 3.8 :</b> Organigramme de la solution du joint étagé avec perturbation.....	72
<b>Fig 3.9 :</b> L'effet de Lomakin sur un joint un joint plat [11] .....	73
<b>Fig 3.10 :</b> Représentation du système arbre joint .....	74
<b>Fig 3.11. :</b> Représentation du système arbre joint .....	75
<b>Fig 3.12 :</b> Coordonnées polaires $r, \theta$ et coordonnées cartésiennes $x, y$ .....	77
<hr/>	
<b>Fig 4.1 :</b> $u_0(z)$ pour trois conditions initiales.....	81
<b>Fig 4.2 :</b> $u_0(z)$ pour trois conditions initiales (CHILDS, 1993). .....	81
<b>Fig 4.3 :</b> $u_0(z)$ pour trois conditions initiales avec des rugosités relatives différentes pour le rotor et le stator. ....	82
<b>Fig 4.4 :</b> $u_0(z)$ pour trois conditions initiales avec des rugosités relatives différentes pour le rotor et le stator (CHILDS, 1993). .....	82
<b>Fig 4.5 :</b> $p_0(z)$ pour trois jeux radiaux .....	84
<b>Fig 4.6:</b> $p_0(z)$ pour trois jeux radiaux (CHILDS, 1993). .....	84
<b>Fig 4.7 :</b> $p_0(z)$ pour quatre rapports $L/D$ radiaux. ....	85
<b>Fig 4.8 :</b> $p_0(z)$ pour quatre rapports $L/D$ radiaux(CHILDS, 1993). .....	85
<b>Fig 4.9 :</b> $p_0(z)$ pour trois rugosités relatives de la paroi du stator .....	86
<b>Fig 4.10:</b> $p_0(z)$ pour trois rugosités relatives de la paroi du stator(CHILDS, 1993). .....	86
<b>Fig 4.11:</b> $p_0(z)$ pour deux valeurs du coefficient du facteur de récupération .....	87
<b>Fig 4.12:</b> $p_0(z)$ pour deux valeurs du coefficient du facteur de récupération CHILDS, 1993).. .....	87
<b>Fig 4.13 :</b> a) coefficients de rigidité par rapport à $L/D$ ; (b) coefficients d'amortissement en fonction de $L/D$ ; (c) Coefficient d'inertie par rapport à $L/D$ . .....	89
<b>Fig 4.14 :</b> a) coefficients de rigidité par rapport à $L/D$ ; (b) coefficients d'amortissement en fonction de $L/D$ ; (c) Coefficient d'inertie par rapport à $L/D$ (CHILDS, 1993). .....	90
<b>Fig 4.15:</b> (a) Termes directes de rigidité et d'amortissement en fonction de $\bar{C}r/R$ (b) Terme rigidité croisé par rapport à $\bar{C}r/R$ , (c) Terme d'amortissement croisé en fonction de $\bar{C}r/R$ , (d) Terme d'inertie versus $\bar{C}r/R$ . Pour $L/D=0.5$ . .....	91
<b>Fig 4.16:</b> termes directs de rigidité et d'amortissement en fonction de $\bar{C}r/R$ , pour $L/D=0.5$ . (CHILDS, 1993). .....	92
<b>Fig 4.17:</b> (a) Terme direct de rigidité en fonction $\xi$ , (b) rigidité à long terme par rapport à $\xi$ , (c) terme d'amortissement direct versus $\xi$ , (d) Mots croisés de l'amortissement en fonction $\xi$ , (e) terme d'inertie en fonction $\xi$ .....	93

<b>Fig 4.18:</b> Rigidité directe par rapport à $\xi$ . (CHILDS, 1993).....	94
<b>Fig 4.19:</b> (a) Terme direct de rigidité par rapport à $(1-\xi_e)$ , b) Terme croisé de rigidité à par rapport à $(1-\xi_e)$ , (c) terme d'amortissement direct en fonction $(1-e)$ , (d) terme croisé d'amortissement en fonction de $(1-\xi_e)$ (e) terme d'inertie en fonction de $(1-\xi_e)$ . Pour $L/D = 0.5$ .....	95
<b>Fig 4.20:</b> Terme direct de rigidité par rapport à $(1-\xi_e)$ . Pour $L/D = 0.5$ . (CHILDS, 1993).....	96
<b>Fig 4.21:</b> (a) Coefficients d'inertie, rigidité directe et amortissement croisé en fonction de $\epsilon_s$ , b) Coefficients de rigidité croisée et amortissement direct en fonction de $\epsilon_s$ . Pour $L/D = 1.0$ ......	97
<b>Fig 4.22:</b> Coefficients d'inertie, raideur directe et amortissement croisé en fonction de $\epsilon_s$ , Pour $L/D = 1.0$ . (CHILDS, 1993).....	97
<b>Fig 4.23:</b> Coefficients de raideur et d'amortissement directs et coefficient de rigidité croisée en fonction de $\Delta P$ .....	98
<b>Fig 4.24:</b> Coefficients de raideur et d'amortissement directs et coefficient de rigidité croisée en fonction de $\Delta P$ (CHILDS, 1993).....	98
<b>Fig 4.25:</b> (a) Coefficients de raideur direct et croisés en fonction de $\omega$ , (b) Coefficients d'amortissement direct et croisé en fonction de $\omega$ .....	99
<b>Fig 4.26:</b> (a) Coefficients de raideur directs et croisés en fonction de $\omega$ , (b) Coefficients d'amortissement directs et croisés en fonction de $\omega$ . (CHILDS, 1993).....	100
<b>Fig 4.27:</b> Répartition de la pression, $p_0(z)$ pour deux types de joints coniques. ....	101
<b>Fig 4.28:</b> Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à $\Delta P$ pour le joint 1.....	102
<b>Fig 4.29:</b> Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à $\Delta P$ pour le joint 2.....	103
<b>Fig 4.30:</b> (a) Coefficients de rigidité directs et croisés par rapport à $\omega$ , (b) Coefficients de croisement directs et croisés par rapport à $\omega$ . Joint 1.....	102
<b>Fig 4.31:</b> (a) Coefficients de rigidité directs et croisés par rapport à $\omega$ , (b) Coefficients de croisement directs et croisés par rapport à $\omega$ .....	105
<b>Fig 4.32:</b> Répartition de la pression, $p_0(z)$ pour les deux types de joints étagés. ....	106
<b>Fig 4.33:</b> Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à $\Delta P$ pour le joint 1.....	107
<b>Fig 4.34:</b> Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à $\Delta P$ pour le joint 2.....	108

<b>Fig 4.35:</b> (a) Coefficients directs et transversaux de rigidité en fonction de la vitesse de rotation, (b) Coefficients directs et de croisement de l'amortissement en fonction de $\omega$ . Joint 1 .....	109
<b>Fig 4.36:</b> (a) Coefficients directs et transversaux de rigidité en fonction de la vitesse de rotation, (b) Coefficients directs et de croisement de l'amortissement en fonction de $\omega$ . Joint 2 .....	110
<b>Fig 5.1:</b> Modèle en éléments finis du système rotor complet .....	112
<b>Fig 5.2:</b> Modèle en éléments finis du système rotor sans joints d'étanchéité .....	113
<b>Fig 5.3:</b> (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3.....	114
<b>Fig 5.4:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.....	115
<b>Fig 5.5:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11 .....	116
<b>Fig 5.6:</b> diagramme de Campbell pour système rotor sans joint d'étanchéité .....	117
<b>Fig 5.7:</b> Mode de vibration du système rotor à la vitesse critique de <b>1345 tr / min.</b> .....	117
<b>Fig 5.8:</b> Modèle en éléments finis du système rotor avec joints d'étanchéité.....	118
<b>Fig 5.9:</b> Coefficients de rigidité du joint d'étanchéité cylindrique .....	119
<b>Fig 5.10:</b> Coefficients d'amortissement du joint d'étanchéité cylindrique .....	119
<b>Fig 5.11:</b> (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3. ....	120
<b>Fig 5.12:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7 .....	121
<b>Fig 5.13:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11 .....	122
<b>Fig 5.14:</b> diagramme de Campbell pour système rotor avec joint d'étanchéité .....	123
<b>Fig 5.15:</b> Mode de fonctionnement du système à <b>5160 tr / min.</b> .....	123
<b>Fig 5.16:</b> (a) Amplitude dans Y et Z dans le nœud 3, (b) Amplitude dans Y dans le nœud 3(c) Phase dans Y et Z dans le nœud 3.....	125
<b>Fig 5.17:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7 .....	126
<b>Fig 5.18:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11 .....	127
<b>Fig 5.19:</b> diagramme de Campbell .....	128
<b>Fig 5.20:</b> Mode de fonctionnement: (a) 1350 tr / min. (b) 5160 tr / min. (c) 5830,5 tr / min.....	129
<b>Fig 5.21:</b> Coefficients de rigidité de la garniture mécanique conique. ....	130
<b>Fig 5.22:</b> Coefficients d'amortissement de la garniture mécanique conique .....	130
<b>Fig 5.23:</b> (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3.....	131
<b>Fig 5.24:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7 .....	132
<b>Fig 5.25:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11. ....	133
<b>Fig 5.26:</b> diagramme de Campbell .....	134
<b>Fig 5.27:</b> Mode de fonctionnement : (a) 1350 tr / min. (b) 3810 tr / min. (c) 4934 tr / min. ....	135
<b>Fig 5.28:</b> (a) Amplitude du nœud 3, (b) Amplitude du déplacement y dans le nœud 3 (c) Phase du nœud 3.....	137
<b>Fig 5.29:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.....	138

---

<b>Fig 5.30:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11 .....	139
<b>Fig 5.31:</b> diagramme de Campbell.....	140
<b>Fig 5.32:</b> Mode de fonctionnement : (a) 1350 tr / min. (b) 3810 tr / min. (c) 4934 tr / min.....	140
<b>Fig 5.33:</b> Coefficients de rigidité du joint d'étanchéité étagé.....	141
<b>Fig 5.34:</b> Coefficients d'amortissement du joint d'étanchéité étagé .....	141
<b>Fig 5.35:</b> (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3. ....	142
<b>Fig 5.36:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7 .....	143
<b>Fig 5.37:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11. ....	144
<b>Fig 5.38:</b> Diagramme de Campbell. ....	145
<b>Fig 5.39:</b> Mode de fonctionnement : (a) 1350 tr / min. (b) 5300 tr / min. (c) 6279 tr / min.....	145
<b>Fig 5.40:</b> (a) Amplitude du nœud 3, (b) Amplitude en Y du nœud 3 (c) Phase du nœud 3 .....	147
<b>Fig 5.41:</b> (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7. ....	148
<b>Fig 5.42:</b> (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11 .....	149
<b>Fig 5.43:</b> Diagramme de Campbell .....	149
<b>Fig 5.44:</b> Mode de fonctionnement : (a) 1350 tr / min. (b) 5300 tr / min. (c) 6279 tr / min.....	150

---

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tab 1.1:</b> <i>Interaction entre les variables de l'étanchéité et celles de son application</i> .....	10
<b>Tab 1.2:</b> <i>Critères de choix d'une étanchéité mécanique</i> .....	10
<b>Tab 1.3:</b> <i>Classification des dispositifs pour étanchéités mécaniques [2-5]</i> .....	12
<b>Tab 1.4:</b> <i>Ordre de grandeur des principaux paramètres d'une garniture mécanique</i> .....	10
<hr/>	
<b>Tab 2.1:</b> <i>Association grandeurs extensives et intensives</i> .....	34
<b>Tab 2.2:</b> <i>Classification des différentes forces agissant dans un écoulement de fluides</i> .....	36
<hr/>	
<b>Tab 4.1:</b> <i>Paramètres du tampon d'écoulement annulaire pour les calculs d'axes.</i> .....	80
<b>Tab 4.2 :</b> <i>Paramètres du joint d'écoulement cylindrique pour les calculs du système perturbé</i> .....	88
<b>Tab 4.3:</b> <i>Valeurs calculées des coefficients dynamiques</i> .....	88
<b>Tab 4.4:</b> <i>Paramètres du Joint d'étanchéité conique pour les calculs avec le système perturbé</i> ...	101
<b>Tab 4.5:</b> <i>(a),(b) valeurs des jeux radiaux d'entrée (<math>C_0</math>) et de sortie (<math>C_1</math>) pour les joints coniques</i>	101
<b>Tab 4.6:</b> <i>Valeurs calculées des coefficients dynamiques.</i> .....	102
<b>Tab 4.7.:</b> <i>Paramètres du tampon d'écoulement étagé pour les calculs avec le système perturbé.</i>	106
<b>Tab 4.8:</b> <i>Valeurs du jeu radial des entrées (<math>C_0</math>) et de la sortie (<math>C_1</math>) pour les joints étagés.</i> .....	106
<b>Tab 4.9:</b> <i>Valeurs calculées des coefficients dynamiques.</i> .....	107
<hr/>	
<b>Tab 5.1:</b> <i>Discrétisation par éléments finis.</i> .....	112
<b>Tab 5.2:</b> <i>Données sur l'excitation causée par une masse concentrée</i> .....	113
<b>Tab 5.3:</b> <i>Coefficients dynamiques pour la représentation des roulements rigides</i> .....	113
<b>Tab 5.4:</b> <i>Caractéristiques du joint mécanique cylindrique</i> .....	118
<b>Tab 5.5:</b> <i>Paramètres de structure de fondation dans le sens vertical (<math>z</math>)</i> .....	118
<b>Tab 5.6:</b> <i>Caractéristiques du joint mécanique conique</i> .....	130
<b>Tab 5.7:</b> <i>Caractéristiques du joint d'étanchéité étagé</i> .....	141

---

---

***INTRODUCTION  
GÉNÉRALE***

---

---

L'importance des connaissances liées aux phénomènes typiques du fonctionnement et du comportement des équipements et composants des machines tournantes est pertinente. Actuellement, il existe une grande variété d'applications d'équipements tournants, allant des grands systèmes tels que les centrales hydroélectriques et thermoélectriques aux petits systèmes tels que les turbocompresseurs. La présence d'un organe tournant transmettant de la puissance peut engendrer une série de problèmes, rencontrés dans les applications les plus variées des machines tournantes, en tant que partie intégrante d'installations de production ou de production d'énergie. Le développement de modèles mathématiques pour simuler les caractéristiques opérationnelles de ces machines est d'une importance capitale, car il vise à prévoir le comportement et à identifier les déviations caractérisées par les réponses dynamiques de l'ensemble, en fournissant des indicateurs de dysfonctionnement ou de diagnostic des pannes et en minimisant les erreurs, les risques d'arrêts imprévus dans le système.

La détermination des caractéristiques dynamiques des systèmes tournant est obtenue par l'interaction des composants intervenant dans leur construction, tels que les rotors, les arbres, les paliers, les joints d'étanchéité et les structures de fondation, entre autres. Les joints d'étanchéité mécaniques, sont essentiels au fonctionnement des machines tournantes de moyenne et grande taille, car ils sont utilisés pour contrôler les fuites du fluide de travail et exercent une influence significative sur la dynamique des machines tournantes due à la chute de pression entre l'entrée et la sortie du joint, ce qui est représenté dans le modèle mathématique du système par des coefficients dynamiques de rigidité, d'amortissement et d'inertie équivalents. Par conséquent, l'analyse mathématique de cette composante qui est l'étanchéité mécanique est importante pour que les résultats trouvés dans les modèles théoriques et numériques puissent, de plus en plus, être approximés par des applications pratiques. Selon Lees, Sinha et Friswell (2009), la détermination d'un modèle complet fiable capable de prédire le comportement dynamique des machines tournantes et leurs défaillances éventuelles est un défi à relever.

Le thème principal de cette thèse est donc la détermination des coefficients dynamiques pour trois types de joints d'étanchéité mécaniques annulaires de géométries différentes en faisant appel à la méthode des volumes finis. Les concepts de la mécanique des fluides sont passés en revue pour une application directe dans la modélisation de l'écoulement des joints annulaires cylindriques, coniques et étagés. La chute de pression axiale et la répartition de la pression circonférentielle dans ces joints d'étanchéité génèrent des forces radiales et tangentielles qui agissent à leur tour sur l'axe de rotation et influent par conséquent sur leur comportement dynamique de la ligne d'arbre.

L'interaction de la mécanique des fluides avec celle du système tournant lui-même, composé essentiellement d'axes, de paliers et de rotors, est réalisée en insérant des coefficients dynamiques équivalents dans le modèle mathématique du rotor, ce dernier étant obtenu par la méthode des éléments finis. Ainsi, les coefficients dynamiques d'inertie, de rigidité et d'amortissement des joints annulaires analysés ici sont évalués, du point de vue de leur dépendance aux caractéristiques géométriques des joints et aux conditions de fonctionnement de la machine. Ensuite, une fois incorporés dans le modèle de système tournant complet, les joints d'étanchéité sont également analysés du point de vue de leur influence sur la réponse dynamique globale de la machine tournante. Ce travail de thèse est structuré en cinq chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de l'étanchéité mécanique en générale à travers sa définition, son rôle ses différents types ainsi que les critères de sélectivité en fonction des conditions opérationnelles du système technique à étancher.

Dans le chapitre deux, en premier lieu, une revue des études scientifiques et l'état de la connaissance portant sur la modélisation et l'analyse des systèmes tournant sous l'influence des joints d'étanchéité a été présenté, en deuxième lieu, une mise en situation et un paramétrage ont été établis pour pouvoir formuler les équation gouvernantes nécessaires la modélisation des trois types de configurations de joint annulaires analysés. Les déductions finales et les formulations des équations qui régissent les fluides sont décrites ainsi que leur dimensionnalité.

Le chapitre trois décrit la solution des équations de base par la méthode des volumes finis en considérant, pour ce faire deux cas de figures. Le premier cas traite la solution en considérant le tourillon centré par rapport au logement du joint d'étanchéité avec conditions aux limites initiales et finales afin de permettre la détermination de la perte de charge et la distribution du champ des vitesses pour cette configuration. Le deuxième cas, traite la solution en considérant le tourillon excentré par rapport au logement du joint d'étanchéité. Cette excentricité a été obtenue suite à l'application d'une perturbation dans le système afin d'obtenir les coefficients dynamiques. D'où de nouvelles simplifications d'équations doivent être apportées pour éliminer la dépendance du temps. En outre, ce chapitre présente également, les équations pour la détermination des forces de réaction, issues de la répartition de la pression le long du joint et, par conséquent, de l'obtention des coefficients dynamiques des joints d'écoulement.

Le chapitre quatre présente les résultats et discussion pour les joints d'étanchéité cylindriques, coniques et étagés concernant les pertes de charge ainsi que la distribution des vitesses axiales et circonférentielles comparativement à ceux fournis par (Child 1993).

Le chapitre cinq présente les résultats et discussion pour le système rotor complet. Ce dernier a été modélisé par élément finis en considérant la ligne d'arbre avec et sans joints d'étanchéités. Les résultats et les discussions ont porté sur l'amplitude et la phase des mouvements vibratoires ainsi que les fréquences et les modes propres de vibration pour les différents cas de joint d'étanchéité.

---

# *Chapitre 01*

---

## *ÉTANCHEITÉ MÉCANIQUE POUR ARBRES TOURNANTS*

---

## 1.1. INTRODUCTION

En technologie de construction mécanique, lors de la conception-construction d'un groupe fonctionnel de pièces pour un organe de machine, les solutions constructives sont recherchées à travers les fonctions mécaniques tel que : assemblage de deux pièces mécaniques, guidage en translation, guidage en rotation, transmission de puissance, lubrification et étanchéité mécanique. Dans les systèmes techniques qui nécessitent des commandes hydrauliques et/ou pneumatiques, et dans lesquelles les fluides de commandes circulent à travers des réseaux de conduites sous pression, l'étanchéité devient une fonction fondamentale pour ce genre de systèmes.

Vu que le confinement d'un fluide, de par sa nature, n'est pas aisé et qu'une bonne fiabilité en matière d'étanchéité n'est pas souvent facile à obtenir en cas de fuite de gaz ou de liquide, le fonctionnement et la sécurité de l'installation ainsi que celle des hommes seront menacés. Donc une fuite, même petite, peut avoir de multiples conséquences, tant sur le plan de la disponibilité du matériel que sur celui du fonctionnement et aussi de la sécurité. A cet effet, l'étanchéité reste une fonction qui revêt une grande importance en mécanique par suite, d'une part de l'utilisation croissante des fluides pour les commandes (hydrauliques, pneumatiques) et pour les contrôles et, d'autre part, du nombre très important et de la très grande diversité des composants mécaniques dans les réseaux de fluides.

En outre, la fonction étanchéité pour qu'elle soit correctement assurée, elle fait appel à de nombreuses notions de physique et de chimie où les propriétés des matériaux tiennent une place importante. Pour une solution constructive, les problèmes à résoudre sont variés et doivent intégrer un nombre important de paramètres difficiles à optimiser simultanément, spécialement en dynamique. C'est pour cela que les meilleures solutions en techniques d'étanchéité ne sont presque toujours que le résultat de savants compromis. [1]

Ce chapitre donne tout d'abord la définition de l'étanchéité mécanique, décrit les différents types d'étanchéité ensuite il expose les solutions à mettre en œuvre dans le cas de l'étanchéité dynamique en rotation et en particulier les joints d'étanchéités annulaires.

## 1.2 POSITION DU PROBLEME

Le fonctionnement des machines tournantes ou alternatives exige toujours des étanchéités au niveau des arbres tournants afin de retenir les fluides lubrifiants et empêcher les particules étrangères de pénétrer dans l'enceinte à étancher et d'endommager les machines faisant subir à celles-ci une défaillance prématurée. Les conditions de fonctionnement pouvant considérablement varier, la conception des systèmes d'étanchéités ont évolués pour répondre à ces conditions. Certaines applications tolèrent une petite quantité de fuite, tandis que d'autres ne permettent aucune fuite. En général, la complexité, des étanchéités, et les coûts augmentent à mesure que le besoin de zéro fuite augmente [3]. Parmi les machines et organes de machines qui rentrent dans ce contexte, on peut citer les applications suivantes :

### 1°. Les engins marins

Les engins marins (bateau de plaisance, navire scientifique, de pêche ou de commerce, bâtiment militaire, sous-marin, drone) font appel à différents modes de propulsion pour se déplacer sur ou sous les mers. La transmission doit traverser la coque pour entraîner l'hélice de propulsion d'où la nécessité d'une étanchéité mécanique entre la coque et l'arbre de transmission (**Figure 1.1**).

### 2°. Les turbomachines

Pour pouvoir entraîner leurs rotors, toutes les turbomachines possèdent des paliers lisses ou à roulement pour assurer le guidage en rotation de l'arbre d'entraînement et présenter un accès pour ce lui-ci, sans pour autant permettre une fuite excessive du fluide à impulser. D'où la nécessité d'une étanchéité mécanique entre le fluide à faire transporter et le milieu extérieur (**Figure 1.2**).

### 3° Industries type process

Les industries tel que l'agroalimentaire, Chimie, pétrochimie, pharmaceutique, biotechnologie, cosmétique, traitement des eaux, nucléaire, etc., utilisent tous d'une manière intensive dans leurs processus des organes tel que agitateurs, malaxeurs et mélangeurs industriels. Il arrive que ces dernières soient immergées dans le fluide devant être traité ou à transporté. Là aussi, apparaît la nécessité d'une étanchéité mécanique dynamique entre l'intérieur et l'extérieur de la pompe (**Figure 1.3**).

### 4°. Organes de transmission de puissance

Pour pouvoir transmettre une puissance entre un organe moteur (exp: moteur électrique) et un organe récepteur (exp: soufflante), les organes de machines tel que embrayages, freins, réducteurs de vitesses utilisent des arbres de transmission guidés en rotation continues et portés à l'aide de paliers à roulements lubrifiés dans un carter. Ce dernier nécessite une étanchéité mécanique dynamique entre les arbres d'entrées et sortie, et le milieu extérieur (**Figure 1.4**).

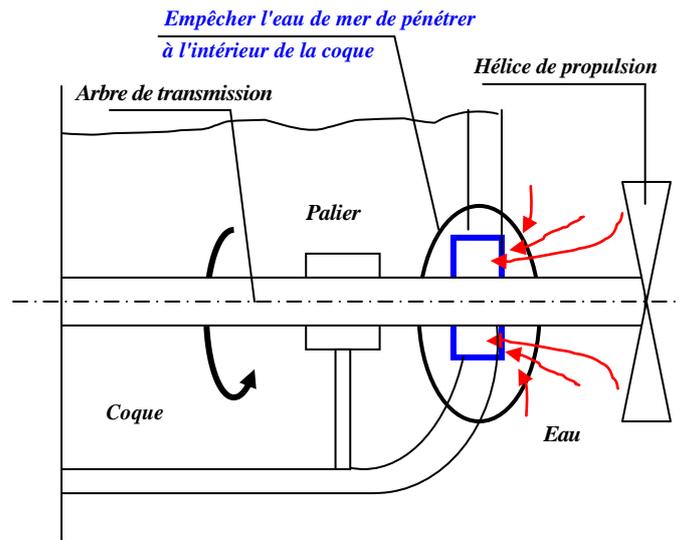


Fig 1.1: étanchéité pour propulsion navale

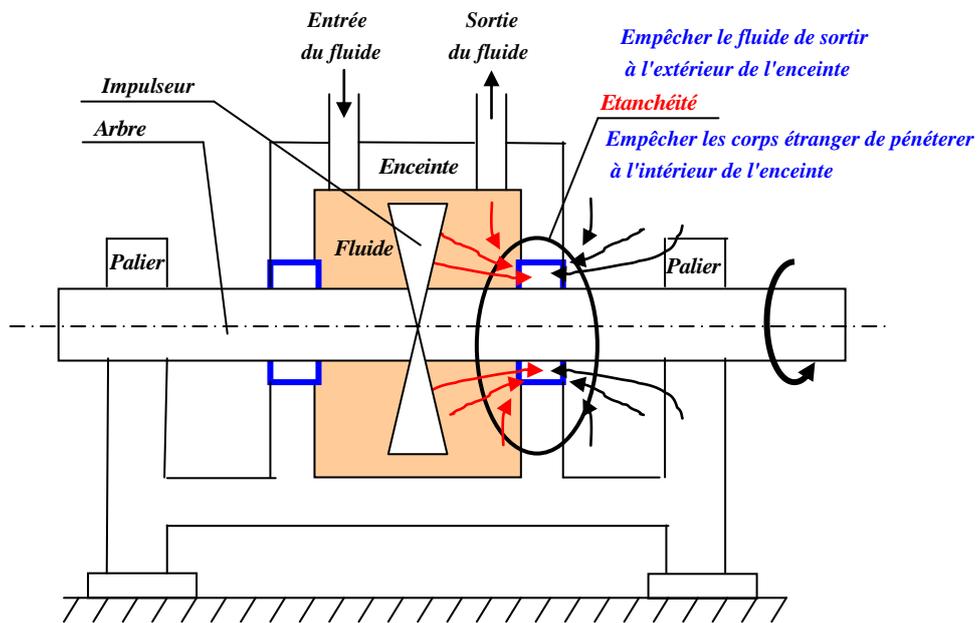


Fig 1.2: étanchéité pour turbomachines

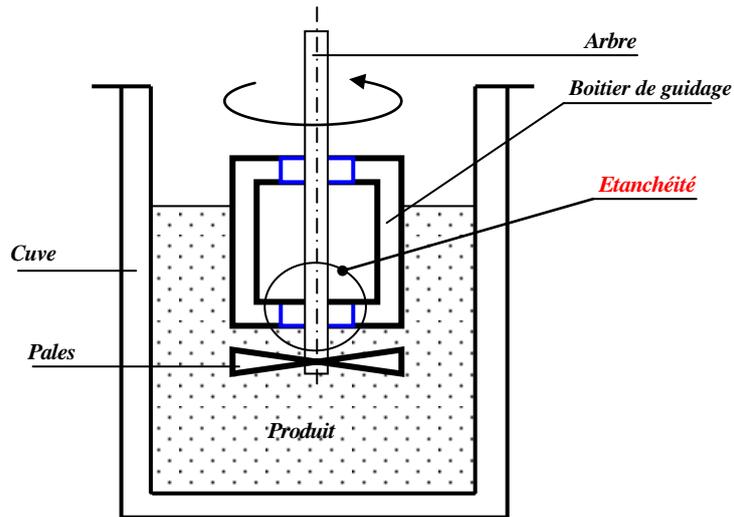


Fig 1.3: étanchéité pour agitateur, mélangeur et malaxeurs

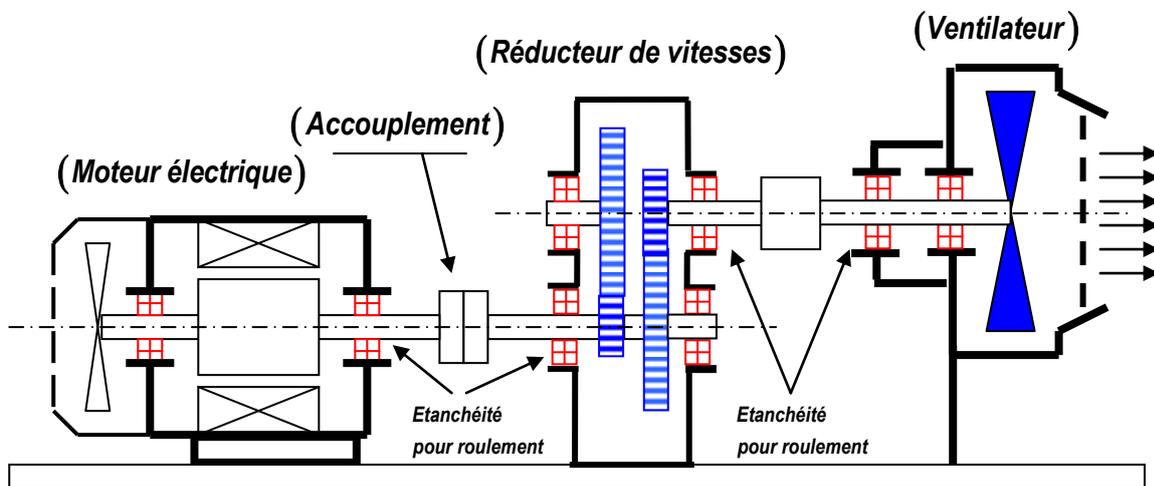


Fig 1.4: étanchéité dans une transmission de puissance

## 1.3 ÉTANCHÉITÉ MÉCANIQUE

### 1.3.1. Définition et rôle

L'étanchéité mécanique est une fonction mécanique qui consiste à séparer deux milieux fluides (liquide, vapeur, gaz) ou pseudo-fluides (pâte, graisse, peinture, pétrole, boue, polymères, etc..) de nature et/ou d'états physico-chimiques différents, en assurant leur confinement à l'intérieur d'une enceinte. On dit qu'une enceinte est parfaitement étanche si [2]:

- aucune quantité de fluide qui y est contenu ne peut sortir vers extérieur ;
- aucune particule étrangère ou fluide étranger ne peut pénétrer à l'intérieur.

Dans les applications industrielles, le but général d'une étanchéité mécanique est de minimiser ou d'empêcher une fuite quelconque d'un milieu à un autre et cela afin d'éviter une défaillance qui peut mener à une perte de performances de l'installation, et/ou empêcher une contamination par pollution ou par réaction chimique qui touche la sécurité de l'installation et peut induire un accident industriel.

### 1.3.2 Choix d'un système d'étanchéité mécanique

#### 1.3.2.1 variables d'étanchéités et variables d'exploitation [5]

Généralement, il n'est pas facile de déterminer quel type d'étanchéité satisfera de manière économique le besoin de la mise en œuvre d'une étanchéité dynamique. Un examen attentif des variables d'exploitation doit être fait pour s'assurer que le type, le matériau et la conception de l'étanchéité répondent au besoin escompté. Les variables d'étanchéité, contrôlées par le concepteur, peuvent interagir avec les variables d'exploitation pour influencer les fuites de fluides (Table 1.1).

**Tab 1.1:** Interaction entre les variables de l'étanchéité et celles de son application[5]

<b>Variables d'étanchéités</b>	<b>Effets provoquant une fuite statique ou dynamique</b>	<b>Variables d'exploitation</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Type</li> <li>- Matériau</li> <li>- Conception</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Dilatation et contraction thermique</li> <li>- Dégradation du matériaux d'étanchéité</li> <li>- Corrosion</li> <li>- Fatigue</li> <li>- Vibrations</li> <li>- Usure</li> <li>- Défectuosité de l'arbre ou de l'alésage</li> <li>- Panne de lubrifiant</li> <li>- Cas de fuite</li> <li>- Désalignement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Statique ou dynamique</li> <li>- Propriétés du milieu à étancher</li> <li>- Mouvement et vitesse de l'arbre</li> <li>- Excentricité de l'arbre</li> <li>- Diamètre de l'arbre</li> <li>- Etat de finition de l'arbre</li> <li>- Matériau de l'arbre</li> <li>- Logement:               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Etat de finition</li> <li>- Excentricité</li> <li>- Interférence de tolérance</li> </ul> </li> <li>- Opération               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cycle (pression, température)</li> <li>- Temps d'exécution</li> </ul> </li> <li>- Ambiance               <ul style="list-style-type: none"> <li>- Plage de température</li> <li>- Plage de pression</li> <li>- Poussière / Boue</li> </ul> </li> </ul>

### 1.3.2.2 Critères de choix d'une étanchéité

Les critères à prendre en compte pour sélectionner une étanchéité mécanique sont nombreuses et peuvent parfois être complexes, cependant elles peuvent être réparties en quatre catégories [4]: les conditions de service (vitesse, pression, température); le fluide à étancher (nature, dangerosité....); les normes ou exigences applicables et la facilité de montage ou d'intervention exigée. Le **tableau 1.2**, présente les critères de choix d'une étanchéité mécanique.

<b>Tab 1.2:</b> Critères de choix d'une étanchéité mécanique	
<b>Critères relatifs aux pièces à étancher</b>	- Nature du mouvement relatif entre les surfaces de contact des éléments à étancher
	- Vitesse du mouvement et importance des vitesses relatives
	- Formes des surfaces à étancher
	- Dimensions et tolérances
	- Etats de surfaces
	- Porosité des matériaux
	- formes complémentaires
	- Encombrement disponible.
	- Durée de vie souhaitée
	- Tolérance d'une fuite
	- Simplicité de la conception
	- Contrôle de l'étanchéité
	- Entretien, maintenance
- Aspect commercial	
<b>Critères relatifs au fluide à confiner</b>	- Nature du fluide à étancher: liquide, semi-liquide, solide, gazeux
	- Viscosité ;
	- Compatibilité chimique entre le joint et le fluide
<b>Critères relatifs au milieu ambiant</b>	- Température de dilatation ;
	- Différence des pressions
	- Impuretés en suspension dans ce milieu ambiant ;
	- Composition (attaque chimique possible du joint).

**1.4 CLASSIFICATION DES ETANCHEITES**

L'industrie d'une manière générale utilise un grand nombre de systèmes d'étanchéité dans divers secteurs tel que : l'industrie mécanique, automobile, navale, aéronautique et spatiale mais aussi dans l'énergétique industrielle dans les installations à base de turbopompes, turbocompresseurs et turboalternateurs. Sans oublier le secteur des industries pétrochimiques. Tous ces secteurs, utilisent des dispositifs d'étanchéité qui isolent les moyens technique les uns des autres là où les pressions, les températures ou les différents agents propulseurs sont contenus. Dans la pratique, il existe une grande variété d'étanchéités. Suivant la configuration du système à étancher on peut adopter la classification donnée sur le **tableau 1.3**.

**Tab 1.3:** Classification des dispositifs pour étanchéités mécaniques [2-5]

ETANCHEITE STATIQUE		ETANCHEITE DYNAMIQUE			
Directe	Indirecte	Pour mouvement de rotation		Pour mouvement de translation	
		Avec contact	Sans contact	Avec contact	Sans contact
Plan / plan	Joints plats	Joints toriques	Rainure	Joints toriques	Rainure
Sphère / cône	Joints toriques	Joint quadrilobes	Douille	Joint quadrilobes	Douille
Cône / cylindre	Joint quadrilobes	Joints à lèvres	Labyrinthe	Segments	
Cône / Cône	Soufflet	Presse-étoupe	Turbine à vis	Presse-étoupe	
	Diaphragme	Garniture			
	Membrane				

**1.4.1 Étanchéité pour mouvement de rotation**

Les étanchéités pour mouvements tournants se déclinent en deux grands groupes : étanchéité avec contact et étanchéité sans contact [3].

**1.4.1.1 Etanchéité avec contact**

L'étanchéité avec contact établit un contact direct entre la partie fixe à étancher (stator) et la partie tournante (Rotor). Les fuites du fluide à confiner sont minimales, mais en raison du contact solide–solide il se produit une perte d'énergie en raison du phénomène de frottement avec glissement et une perte de matière sur les deux parties en contact en raison du phénomène d'usure.

On distingue trois types d'étanchéités avec contact :

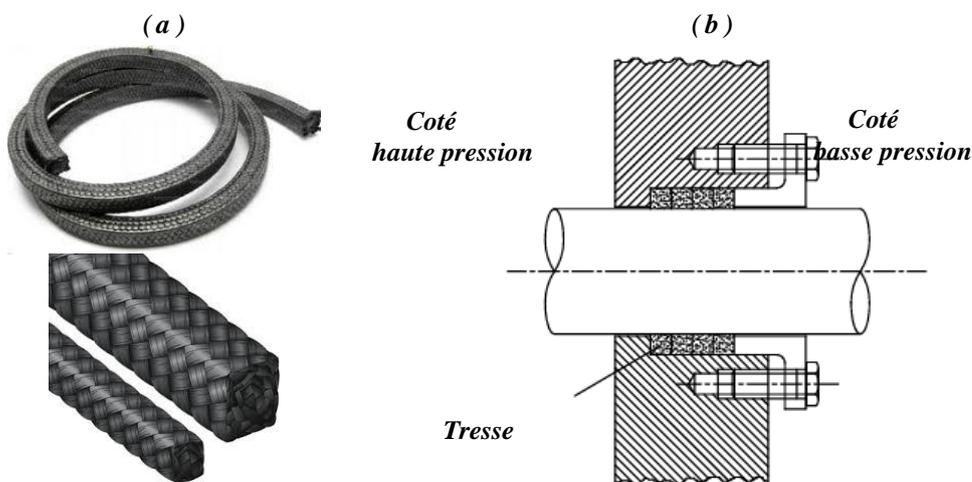
- Presse-étoupe
- Joints à lèvres radiaux
- Garnitures mécaniques

### 1° Le presse-étoupe

Un **presse-étoupe** est un système d'étanchéité qui existe depuis très longtemps. Il a été utilisé initialement dans les pompes et la robinetterie ainsi que dans la marine pour assurer l'étanchéité du passage des arbres de transmission au niveau de la coque. Son concept consistait à compresser dans un logement de forme tubulaire à l'aide d'une bague métallique une étoupe (sous-produit fibreux non tissé issu essentiellement du travail du chanvre ou du lin). Actuellement, l'étoupe est remplacée par l'une des solutions suivantes :

#### a. Cordon en tresse

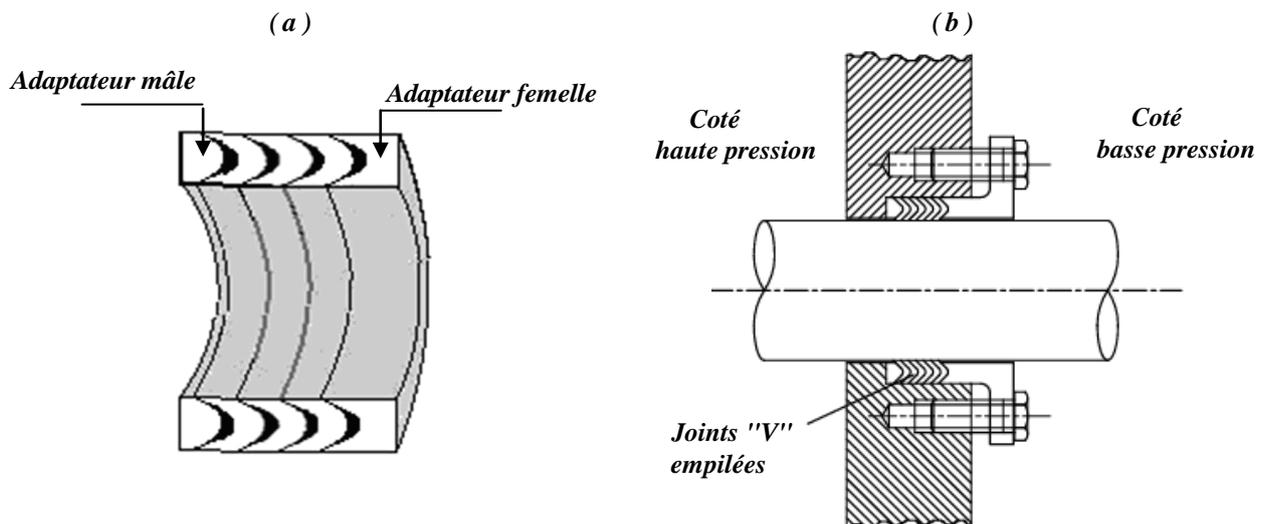
Dans ce cas, l'étanchéité est assurée par une tresse de section carrée à enrouler, faite de matériaux tels que carbone-graphite, aramide-kevlar ou fibre de verre (**figure 1.5**).



**Fig 1.5:** Étanchéité avec presse-étoupe en tresse : (a) Aspect extérieur d'une tresse, (b) Montage

#### b. Joint torique "V"

Dans ce cas, le dispositif d'étanchéité sera un ensemble de joint torique "V" en matière synthétique ou en caoutchouc, empilés les uns à côté des autres (**Figure 1.6**).



**Fig 1.6:** Étanchéité avec joint torique "V" : (a) Aspect extérieur, (b) Montage

2°. Étanchéité avec joint à lèvres

Les joints à lèvres sont principalement utilisés pour retenir le lubrifiant et exclure la contamination. Ils assurent soit une étanchéité dans un seul sens par contact sur l'arbre, soit une étanchéité dans un seul sens avec une protection dite « antipoussière » dans l'autre sens. Dans le cas de la lubrification à la graisse la lèvre est orientée vers l'extérieur du palier pour permettre le passage de la graisse usagée lors des renouvellements par pompe. Tandis que dans le cas de la lubrification à l'huile, la lèvre est orientée vers l'intérieur du palier afin assurer la retenue de l'huile, L'avantage de ce type d'étanchéité c'est son moindre coût, son encombrement minime et la simplicité de montage (Figure 1.7).

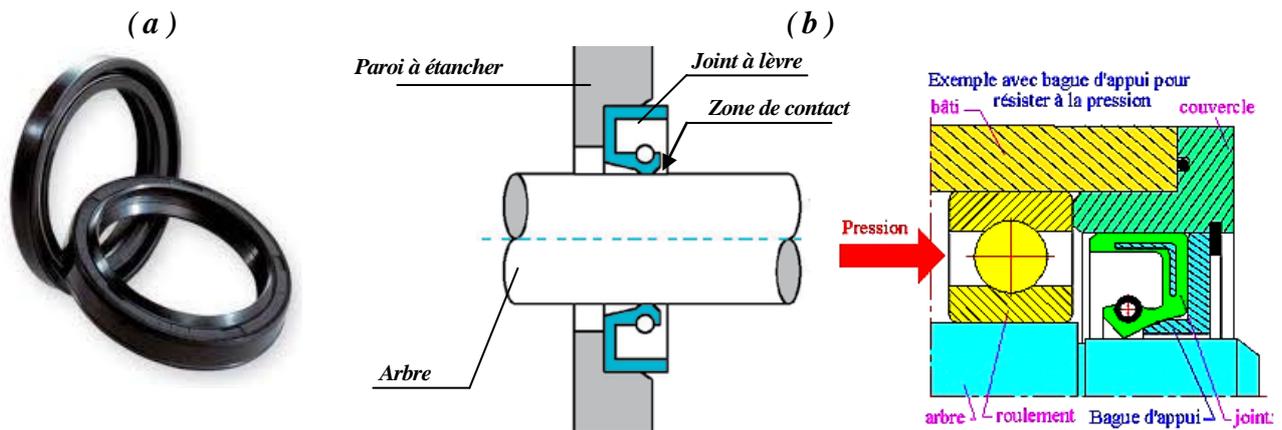


Fig 1.7: Étanchéité avec joint à lèvres: (a) aspect extérieur d'un joint à lèvres, (b) montage [7]

3°. Étanchéité avec garniture mécanique

Les garnitures mécaniques aussi appelées joint d'étanchéité à faces radiales sont des dispositifs mécaniques qui assurent la fonction étanchéité dynamique entre un arbre en rotation et une enceinte stationnaire fixe (Figure 1.8). Elles sont utilisées dans les environnements où les conditions d'exploitation sont extrêmement sévères qui ne permettent pas l'utilisation de joints classiques en élastomère. [1]. Les garnitures mécaniques sont employées dans un grand nombre de configurations, particulièrement dans des applications à hautes performances (vitesses élevées, forts gradients de pression, hautes températures). Ces composants peuvent être utilisés pour tous types de fluides suivant les matériaux en présence [1]. A titre indicatif, on donne l'ordre de grandeur des principaux paramètres opérationnel nécessitant l'utilisation d'une garniture mécanique (Tableau 1.4)

Tab 1.4: ordre de grandeur des principaux paramètres d'une garniture mécanique

Pressions de service	> 15MPa ;
Températures	de -200 °C à plus de 400 °C
Fréquence de rotation	> 10000 tr min
Diamètres	> 500mm ;
Durée de vie	≈ 10 000 heures

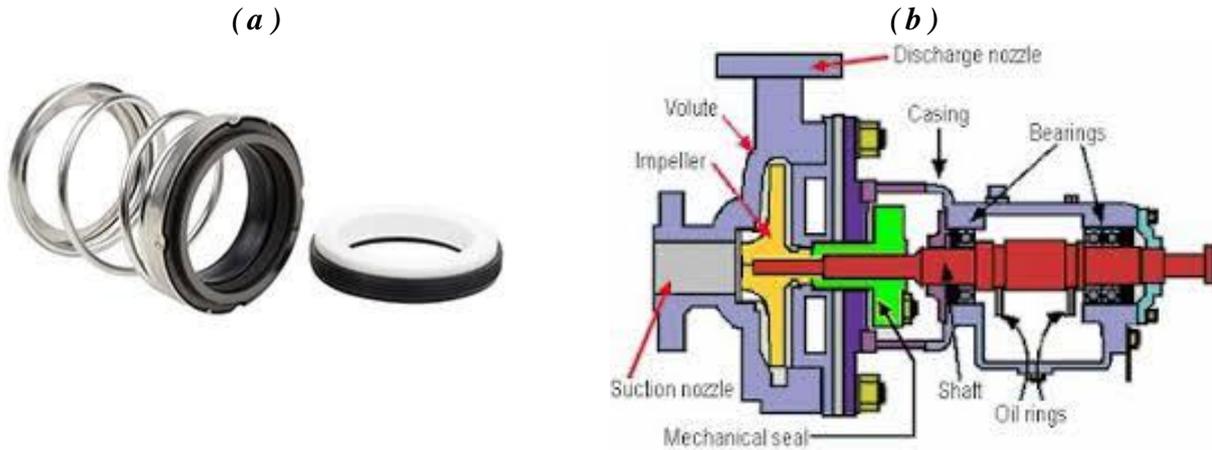


Fig 1.8: Étanchéité avec garniture mécanique: (a) aspect extérieur d'une garniture mécanique, (b) montage

### 1.4.1.2 Étanchéité sans contact

L'étanchéité sans contact établit un contact indirect entre la partie fixe à étancher (stator) et la partie tournante (Rotor). Ce type d'étanchéité est contrôlé par les jeux existants entre la partie fixe et la partie mobile. Comme il n'y a pas de contact solide/ solide avec le frottement, les fuites sont minimales mais inévitables, cependant le frottement et l'usure sont éliminés. Il existe cinq types d'étanchéités sans contact :

#### 1°. Douille d'étanchéité

- L'étanchéité à douille fixe est un manchon monté avec ajustement serré dans la partie fixe et avec ajustement glissant avec jeu par rapport à la partie tournante (Figure 1.9).
- La partie externe est une bague en alliage d'aluminium dans laquelle est emmanché un coussinet d'étanchéité mince.

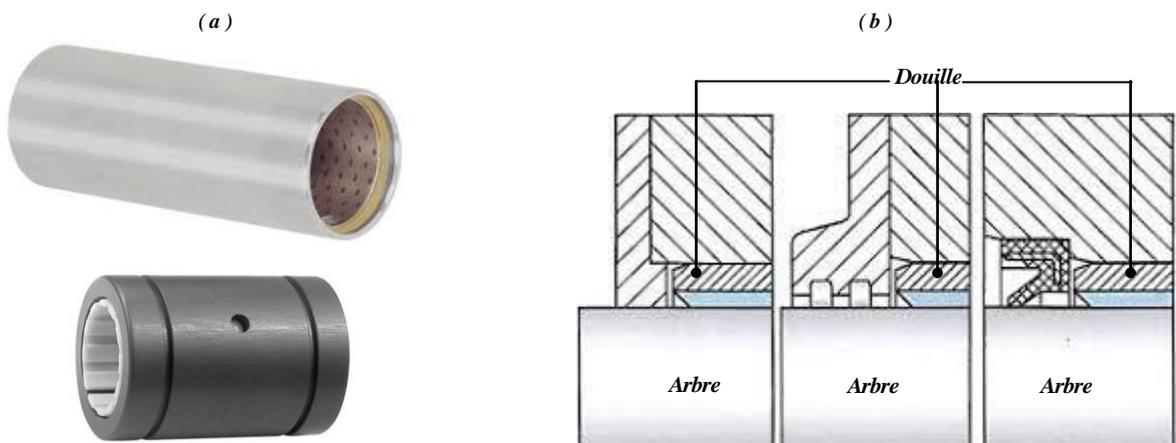


Fig 1.9: Douille d'étanchéité fixe: (a) Aspect extérieur, (b) montages

2°. Étanchéité en labyrinthe

Les étanchéités à labyrinthes sont utilisées principalement dans les applications à grandes vitesses là où de grandes vitesses de fuites peuvent être tolérées et où la simplicité d'une technologie est nécessaire. Dans ce cas, une étanchéité correctement conçue ne requière pas une lubrification ou une maintenance. Si une usure d'étanchéité se produit, la seule conséquence c'est une augmentation dans les pertes par fuites (Figure 1.10).

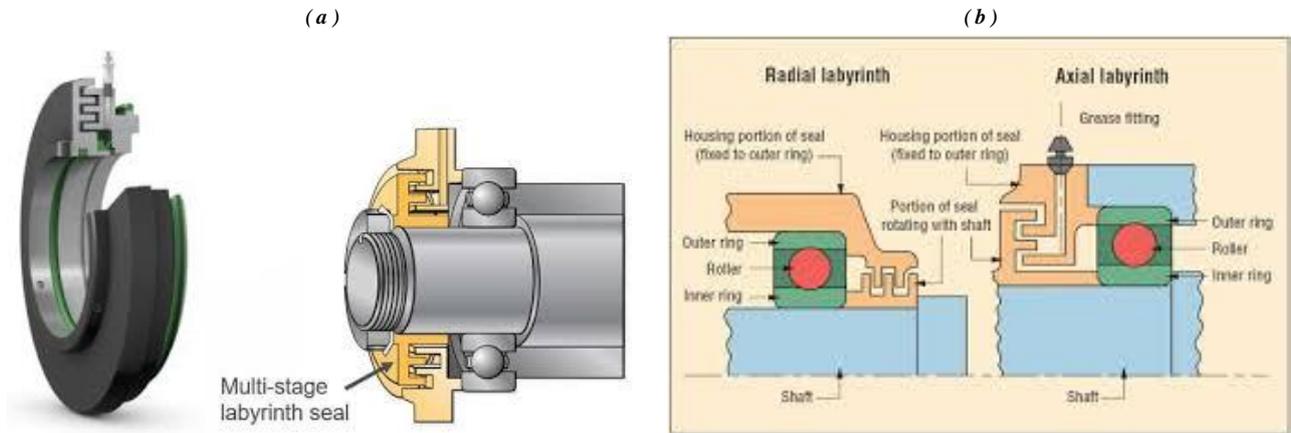


Fig 1.10: Étanchéité à labyrinthe (a) Aspect (b) Montage

3°. Visco-étanchéité [6]

Les visco-étanchéités sont des dispositifs qui possèdent des rainures ou des gorges hélicoïdales usinées soit sur le rotor (partie tournante) soit dans le stator (partie fixe). Le sens de l'hélice doit être contraire au sens de rotation du rotor afin de fournir une action positive qui empêche la fuite. L'effet de l'étanchéité est obtenu par la viscosité du fluide à étancher qui circule dans le jeu existant entre le rotor et le stator. Pour des vitesses de rotation faibles, une étanchéité secondaire tel que joint à lèvres doit être prévue (Figure 1.11).

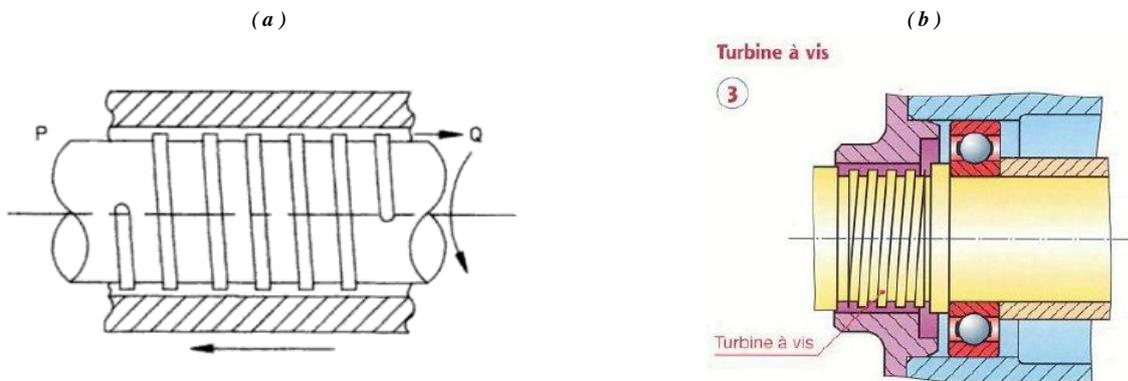


Fig 1.11: Visco-étanchéité (a) Principe, (b) Montage [2], [6]

## 4° Étanchéité à Ferrofluides [6]

Les joints magnétiques utilisent une suspension colloïdale de particules magnétiques, focalisée par des aimants permanents, pour créer un joint (**Figure 1.12**). En plus de fournir un joint presque parfait avec une usure ou un frottement négligeable, ils sont tolérants au voilage de l'arbre. Ils peuvent être utilisés à des vitesses allant jusqu'à 120 000 tr / min, à des températures allant jusqu'à 200 °C et à des pressions de 7 psi / étage. Les joints d'étanchéité sont principalement utilisés avec des gaz et excluent l'humidité, les brouillards et les solides fins.

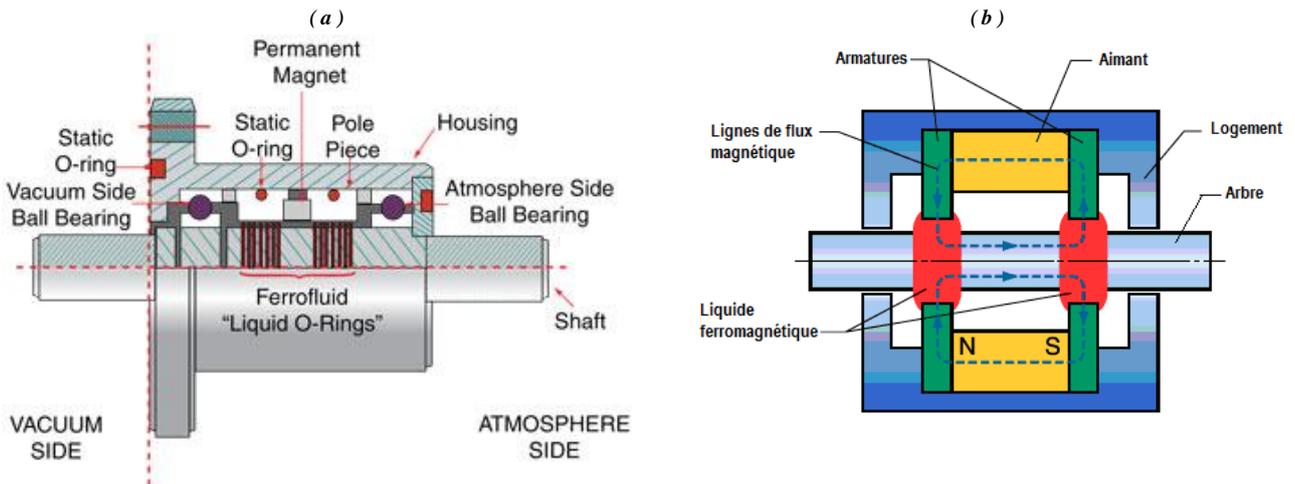


Fig 1.12: Étanchéité ferromagnétique (a) principe, (b) Montage [8]

1.4.2 Sélectivité d'une étanchéité mécanique dynamique

Certaines variables d'exploitation peuvent être contrôlées par le concepteur de l'équipement en concertation avec l'utilisateur final. Dans ce cas, il est essentiel pour le concepteur de l'étanchéité, le concepteur de l'équipement et l'utilisateur final d'œuvrer ensemble pour l'obtention de la meilleure solution à mettre en oeuvre. La sélection définitive doit être faite en collaboration avec les utilisateurs/constructeurs suivant un cahier des charges établi afin de garantir les meilleurs aspects sécurité et fiabilité de l'étanchéité. La **figure 1.13** présente un arbre de décision afin d'aider et de faciliter le choix judicieux d'une solution d'étanchéité à adopter [5].

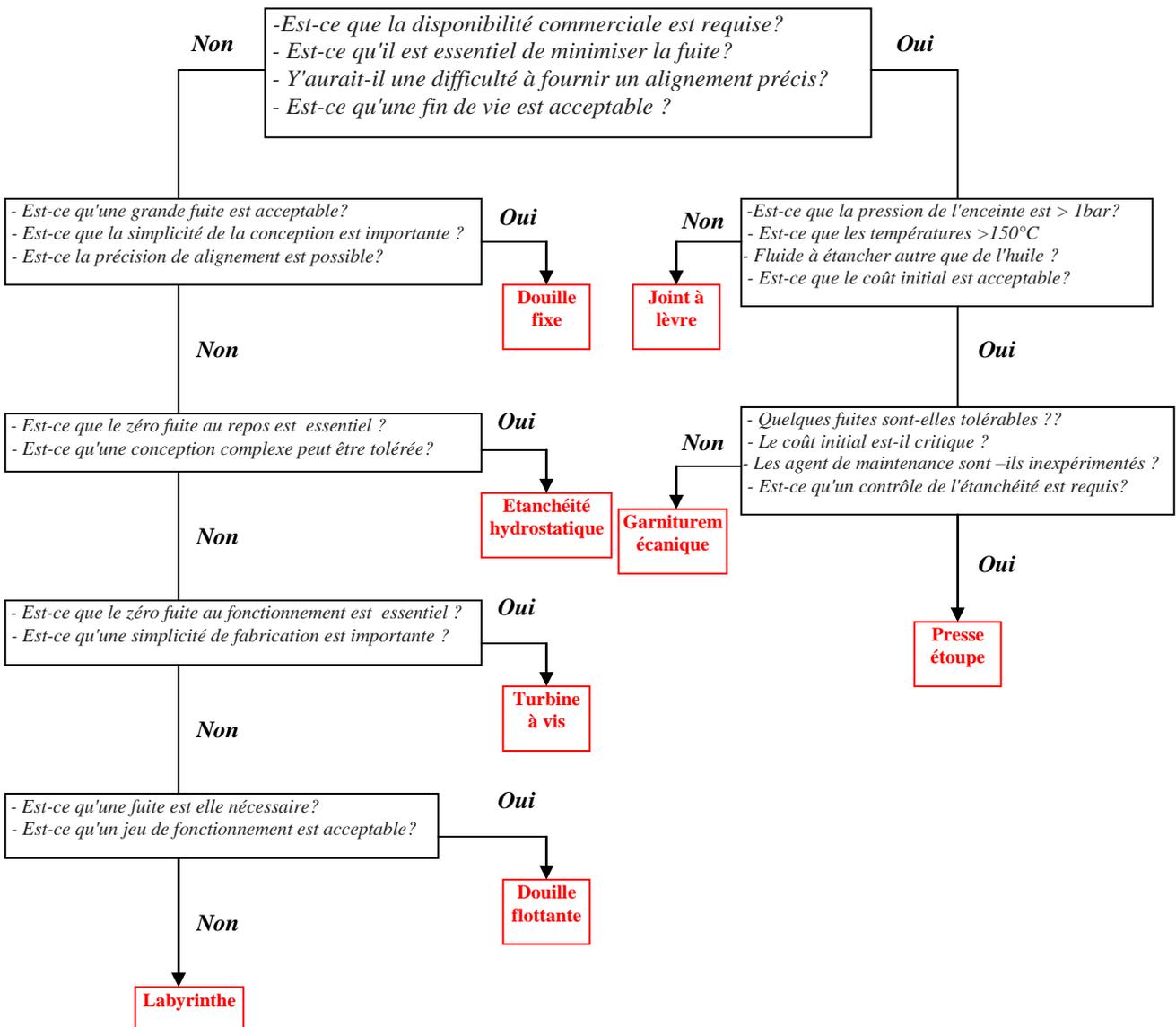


Fig 1.13: Arbre de décision pour la sélection d'un type d'étanchéité dynamique en rotation [5]

---

# *Chapitre 02*

---

*JOINTS D'ÉTANCHÉITÉ*

*ANNULAIRES*

---

## 2.1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

L'origine de l'analyse des joints d'étanchéité remonte à l'étude des machines tournantes et, surtout, au développement de la théorie de la lubrification initialement appliquée aux paliers. Car, à partir de l'équation de cette théorie, il y avait une expansion des connaissances et une application aux joints mécaniques.

- **1880-1885: TOWER (1883) et PETROV (1885)** ont été les pionniers de l'étude de la lubrification hydrodynamique. Bien qu'ils ne se connaissent pas, les résultats expérimentaux obtenus concernant le support d'un rotor par un film d'huile sont similaires. Ils concluent que le mouvement relatif entre deux surfaces séparées par un film de fluide génère un champ de pression, lequel génère une force hydrodynamique suffisante pour supporter un axe de rotation. **(NORTON, 2006)**
- **1886: REYNOLDS** simplifia les équations de **NAVIER-STOKES** en se basant sur le nombre de Reynolds et des arguments physiques liés à la faible valeur de la relation entre le jeu radial entre le roulement et l'arbre et le rayon de l'axe **(CHILDS, 1993)**. Cette simplification a permis de déterminer le profil des pressions de fonctionnement entre deux surfaces en mouvement relatif, grâce à une équation différentielle décrivant adéquatement ce profil. De cette manière, l'équation de Reynolds constitue la base de la théorie de la lubrification moderne. Cette équation est toutefois idéale pour les écoulements laminaires et les fluides newtoniens, incompressibles et dont la viscosité ne change pas en raison de l'effet thermique, et qui peuvent convenir aux paramètres d'écoulement turbulent. Cependant, cette manipulation peut générer des erreurs considérables. Les principaux facteurs qui déterminent l'inapplicabilité de la théorie de Reynolds aux joints d'étanchéité sont la vitesse axiale élevée à travers ceux-ci, le jeu radial relativement important entre l'arbre et le joint et la perte de charge considérable à travers le joint. De tels facteurs violent les conditions d'écoulement laminaire. De plus, si le fluide de travail est un gaz, les effets de compressibilité peuvent également être importants. **(VANCE, 1988)**.
- **1958: TAO** a été l'un des premiers à aborder le problème de la lubrification turbulente par le biais de la formulation à écoulement élargi, qui présente l'avantage de ne pas nécessiter une représentation physique du mécanisme de transport turbulent.

- **1958: LOMAKIN** a enquêté sur les causes et les conséquences des forces de restitution sur les garnitures mécaniques. En raison de la différence de pression sur la surface avant, il se forme un écoulement axial qui peut être symétrique si l'axe est centré ou présenter une distribution asymétrique de la vitesse et de la pression si le joint d'étanchéité est excentrique par rapport à l'axe. La force résultante agissant sur l'arbre a une direction égale, mais a une direction opposée au déplacement de l'axe. En conséquence, **LOMAKIN** a obtenu une rigidité directe due à la perte de charge dans le fluide entre l'entrée et la sortie du joint d'étanchéité.
- **1969: BLACK** a été l'un des premiers à considérer que si le déplacement de l'axe ne se produit pas autour du point d'équilibre, les forces de restitution peuvent présenter des termes d'inertie et d'amortissement, en plus des termes de rigidité. Elle a également mis au point un modèle linéaire, par l'approximation d'un facteur de frottement, des forces du fluide dans les garnitures mécaniques plates à écoulement principalement axial.  
Cependant, dans ce travail, **BLACK** considérait que le joint était court et que, par conséquent, le flux de pression induit dans la direction circonférentielle était négligeable par rapport au flux axial. **BLACK** est l'un des principaux responsables du développement du modèle actuel utilisé dans les joints d'étanchéité.
- **1970-1971: BLACK et JENSEN**, ont procédé à une analyse par scellement, qui s'applique aux mouvements de petit axe par rapport à la position centrée (zéro d'excentricité). Ils ont supposé une distribution moyenne de la vitesse circonférentielle du fluide égale à la moitié de la vitesse périphérique de l'axe, ont intégré l'équation de conservation de la masse pour définir le champ de vitesse axiale perturbé, puis ont intégré l'équation du moment axial pour obtenir le champ de pression. L'intégration du champ de pression entraîne les forces de réaction. Ils ont également examiné les effets du débit de pression circonférentielle induit sur les joints longs.
- **1973: HIRS** s'est basé sur la relation empirique entre la contrainte de cisaillement dans la paroi de la surface soumise à un mouvement relatif et la moyenne de la vitesse d'écoulement par rapport à celle-ci, a publié une théorie de l'écoulement turbulent d'un écoulement dilaté.

- **1977: FLEMING** a montré que le terme de rigidité directe pour les joints plats du type conique ou à épaulement, à intervalle convergent, est 2 à 14 fois plus grand que pour les joints cylindriques plats, l'évidement du joint droit étant égal à la valeur minimale de l'écart des joints convergents.
- **1978-1980:** Selon **BLACK** (1978) et **CHILDS, CHILDS et DRESDEN** (1980) considéraient le développement du champ de vitesse circonférentiel en fonction de la position axiale du joint. Leurs résultats ont montré que la vitesse circonférentielle s'approche de manière asymptotique de la valeur de vitesse supposée précédemment égale à 0,5, alors que le fluide traverse axialement le joint. En outre, il a été découvert que, même en fonction de la dépendance axiale de la vitesse circonférentielle, les termes de rigidité transversale peuvent être réduits. Également dans ce travail, il a été vérifié que les joints d'étanchéité à flux annulaires développent des termes significatifs de rigidité hydrostatique, en particulier le terme direct de rigidité, calculé pour l'axe central, c'est-à-dire avec une excentricité nulle. Cela est dû au débit axial élevé et au gradient de pression associé, qui dépendent eux-mêmes de l'écart entre le joint et l'arbre.
- **1982: CHILDS** a proposé une théorie, basée sur les équations de **HIRS**, qui considère les effets de la turbulence d'entrée sur le développement du flux circonférentiel du joint mécanique.
- **1985: CHILDS et DRESSMAN**, ont analysé le joint conique en utilisant, pour cela, la théorie de la lubrification à flux élargi de **HIRS**.  
**NELSON (1985)** a également utilisé la théorie de **HIRS** sur la lubrification pour déterminer les coefficients dynamiques d'un joint mécanique conique, mais son analyse diffère de celle présentée par Childs et Dressman (1985), car elle ne présente pas de simplification. et considère également que la vitesse axiale est perturbée.
- **1988: VANCE** dans son livre Rotordynamics of Turbomachinery, réserve un chapitre pour l'étude des roulements et des joints. Dans ce chapitre, Vance les caractérise en déterminant les différents types de joints et leurs applications principales. En outre, il décrit l'effet des joints sur la dynamique du rotor. Plus récemment, Vance (2010) dans son livre - Machinery Vibration and Rotordynamics - réserve à nouveau un chapitre particulier pour traiter de cette composante et de ses effets sur la dynamique des rotors - Joints de fluide et leurs effets sur Rotordynamics.

- **1993: CHILDS** , dans le chapitre : Modèles rotodynamiques pour joints annulaires liquides, dans son livre Turbomachinery Rotordynamics - Phénomènes, modélisation et analyse, Childs a déterminé les coefficients de rigidité et d'amortissement équivalents, ainsi que la matrice d'inertie des fluides, dans des joints cylindriques à travers un modèle analytique avec solution par la méthode des perturbations. Pour ce travail, les équations régissant les fluides ont été utilisées, mais comme le rapport  $Cr/R$  (jeu radial [m] par rayon de l'axe [m]) est très petit, les courbures de la tige et du joint sont négligées dans l'analyse de l'élément différentiel de fluide de la garniture mécanique. À partir de ces formulations, la perte de charge a été obtenue le long du joint, ce qui a permis de déterminer les forces de restitution et les paramètres du comportement dynamique de ce composant (CHILDS, 1993).  
Cette méthode est la plus utilisée pour la modélisation des joints d'étanchéité à écoulement cylindrique. En outre, Childs a constaté que les termes d'inertie ne sont pris en compte que dans le cas de joints d'étanchéité dans lesquels le fluide est liquide. Par conséquent, ces termes peuvent être négligés pour les fluides gazeux.
- **1997: MARQUETTE, CHILDS et SAN ANDRES** ont présenté les données des coefficients dynamiques pour les joints plats annulaires. Pour un scellement en position centrée, les résultats expérimentaux et théoriques montrent un excellent accord, même pour les termes d'inertie directe, qui ne présentaient pas une bonne convergence dans les études précédentes. Cependant, les coefficients dynamiques sont plus sensibles aux changements de l'excentricité des garnitures mécaniques que prévu. Ainsi, ces résultats suggèrent que, dans certains cas, les joints de pompe annulaires doivent être traités comme des relèvements hydrodynamiques, avec des coefficients valables pour une petite variation de la position d'équilibre et non indépendants de l'excentricité, comme ils sont habituellement traités.
- **2000: KWANKA** a rapporté que la force de déstabilisation présente sur les joints est causée par les termes de rigidité croisée, qui sont contrebalancés par les termes d'amortissement direct. Il est donc nécessaire de connaître et de prendre en compte l'amortissement dans les joints d'étanchéité. De plus, dans ce même travail, il a été vérifié que les coefficients conservateurs, caractérisés par les termes directs de rigidité et de croisement de l'amortissement, influent sur les fréquences vibratoires du système. Les termes non conservateurs, représentés par les termes rigidité croisée et amortissement direct, modifient la limite de stabilité du système.

- **2002: HA, LEE et KIM** , dans le contexte des joints annulaires et à partir de l'analyse des joints annulaires excentriques, ont réalisé une étude sur les joints annulaires flottants, afin de déterminer la position flottante de l'anneau, les coefficients dynamique du rotor et des paramètres de conception, avec la solution basée sur la méthode de transformée de Nelson et Nguyen.
- **2006: DERELI et ESER** ont déterminé les coefficients dynamiques des joints à labyrinthe décalés, en tenant compte à la fois de la pression du premier ordre et des forces de cisaillement dans leur calcul. Ces résultats ont été comparés aux valeurs obtenues précédemment, qui ne prenaient en compte que la pression pour le calcul des coefficients.
- **2008: SHEN, JIA, ZHAO et JING** ont simulé un système composé d'un rotor, d'un roulement, d'une fondation et d'un joint à labyrinthe. Les équations qui régissent ont été décrites par la méthode des éléments finis. Après l'analyse théorique, des tests expérimentaux ont été réalisés. Les résultats théoriques sont en accord avec ceux obtenus expérimentalement.
- **2011: BROL**, dans son mémoire - Modélisation et analyse des joints d'étanchéité sur des machines rotatives - décrit les différents types de joints mécaniques, tels que les plans (cylindriques, coniques et étagés), le type à labyrinthe, le type à douille, les anneaux flottants entre d'autres La méthode d'analyse utilisée dans ce travail était basée sur le livre de Childs, 1993. Dans cette thèse, Brol a vérifié ses résultats avec ceux de la littérature (BROL, 2011).

Dans le cadre de ce travail de thèse, les joints d'étanchéité mécaniques de type cylindriques, coniques et étagés seront analysées, déterminant à cet effet les coefficients dynamiques d'amortissement, de rigidité et d'inertie. En outre, l'influence des paramètres physiques et opérationnels du système par rapport à ces éléments sera vérifiée. Selon Childs (1993), il est possible d'étendre la solution de joints cylindriques aux joints coniques, auquel cas le jeu radial varie en fonction de la coordonnée axiale du joint. De plus, le joint étagé peut être modélisé comme une association de joints cylindriques, avec des jeux radiaux différents, représentant chaque pas par un coefficient de perte de charge, du fait de la chute de pression abrupte provoquée par les pertes à l'entrée. Par conséquent, la modélisation et l'analyse des joints d'étanchéité sont insérées de manière intéressante et prometteuse dans le contexte du thème de recherche global sur les machines tournantes, car il sera possible d'insérer les effets de cette composante dans le modèle mathématique complet du système rotatif, dans le package de calcul, jusque-là développé pour les arbres, les rotors, les roulements et les structures.

## 2.2 MISE EN SITUATION

### 2.2.1 Introduction

A chaque fois qu'un arbre en rotation passe à travers deux régions contenant différents fluides qu'on doit garder séparés, on a besoin d'une étanchéité pour arbre tournant. En général les fluides peuvent être de natures différentes et se trouver à différentes pressions, à différentes températures. La **figure 2.1a** montre le concept de l'étanchéité d'un arbre tournant traversant une paroi fixe séparant deux fluides occupant deux régions différentes qu'il faudra confiner par l'emploi d'une étanchéité au niveau du passage entre l'arbre tournant et la paroi. La solution, revient à remplir et à garnir l'espace de passage autour de l'arbre, de telle sorte que les fuites axiale et radiale du fluide à étancher entre les deux régions soient aussi minimales que possible et cela sous n'importe quelles conditions de fonctionnement. Les solutions technologiques présentées dans le chapitre 1 sont retenues, selon que les surfaces des pièces à étancher sont en contact permanent ou non ; leur choix dépend de l'application (encombrement, géométrie des pièces, coût), des fluides en présence (pression, température) et des performances recherchées (débit de fuite, durée de vie, fiabilité).

Dans le présent chapitre, on s'intéresse essentiellement à la solution "douille d'étanchéité". Cette dernière crée entre la paroi et l'arbre un joint d'étanchéité annulaire dans lequel l'écoulement du fluide à étancher est causé par la différence de pression entre ses deux régions. L'écoulement s'effectue dans la direction axiale autour du tourillon de l'arbre. Les fuites sont diminuées suite aux pertes de charge occasionnées par la résistance à l'écoulement qui fait fortement chuter le débit. Cette résistance dépend essentiellement de la longueur  $L$  de la portée et du jeu radial  $H$  (**Figure 2.1b**).

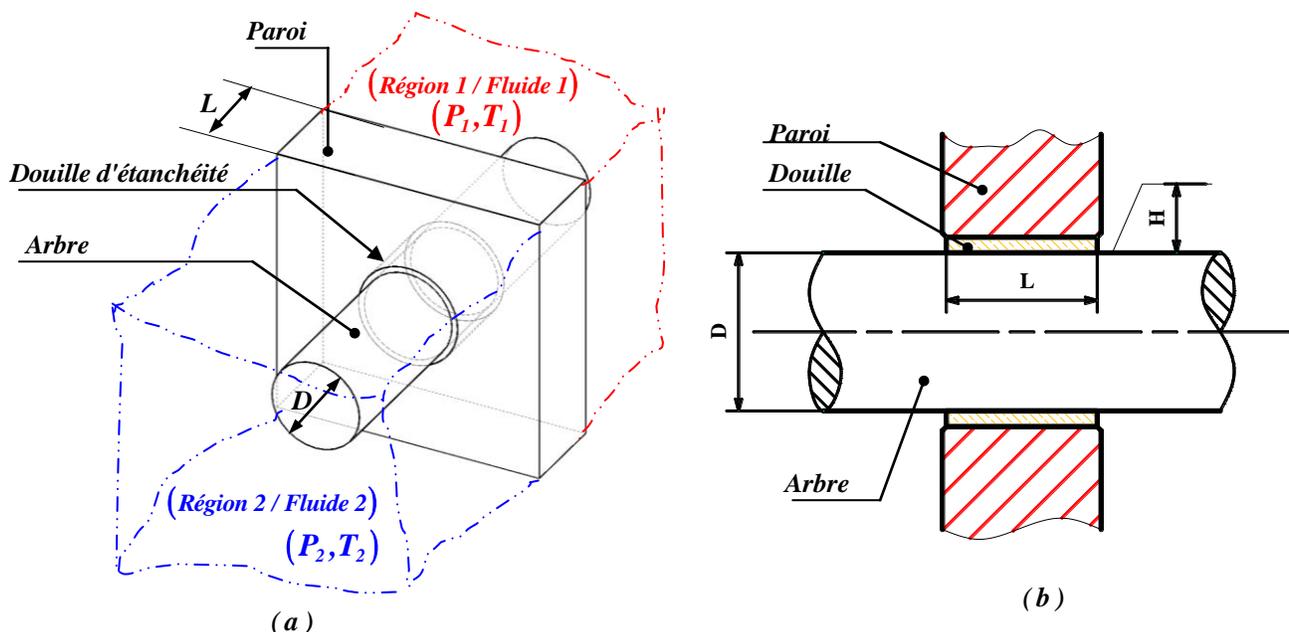


Fig 2.1: Concept d'étanchéité d'un arbre tournant à travers une paroi

### 2.2.2 Système d'axes

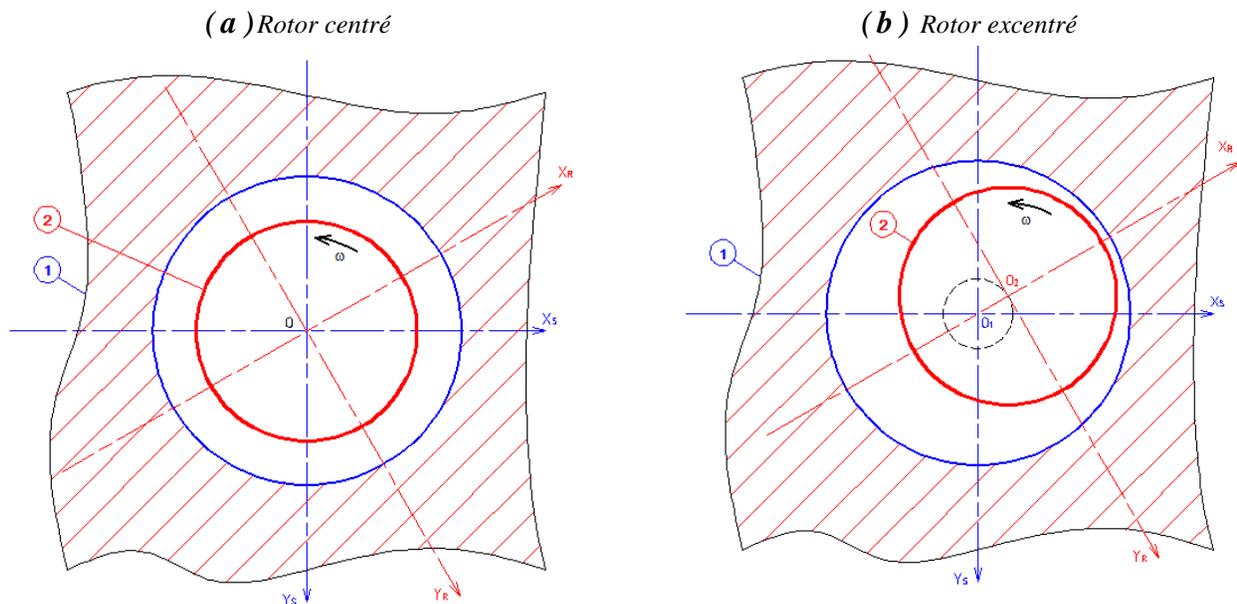
La mise en situation précédente nous permet de considérer que l'étanchéité est constitué principalement d'un coussinet ou stator (élément 1) et d'un tourillon ou rotor (élément 2) dont la représentation est donnée par la **figure 2.2**. En vue du développement des relations géométriques et des équations gouvernantes, l'ensemble Stator-Rotor sera associé à un système d'axes cartésiens constitué de deux référentiels :

- Un référentiel fixe  $\mathfrak{R}_1(O_1, X_S, Y_S, Z_S)$  lié au stator repère **1**.
- Un référentiel mobile  $\mathfrak{R}_2(O_2, X_R, Y_R, Z_R)$  lié au rotor repère **2**.

La stratégie de raisonnement, sera fondée sur deux principaux cas de figures: rotor centré et rotor excentré

Pour le cas d'un rotor centré, l'origine  $O_2$  sera confondue avec l'origine  $O_1$  du stator, tandis que le référentiel  $\mathfrak{R}_2(O_2, X_R, Y_R, Z_R)$  sera mobile avec un mouvement de rotation d'axe  $(O_2, Z_R)$  lui-même confondue avec l'axe fixe (**figure 2.2a**)  $(O_1, Z_S)$ .

Pour le cas d'un rotor excentré, l'origine  $O_2$  occupera une position quelconque à l'intérieur du logement du stator, compatible avec les conditions de non interférence entre le rotor et le stator. Donc l'origine  $O_2$  sera animée d'un mouvement de rotation d'axe  $O_1Z_S$ , avec un rayon de giration  $O_1O_2$  qui caractérise l'excentricité du rotor par rapport au stator(**figure 2.2b**).



**Fig 2.2:** Système d'axes pour joint d'étanchéité

2.2.3 Paramétrage

Une fois le système d'axes défini, l'étude cinématique et dynamique de l'ensemble Stator-rotor, nécessite deux types de paramètres: linéaires et angulaires. Les paramètres linéaires sont pris dans la catégorie longueurs, distances, rayons et diamètres et les paramètre angulaires pris dans la catégorie angle aigues, obtus,etc.... L'ensemble des paramètres, peut être considéré selon deux sections: transversale et longitudinale.

2.2.3.1. Paramétrage en section transversale

Le paramétrage en section transversale, consiste à prescrire sur la section transversale du joint d'étanchéité les différents paramètres nécessaires à la description du système dans le plan  $(X,O,Y)$ .

La figure 2.3 expose le paramétrage du système dans les cas du rotor centré (figure 2.3a) et excentré (figure 2.3b). Le paramétrage au niveau de la section transversale, servira essentiellement à exprimer la relation entre la hauteur du jeu  $H$  et l'angle de rotation  $\theta$ .

- Dans le cas du rotor centré, l'expression du jeu  $H$  en section transversale est donné par:

$$H_0 = R_1 - R_2 \tag{2.1}$$

- Dans le cas du rotor excentré, l'expression du jeu  $H$  (voir annexe 1) en section transversale est donné par:

$$H(\theta) = H_0 (1 + \varepsilon \cdot \cos \theta) \tag{2.2}$$

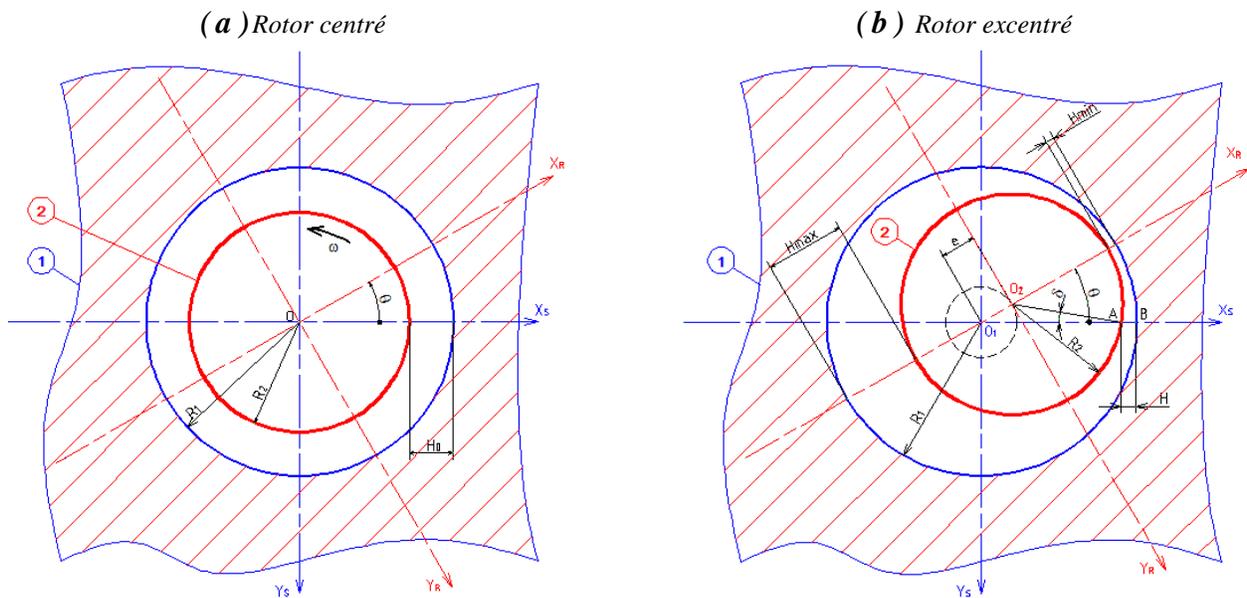


Fig 2.3: Paramétrage transversal pour joint d'étanchéité

### 2.2.3.2. Paramétrage en section longitudinale

Le paramétrage en section longitudinale, consiste à prescrire sur la section longitudinale du joint d'étanchéité les différents paramètres nécessaires à la description du système dans le plan  $(Y, O, Z)$ . Le paramétrage au niveau de la section longitudinale, servira essentiellement à exprimer la relation entre la hauteur du jeu  $H$  et la longueur  $Z$ . Trois cas de figure se présentent:

#### 1°. Cas du joint annulaire cylindrique

Suivant la direction axiale  $Z$ , c'est-à-dire le long du joint, le jeu radial  $H$  entre le joint et l'arbre reste constant, c'est-à-dire reste égal au jeu d'entrée  $C_0$  et de sortie  $C_1$  (Figure 2.4):

$$H = C_0 = C_1 \quad (2.3)$$

Avec

$C_0$  : Jeu radial à l'entrée du joint [m].

$C_1$  : Jeu radial à la sortie du joint [m]

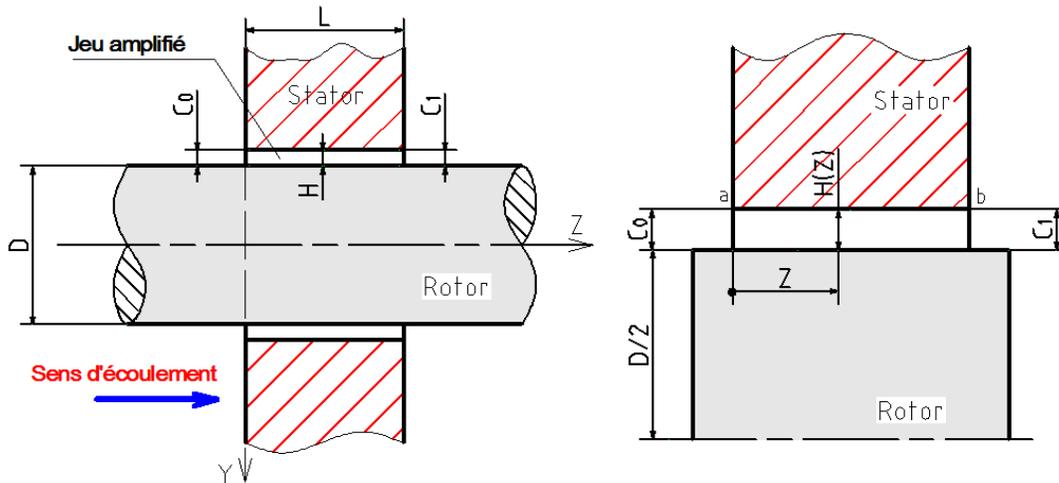


Fig 2.4: Géométrie d'un joint cylindrique

#### 2°. Cas du joint annulaire conique

Suivant la direction axiale  $Z$ , c'est-à-dire le long du joint, la fonction du jeu radial  $H(Z)$  varie selon la configuration d'un canal convergent ou divergent (figure 2.5).

En considérant que  $\alpha \ll 1$ , on a:

$$\tan \alpha = \alpha = \frac{C_0 - C_1}{L} \quad (2.4)$$

D'où:

$$C_0 - C_1 = \alpha L \tag{2.5}$$

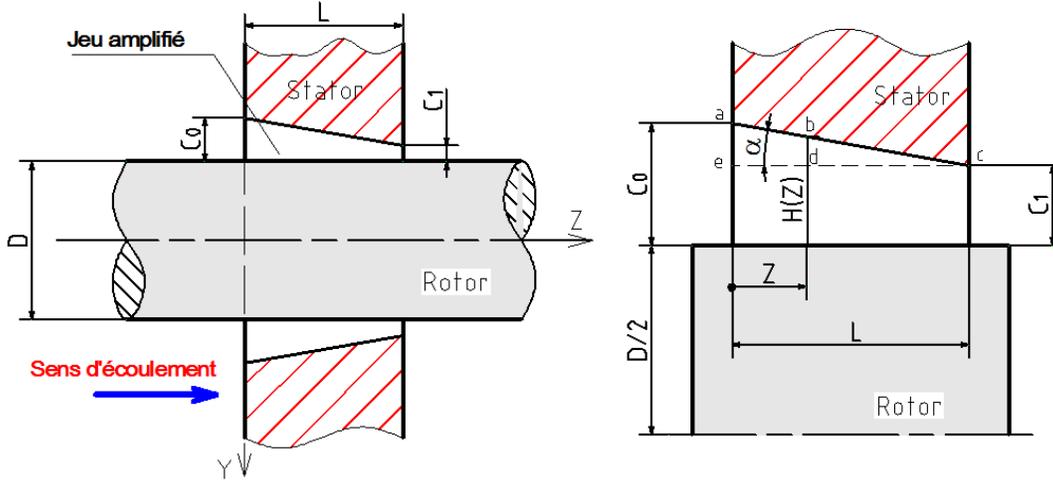


Fig 2.5: Géométrie d'un joint conique [14]

A partir de la géométrie du joint conique convergent, on définit les éléments suivants:

1. le jeu radial moyen  $\bar{C}_r$  :

$$\bar{C}_r = \frac{C_0 + C_1}{2} \tag{2.6}$$

2. La fonction  $H(Z)$  du jeu radial:

$$\tan \alpha = \frac{C_0 - C_1}{L} = \frac{H - C_1}{L - Z} \tag{2.7}$$

D'où

$$H(Z) = C_0 - (C_0 - C_1) \frac{Z}{L} \tag{2.8}$$

En introduisant les relations (2.2) et (2.3), la relation (2.5) devient:

$$H(Z) = 2\bar{C}_r - C_1 - \alpha Z \tag{2.9}$$

Ou encore:

$$H(Z) = \bar{C}_r + \frac{\alpha L}{2} - \alpha Z \tag{2.10}$$

En mettant  $\bar{C}_r$  en facteur, on a:

$$H(Z) = \bar{C}_r \left[ 1 + \frac{\alpha L}{2\bar{C}_r} - \frac{\alpha Z}{\bar{C}_r} \right] \tag{2.11}$$

Si on pose:

$$q = \frac{\alpha L}{2 \bar{C}r} \tag{2.12}$$

Et

$$z = \frac{Z}{L} \tag{2.13}$$

En remplaçant (2.9) et (2.10) dans (2.8), on aura:

$$H(Z) = \bar{C}r (1 + q - 2qz) \tag{2.14}$$

Si on adopte :

$$h = 1 + q - 2qz \tag{2.15}$$

La relation (2.11) se simplifie à:

$$H(Z) = \bar{C}r . h \tag{2.16}$$

Avec:

- $q$  : Facteur géométrique de forme
- $z$  : Variable adimensionnelle de longueur.
- $h$  : Variable adimensionnelle de dégagement.

### 3°. Cas du joint annulaire étagé

Pour le joint étagé (Figure 2.6), il peut être vu comme une jonction de plusieurs joints cylindriques avec différents jeux radiaux  $H_1, H_2, \dots$  etc. Le point de jonction entre deux joints successifs est caractérisé par une chute soudaine de pression à ce point.

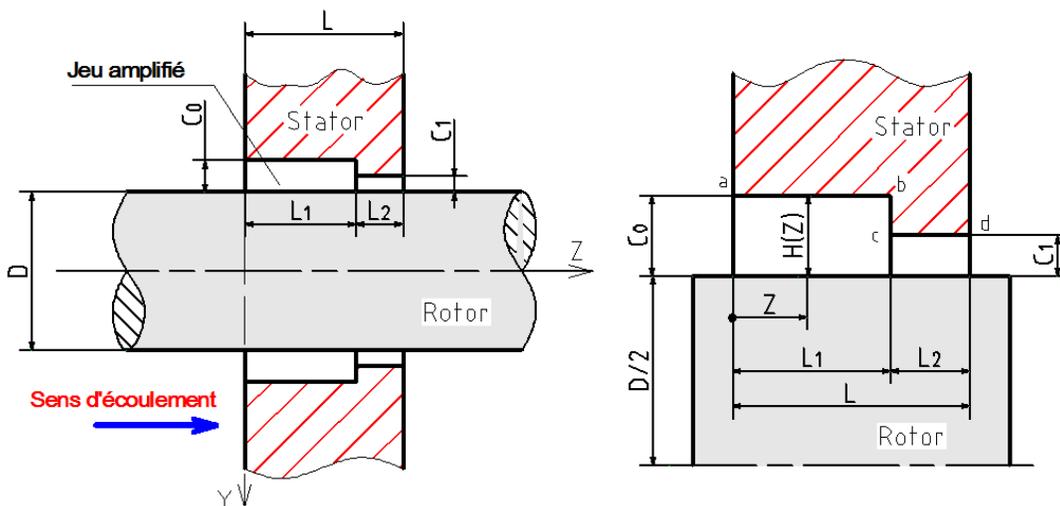


Fig 2.6: Géométrie d'un joint étagé

### 2.2.4 Echelles d'étude

Une fois la situation du problème précisée concernant la solution de la douille d'étanchéité, la modélisation et l'étude de cette dernière sera soumise à un certain nombre de contraintes essentiellement à :

- *L'interdépendance avec le comportement dynamique du système rotor (Arbre+disque+palier)*
- *La complexité des phénomènes hydrodynamique du film mince du fluide interposé entre l'arbre et la douille.*
- *Les phénomènes physiques mis en jeu dans les interstices,*

Pour faire face à cette complexité, l'étude de l'étanchéité est souvent abordée à l'aide d'une approche multi-échelles. Ceci permet de séparer les difficultés en limitant le nombre de phénomènes à prendre en compte et la taille du modèle à une échelle donnée. Pour modéliser une étanchéité afin de prédire ces performances, il est nécessaire dans un premier temps de définir l'échelle à laquelle l'étude est envisagée (**figure 2.7**). Dans notre cas, le fluide étant considéré comme milieu continu, l'analyse sera menée entre le niveau macroscopique et mésoscopique.

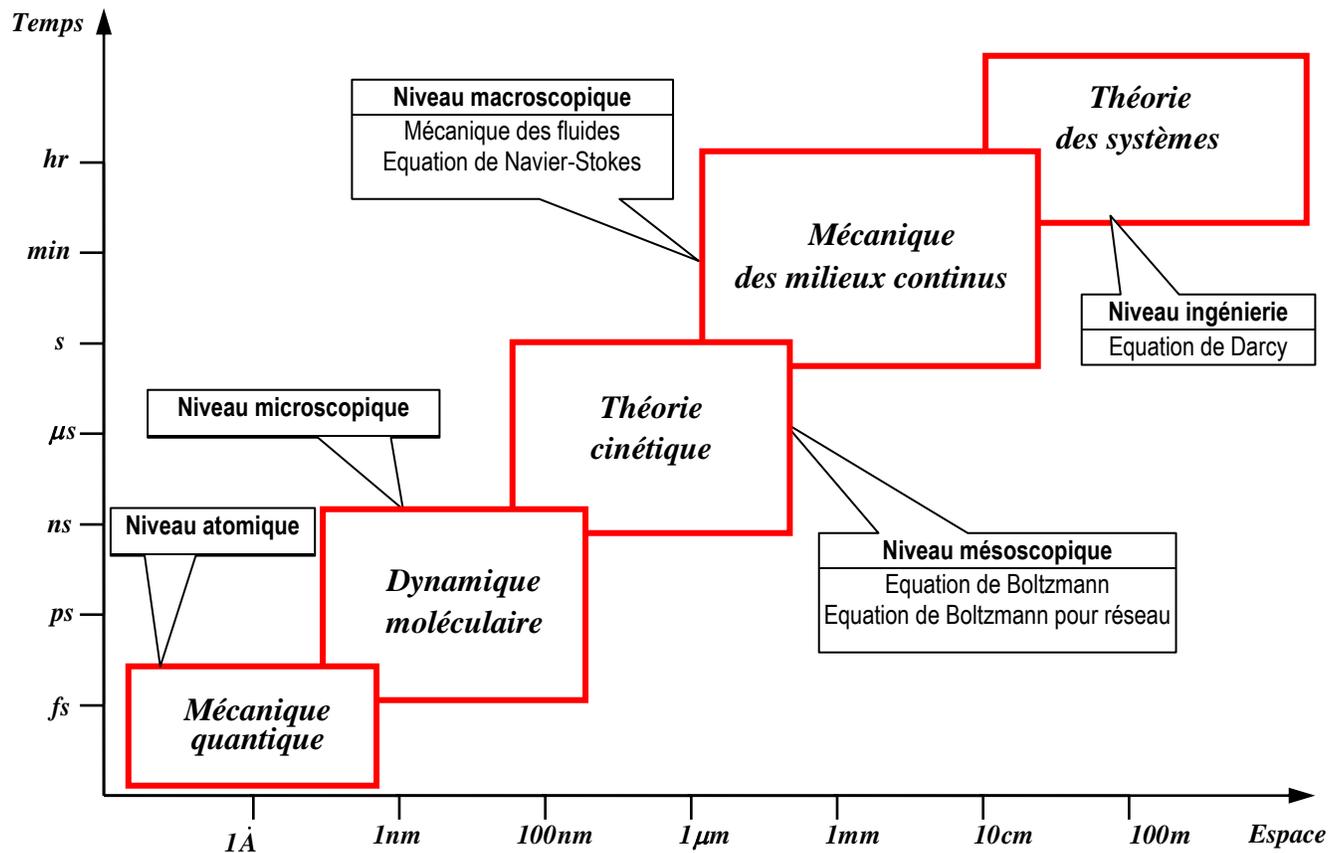


Fig 2.7: Différentes échelles spatiale et temporelle pour l'étude d'un phénomène

### 1°. Echelle microscopique

A l'échelle microscopique, le fluide est essentiellement discontinu, il est composé de molécules en continuelle agitation thermique (**Figure 2.8a**). Le niveau microscopique concerne la description de la position et la vitesse de chaque molécule constitutive ainsi que le potentiel d'interaction entre elles.

### 2° Echelle mésoscopique

Par ce vocable on entend la description de phénomènes descriptibles à une échelle grande devant la précédente mais petite devant l'échelle du continu. L'échelle mésoscopique est une échelle intermédiaire entre l'échelle macroscopique, où le fluide est un milieu continu et l'échelle microscopique où le fluide est à l'état moléculaire (**Figure 2.8b**). A cette échelle, le fluide est découpé en cellules élémentaires (ou infinitésimales) appelées éléments de fluide, ou particule de fluide, (contenant un grand nombre de molécules). Un très grand nombre de molécules ( $10^{10}$ ) doivent constituer cette particule, afin d'avoir accès à des moyennes locales ayant un caractère macroscopique.

L'intérêt d'une description continue du fluide réside dans le fait que des grandeurs macroscopiques peuvent être associées à ces particules de fluide, qui ont une masse élémentaire constante lors de l'évolution du fluide. On peut effectuer dans cette particule un bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie en utilisant les flux correspondants sur les limites du domaine. Cette approche conduit à l'écriture des équations de conservation correspondantes et, par passage à la limite, aux équations descriptives du phénomène. Cette méthode est aussi la base de la description numérique, le volume élémentaire étant alors la maille élémentaire du calcul.

### 3°. Echelle macroscopique

A l'échelle macroscopique, le fluide est un milieu continu, la dimension  $D$  caractéristique d'observation de cette échelle est imposée par le problème étudié (**Figure 2.8c**). Le niveau macroscopique résulte donc d'une simplification rigoureuse de tous les détails du problème, lesquels sont tous de mêmes présents au travers des coefficients qui interviennent dans les équations descriptives, des conditions aux limites et de l'équation d'état du milieu.

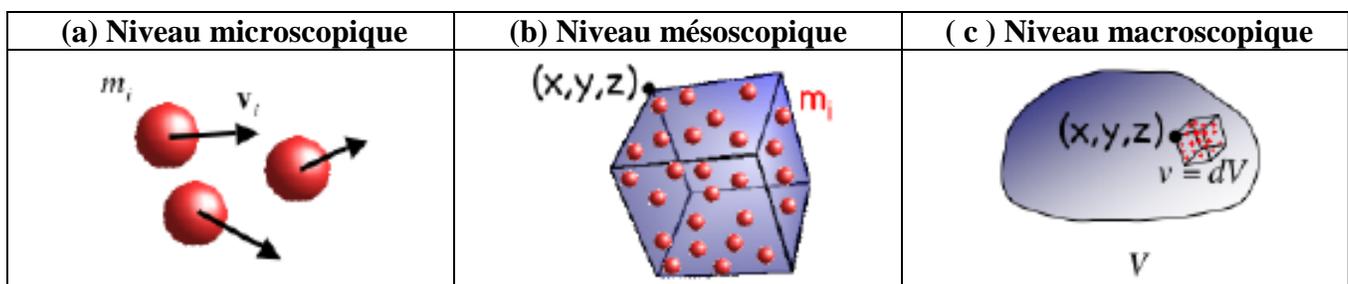


Fig 2.8: Niveaux d'observation d'un phénomène [25]

## 2.3. EQUATIONS GOUVERNANTES

### 2.3.1. Grandeurs physiques macroscopiques

#### 2.3.1.1 Grandeurs cinétiques

##### 1°. Masse

Au niveau macroscopique, la masse locale  $dM$  d'un fluide sera égale à somme  $\sum m_i$  des masses de toutes les molécules contenues dans un volume infinitésimal élémentaire de volume  $dV = dx dy dz$ , centré sur un point matériel de coordonnées  $(x, y, z)$ .

$$dM = \sum m_i \quad (2.17)$$

Sachant que la masse volumique locale instantanée  $\rho(x, y, z, t)$  en un point est donnée par:

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{\sum m_i}{dV} = \frac{dM(t)}{dV} \quad (2.18)$$

Pour obtenir la masse  $M(t)$  du volume macroscopique  $V$ , il suffit d'intégrer la relation (2.18) sur tout ce volume.

$$M(t) = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dV \quad (2.19)$$

##### 2° Quantité de mouvement

En vue d'étudier l'écoulement du fluide sous l'action des différentes forces extérieures qui modifient sa quantité de mouvement  $P$ , on définit la vitesse moyenne macroscopique  $v(x, y, z, t)$  à partir des masses  $m_i$  et des vitesses  $v_i$  issues du niveau mésoscopique. Tel que:

$$\bar{v}(x, y, z, t) = \frac{\sum m_i \bar{v}_i}{\sum m_i} = \frac{d\bar{P}(t)}{\rho dV} \quad (2.20)$$

Ainsi, la quantité de mouvement au niveau macroscopique est défini par

$$\bar{P}(t) = \iiint_V \rho \bar{v}(x, y, z, t) dV \quad (2.21)$$

#### 2.3.1.2 Grandeurs énergétiques macroscopiques

##### 1°. Energie cinétique

En considérant la mécanique d'un ensemble de masses ponctuelles, il est possible d'obtenir l'énergie cinétique du fluide par un processus de moyennage. Ainsi, l'énergie cinétique d'un ensemble de particules en mouvement est égale à l'énergie de leur centre de masse.

$$E_c = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \|\bar{v}\|^2 dV \quad (2.22)$$

## 2°. Energie interne

L'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse représente l'énergie d'agitation thermique du fluide qui contribue à l'énergie interne. Pour cette dernière il est plus pratique d'utiliser une grandeur massique. Ainsi, pour un fluide incompressible, l'énergie interne massique est simplement définie par  $du = C_v dT$ . L'énergie interne par unité de masse est obtenue en divisant l'énergie globale  $U$  par la masse. L'énergie interne d'un volume de fluide  $V$  est donnée par:

$$U(t) = \iiint_V u dV \quad (2.23)$$

## 2.3.1.3 Grandeurs locales et globales

Toutes les grandeurs macroscopiques définies précédemment ( $M, \vec{P}, E_c, U$ ) sont des grandeurs extensives, c'est-à-dire proportionnelles à la quantité de matière. On peut généraliser ces relations pour une grandeur extensive quelconque  $G$  ayant une grandeur intensive  $\eta$  correspondante par unité de masse ou de volume. Donc,  $\eta$  est une grandeur spécifique, exprimée en unité de  $G$  /Unité de masse ou unité de  $G$  /Unité de volume (Tableau 2.1).

$$\eta = G/M \quad (2.24)$$

La généralisation des relation (2.19-21-22-23) peut être formulée comme suit:

$$G(t) = \iiint_V \eta \rho dV \quad (2.25)$$

Il faut savoir que la quantité  $G$  est une grandeur globale, calculée pour un volume macroscopique  $V$  donné, et ne dépend que du temps. Par contre la quantité  $\eta$  est une grandeur massique locale, qui dépend du temps et des coordonnées  $(x, y, z)$  du point macroscopique considéré. Mathématiquement  $G$  est une fonction d'une variable  $G(t)$  et admet une dérivée temporelle, alors que  $\eta$  est une fonction de quatre variables  $\eta(x, y, z, t)$  et admet des dérivées partielles par rapport à ces quatre variables.

Tab 2.1: Association grandeurs extensives et intensives

Grandeur extensive $G$		Grandeur intensive massique $\eta = G/M$	Grandeur intensive volumique $\eta \cdot \rho = G/V$
Désignation	Ecriture		
Masse	$M$	1	$\rho$
Quantité de mouvement	$\vec{P} = M \cdot \vec{v}$	$\vec{v}$	$\rho \cdot \vec{v}$
Energie cinétique	$E_c = M \cdot \ \vec{v}\ ^2 / 2$	$\ \vec{v}\ ^2 / 2$	$\rho \cdot \ \vec{v}\ ^2 / 2$
Energie interne	$U$	$u$	$\rho \cdot u$

### 2.3.2 Description de l'écoulement fluide [23]

#### 2.3.2.1 Approche Eulérienne

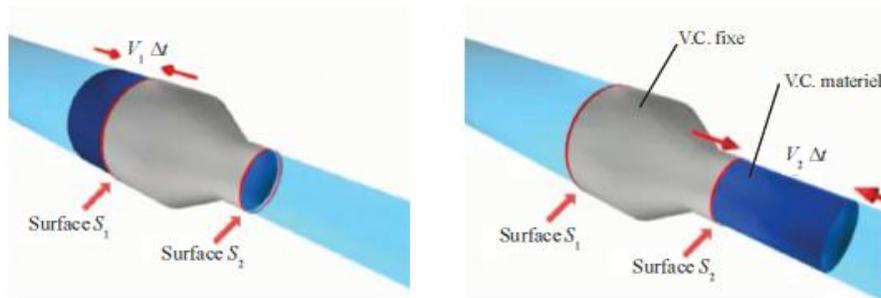
L'approche Eulérienne est une description du milieu continu fluide qui adopte un **point de vue géométrique**. Dans cette approche, l'observateur qui regarde les déplacements successifs des particules au cours du temps dans le référentiel  $\mathfrak{R}(X, Y, Z, t)$ , suit l'évolution du mouvement du fluide en se plaçant en un point géométrique  $M(x, y, z)$  fixe par rapport au référentiel.

On associe à cette approche la notion de volume géométrique fixe. Ce volume géométrique fixe est un domaine imaginaire de l'espace dénommé "**volume de contrôle**" délimité par des frontières qui sont fixes par rapport au référentiel de l'observateur et par lesquelles le fluide peut s'écouler. C'est un système ouvert traversé continuellement par de nouvelles particules matérielles qui franchissent ses frontières. La grandeur en cause sera représentée par un champ de tenseurs  $G$  des variables  $(x, y, z, t)$  dénommée "variables géométriques" ou "variables d'Euler". L'évolution temporelle en point de vue Eulérien est une évolution locale, qui s'exprime à l'aide de la dérivée partielle  $(\partial/\partial t)$  à  $(x, y, z)$  fixes.

Les lois de conservation prennent la forme de bilans en entrée-sortie d'un volume géométrique. L'attention sera portée sur les quantités physiques qui traversent les surfaces qui enveloppent le volume.

#### 2.3.2.2 Approche Lagrangienne

L'approche Lagrangienne est une description du milieu continu fluide qui adopte un **point de vue matériel**. Le point de vue Lagrangien suit une parcelle de fluide dans son déplacement. On associe à cette approche la notion de "**volume matériel**" mobile. C'est un système fermé qui renferme toujours les mêmes particules matérielles, même si elles se déplacent à l'intérieur du volume. Il n'y a pas de flux de masse à travers un contour matériel, puisque le contour se déplace lui-même à la vitesse de l'écoulement. Les lois de conservations s'écriront en considérant un **volume matériel** (Figure 2.9).



**Fig 2.9:** Écoulement d'un fluide dans un tube convergent à deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ .  
Volume de contrôle fixe: la masse entre et sort à travers la surface. Volume de contrôle matériel: la surface de contrôle le fluide et se déplace avec lui [34]

### 2.3.3. Equation générique de bilan

L'étude qui est développée ici repose sur l'application des équations de Reynolds. Ces équations sont obtenues par simplification des équations de Navier-Stokes, elles mêmes issues des équations fondamentales de la mécanique des fluides . La détermination des caractéristiques du mouvement d'un fluide consiste à rechercher la distribution du champ des grandeurs telles que les pressions et les vitesses en tout point du fluide. Pour y arriver, il faut établir les équations d'équilibre (ou de conservation) entre les différentes forces qui agissent sur un volume élémentaire  $dV$  entourant un point matériel quelconque du fluide. Tel que:

**1. Les équations de conservation :**

- L'équation de conservation de masse (ou équation de continuité)
- L'équation de conservation de la quantité de mouvement (ou équation de mouvement)

**2. Les forces agissant sur le volume sont données sur le [tableau 2.2](#).**

**Tab 2.2:** Classification des différentes forces agissant dans un écoulement de fluides.

Force	Type	Nature	Désignation
Force de volume	Statique	Champ gravitationnel	$F_{\text{pesanteur}}$
		Champ électromagnétique	$F_{\text{électromagnétique}}$
		Champ magnétique	$F_{\text{magnétique}}$
	Dynamique	Inertie	$F_{\text{inertie}}$
		Turbulence	$F_{\text{turbulence}}$
Forces de surface		Forces normales	$F_{\text{pression}}$
		Forces tangentielles	$F_{\text{viscosité}}$

Les équations régissant l'analyse des fluides, l'équation de conservation de masse, la quantité de mouvement, axiale et circonférentielle sont obtenues grâce à une équation de base sous forme intégrale issue du théorème de transport ou théorème de Reynolds . Selon [Fox et McDonald \(2006\)](#) l'équation (2.26) représente un ratio générique du taux de variation de toute grandeur extensive,  $G$ , d'un système et de sa variation dans un volume de contrôle.

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{système}} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_C} \eta \rho dV + \iint_{S_C} \eta \rho \vec{v} d\vec{S} \quad (2.26)$$

Le premier terme de l'équation représente le taux de variation total de la grandeur  $G$  . Le second terme représente le taux de variation de la grandeur extensive en fonction du temps, existant dans un volume de contrôle  $V_C$  . Le troisième terme représente le taux net d'écoulement de la grandeur étendue à travers la surface de contrôle  $S_C$  .

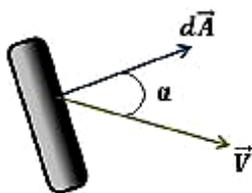
Où:

- $G$  : grandeur extensive arbitraire( Masse, Quantité de mouvement, Energie Interne, énergie cinétique)
- $\eta$  : grandeur intensive correspondant à  $G$  , ou propriété extensive par unité de masse;
- $V_C$  :volume de contrôle;
- $S_C$  :surface de contrôle;
- $\rho$  :masse spécifique  $[kg/m^3]$  ;
- $\vec{v}$  : vitesse mesurée par rapport à la surface du volume de contrôle  $[m/s]$  ;
- $dV$  :différentielle du volume  $[m^3]$  ;
- $d\vec{S}$  : différentielle de la surface  $[m^2]$  ;
- $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{système}}$  :Taux de changement/ variation total de la grandeur extensive  $G$  ;
- $\frac{d}{dt} \int_V \eta \rho dV$  : Taux de changement fonction du temps de la grandeur extensive  $G$  à l'intérieur du volume de contrôle
- $\rho dV$  : masse élémentaire dans le volume de contrôle  $[kg]$  ;
- $\eta \rho dV$  : quantité totale de la grandeur extensive  $G$  existant dans le volume de contrôle  $V_C$  ;
- $\int_s \eta \rho \vec{v} d\vec{S}$  : débit massique de la grandeur extensive  $G$  à travers le surface de contrôle;
- $\rho \vec{v} d\vec{S}$  : débit massique à travers une surface élémentaire  $dS$  . Le signe de ce terme dépend du sens du vecteur vitesse  $\vec{v}$  par rapport au vecteur surface  $d\vec{S}$  (Figure 2.10)

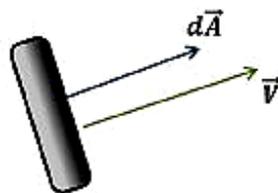
(a) Sortie/ Entrée générale

(b) Sortie normale à la surface

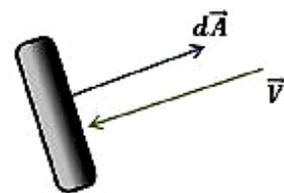
(c) Entrée normale à la surface



$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = v \cdot dS \cdot \cos \alpha$$



$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = +v \cdot dS$$



$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = -v \cdot dS$$

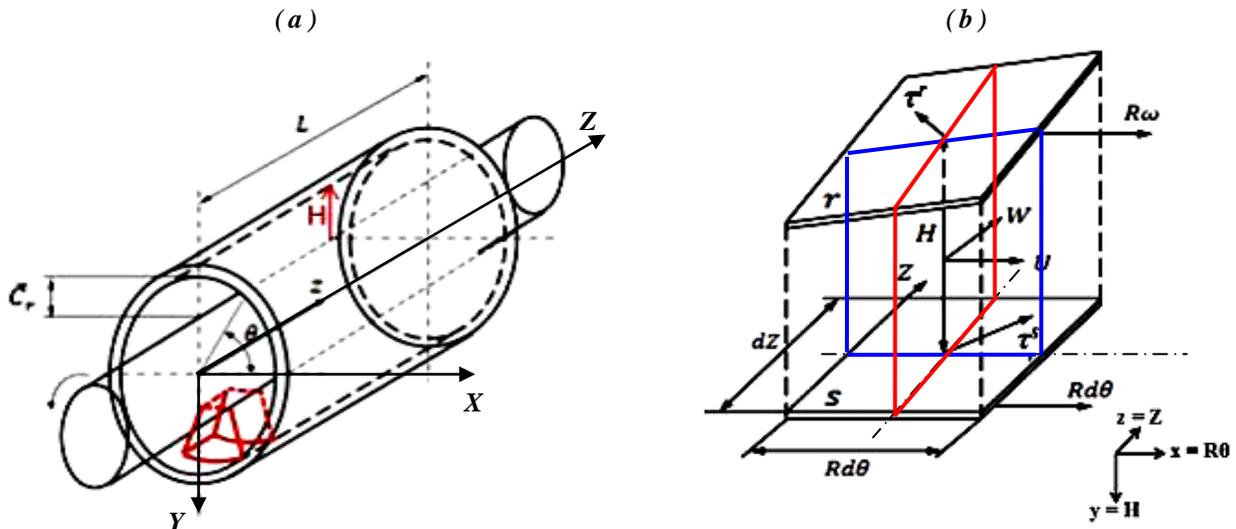
Fig 2.10: Evaluation du produit scalaire  $\vec{v} \cdot d\vec{S}$  [33]

2.3.4. Bilan des actions élémentaires

En vu de procéder au bilan des actions élémentaires agissant sur un volume de contrôle élémentaire  $dV$ , ce dernier est mis en situation dans le jeu radial moyen  $\bar{C}_r$ , entre le stator et le rotor le long de la longueur  $L$  du joint ( **figure 2.11a** ). D'autre part, **la figure 2.11b**, représente:

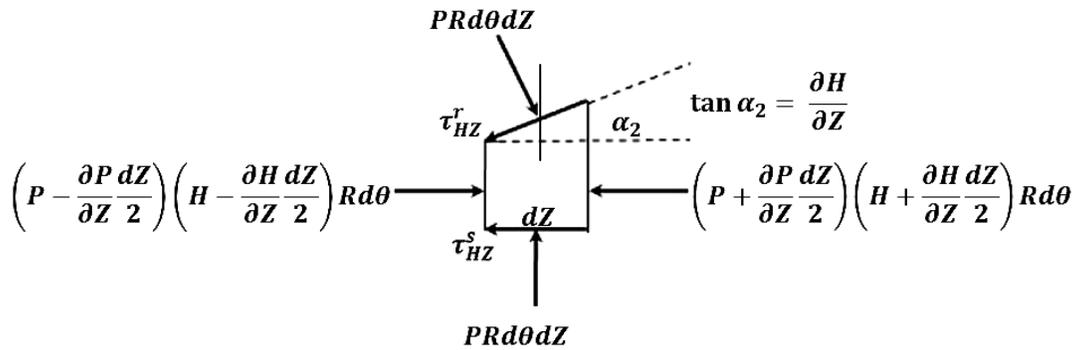
- $H$  La fonction du jeu dans le joint d'étanchéité,
- $W$  composante axiale du vecteur vitesse, considérée à travers le film.
- $U$  composante circonférentielle ou tangentielle du vecteur vitesse, considérée à travers le film.
- $\tau^r$  : contraintes de cisaillement agissant qu niveau de l'interface fluide/Rotor
- $\tau^s$  : contraintes de cisaillement agissant au niveau de l'interface fluide /Stator,

Les exposants ' $r$ ' et ' $s$ ' caractérisent respectivement les faces du rotor et du stator,

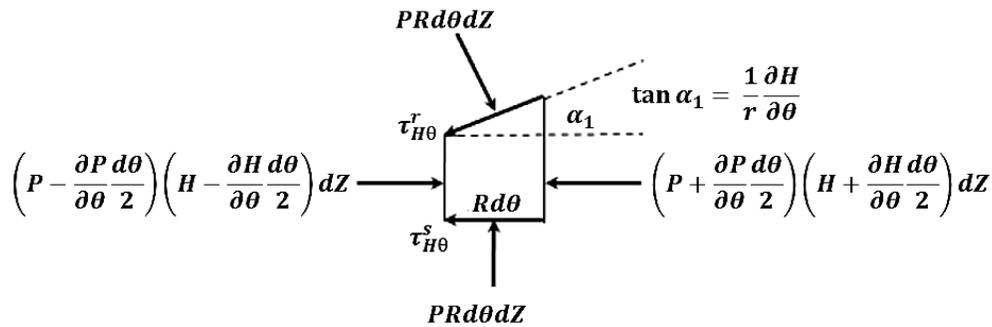


**Fig 2.11:** Paramétrage d'un joint  
 (a) Géométrie d'un joint d'écoulement; (b) Élément fluide différentiel [10].

Les figures 2.12a et 2.12b représentent le diagramme de corps libre pour déterminer les forces agissant sur l'élément de fluide différentiel, donné par la figure 2.11b.



(a) Forces (dans la direction Z) de l'élément fluide différentiel.



(b) Forces (dans la direction  $\theta$ ) de l'élément fluide différentiel

Fig 2.12: Forces dans les directions Z et  $\theta$  de l'élément fluide différentiel [10].

### 2.3.5 Formulation des équations gouvernantes

Dans notre cas, il est possible de formuler à partir de la forme intégrale générique (2.26), les trois équations gouvernantes pour le fluide considéré. A savoir:

- Equation de continuité ou de conservation de masse,
- Equation de la quantité de mouvement pour mouvement de translation selon l'axe du rotor
- Equation de la quantité de mouvement pour le mouvement de rotation autour de l'axe du rotor

#### 2.3.5.1 Forme générique pour la conservation de la masse

En vue de l'application de la forme intégrale générique (2.26) pour la formulation de l'équation de la conservation de la masse, en considère la masse  $M$  du système au lieu de la grandeur  $G$ . Donc, dans ce cas, la propriété intensive correspondante  $\eta$  sera égale à  $1$ .

$$\eta = \frac{G}{M} = \frac{M}{M} = 1 \quad (2.27)$$

En appliquant ces considérations dans l'équation (2.26), on obtient:

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)_{\text{système}} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho dV + \iint_{S_c} \rho \vec{v} dS \quad (2.28)$$

Un système fermé représente une partie de la matière fixe, de sorte que la loi de conservation de la masse, qui détermine qu'il n'est pas possible de créer ou d'éliminer la matière pour la transformer, que ce soit dans un système physique ou chimique, c'est-à-dire que son taux de changement temporel est nul. Ainsi:

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)_{\text{système}} = 0 \quad (2.29)$$

D'où

$$M = \text{cte}$$

La formulation finale de la conservation de masse, dans sa forme intégrale, est:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} dS = 0 \quad (2.30)$$

L'application de l'équation (2.30) à l'élément différentiel de la figure (2.11 b) donne:

$$\left[ \left( \rho \frac{\partial W}{\partial Z} dH + W \frac{\partial \rho}{\partial Z} dH \right) + \left( \rho \frac{\partial U}{R \partial \theta} dH + U \frac{\partial \rho}{R \partial \theta} dH \right) \right] R d\theta dZ + R d\theta dZ \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

Sachant que la masse spécifique  $\rho$  ne dépend ni des coordonnées géométriques du joint d'étanchéité, ni du temps, on a :

$$Rd\theta dZ \left[ \left( \rho \frac{\partial W}{\partial Z} dH + W \frac{\partial \rho}{\partial Z} dH \right) + \left( \rho \frac{\partial U}{R\partial\theta} dH + U \frac{\partial \rho}{R\partial\theta} dH \right) \right] + Rd\theta dZ \left( H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial(WH)}{\partial Z} + \rho \frac{\partial(UH)}{R\partial\theta} + \rho \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.32)$$

Le fluide étant incompressible, c'est-à-dire  $\rho = Cte$ , conduit à la formulation locale de l'équation de continuité.

$$\frac{\partial(WH)}{\partial Z} + \frac{\partial(UH)}{R\partial\theta} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.33)$$

### 2.3.5.2. Forme générique pour la quantité de mouvement

La formulation générique de la quantité de mouvement est obtenue en remplaçant grandeur extensive  $G$  par le vecteur quantité de mouvement  $\vec{p}$  et la grandeur intensive  $\eta$  par la vitesse  $\vec{v}$  de sorte que l'équation (2.26) devient:

$$\left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\text{système}} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \rho \vec{v} dV + \iint_{S_c} \vec{v} \rho \vec{v} dS \quad (2.34)$$

La deuxième loi de Newton, également connue sous le nom de principe fondamental de la dynamique, stipule que la résultante de toutes les forces extérieures (tableau 2.2) agissant sur un système est égale au taux de variation de la quantité de mouvement. Alors:

$$\left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{\text{système}} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{champ} + \vec{F}_{inertie} + \vec{F}_{turbulence} + \vec{F}_{pression} + \vec{F}_{viscosité} \quad (2.35)$$

Par conséquent, l'équation de quantité de mouvement est de la forme:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{champ} + \vec{F}_{inertie} + \vec{F}_{turbulence} + \vec{F}_{pression} + \vec{F}_{viscosité} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \vec{v} \rho dV + \iint_{S_c} \vec{v} \rho \vec{v} dS \quad (2.36)$$

Le volume élémentaire faisant partie d'un film de fluide mince, les effets de pesanteur, d'inertie ainsi que ceux du phénomène de turbulence sont négligés, la relation (2.36) devient:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_{pression} + \vec{F}_{viscosité} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c} \vec{v} \rho dV + \iint_{S_c} \vec{v} \rho \vec{v} dS \quad (2.37)$$

L'équation de la quantité de mouvement est vectorielle, et donc, peut être associée au système de coordonnées  $(Z, \theta)$ , utilisé dans la **figure 2.11a**, résultant dans la formulation de la quantité de mouvement axial, donnée par:

$$\sum \overline{F}_z = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c} W \rho dV + \iint_{S_c} W \rho \vec{v} d\vec{S} \quad (2.38)$$

Et dans la formulation de la quantité de mouvement circonférentielle, donnée par:

$$\sum \overline{F}_\theta = \frac{d}{dt} \iiint_{V_c} U \rho dV + \iint_{S_c} U \rho \vec{v} d\vec{S} \quad (2.39)$$

Les **figures 2.12a** et **2.12b** représentent la répartition des forces extérieures agissant sur l'élément de fluide différentiel, donné par la **figure 2.11b**.

Ainsi, d'après les **figures 2.12a** et **2.12b** la résultante des forces dans la direction  $Z$  et  $\theta$  peut être décrite respectivement par les équations (2.40) et (2.41).

$$\sum F_z = -Rd\theta dz \left[ H \frac{\partial P}{\partial z} + (\tau_{HZ}^r + \tau_{HZ}^s) \right] \quad (2.40)$$

$$\sum F_\theta = -Rd\theta dz \left[ H \frac{\partial P}{\partial \theta} + (\tau_{H\theta}^r + \tau_{H\theta}^s) \right] \quad (2.41)$$

La combinaison des équations (2.38), (2.39), (2.40) et (2.41) dans un élément comme celui de la **figure 2.12** sous forme différentielle conduit aux équations (2.42) et (2.43).

$$-Rd\theta dZ \left[ H \frac{\partial P}{\partial Z} + (\tau_{HZ}^r + \tau_{HZ}^s) \right] = Rd\theta dZ \left[ \frac{\partial(HW\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(HW^2\rho)}{\partial Z} + \frac{\partial(HUW\rho)}{R\partial\theta} \right] \quad (2.42)$$

$$-Rd\theta dZ \left[ H \frac{\partial P}{\partial \theta} + (\tau_{H\theta}^r + \tau_{H\theta}^s) \right] = Rd\theta dZ \left[ \frac{\partial(HU\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(HUW\rho)}{\partial Z} + \frac{\partial(HU^2\rho)}{R\partial\theta} \right] \quad (2.43)$$

Les équations du mouvement axial et du mouvement circonférentiel, données respectivement par les équations (2.42) et (2.43), peuvent être simplifiées en utilisant l'équation de conservation de masse (2.33). Pour ce faire, il faut multiplier l'équation (2.33) par la vitesse axiale  $W$  on obtient l'équation (2.44).

$$\rho W \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} + \rho W \frac{\partial(HW)}{\partial Z} + \rho W \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.44)$$

En soustrayant l'équation (2.44) de l'équation (2.42) on a l'équation (2.45).

$$\begin{aligned}
-H \frac{\partial P}{\partial Z} - (\tau_{HZ}^r + \tau_{HZ}^s) = & -\rho W \frac{\partial H}{\partial t} - \rho W \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} - \rho W \frac{\partial(HW)}{\partial Z} + \\
& + \rho \frac{\partial(HW)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(HWU)}{R\partial\theta} + \rho \frac{\partial(HW^2)}{\partial Z}
\end{aligned} \quad (2.45)$$

En utilisant la règle de la chaîne pour la simplification, nous obtenons l'équation (2.46).

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial(HW)}{\partial t} = \rho W \frac{\partial H}{\partial t} + \rho H \frac{\partial W}{\partial t} & \rightarrow \rho H \frac{\partial W}{\partial t} = \rho \frac{\partial(HW)}{\partial t} - \rho W \frac{\partial H}{\partial t} \\
\rho \frac{\partial(HWU)}{R\partial\theta} = \rho W \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} + \rho HU \frac{\partial W}{R\partial\theta} & \rightarrow \rho HU \frac{\partial W}{R\partial\theta} = \rho \frac{\partial(HWU)}{R\partial\theta} - \rho W \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} \\
\rho \frac{\partial(HW^2)}{\partial Z} = \rho W \frac{\partial HW}{\partial Z} + \rho HW \frac{\partial W}{\partial Z} & \rightarrow \rho HW \frac{\partial W}{\partial Z} = \rho \frac{\partial(HW^2)}{\partial Z} - \rho W \frac{\partial HW}{\partial Z}
\end{aligned}$$

$$\boxed{-H \frac{\partial P}{\partial Z} = (\tau_{HZ}^r + \tau_{HZ}^s) + \rho H \left( \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{U}{R} \frac{\partial W}{\partial\theta} + W \frac{\partial W}{\partial Z} \right)} \quad (2.46)$$

Pour la simplification de l'équation (2.43), on multiplie l'équation (2.33) par la vitesse circumférentielle  $U$  on obtient l'équation (2.47).

$$\rho U \frac{\partial H}{\partial t} + \rho U \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} + \rho U \frac{\partial(HW)}{\partial Z} = 0 \quad (2.47)$$

En soustrayant l'équation (2.47) du côté droit de l'équation (2.43) on a l'équation (2.48).

$$\begin{aligned}
-\left( H \frac{\partial P}{R\partial\theta} \right) - (\tau_{H\theta}^r + \tau_{H\theta}^s) = & -\rho U \frac{\partial H}{\partial t} - \rho U \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} - \rho U \frac{\partial(HW)}{\partial Z} + \\
& + \rho \frac{\partial(HU)}{\partial t} + \rho \frac{\partial(HWU)}{\partial Z} + \rho \frac{\partial(HU^2)}{R\partial\theta} = 0
\end{aligned} \quad (2.48)$$

En ce qui concerne l'équation du mouvement axial, il est possible de simplifier l'équation (2.48) obtenant ainsi l'équation (2.49).

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial(HU)}{\partial t} = \rho U \frac{\partial H}{\partial t} + \rho H \frac{\partial U}{\partial t} & \rightarrow \rho H \frac{\partial U}{\partial t} = \rho \frac{\partial(HU)}{\partial t} - \rho U \frac{\partial H}{\partial t} \\
\rho \frac{\partial(HWU)}{\partial Z} = \rho U \frac{\partial(HW)}{\partial Z} + \rho HW \frac{\partial U}{\partial Z} & \rightarrow \rho HW \frac{\partial U}{\partial Z} = \rho \frac{\partial(HWU)}{\partial Z} - \rho U \frac{\partial(HW)}{\partial Z} \\
\rho \frac{\partial(HU^2)}{R\partial\theta} = \rho U \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta} + \rho HU \frac{\partial U}{R\partial\theta} & \rightarrow \rho HU \frac{\partial U}{R\partial\theta} = \rho \frac{\partial(HU^2)}{R\partial\theta} - \rho U \frac{\partial(HU)}{R\partial\theta}
\end{aligned}$$

$$\boxed{-\left( H \frac{\partial P}{R\partial\theta} \right) = (\tau_{H\theta}^r + \tau_{H\theta}^s) + \rho H \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{R\partial\theta} + W \frac{\partial U}{\partial Z} \right)} \quad (2.49)$$

Ainsi, à partir de l'équation (2.26), il a été possible de déduire les équations gouvernantes (2.50), (2.51) et (2.52), sous forme différentielle qui décrivent respectivement les équations de continuité, de mouvement axial et de mouvement circonférentiel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(WH)}{\partial Z} + \frac{\partial(UH)}{R\partial\theta} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \\ H \frac{\partial P}{\partial Z} + \rho H \left( U \frac{\partial W}{R\partial\theta} + W \frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) + (\tau_{HZ}^r + \tau_{HZ}^s) = 0 \\ H \frac{\partial P}{R\partial\theta} + \rho H \left( U \frac{\partial U}{R\partial\theta} + W \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) + (\tau_{H\theta}^r + \tau_{H\theta}^s) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.50) \\ (2.51) \\ (2.52) \end{array}$$

Dans les relations (2.50), (2.51) et (2.52),  $\tau_{HZ}^r$ ,  $\tau_{HZ}^s$ ,  $\tau_{H\theta}^r$  et  $\tau_{H\theta}^s$  représentent les composantes suivant  $Z$  et  $\theta$  des contraintes de cisaillement  $\tau^r$  et  $\tau^s$  (à l'interface du rotor exposant "r" et à l'interface du stator exposant "s"). Les composantes des contraintes de cisaillement, le long des directions, axiale et circonférentielle, du rotor et du stator  $\tau_{HZ}^r$ ,  $\tau_{H\theta}^r$ ,  $\tau_{HZ}^s$  et  $\tau_{H\theta}^s$ , respectivement, agissent dans la direction opposée des vitesses relatives et sont représentées par les équations (2.53) à (2.56).

$$\tau_{HZ}^r = \tau^r \frac{W}{U^r} \quad (2.53)$$

$$\tau_{H\theta}^r = \tau^r \frac{U - R\omega}{U^r} \quad (2.54)$$

$$\tau_{HZ}^s = \tau^s \frac{W}{U^s} \quad (2.55)$$

$$\tau_{H\theta}^s = \tau^s \frac{U}{U^s} \quad (2.56)$$

D'après les définitions de HIRS (CHILDS, 1993), ces contraintes sont caractérisées par:

- les facteurs de frottement  $\gamma^r$  et  $\gamma^s$  respectivement au niveau des interfaces du stator et du rotor,
- les vitesses relatives  $U^r$  et  $U^s$  du flux massique respectivement au niveau des interfaces du stator et du rotor.

$$\tau^s = \rho \gamma^s \frac{(U^s)^2}{2} \quad (2.57)$$

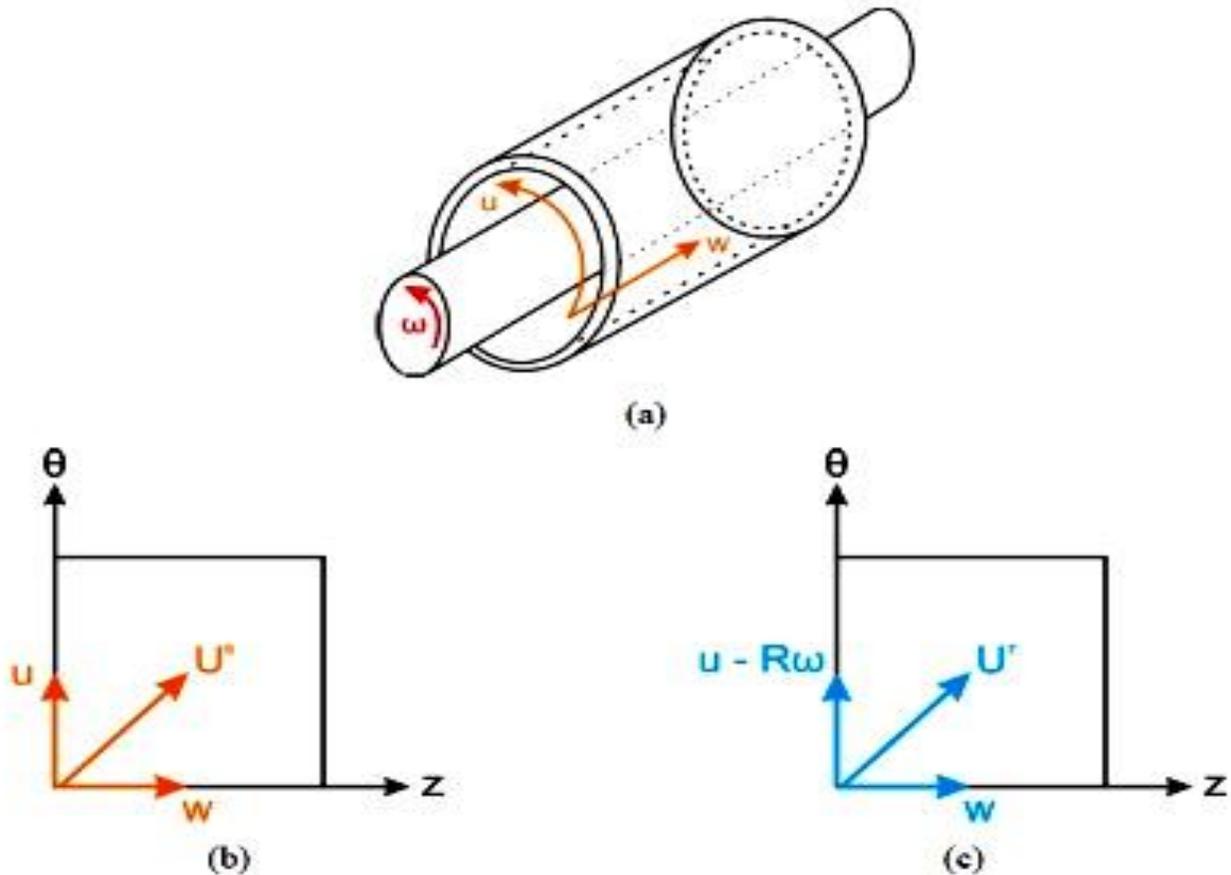
$$\tau^r = \rho \gamma^r \frac{(U^r)^2}{2} \quad (2.58)$$

En raison de ces contraintes, les équations régissant les fluides ne peuvent pas être simplifiées dans l'équation de Reynolds, contrairement aux paliers lubrifiés.

La **figure 2.13** montre la vitesse relative du débit massique aux interfaces du rotor  $U^r$  et du stator  $U^s$ . Au niveau du stator, n'existe que l'influence de la vitesse circumférentielle,  $\vec{U}$  et axiale  $\vec{W}$  du fluide. Tandis qu'au niveau du rotor, il faut également tenir compte de l'influence de la vitesse de rotation  $\omega$  du rotor, générant dans la direction circumférentielle une vitesse du fluide relative de  $(U - R\omega)$ , laquelle, combinée à la vitesse axiale  $\vec{W}$  fournit  $\vec{U}^r$ . Tel que:

$$U^s = \sqrt{(W^2 + U^2)} \tag{2.59}$$

$$U^r = \sqrt{[W^2 + (U - R.\omega)]^2} \tag{2.60}$$



**Fig 2.13:** Décomposition circumférentielle et axiale du vecteur vitesse d'une particule fluide.

---

# *Chapitre 03*

---

*RÉSOLUTION*

*AVEC*

*LA METHODE DES VOLUMES FINIS*

---

### 3.1. INTRODUCTION

L'une des principales références sur la méthode des volumes finis a été publiée par **Patankar (1980)**, où l'auteur a abordé le sujet de manière simple et directe, en démontrant les principaux concepts de cette méthode. En **2004, Maliska** a publié le livre Heat Transfer et Computational Fluid Mechanics, qui décrit clairement la procédure à utiliser pour transformer les équations directrices du fluide analysé sous forme différentielle dans la forme dans laquelle il peut être appliqué. la méthode des volumes finis. Il présente également les différents types de formulations et les conditions aux limites pour les volumes finis.

### 3.2. ADIMENSIONALISATION DES EQUATIONS GOUVERNANTES

Si on considère les équations (2.50), (2.51) et (2.52), il est possible de déterminer la distribution des pressions et des vitesses par l'une des méthodes numériques, en l'occurrence la méthode des volumes finis.

L'adimensionnalisation des équations de conservation de la masse et du mouvement axial et circonférentiel est nécessaire pour les rendre indépendants des paramètres directs du système, c'est-à-dire le diamètre, l'interstice (jeu) et la longueur du joint, évitant ainsi les variations éventuelles des équations en fonction de ces paramètres. De plus, l'utilisation de la formulation sans dimension facilite l'application de la méthode numérique utilisée, puisqu'il est possible de transformer le maillage réel en un maillage numérique uniforme.

À partir des définitions:

- $H$  : Fonction jeu le long de la direction  $OZ$  [ $m$ ],
- $L$  : Longueur axiale de l'étanchéité [ $m$ ],
- $R$  : Rayon du rotor [ $m$ ],
- $C_0$  : Jeu relatif de l'étanchéité à l'entrée de l'arbre ( $Z = 0$ ) [ $m$ ],
- $C_l$  : Jeu relatif de l'étanchéité à la sortie de l'arbre ( $Z = L$ ) [ $m$ ],
- $\overline{C}_r$  : Jeu radial moyen [ $m$ ]
- $U$  : Vitesse circonférentielle [ $m/s$ ],
- $W$  : Vitesse axiale [ $m/s$ ],
- $\omega$  : Vitesse angulaire du rotor [ $rad/s$ ],
- $\dot{Q}$  : Débit volumique [ $m^3/s$ ],
- $P$  : Pression [ $N/m^2$ ],
- $W_0$  : Vitesse axiale moyenne [ $m/s$ ], donnée par:  $W_0 = \frac{\dot{Q}}{2\pi R \overline{C}_r}$
- $T$  : Temps d'écoulement du fluide le long de l'axe [ $s$ ] :  $T = \frac{L}{W_0}$

Selon **CHILDS (1993)**, les variables adimensionnelles sont données par les relations suivantes:

- $z = Z/L$ : variable adimensionnelle de longueur,
- $\tau = t/T$ : variable adimensionnelle de temps ,
- $h = H/\bar{C}_r$ : variable adimensionnelle de la fonction jeu,
- $u = U/(R.\omega)$ : variable adimensionnelle de la vitesse circonférentielle,
- $w = W/W_0$ : variable adimensionnelle de la vitesse axiale,
- $p = P/(\rho.W_0^2)$ : variable adimensionnelle de pression
- $b = R.\omega/W_0$ : paramètre adimensionnel .

Les équations **(3.1)**, **(3.2)** et **(3.3)** représentent respectivement sous la forme adimensionnelle, les équations de conservation de masse **(2.50)**, la quantité de mouvement axial **(2.51)** et la quantité de mouvement circonférentiel **(2.52)**,

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} \frac{\partial (hu)}{\partial \theta} + \frac{\partial (hw)}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$-h \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{w}{2} u^s \gamma^s \frac{L}{\bar{C}_r} + \frac{w}{2} u^r \gamma^r \frac{L}{\bar{C}_r} + h \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} u \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

$$-\left( \frac{h L}{b R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \frac{u}{2} u^s \gamma^s \frac{L}{\bar{C}_r} + \frac{(u-1)}{2} u^r \gamma^r \frac{L}{\bar{C}_r} + h \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} u \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

De même, l'absence de dimension des vitesses relatives, données par les relations **(2.59)** et **(2.60)** sont rendues adimensionnelles par les relations **(3.4)** et **(3.5)**.

$$u^s = (w^2 + b^2 u^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

$$u^r = (w^2 + b^2 (u-1)^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

Les facteurs de frottement  $\gamma^s$  et  $\gamma^r$  nécessaires pour la résolution des équations **(3.1)**, **(3.2)** et **(3.3)**, sont liés au modèle de Moody à travers les relations **(3.6)** et **(3.7)**.

$$\gamma^s = a_1 \left[ 1 + \left( \frac{a_2^s}{h} + \frac{a_3}{hu^s} \right)^{1/3} \right] \quad (3.6)$$

$$\gamma^r = a_1 \left[ 1 + \left( \frac{a_2^r}{h} + \frac{a_3}{hu^r} \right)^{1/3} \right] \quad (3.7)$$

Avec:

- $a_1, a_2^s, a_2^r$  et  $a_3$ : Coefficients pour la solution de Moody :

$$a_1 = 1,375.10^{-3} \quad (3.8)$$

$$a_2^r = 2.10^4 .\varepsilon^r \quad (3.9)$$

$$a_2^s = 2.10^4 .\varepsilon^s \quad (3.10)$$

$$a_3 = \frac{10^6}{\Re_0} \quad (3.11)$$

- $\Re_0$ : Nombre de Reynolds:

$$\Re_0 = \frac{2\bar{C}_r W_0 \rho}{\mu} \quad (3.12)$$

- $\varepsilon^s$ : stabilité relative du stator

$$\varepsilon^s = \frac{e^s}{2.\bar{C}_r} \quad (3.13)$$

- $\varepsilon^r$ : stabilité relative du rotor

$$\varepsilon^r = \frac{e^r}{2.\bar{C}_r} \quad (3.14)$$

- $\mu$ : viscosité dynamique [ $Pa.s$ ]
- $e^s$ : Rugosité absolue au niveau du stator [ $m$ ]
- $e^r$ : Rugosité absolue au niveau du rotor [ $m$ ]

Ainsi, à partir de la forme adimensionnelle des équations de continuité, quantité de mouvement axial et circonférentiel, les équations (3.1), (3.2) et (3.3), respectivement, il est possible d'appliquer la méthode du volume fini en utilisant un maillage uniforme et constant. Le grand avantage de l'absence de dimension est que ce maillage est indépendant des paramètres physiques et opérationnels du système, c'est-à-dire que pour tout type de joint et toute condition de fonctionnement, le système est résolu avec le même maillage. Une fois la simulation numérique terminée, les résultats sans dimension peuvent ensuite être convertis en leur forme dimensionnelle pour analyser l'influence des variables de conception des joints d'étanchéité.

### 3.3 SOLUTION PAR VOLUMES FINIS POUR ROTOR CENTRÉ

#### 3.3.1 Hypothèses simplificatrices

Pour un joint d'étanchéité centré et à partir des équations adimensionnelles (3.1), (3.2) et (3.3), il est possible de résoudre la première partie du problème, qui consiste à déterminer la différence de pression  $\Delta P$  entre l'entrée et la sortie du joint d'écoulement, ainsi que la distribution de la vitesse circonférentielle. A cet effet, on considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le rotor étant supposé centré par rapport au stator, le jeu  $h$  ne varie pas en fonction de l'angle  $\theta$ .
- Pour le joint cylindrique et le joint étagé, on suppose que le jeu  $h$  est constant par rapport à  $z$ , alors que pour le joint conique cette relation est donnée par la relation (2.14).
- Dans cette première étape (rotor centré), on suppose en plus que :
  - les variables tels que : le jeu  $h$ , la vitesse axiale  $w$ , la vitesse circonférentielle  $u$  ainsi que la pression  $P$  ne varient pas avec le temps  $t$ ,
  - la vitesse circonférentielle  $u$  ne varie que par rapport à  $z$ , sans variation par rapport à  $\theta$ .

En attribue l'indice  $0$  dans les équations qui suivent pour indiquer la solution pour un arbre centré. Ainsi :

#### 1°. Simplification de l'équation de continuité

L'équation de continuité (3.1), peut être simplifiée pour donner l'équation (3.15) :

$$\frac{\partial(h_0 w_0)}{\partial z} = h_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} + w_0 \frac{\partial h_0}{\partial z} = h_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (3.15)$$

Ainsi,

$$h_0 w_0 = \text{constante} \quad (3.16)$$

Démembrer  $h_0$  et  $w_0$  :

$$\frac{H_0 W}{C_r \dot{Q}} 2\pi R C_r = \text{Constante} \quad (3.17)$$

$$H_0 W 2\pi R = \dot{Q} \quad (3.18)$$

Et donc :

$$\boxed{h_0 w_0 = 1} \quad (3.19)$$

## 2° Simplification des équations de quantité de mouvement

En utilisant l'équation (3.19), les équations de quantité de mouvement axial (3.2) et circonférentiel (3.3), peuvent être simplifiées en donnant respectivement les équations (3.20) et (3.21) qui sont **non linéaires et couplées**. Cet état, fait que ces équations ne peuvent pas être résolues analytiquement, d'où la nécessité de faire appel à l'une des méthodes de discrétisation numérique en l'occurrence la méthode des volumes finis qui a été adoptée en vue d'un maillage régulier.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_0}{dz} = -\frac{1}{2h_0^2} (\sigma^s u_0^s + \sigma^r u_0^r) + \frac{1}{h_0^3} \frac{dh_0}{dz} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_0}{dz} = -\frac{1}{2} [\sigma^s u_0 u_0^s + \sigma^r u_0^r (u_0 - 1)] \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Avec:

$$\sigma^s = \gamma^s \left( \frac{L}{Cr} \right) \quad (3.22)$$

$$\sigma^r = \gamma^r \left( \frac{L}{Cr} \right) \quad (3.23)$$

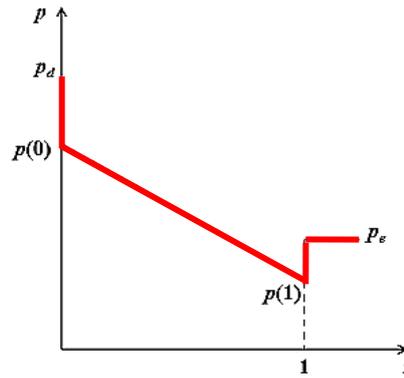
### 3.3.2. Conditions aux limites

Pour résoudre les équations (3.20) et (3.21) il est nécessaire de fixer les conditions aux limites de l'écoulement du fluide dans le joint d'étanchéité. Ces conditions sont obtenues en analysant la perte ou la récupération de la charge à l'entrée et à la sortie du joint. La distribution des pressions le long du joint d'étanchéité est donnée selon trois cas de figures :

#### 1°. Conditions aux limites pour joint cylindrique

Pour le joint de ce type, la **figure 3.1**, montre la répartition de la pression comme suit :

- **A l'entrée du joint:**, il y a une chute de pression brutale, provoquée par les pertes d'entrée, due à la dissipation d'énergie résultant du choc hydraulique à l'entrée du joint.
- **Sur la longueur du joint :** la perte de charge est due au frottement entre le fluide et les parois du joint.
- **A la sortie du joint :** il se produit un phénomène de récupération de pression qui augmente la raideur directe du joint.

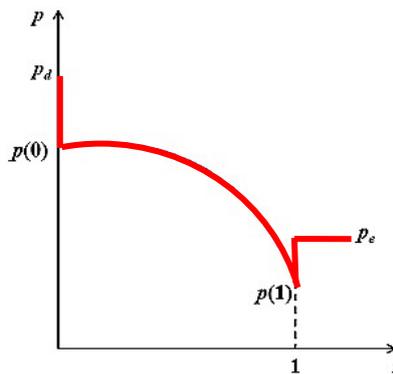


**Fig 3.1:** Répartition de la pression le long du joint d'étanchéité cylindrique

## 2° Conditions aux limites pour joint conique

Pour le joint de ce type, la **figure 3.2**, montre la répartition de la pression comme suit:

- **A l'entrée du joint:**, il y a une chute de pression brutale, provoquée par les pertes d'entrée, due à la dissipation d'énergie résultant du choc hydraulique à l'entrée du joint.
- **Sur la longueur du joint:** la perte de charge est due au frottement entre le fluide et les parois du joint. De plus dans l'intervalle entre  $P(0)$  et  $P(1)$ , la distribution de pression le long d'un joint conique diffère de celle du joint cylindrique puisque la perte de pression due au frottement entre le fluide et la paroi du joint sera différente, étant donné que le joint conique a un jeu radial variable le long de sa longueur
- **A la sortie du joint:** il se produit un phénomène de récupération de pression qui augmente la raideur directe du joint.

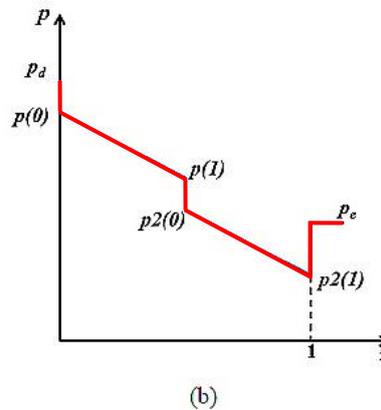


**Fig 3.2:** Répartition de la pression le long du joint d'étanchéité conique

## 3° Conditions aux limites pour joint étagé

Pour le joint de ce type, la **figure 3.3**, montre la répartition de la pression comme suit:

- **A l'entrée du joint:**, il y a une chute de pression brutale, provoquée par les pertes d'entrée, due à la dissipation d'énergie résultant du choc hydraulique à l'entrée du joint.
- **Sur la longueur du joint:** la perte de charge est due au frottement entre le fluide et les parois du joint. La variation de pression sera similaire à celle de deux joints cylindriques successifs, le premier possède généralement un jeu radial supérieur que le second.
- **A la sortie du joint :** il se produit un phénomène de récupération de pression qui augmente la raideur directe du joint.



**Fig 3.3:** Répartition de la pression le long du joint d'étanchéité étagé

La solution des équations doit être effectuée en tenant compte des conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du joint d'écoulement. La condition d'entrée est définie en termes de coefficients de perte d'entrée.

$$P_d - P(0, \theta, t) = \frac{\rho}{2} (1 + \xi) W^2(0, \theta, t) \quad (3.24)$$

Où:  $\xi$  est le coefficient de perte de charge à l'entrée du joint d'étanchéité.

Selon les recommandations de Childs (1993), les valeurs standard pour les mesures du coefficient de perte d'entrée,  $\xi$ , vont de 0 à 0.5. La relation (3.24), peut être modifiée pour représenter la chute de pression soudaine entre  $P(1)$  et  $P2(0)$  dans un joint étagé la récupération de pression à la sortie du joint est formulée selon l'équation (3.25).

$$P(1, \theta, t) + \frac{\rho}{2} (1 - \xi_e) W^2(1, \theta, t) = P_e \quad (3.25)$$

Où:  $\xi_e$  coefficient de récupération dans la sortie.

Les conditions aux limites doivent également être sans dimension, et leurs formes adimensionnelles sont:

$$p_d - p_0(0) = \frac{(1 + \xi)}{2} w_0^2(0) = \frac{(1 + \xi)}{2h_0^2(0)} \tag{3.26}$$

$$p_0(1) - p_e = -\frac{(1 - \xi_0)}{2} w_0^2(1) = -\frac{(1 - \xi_0)}{2h_0^2(1)} \tag{3.27}$$

Selon Childs (1993), la condition initiale  $u_0(0)$  dépend de la fonction et de l'emplacement du joint d'étanchéité dans la machine tournante analysée. Une valeur typique considérée est 0.5, en considérant une vitesse moyenne entre une surface stationnaire et une vitesse de rotation. Dans certains cas, la condition initiale peut être considérée comme l'unité  $u_0(0) = 1$ .

### 3.3.3 Solution par volumes finis

#### 3.3.3.1. Solution pour joints cylindriques et coniques

Pour déterminer  $p_0(z)$ ,  $u_0(z)$  et  $W_0$  les solutions des équations (3.20) et (3.21), doivent être obtenues par une méthode itérative. La figure 3.4 représente l'organigramme utilisé de la solution pour les joints plats cylindriques et coniques.

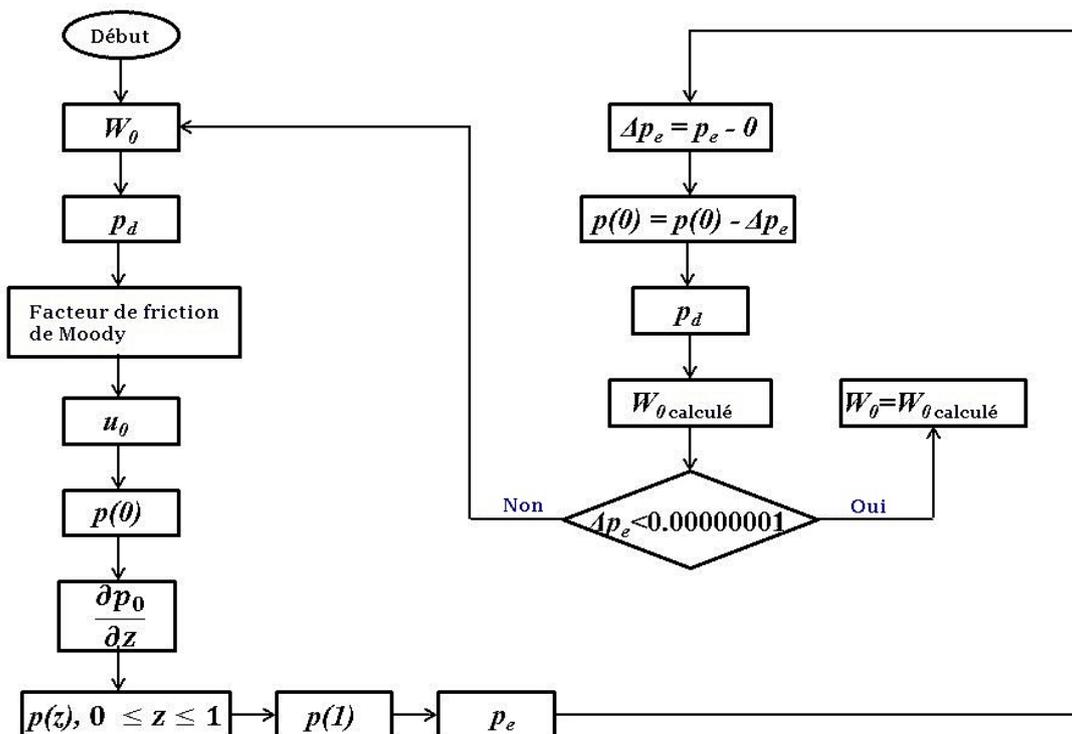


Fig 3.4: Organigramme de résolution pour  $u_0$ ,  $p_0$  et  $W_0$  pour les joints cylindriques et coniques.

1. La première étape consiste à estimer la perte de charge  $\Delta p$  par l'équation (3.28). Cette perte de charge est provoquée par la chute de pression à l'entrée du joint, augmentée par celle due au frottement paroi/fluide sur la longueur  $L$  du joint. Selon [33], il n'est pas possible d'évaluer analytiquement la chute de pression  $\Delta P$  dans un écoulement turbulent. Par conséquent, une corrélation mathématique est nécessaire pour déterminer la différence de pression entre l'entrée et la sortie du joint. A cet effet, BLACK (1969) a introduit la définition du facteur de friction de FANNING, déterminant l'équation (3.28).

$$\Delta P = 4\gamma_F \left( \frac{L}{2\bar{C}r} \right) \rho \frac{v^2}{2} \quad (3.28)$$

Avec:

- $\gamma_F$  : facteur de frottement de **Fanning**
- $\rho$  : masse spécifique du fluide  $[kg/m^3]$ .
- $v$  : vitesse linéaire ( $v = R \times \omega$ )  $[m/s]$

Le produit  $2\bar{C}r$  dans l'équation (3.28), caractérise le diamètre hydraulique, ce qui représente une corrélation empirique pour les écoulements dans les conduits non circulaires. Cette corrélation est donnée par l'équation (3.29).

$$D_h = \frac{4S}{Per} \quad (3.29)$$

Avec:

$D_h$  : Diamètre hydraulique  $[m]$ .

$S$  : Surface de la section transversale  $[m^2]$

$Per$  : Périmètre humide par section  $[m]$ .

Selon [33] le facteur de friction de FANNING est peu utilisé par rapport au facteur de frottement de DARCY, ce dernier étant obtenu par le diagramme de Moody, et la relation entre ces deux facteurs est donnée par l'équation (3.30).

$$\gamma_{DW} = 4\gamma_F \quad (3.30)$$

Où:

- $\gamma_{DW}$  : facteur de friction **Darcy-Weisbach**.

Par conséquent, l'équation (3.28) peut être modifiée à partir de l'équation (3.30) résultant de l'équation (3.31), où le facteur de friction utilisé est Darcy-Weisbach.

$$\Delta P = \gamma_{DW} \left( \frac{L}{D_h} \right) \rho \frac{v^2}{2} \quad (3.31)$$

2. Ainsi, à partir de l'équation (3.28) ou de l'équation (3.31), il est possible de déterminer la chute de pression le long du joint pour une condition de fonctionnement donnée du rotor.
3. Donner une valeur arbitraire à  $W_0$  à partir de laquelle la pression du fluide  $P_d$  en amont du joint mécanique d'écoulement est déterminée.

$$p_d = \frac{\Delta p}{\rho W_0^2} \quad (3.32)$$

Cette relation représente la très faible dimension de la variable de pression  $p$  en fonction de la différence de pression  $\Delta p$  entre l'entrée et la sortie du joint d'écoulement. Considérant que  $p$ , est la valeur de la pression atmosphérique, (c'est-à-dire  $p$  est une pression manométrique dont la valeur est nulle), alors, la différence de pression entre l'entrée et la sortie du joint d'écoulement sera, en module, elle-même  $P_d$  et, par conséquent, la relation de l'équation (3.32) est valide.

4. Ensuite, l'équation de la quantité de mouvement circonférentiel, l'équation (3.21), est intégrée à travers un intégrateur de Runge-Kutta, en utilisant le facteur de friction sélectionné (Moody), pour obtenir  $u_\theta$ .
5. Ensuite, à travers la condition limite à l'entrée du joint d'écoulement, l'équation (3.26), la pression  $p(0)$  est déterminée, comme indiqué sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3.
6. En utilisant la méthode des volumes finis, l'équation de la quantité du mouvement axial, présenté en (3.20), obtenant la variation de pression le long du joint d'écoulement, et par conséquent, déterminer  $p(1)$ .

$$\int_{i-1}^i \frac{dp}{dz} dz = \int_{i-1}^i p'(z) dz \quad (3.33)$$

$$p(i) = p(i-1) + p'(z)(i)z(i) - p'(z)(i-1)z(i-1) \quad (3.34)$$

$$p'(z)(i) = \left( \frac{-1}{2h_0^2(i)} \right) \left[ \sigma^s(i)u_0^s(i) + \sigma^r(i)u_0^r(i) \right] + \frac{1}{h_0^3(i)} \frac{dh_0}{dz} \quad (3.35)$$

Les équations (2.54) et (2.55) représentent l'équation de mouvement axial écrite sous la forme de volumes finis. L'indice  $i$  représente la variation numérique des termes en  $z$ , ou bien l'indice des nœuds qui se réfère à la discrétisation axiale du joint. Puisque l'axe est considéré comme centré, les termes analysés ne varient pas avec la coordonnée  $\theta$ , c'est-à-dire que la distribution de pression, la vitesse axiale et le profil de vitesse circonférentielle sont constants tout autour du joint.

Cependant, ces quantités varient avec les positions de  $z$  (coordonnée axiale), c'est-à-dire, pour  $z = Z/L$  sans dimension allant de  $0$  à  $1$ , et dans ce cas, avec un incrément de  $0.001$  nous avons 1001 points, représentés par indice  $i$  (Figure 3.5).

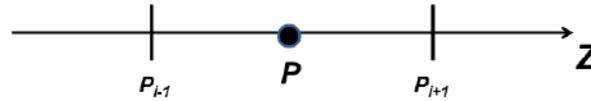


Fig 3.5: Balance de pression dans un volume de contrôle

Le terme  $dh_0/dz$  de l'équation (3.20) représente la dérivée de  $h$  par rapport à  $z$ , qui est une relation connue (terme source), puisque la géométrie du joint est connue. Pour les joints cylindriques, cette relation est nulle, puisque  $h$  est constant. Pour les joints coniques, cette valeur dépend du rapport du jeu radial à l'entrée et à la sortie du joint et peut être déterminée à partir de l'équation (2.14).

Les termes  $\sigma^s$ ,  $u_0^s$ ,  $\sigma^r$  et  $u_0^r$  dépendent de la valeur de la vitesse circonférentielle, qui à son tour est intégrée par rapport à  $z$ , ayant une valeur propre pour chaque nœud  $i$  (Figure 3.5).

- A partir de la condition limite à la sortie du joint d'étanchéité, représentée par l'équation (3.27), il est possible d'estimer la valeur de  $p$ .
  - La différence de pression  $\Delta p$  entre la valeur déterminée de  $p$  et la valeur initiale estimée est ensuite calculée.
  - Comme cette valeur a été considérée comme nulle (pression manométrique), la différence de pression déterminée sera le  $p_e$  calculé lui-même.
  - Le processus itératif doit avoir lieu jusqu'à ce que  $p_e$  s'approche de la valeur nulle.
  - La méthode du volume fini utilisée est connue sous le nom de Upwind (MALISKA, 2004), car dans ce cas, la méthode conventionnelle ne peut pas être utilisée, puisque la valeur à la limite du volume,  $p(1)$  calculée à travers  $p_e$  par la condition aux limites, puisque  $p_e$  est la variable analysée pour la convergence.
6. L'étape suivante consiste à actualiser cette différence de pression dans la valeur de  $p(0)$ , en obtenant une nouvelle valeur pour la pression au début du joint. Ainsi, à travers la condition limite à l'entrée, nous estimons la nouvelle valeur de  $p_s$ .
  7. Compte tenu de cette nouvelle valeur, on recalcule au moyen de l'équation (3.32) la vitesse  $W_0$  qui a été attribuée précédemment de façon arbitraire.
  8. De cette manière, la convergence pour une erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ , supposée pour les exemples présentés ici, est vérifiée en fonction de la convergence de la méthode.

3.3.3.2. Solution pour joints étagé

Les joints étagés peuvent être représentés comme une combinaison de joints cylindriques adjacents, où à la jonction de ces joints une autre chute de pression brutale se produit en raison de la perte d'admission, se référant au deuxième joint, qui dans le cas présent a toujours un jeu radial plus petit que le premier joint. La **figure 3.6** montre l'organigramme de la solution des joints étagés.

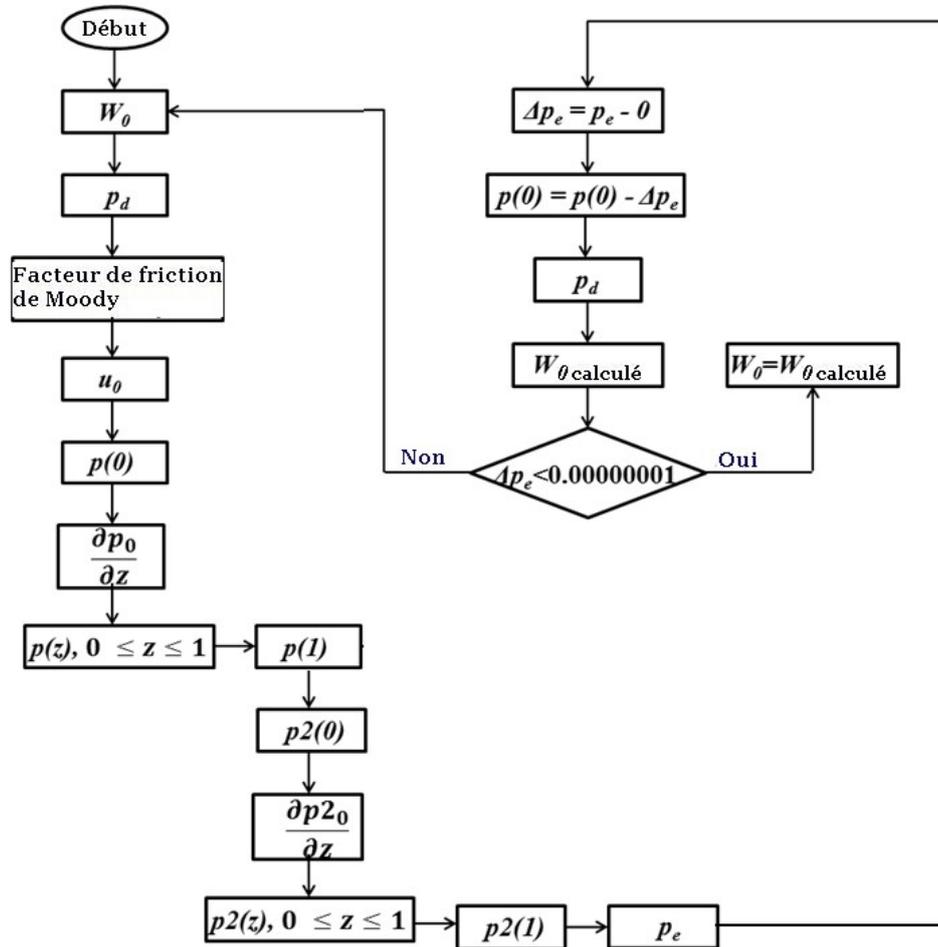


Fig 3.6: Diagramme de solution pour  $u_0$ ,  $p_0$  et  $W_0$  pour les joints étagé

Comme pour les joints cylindriques et coniques, la solution des joints étagés commence par l'attribution d'une valeur arbitraire à la vitesse  $W_0$  et de même, la valeur de la pression  $P_d$  est déterminée à partir de l'équation (3.32). Le même modèle de facteur de friction, Moody, a été utilisé pour les comparaisons.

L'étape suivante consiste à déterminer la valeur de la vitesse circonférentielle  $u$ , en intégrant de nouveau à travers un intégrateur Runge-Kutta l'équation (3.21) du mouvement circonférentiel. Cependant, pour ce type de joint, il faut intégrer deux fois cette équation, se référant chacune à un joint cylindrique, la vitesse initiale du joint suivant étant la vitesse finale calculée sur le joint précédent.

La procédure de détermination de la distribution de pression, le long du joint étagé, est similaire à celle présentée pour le joint cylindrique et conique. Ainsi, on utilisant les équations (3.34) et (3.35) on détermine la pression  $p(I)$  à la fin du premier joint. Après l'analyse de la première section du joint, il est nécessaire d'ajouter une perte soudaine de charge, causée par l'entrée dans la deuxième section du joint, de la même manière que cela se produit dans l'entrée déjà analysée.

Par conséquent, l'équation (3.36) est utilisée pour calculer  $p_2(0)$ . Cette équation est seulement une modification de l'équation (3.26), qui représente la condition limite à l'entrée du joint d'écoulement.

$$p(I) - p_2(0) = \frac{(I + \xi)}{2} w_2(0) = \frac{(I + \xi)}{2h_2(0)} \quad (3.36)$$

Compte tenu de la valeur de  $p_2(0)$ , qui représente la pression au début de la deuxième section du joint, nous devons à nouveau calculer la distribution de pression dans toute cette section en utilisant la formulation de la quantité de mouvement axial sous la forme de volumes finis, représentés par les équations (3.34) et (3.35). Ainsi, à partir de l'équation (3.27), qui représente la condition limite à la sortie du joint d'écoulement, la valeur de  $p$  est estimée.

De la même manière que pour les joints cylindriques et coniques,  $p_e$  était considéré comme nul, de sorte que l'interaction se produit, de la même manière que pour le joint cylindrique et conique, jusqu'à ce que la valeur calculée de cette variable approche la valeur estimée (nulle), déterminant, de même, une erreur de l'ordre de  $10^{-8}$ .

De même, la méthode des volumes finis utilisée est Upwind (MALISKA, 2004), puisque la valeur limite du volume  $p_2(I)$  est inconnue.

### 3.4 SOLUTION PAR VOLUMES FINIS POUR ROTOR EXCENTRÉ

La solution pour rotor centré a permis de déterminer la perte de charge  $\Delta P$  et la distribution de vitesse circonférentielle  $U$  pour cette configuration. Cependant, afin d'obtenir les coefficients dynamiques et en raison du faible mouvement du rotor par rapport à la position d'équilibre, il est nécessaire d'appliquer une perturbation dans le système.

#### 3.4.1. Simplification des équations gouvernantes

Pour déterminer les forces de réaction, une petite perturbation doit être appliquée au système rotor-joint mécanique. Ainsi, cette perturbation est appliquée au jeu  $h$  du joint, à la vitesse axiale  $w$ , à la vitesse circonférentielle  $u$  et la à pression  $p$ . Les équations (3.37) à (3.40) représentent les variables de perturbation introduites, qui seront substituées dans les équations (3.1) à (3.3).

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 \quad (3.37)$$

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 \quad (3.38)$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 \quad (3.39)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 \quad (3.40)$$

#### 1°. Simplification de l'équation de conservation de masse

L'équation de conservation de masse (3.1) peut être représentée sous la forme de l'équation (3.41)

$$\frac{\partial(h_0 + \varepsilon h_1)}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} \frac{\partial[(h_0 + \varepsilon h_1)(u_0 + \varepsilon u_1)]}{\partial \theta} + \frac{\partial[(h_0 + \varepsilon h_1)(w_0 + \varepsilon w_1)]}{\partial z} = 0 \quad (3.41)$$

Considérant  $h_0$  et  $u_0$  constantes par rapport à  $\theta$ , comme pour le cas du rotor centré et en négligeant les termes d'ordre supérieur dans  $\varepsilon$ , on a:

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} (h_0 \frac{\partial(u_1)}{\partial \theta} + u_0 \frac{\partial(h_1)}{\partial \theta}) + \frac{\partial(h_0 w_1)}{\partial z} + \frac{\partial(h_1 w_0)}{\partial z} = 0 \quad (3.42)$$

Réaffectant les termes de l'équation (3.42) et rappelant que  $w_0 = 1/h_0$ , nous avons l'équation (3.43).

$$b \frac{L}{R} h_0 \frac{\partial(u_1)}{\partial \theta} + \frac{\partial(h_0 w_1)}{\partial z} = - \frac{\partial h_1}{\partial \tau} - b \frac{L}{R} u_0 \frac{\partial(h_1)}{\partial \theta} + \frac{h_1}{h_0^2} \frac{\partial(h_0)}{\partial z} \quad (3.43)$$

### 2°. Simplification de l'équation de quantité de mouvement axial

L'équation de la quantité de mouvement axial (3.2) est présentée sous la forme de l'équation (3.44), après les substitutions des équations (3.37) à (3.40).

$$\begin{aligned}
 & - (h_0 + \varepsilon h_1) \frac{\partial (p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial z} = \frac{(w_0 + \varepsilon w_1)}{2} u^s \gamma^s \frac{L}{C_r} + \frac{(w_0 + \varepsilon w_1)}{2} u^r \gamma^r \frac{L}{C_r} \\
 & + (h_0 + \varepsilon h_1) \left[ \frac{\partial (w_0 + \varepsilon w_1)}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} (u_0 + \varepsilon u_1) \frac{\partial (w_0 + \varepsilon w_1)}{\partial \theta} + (w_0 + \varepsilon w_1) \frac{\partial (w_0 + \varepsilon w_1)}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

En ce qui concerne l'équation de conservation de masse, les termes d'ordre supérieur ont également été négligés, de même que le remplacement des termes qui englobent uniquement l'analyse de l'axe central, puisque ces termes ont déjà été résolus. Ainsi, l'équation du mouvement axial peut être représentée par l'équation (3.45).

$$\begin{aligned}
 & -h_0 \frac{\partial p_1}{\partial z} - h_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} = \frac{w_1}{2} u^s \gamma^s \frac{L}{C_r} + \frac{w_1}{2} u^r \gamma^r \frac{L}{C_r} + h_0 \frac{\partial w_1}{\partial \tau} - h_1 \frac{\partial w_0}{\partial \tau} \\
 & + \left( b \frac{L}{R} \right) \left( u_1 h_0 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + u_0 h_1 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + u_0 h_0 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right) + w_1 h_0 \frac{\partial w_0}{\partial z} + w_0 h_1 \frac{\partial w_0}{\partial z} + w_0 h_0 \frac{\partial w_1}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (3.45)$$

En utilisant des variables de frottement génériques  $\gamma^s$  et  $\gamma^r$  qui peuvent être calculées au moyen d'expressions spécifiques, pour tout modèle de frottement, dans ce cas Moody, et considérant que  $h_0$  et  $u_0$  sont constantes par rapport à  $\theta$  et au temps, on obtient la relation (3.46).

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} + A_{2z} u_1 + A_{3z} w_1 + \left[ \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \left( b \frac{L}{R} \right) u_0 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + w_0 \frac{\partial w_1}{\partial z} \right] = A_{1z} h_1 \quad (3.46)$$

### 3°. Simplification de l'équation de quantité de mouvement circonférentiel

En ce qui concerne l'équation de la vitesse circonférentielle (3.3) est donnée sous la forme de l'équation (3.47) après la substitution des équations (3.37) à (3.40).

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(h_0 + \varepsilon h_1)}{b} \frac{L}{R} \frac{\partial (p_0 + \varepsilon p_1)}{\partial \theta} = \frac{(u_0 + \varepsilon u_1)}{2} u^s \gamma^s \frac{L}{C_r} + \frac{[(u_0 + \varepsilon u_1) - 1]}{2} u^r \gamma^r \frac{L}{C_r} \\
 & + (h_0 + \varepsilon h_1) \left[ \frac{\partial (u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial \tau} + b \frac{L}{R} (u_0 + \varepsilon u_1) \frac{\partial (u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial \theta} + (w_0 + \varepsilon w_1) \frac{\partial (u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial z} \right]
 \end{aligned} \quad (3.47)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur et en remplaçant les termes exclusivement pour la solution de l'axe centré, nous obtenons l'équation (3.48).

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{b} \left( \frac{L}{R} \right) \left( h_0 \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + h_1 \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) = \frac{u_1}{2} u^s \gamma^s \frac{L}{C_r} + \frac{(u_1 - 1)}{2} u^r \gamma^r \frac{L}{C_r} + h_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + h_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \\
 & + \left( b \frac{L}{R} \right) \left( u_0 h_1 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + u_1 h_0 \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + u_0 h_0 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + w_0 h_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} + w_1 h_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} + w_0 h_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}
 \end{aligned} \quad (3.48)$$

En utilisant les mêmes variables génériques, appliquées dans l'équation du moment axial, et les mêmes considérations pour le frottement, on obtient l'équation (3.49).

$$\frac{1}{b} \left( \frac{L}{R} \right) \left( \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \right) + A_{2\theta} u_1 + A_{3\theta} w_1 + \left[ \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \left( b \frac{L}{R} \right) \left( u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) w_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] A_{1\theta} h_1 \quad (3.49)$$

Les coefficients des équations (3.43), (3.46) et (3.49) sont des fonctions de la solution du problème pour le rotor centré, et sont donc connus pour cette procédure de calcul. La solution des équations gouvernantes du fluide a été résolue en utilisant le modèle de frottement de Moody's, pour une comparaison ultérieure avec la référence bibliographique spécifique (CHILDS, 1993).

D'après Childs (1993), les facteurs  $A_{iz}$  et  $A_{i\theta}$ , pour Moody, sont définis par les équations (3.50) à (3.55):

$$A_{iz} = \frac{w_0}{2h_0^2} \left\{ \sigma^s u_0^s \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{a_1}{\gamma^s} \right) \right] + \sigma^r u_0^r \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{a_1}{\gamma^r} \right) \right] \right\} \quad (3.50)$$

$$A_{2z} = \frac{w_0 b^2}{2h_0^2} \left[ \frac{\sigma^s}{u_0^s} u_0 (1 + b^s) + \frac{\sigma^r}{u_0^r} (u_0 - 1) (1 + b^r) \right] \quad (3.51)$$

$$A_{3z} = \frac{1}{2h_0} \left\{ \frac{\sigma^s}{u_0^s} \left[ (u_0^s)^2 + w_0^2 (1 + b^s) \right] + \frac{\sigma^r}{u_0^r} \left[ (u_0^r)^2 + w_0^2 (1 + b^r) \right] - \frac{1}{h_0} \frac{dh_0}{dz} \right\} \quad (3.52)$$

$$A_{1\theta} = \frac{1}{2h_0^2} \left\{ \sigma^s u_0 u_0^s \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{a_1}{\gamma^s} \right) \right] + \sigma^r (u_0 - 1) u_0^r \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{a_1}{\gamma^r} \right) \right] \right\} \quad (3.53)$$

$$A_{2\theta} = \frac{1}{2h_0^2} \left\{ \frac{\sigma^s}{u_0^s} \left[ (u_0^s)^2 + b^2 u_0^2 (1 + b^s) \right] + \frac{\sigma^r}{u_0^r} \left[ (u_0^r)^2 + b^2 (u_0 - 1)^2 (1 + b^r) \right] \right\} \quad (3.54)$$

$$A_{3\theta} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma^s}{u_0^s} u_0 (b^2 u_0^2 - b^s w_0^2) + \frac{\sigma^r}{u_0^r} (u_0 - 1) [b^2 (u_0 - 1)^2 - b^r w_0^2] \right\} \quad (3.55)$$

Où :

$$b = \frac{R\omega}{W} \quad (3.56)$$

$$\gamma^s = a_1 \left[ 1 + \left( \frac{a_2^s}{h} + \frac{a_3}{hu^s} \right)^{1/3} \right] \quad (3.57)$$

$$\gamma^r = a_1 \left[ 1 + \left( \frac{a_2^r}{h} + \frac{a_3}{hu^r} \right)^{1/3} \right] \quad (3.58)$$

$$B_0^s = \frac{a_2^s}{h_0} + \frac{a_3}{h_0 u_0^s} \quad (3.59)$$

$$B_0^r = \frac{a_2^r}{h_0} + \frac{a_3}{h_0 u_0^r} \quad (3.60)$$

$$b^s = -\frac{1}{3B_0^s} \left(1 - \frac{a_1}{\gamma^s}\right) \left(\frac{a_3}{h_0 u_0^s}\right) \quad (3.61)$$

$$b^r = -\frac{1}{3B_0^r} \left(1 - \frac{a_1}{\gamma^r}\right) \left(\frac{a_3}{h_0 u_0^r}\right) \quad (3.62)$$

Sachant que les coefficients pour la solution par Moody sont:

$$a_1 = 1.375 \times 10^{-3} \quad (3.63)$$

$$a_2^r = 2 \times 10^4 \varepsilon^r \quad (3.64)$$

$$a_2^s = 2 \times 10^4 \varepsilon^s \quad (3.65)$$

$$a_3 = \frac{10^6}{\Re_0} \quad (3.66)$$

Avec le nombre de Reynolds donné par

$$\Re_0 = \frac{2 \bar{C} r W_0 \rho}{\mu} \quad (3.67)$$

### 3.4.2. Conditions aux limites

Pour la détermination des conditions aux limites considérant une petite perturbation dans le système, les équations (3.37) à (3.40) doivent être substituées dans les équations (3.68) et (3.69), déjà représentées dans la forme adimensionnelle, appliquant ainsi les variables perturbées du système, obtenant ainsi les équations (3.70) et (3.71).

$$p_d - p(0) = \frac{(1+\xi)}{2} w^2(0) \quad (3.68)$$

$$p(1) + \frac{(1+\xi_e)}{2} w^2(1) = p_e \quad (3.69)$$

$$p_d - p_0(0) - \varepsilon p_1(0) = \frac{(1+\xi)}{2} w_0^2(0) + \frac{(1+\xi)}{2} 2w_0 w_1 + \frac{(1+\xi)}{2} \varepsilon^2 w_1^2 \quad (3.70)$$

$$p_0 + \varepsilon p_1 + \frac{(1-\xi_e)}{2} w_0^2 + \frac{(1-\xi_e)}{2} 2w_0 w_1 + \frac{(1-\xi_e)}{2} \varepsilon^2 w_1^2 = p_e \quad (3.71)$$

En éliminant les termes d'ordre supérieur et en remplaçant la solution pour le système centrée dans les équations (3.70) et (3.71), on obtient les équations (3.72) et (3.73).

$$p_1(0, \theta, \tau) = -(1 + \xi) w_1(0, \theta, \tau) w_0(0) = -\frac{(1 + \xi)}{h_0(0)} w_1(0, \theta, \tau) \quad (3.72)$$

$$p_1(1, \theta, \tau) = -(1 + \xi_e) w_1(1, \theta, \tau) w_0(1) = -\frac{(1 + \xi_e)}{h_0(1)} w_1(1, \theta, \tau) \quad (3.73)$$

Les équations (3.43), (3.46) et (3.49) peuvent encore être simplifiées, de sorte que la dépendance temporelle soit éliminée. Pour cela, nous considérerons la solution approximative en séparant les variables selon CHILDS (1984). Ainsi, la fonction de jeu, (équation (3.37)), peut être décrite comme une fonction des composantes vectorielles du déplacement du joint:

$$h = h_0 - x(\tau) \cos \theta - y(\tau) \sin \theta \quad (3.74)$$

Où :

$$x = \frac{X}{C_r} \text{ Variable adimensionnelle de la direction x.}$$

$$y = \frac{Y}{C_r} \text{ Variable adimensionnelle de la direction y.}$$

Ensuite, à partir des équations (3.37) et (3.74), il est possible de déterminer la variable de perturbation de l'écart de soudure par l'équation (3.75):

$$\varepsilon h_1 = -x(\tau) \cos \theta - y(\tau) \sin \theta \quad (3.75)$$

À partir de l'équation (3.75), nous supposons pour les autres variables perturbées, la solution en séparant les variables (CHILDS, 1984), comme indiqué dans les équations (3.76) à (3.78).

$$w_1(z, \tau, \theta) = w_{1\cos}(z, \tau) \cos \theta + w_{1\sin}(z, \tau) \sin \theta \quad (3.76)$$

$$u_1(z, \tau, \theta) = u_{1\cos}(z, \tau) \cos \theta + u_{1\sin}(z, \tau) \sin \theta \quad (3.77)$$

$$p_1(z, \tau, \theta) = p_{1\cos}(z, \tau) \cos \theta + p_{1\sin}(z, \tau) \sin \theta \quad (3.78)$$

Les équations (3.75) à (3.78) peuvent être substituées dans les équations (3.43), (3.46) et (3.49) afin de fournir six équations réelles en termes de cosinus et de coefficients sinus. Ces équations peuvent être réduites à trois équations complexes en introduisant les variables complexes présentées dans les équations (3.79) à (3.82).

$$\varepsilon h_1 = -(x + jy) \quad (3.79)$$

$$w_1 = w_{1\cos} + j w_{1\sin} \quad (3.80)$$

$$u_1 = u_{1\cos} + j u_{1\sin} \quad (3.81)$$

$$p_1 = p_{1\cos} + j p_{1\sin} \quad (3.82)$$

La dépendance du temps aux équations directrices du fluide peut être éliminée en supposant le mouvement de précession du joint, sous la forme de l'équation (3.83).

$$\varepsilon h_1 = -\left(\frac{R_0}{C_r}\right) e^{j\Omega t} = r_0 e^{jf\omega T \tau} \quad (3.83)$$

Où:

- $f = \frac{\Omega}{\omega}$  Fréquence sans dimension.
- $\Omega$  Vitesse de précession du joint [rad / s].
- $R_0$  Rayon de précession du joint [m].
- $r_0$  Relation entre le rayon de précession du joint et le jeu radial moyen entre l'arbre et le joint.

Compte tenu de la fréquence de précession du joint d'étanchéité également pour les autres variables, on obtient les équations (3.84) à (3.87).

$$h_1 = -\frac{r_0}{\varepsilon} e^{jf\omega T \tau} \quad (3.84)$$

$$w_1 = \overline{w_1} e^{jf\omega T \tau} \quad (3.85)$$

$$u_1 = \overline{u_1} e^{jf\omega T \tau} \quad (3.86)$$

$$p_1 = \overline{p_1} e^{jf\omega T \tau} \quad (3.87)$$

De l'application des équations (3.84) à (3.87) dans les équations (3.43), (3.46) et (3.49), la dépendance temporelle est éliminée, et de plus les équations directrices du fluide résultent en trois équations complexes, qui peuvent être représentés sous forme de matrice, comme indiqué dans l'équation (3.43).

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{u_1} \\ \overline{p_1} \end{Bmatrix} + [A(f, z)] \begin{Bmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{u_1} \\ \overline{p_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

Où :

$$[A(f, z)] = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_0} \frac{dh_0}{dz} & -j\omega T & 0 \\ h_0 A_{3\theta} & h_0 (A_{2\theta} + j\Gamma T) & -j \frac{h_0}{b} \left(\frac{L}{R}\right) \\ A_{3z} - \frac{1}{h_0^2} \frac{dh_0}{dz} + j\Gamma T & A_{2z} + j \frac{\omega T}{h_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{h_0^3} \frac{dh_0}{dz} + j\Gamma T \\ -h_0 A_{1\theta} \\ -\left( A_{1z} - \frac{1}{h_0^4} \frac{dh_0}{dz} + j \frac{\Gamma T}{h_0^2} \right) \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\Gamma T = \omega [f - u_0(z)] T \quad (3.91)$$

### 3.4.3. Solution par volumes finis

#### 3.4.3.1. Solution pour joints cylindriques et coniques

Pour la solution de l'équation (3.88), trois conditions aux limites sont requises, car il s'agit d'un système de trois équations différentielles de premier ordre. La première condition limite, et la plus simple, est donnée par l'équation (3.92). Cette équation indique que le mouvement du joint ne perturbe pas la vitesse circonférentielle immédiatement en amont du joint (CHILDS, 1993).

$$u_1(0, \theta, \tau) = 0 \quad (3.92)$$

En utilisant la transformation de variable, pour éliminer la dépendance temporelle, cette première condition aux limites peut être représentée par l'équation (3.93).

$$\bar{u}_1(0) = 0 \quad (3.93)$$

Les conditions aux limites pour les variables de pression et vitesse axiale perturbée sont obtenues à partir des équations aux conditions aux limites pour la pression, en considérant l'axe centré, (Equations (3.26) et (3.27)).

La même méthode pour obtenir les équations directrices est effectuée, c'est-à-dire que les variables de la pression, du jeu du joint, de la vitesse circonférentielle et de la vitesse axiale sont remplacées par les variables de perturbation ((3.37) à (3.40)) dans les équations (3.26) et (3.27). Les conditions aux limites, appliquant une perturbation dans le système, sont ensuite décrites par les équations (3.94) et (3.95).

$$p_1(0, \theta, \tau) = -\frac{(1+\xi)}{h_0(0)} w_1(0, \theta, \tau) \quad (3.94)$$

$$p_1(1, \theta, \tau) = -\frac{(1+\xi_e)}{h_0(1)} w_1(1, \theta, \tau) \quad (3.95)$$

En appliquant aux équations (3.94) et (3.95) la variable de précession qui élimine la dépendance au temps (équations (3.84) à (3.87)), on obtient les conditions aux limites montrées par les relations (3.96) et (3.97).

$$\bar{p}_1(0) = -\frac{(1+\xi)}{h_0(0)} \bar{w}_1(0) \quad (3.96)$$

$$\bar{p}_1(1) = -\frac{(1+\xi_e)}{h_0(1)} \bar{w}_1(1) \quad (3.97)$$

Selon MEIROVITCH (1990), l'équation (3.88) peut être résolue en approchant la matrice de transition, tout en satisfaisant aux conditions aux limites représentées par les équations (3.93), (3.96) et (3.97). Pour cela, nous pouvons représenter l'équation (3.88) sous la forme d'états, en considérant que:

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{p}_1 \end{Bmatrix} \text{ Vecteur d'état.} \quad (3.98)$$

$$\bar{y} = \begin{Bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \bar{g}_3 \end{Bmatrix} \text{ Terme source.} \quad (3.99)$$

$$C = \frac{r_0}{\varepsilon} \text{ Constant} \quad (3.100)$$

Ainsi, il est possible d'obtenir l'équation (3.101):

$$\frac{d\bar{X}}{dz} = -[A(f, z)]\bar{X} + C\bar{y} \quad (3.101)$$

Pour obtenir la matrice de transition  $\phi(f, z)$  il est nécessaire de résoudre la solution homogène de l'équation (3.101), (vecteur), successivement pour les conditions aux limites étant  $(1, 0, 0)$ ;  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . Ces trois conditions aux limites à résoudre représentent l'influence de chaque variable individuelle dans la résolution du problème. Puisque l'analyse est effectuée sans dimension, la valeur maximale de l'influence que les conditions de contour peuvent causer est l'unité elle-même.

La matrice  $\phi(f, z)$  est composée par les vecteurs dans les conditions aux limites respectives. En fait, il n'y a pas de raison pour la solution de la deuxième condition aux limites, puisqu'il est déjà connu que la vitesse circonférentielle immédiatement à l'entrée du joint est égale à zéro (équation (3.93)) (CHILDS, 1993).

Selon **Childs (1993)**, la solution particulière doit être résolue avec des conditions initiales nulles et considérer  $r_0/\varepsilon = 1$ , c'est-à-dire que la relation entre le rayon de précession du joint et son jeu radial est égale à la valeur de la perturbation appliquée dans le système, obtenant ainsi le vecteur  $\vec{v}(f, z)$ . Il est important de souligner que lorsqu'il n'y a pas de perturbation dans le système, il y a aussi le rayon de précession du joint, puisque ce composant sera centré par rapport à l'axe.

Ainsi, l'utilisation de la méthode des volumes finis, connue sous le nom d'Upwind, intègre l'équation homogène et particulière. La méthode Upwind est également utilisée dans ce cas, car la condition limite finale du problème est inconnue, seule la condition initiale. De plus, pour ce problème, il n'est pas nécessaire de résoudre une méthode itérative, puisque l'analyse du système perturbé dépend des variables de l'axe centré, qui ont été calculées de cette manière.

Les équations **(3.102)** et **(3.103)** représentent respectivement l'équation homogène et l'équation particulière, écrite sous la forme de volumes finis. Le vecteur représente les vecteurs de conditions initiales, supposées précédemment.

$$\bar{X}_i = \left[ [I] + [A]_i z_i \right]^{-1} \left( \left[ [I] + [A]_{i-1} z_{i-1} \right] \bar{X}_{i-1} + \bar{X}_{ini} \right) \quad (3.102)$$

$$\bar{X}_i = \left[ [I] + [A]_i z_i \right]^{-1} \left( \left[ [I] + [A]_{i-1} z_{i-1} \right] \bar{X}_{i-1} + C y_i z_i - C y_{i-1} z_{i-1} \right) \quad (3.103)$$

Après la solution de l'équation **(3.102)**, pour les trois conditions initiales spécifiées, il est possible d'obtenir une matrice, dite matrice de transition  $\phi(f, z)$ , dans laquelle chaque ligne présente respectivement chacune de ces solutions. La solution de l'équation **(3.103)**, à son tour, fournit le vecteur  $\vec{v}(f, z)$ , utilisé dans la solution globale du système (équation **(3.105)**).

La solution globale (Equation **(3.104)**) de l'équation **(3.101)** est composée de la solution homogène,  $(\bar{X}_h)$ , qui ne considère pas le terme source, et la solution particulière,  $(\bar{X}_p)$ , obtenue en résolvant l'équation entière.

$$\bar{X} = \bar{X}_h + \bar{X}_p \quad (3.104)$$

Ainsi, la solution complète pour le système perturbé est donnée par l'équation **(3.105)**.

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{p}_1 \end{Bmatrix} = [\phi(f, z)] \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(0) \\ \bar{u}_1(0) \\ \bar{p}_1(0) \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} r_0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1(f, z) \\ v_2(f, z) \\ v_3(f, z) \end{Bmatrix} \quad (3.105)$$

L'équation (3.105) est une fonction  $f$ , relation entre la fréquence de précession du joint et la fréquence de rotation de l'axe, et peut être résolue dans la plage de  $z = [0, I]$ . Pour une plage de  $z$ , une valeur donnée de  $f$  est considérée, éliminant ainsi la dépendance de la solution sur cette variable.

Cependant, pour la solution de l'équation (3.69), il est nécessaire de connaître les valeurs de  $\bar{w}_1(0)$  et  $\bar{p}_1(0)$ , mais les équations de condition aux limites ((3.96) et (3.97)) ne sont pas suffisantes pour cette solution. Par conséquent, nous évaluons l'équation (3.105) en  $z = I$ , en appliquant la condition aux limites connue (équation (3.93)), obtenant ainsi des équations (3.106) et (3.107).

$$\bar{w}_1(1) = \phi_{11}(1)\bar{w}_1(0) + \phi_{13}(1)\bar{p}_1(0) + \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)v_1(1) \quad (3.106)$$

$$\bar{p}_1(1) = \phi_{31}(1)\bar{w}_1(0) + \phi_{33}(1)\bar{p}_1(0) + \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)v_3(1) \quad (3.107)$$

Comme il y a deux inconnues, deux équations sont nécessaires pour leur solution. La première a déjà été obtenue et est représenté par l'équation (3.96). Pour déterminer la deuxième équation, nous remplaçons l'équation (3.97) dans l'équation (3.107), ce qui donne l'équation (3.108) qui, en combinaison avec l'équation (3.106), détermine l'équation (3.109).

$$-\frac{(1-\xi_\varepsilon)}{h_0(1)}\bar{w}_1(1) = \phi_{31}(1)\bar{w}_1(0) + \phi_{33}(1)\bar{p}_1(0) + \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right)v_3(1) \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(0) \left[ \phi_{31}(1) + \frac{(1-\xi_\varepsilon)}{h_0(1)}\phi_{11}(1) \right] + \bar{p}_1(0) \left[ \phi_{33}(1) + \phi_{13}(1) + \frac{(1-\xi_\varepsilon)}{h_0(1)} \right] \\ = \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right) \left[ -v_3(1) - \frac{(1-\xi_\varepsilon)}{h_0(1)}v_1(1) \right] \end{aligned} \quad (3.109)$$

Les équations (3.96) et (3.109) peuvent être écrites sous forme matricielle, comme indiqué dans l'équation (3.110).

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(0) \\ \bar{p}_1(0) \end{Bmatrix} = \left(\frac{r_0}{\varepsilon}\right) \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (3.110)$$

Où

$$B_{11} = \frac{(1 + \xi)}{h_0(0)} \tag{3.111}$$

$$B_{12} = 1 \tag{3.112}$$

$$B_{21} = \phi_{31}(1) + \frac{(1 - \xi_\epsilon)}{h_0(1)} \phi_{11}(1) \tag{3.113}$$

$$B_{22} = \phi_{33}(1) + \frac{(1 - \xi_\epsilon)}{h_0(1)} \phi_{13}(1) \tag{3.114}$$

$$b_1 = 0 \tag{3.115}$$

$$b_2 = -\frac{(1 - \xi_\epsilon)}{h_0(1)} v_1(1) - v_3(1) \tag{3.116}$$

La solution de l'équation (3.110) fournit les conditions aux limites nécessaires pour résoudre le problème global donné par l'équation (3.105). Le résultat final est obtenu sous la forme complexe, puisque le jeu de joint, la pression, la vitesse axiale et les variables circonférentielles étaient représentées selon les équations (3.84), (3.85), (3.86) et (3.87), et donc, peut être représenté sous la forme de l'équation (3.117).

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{p}_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1cos} + jq_{1sen} \\ q_{2cos} + jq_{2sen} \\ q_{3cos} + jq_{3sen} \end{Bmatrix} \tag{3.117}$$

L'organigramme de la figure 3.7 représente schématiquement la solution pour les joints plats cylindriques et coniques, montrant les étapes décrites dans cette section.

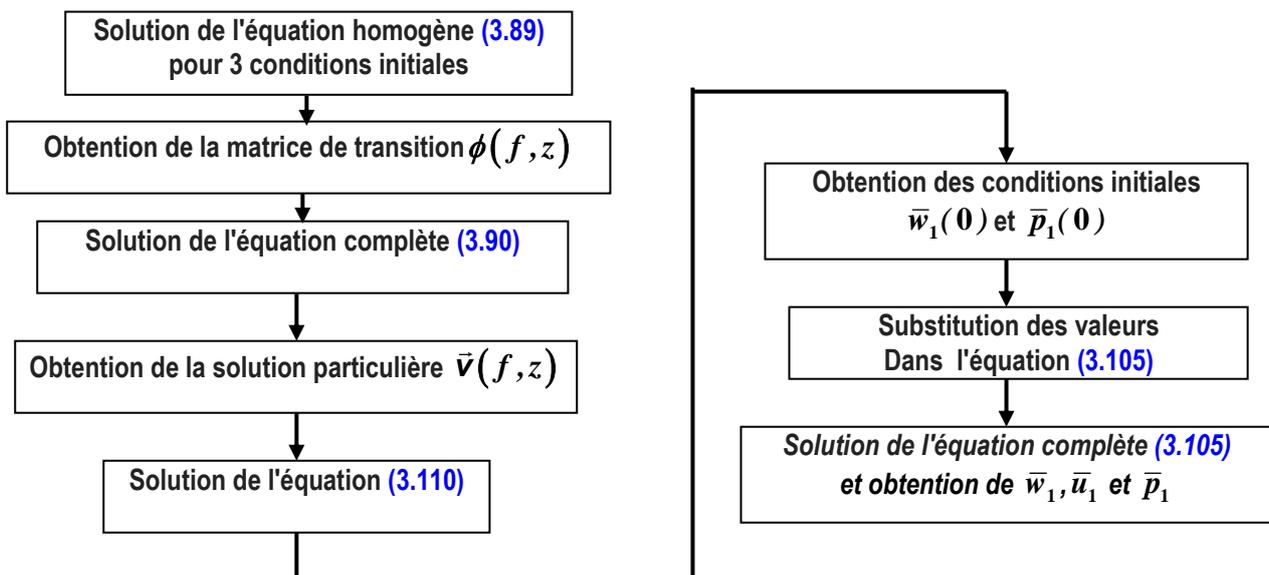


Fig 3.7: Organigramme de la solution de joints cylindriques et coniques appliquant une petite perturbation dans le système

### 3.4.3.2. Solution pour joints étagé

La solution pour les joints étagés suit la même séquence présentée précédemment. Cependant, il a été considéré pour le modèle d'analyse que ce joint est représenté par deux sections de joints cylindriques, ils doivent être analysés individuellement, afin d'obtenir, pour chaque élément, une distribution perturbée de pression. La première section présente la condition initiale de la vitesse circonférentielle donnée par l'équation (3.93), et par conséquent la solution de cet élément suit la le processus déjà décrit. Déjà pour la deuxième section du joint, cette condition est donnée par la valeur de sortie de la vitesse circonférentielle dans le premier joint. Ainsi, pour la deuxième section, il est nécessaire de résoudre l'équation homogène, équation (3.102), pour la condition initiale  $(0, 1, 0)$ . Comme la deuxième section du joint a une condition initiale de vitesse circonférentielle non nulle, la formulation pour la détermination des autres conditions initiales ne diffère de la rubrique précédente. Ainsi, en évaluant l'équation (3.105) en  $z = 1$ , on obtient les équations (3.118) et (3.119).

$$\bar{w}_1(1) = \phi_{11}(1)\bar{w}_1(0) + \phi_{12}(1)\bar{u}_1(0) + \phi_{13}(1)\bar{p}_1(0) + \left(\frac{r_0}{\epsilon}\right)v_1(1) \quad (3.118)$$

$$\bar{p}_1(1) = \phi_{31}(1)\bar{w}_1(0) + \phi_{32}(1)\bar{u}_1(0) + \phi_{33}(1)\bar{p}_1(0) + \left(\frac{r_0}{\epsilon}\right)v_3(1) \quad (3.119)$$

La première équation pour la résolution des conditions initiales reste l'équation (3.96). De même, pour déterminer la deuxième équation, on remplace l'équation (3.97) dans l'équation (3.119), ce qui donne l'équation (3.120) qui, combinée à l'équation (3.118), détermine la deuxième équation requise, représentée par l'équation (3.121).

$$-\frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)}\bar{w}_1(1) = \phi_{31}(1)\bar{w}_1(0) + \phi_{32}(1)\bar{u}_1(0) + \phi_{33}(1)\bar{p}_1(0) + \left(\frac{r_0}{\epsilon}\right)v_3(1) \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(0) \left[ \phi_{31}(1) + \frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)}\phi_{11}(1) \right] + \bar{p}_1(0) \left[ \phi_{33}(1) + \phi_{13}(1)\frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)} \right] = \\ \left(\frac{r_0}{\epsilon}\right) \left[ -v_3(1) - \frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)}v_1(1) \right] - \bar{u}_1(0) \left[ \frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)}\phi_{12}(1) + \phi_{32}(1) \right] \end{aligned} \quad (3.121)$$

Représentant les équations (3.96) et (3.121) de la même manière qu'au point 3.4.3.1, c'est-à-dire que dans la forme matricielle, nous avons l'équation (3.122).

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(0) \\ \bar{p}_1(0) \end{Bmatrix} = \left(\frac{r_0}{\epsilon}\right) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (3.122)$$

Où :

$$D_{11} = \frac{(1+\xi)}{h_0(0)} \quad (3.123)$$

$$D_{12} = 1 \tag{3.124}$$

$$D_{21} = \phi_{31}(1) + \frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)} \phi_{11}(1) \tag{3.125}$$

$$D_{22} = \phi_{33}(1) + \frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)} \phi_{13}(1) \tag{3.126}$$

$$d_1 = 0 \tag{3.127}$$

$$d_2 = -\frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)} v_1(1) - v_3(1) - \frac{(1-\xi_e)}{h_0(1)} \phi_{12}(1) \bar{u}_1(0) - \phi_{32}(1) \bar{u}_1(0) \tag{3.128}$$

L'organigramme de la **figure 3.8** montre, schématiquement, la solution pour les joints plats décalés, montrant comment procéder en relation avec les deux éléments considérés.

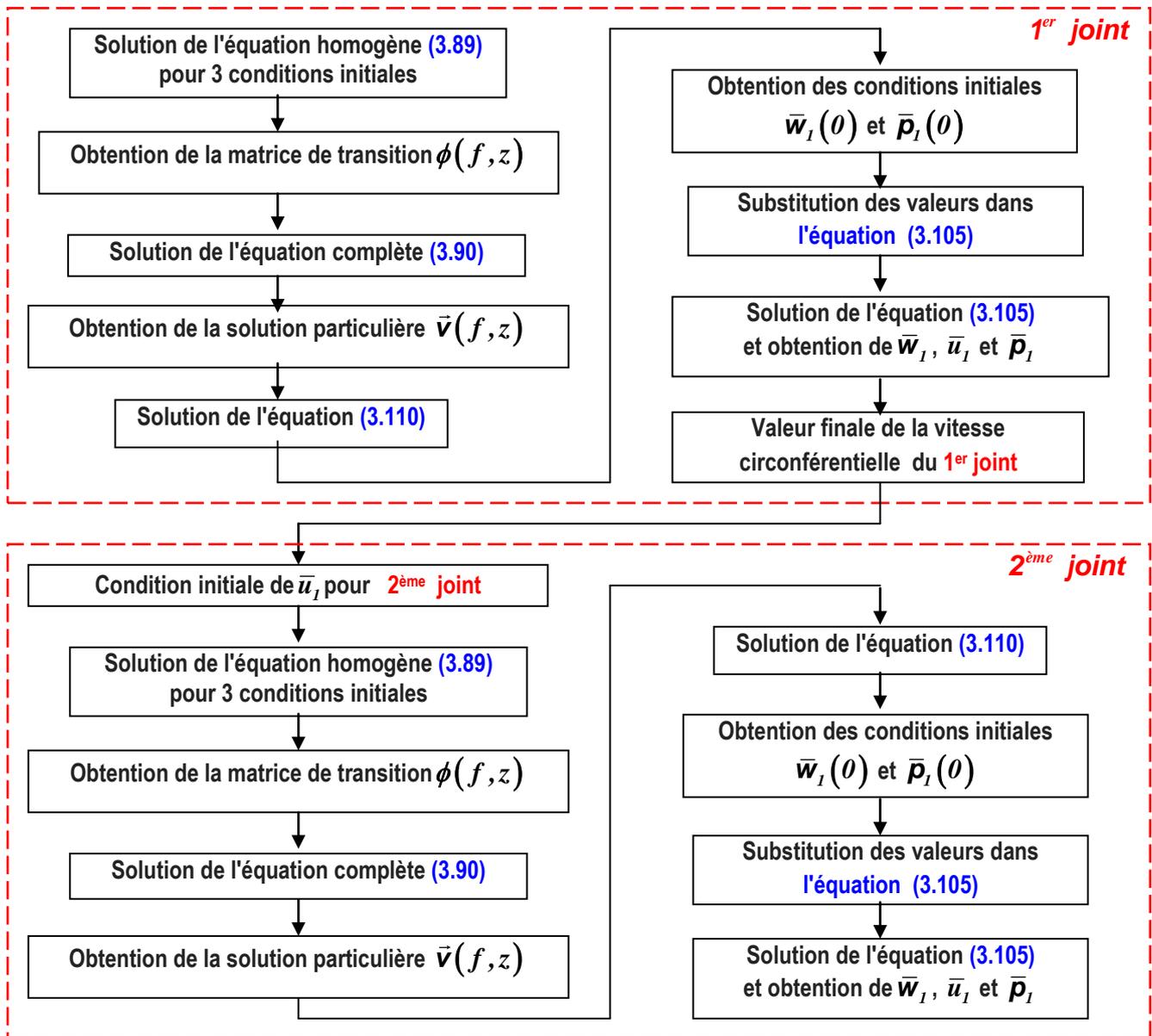
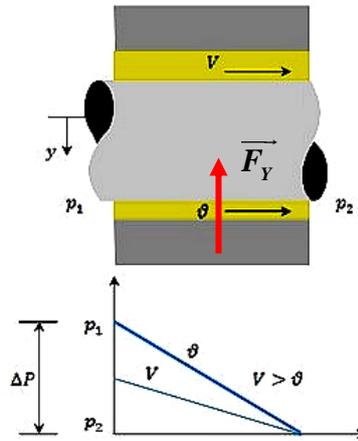


Fig 3.8: Organigramme de la solution du joint étagé avec perturbation

**3.5 DETERMINATION DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES**

**3.5.1 Evaluation de la force de rappel**

Un déplacement  $y$  dans la direction radiale de l'arbre, comme montré sur la **figure 3.9**, produit un plus petit espace entre le joint et l'arbre dans la direction de ce déplacement. La vitesse axiale du fluide est alors plus faible dans cette région par rapport à la région de plus grand jeu.



**Fig 3.9:** L'effet de **Lomakin** sur un joint plat, [11]

Selon **VANCE (1988)**, le principe de Bernoulli produit de plus fortes pressions dans la région la plus lente. Cette différence de pression, entre les deux régions, produit une force de rappel qui s'oppose au déplacement  $y$ , représenté par l'équation **(3.129)**.

$$F_Y = -K.y \tag{3.129}$$

La raideur radiale  $K$  est connue comme la rigidité directe de **LOMAKIN** (équation **(3.130)**), qui se produit même pour la rotation nulle de l'arbre. (**VANCE, 1988**).

$$K = 4.7 \left( \frac{\Delta P}{\lambda} \right) \left( \frac{\sigma}{1.5 + 2\sigma} \right)^2 R \tag{3.130}$$

Où:

$$\sigma = \frac{\lambda.L}{Cr} \tag{3.131}$$

Et

$$\lambda = \frac{0.079}{Re^{0.25}} \tag{3.132}$$

Avec:

- $F_y$  : force de rappel suivant la direction radiale  $OY$   $[N]$ .
- $K$  : coefficient de raideur direct (raideur directe Lomakin)  $[N/m]$ .
- $y$  : déplacement linéaire de l'arbre suivant la direction radiale  $OY$   $[m]$ .
- $R$  : rayon de l'étanchéité  $[m]$ .
- $\Delta P$  : différence de pression entre l'entrée et la sortie du joint  $[Pa]$ .
- $\lambda$  : facteur de friction pour le flux axial. Pour un écoulement turbulent  $\lambda$  dépend du nombre de Reynolds.
- $L$  : longueur ou portée axiale du joint  $[m]$ .
- $\bar{c}_r$  : jeu radial moyen du joint  $[m]$ .

La figure 3.10 montre schématiquement l'axe du système - Joint d'écoulement. On considère que le joint, de longueur  $L$ , ne bouge pas, et que l'arbre tourne avec la vitesse angulaire  $\omega$ . Le fluide s'écoule à travers le joint, présentant à l'entrée une pression  $P_1$  supérieure à  $P_2$  au niveau de la sortie. Lorsque l'arbre est dans une position excentrée par rapport au joint d'étanchéité, il se produit des forces de rappel  $F_x$  et  $F_y$ , qui agissent pour établir la position d'équilibre du système.

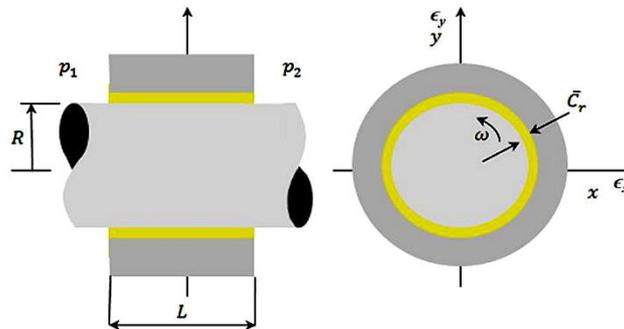


Fig 3.10: Représentation du système arbre-joint

Cependant, ces forces peuvent être linéarisées pour de petits déplacements. Pour les variations autour d'une position où l'axe et le joint sont centrés, la relation entre les déplacements et les forces de restitution détermine l'équation du mouvement représentée par l'équation (3.133).

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & c \\ -c & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & k \\ -k & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (3.133)$$

$M$  : Terme d'inertie du fluide  $[kg]$ .

$C$  : Coefficient d'amortissement direct  $[N.s/m]$ .

$c$  : Coefficient d'amortissement croisé  $[N.s/m]$ .

$K$  : Coefficient de raideur direct  $[N/m]$

$k$  : Coefficient de raideur croisée  $[N/m]$

$x$  : Déplacement linéaire de l'arbre suivant la direction  $OX$   $[m]$

$y$  : Déplacement linéaire de l'arbre suivant la direction  $OY$   $[m]$

$\dot{x}$  : Vitesse linéaire de l'arbre suivant la direction  $OX$   $[m/s]$

$\dot{y}$  : Vitesse linéaire de l'arbre suivant la direction  $OY$   $[m/s]$

$\ddot{x}$  : Accélération linéaire de l'arbre suivant la direction  $OX$   $[m/s^2]$

$\ddot{y}$  : Accélération linéaire de l'arbre suivant la direction  $OY$   $[m/s^2]$

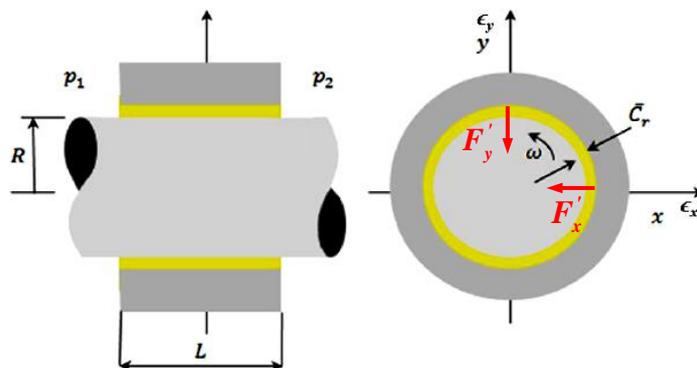
$F_x$  : Force de rappel suivant la direction  $OX$   $[N]$ .

$F_y$  : Force de rappel suivant la direction  $OY$   $[N]$ .

Bien que le joint illustré à la **figure 3.10** soit du type à plan cylindrique, l'équation (3.133) est également valable pour les joints plats et les joints étagés.

### 3.5.2 Forces de rappel et coefficients dynamiques

Après avoir calculé la pression, la vitesse axiale et circumférentielle, pour le système avec une petite perturbation appliquée, il faut calculer les forces de restitution, puis déterminer les coefficients dynamiques de raideur, d'amortissement et d'inertie. Les forces de réaction sont définies par les équations (3.134) et (3.135). Comme le montre la **figure 3.11**, représentée ici dessous, les forces de restitution ont un signe négatif car elles sont dans le sens inverse de la petite perturbation appliquée, celle-ci étant dans le même sens des axes  $X$  et  $Y$ .



**Fig 3.11** : Représentation du système arbre-joint

$$F_{X1} = -\varepsilon \int_0^L \int_0^{2\pi} P_1 \cos \theta R d\theta dz \quad (3.134)$$

$$F_{Y1} = -\varepsilon \int_0^L \int_0^{2\pi} P_1 \sin \theta R d\theta dz \quad (3.135)$$

Ou bien, de manière adimensionnelle, par les équations (3.136) et (3.137).

$$\frac{F_{Y1}}{F_0} = -\frac{\varepsilon}{C_d} \int_0^1 \int_0^{2\pi} P_1(\theta, z, t) \cos \theta d\theta dz = -\frac{\varepsilon \pi}{C_d} \int_0^1 P_{1\cos}(z, t) dz \quad (3.136)$$

$$\frac{F_{Y1}}{F_0} = -\frac{\varepsilon}{C_d} \int_0^1 \int_0^{2\pi} P_1(\theta, z, t) \sin \theta d\theta dz = -\frac{\varepsilon \pi}{C_d} \int_0^1 P_{1\sin}(z, t) dz \quad (3.137)$$

Où :

$$F_0 = 2 L R \Delta P \quad (3.138)$$

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 C_d \quad (3.139)$$

- $C_d$  : Coefficient de traînée
- $\bar{v}$  : Vitesse moyenne [m/s]

A partir des équations (3.136) et (3.137), on peut éliminer la dépendance des forces de réaction dans le temps en utilisant, ainsi que pour les équations directrices, le mouvement de précession du joint. Par conséquent, les forces de réaction dans le système sont données par l'équation (3.140). Le changement de coordonnées a été effectué puisque les coordonnées polaires  $r - \theta$  sont en mouvement de précession avec le rotor, à un taux  $\Omega = f \omega$

$$\frac{F_{rad1} + jF_{\theta1}}{F_0} = \frac{(F_{X1} + jF_{Y1}) e^{-jf\tau}}{F_0} = -\frac{\varepsilon \pi}{C_d} \int_0^1 (p_{1\cos} + jp_{1\sin}) e^{-jf\tau} dz = -\frac{\varepsilon \pi}{C_d} \int_0^1 \bar{P}_1 dz \quad (3.140)$$

Ainsi,

$$\frac{F_{rad1} + jF_{\theta1}}{F_0} = -\frac{\varepsilon \pi}{C_d} \left( \frac{r_0}{\varepsilon} \right) \int_0^1 (p_{3\cos} + jp_{3\sin}) dz \quad (3.141)$$

Par conséquent, nous pouvons calculer à partir de l'équation (3.140) une force radiale, par rapport à la partie réelle de la variable de pression, et une force tangentielle, par rapport à la partie imaginaire de la valeur de pression calculée, indiquée dans les équations (3.142) et (3.143).

$$\psi_{rad1}(f) = \left( \frac{F_{r1}}{F_0} \right) = -r_0 \frac{\pi}{C_d} \int_0^1 q_{3cos}(f, z) dz \quad (3.142)$$

$$\psi_{\theta1}(f) = \left( \frac{F_{\theta1}}{F_0} \right) = -r_0 \frac{\pi}{C_d} \int_0^1 q_{3sin}(f, z) dz \quad (3.143)$$

Les équations (3.142) et (3.143) sont calculées pour une gamme de valeurs de  $f$ , par comparaison avec la littérature spécifique,  $f \in [0, 2]$ . A chaque valeur de  $f$ , une valeur est obtenue pour les forces, donc, après avoir analysé cette plage de valeurs, la méthode des moindres carrée est utilisée pour l'interpolation linéaire et quadratique afin de déterminer les coefficients dynamiques, selon les Equations (3.144) et (3.145).

$$\psi_{rad1}(f) = -(\bar{K} + f\bar{c} - f^2\bar{M}) \quad (3.144)$$

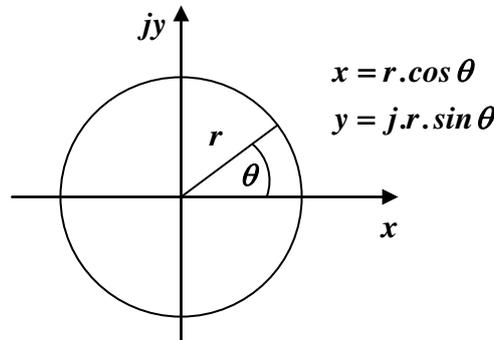
$$\psi_{\theta1}(f) = \bar{k} + f\bar{C} \quad (3.145)$$

Les équations (3.144) et (3.145) ont été obtenues à partir de l'équation (3.133), remplaçant les termes de déplacement, vitesse et accélération en fonction du terme de fréquence sans dimension,  $f$ , comme décrit dans les équations (3.146) et (3.147).

$$x = \bar{x}e^{-jf\tau}; \dot{x} = -j\bar{x}fe^{-jf\tau}; \ddot{x} = -\bar{x}f^2e^{-jf\tau} \quad (3.146)$$

$$y = \bar{y}e^{-jf\tau}; \dot{y} = -j\bar{y}fe^{-jf\tau}; \ddot{y} = -\bar{y}f^2e^{-jf\tau} \quad (3.147)$$

De plus, la transformation des coordonnées rectangulaires en cylindriques a été utilisée, comme le montre la [figure 3.12](#).



**Fig 3.12:** Coordonnées polaires  $r$ ,  $\theta$  et coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$

Les équations (3.148) à (3.152) représentent les relations entre les coefficients sans dimension et les coefficients dynamiques à calculer.

$$\bar{K} = K \frac{\bar{C}r}{F_0} \quad (3.148)$$

$$\bar{k} = k \frac{\bar{C}r}{F_0} \quad (3.149)$$

$$\bar{C} = C \frac{\bar{C}r}{F_0} \omega \quad (3.150)$$

$$\bar{c} = c \frac{\bar{C}r}{F_0} \omega \quad (3.151)$$

$$\bar{M} = M \frac{\bar{C}r}{F_0} \omega^2 \quad (3.152)$$

Ainsi, après application de la méthode des moindres carrés dans les équations (3.144) et (3.145), les coefficients de l'équation (3.133) peuvent être déterminés à partir des relations décrites dans (3.148) à (3.152), représentant ainsi un joint d'écoulement plan en termes de coefficients de rigidité, d'amortissement et d'inertie.

---

# *Chapitre 04*

---

*RÉSULTATS ET DISCUSSION*

*POUR*

*JOINTS D'ÉTANCHÉITÉ*

---

## 4.1. INTRODUCTION

La méthode de détermination des coefficients dynamiques d'un joint d'étanchéité mécanique annulaire comporte deux étapes. La première se réfère à la solution des équations qui gouvernent l'écoulement du fluide le long du joint, en considérant la position centrée du rotor par rapport au stator. La deuxième partie, à son tour, consiste en la solution des mêmes équations, mais, en considérant une perturbation dans le système, qui fait osciller l'axe du rotor par rapport à la position d'équilibre de l'axe du stator. Dans la première partie de la solution, les valeurs de la vitesse circumférentielle  $u$  et de la répartition de la pression  $p$  le long de la longueur du joint sont obtenues, en plus de la convergence de la valeur moyenne de la vitesse axiale  $w$ . Cependant, l'analyse considérant une petite perturbation détermine les forces de réaction agissant sur le composant analysé, qui caractérisent à leur tour les coefficients d'inertie, de raideur et d'amortissement équivalents au joint.

## 4.2 JOINTS PLATS CYLINDRIQUES

Pour les joints d'étanchéité annulaires cylindriques, les valeurs des paramètres nécessaires au calcul ont été obtenues de Childs (1993), ainsi que les graphiques pour la comparaison et la vérification des résultats. Les valeurs présentées par Childs (1993) sont représentées dans le **tableau 4.1** dans les mêmes unités trouvées dans la littérature. Cependant, pour les calculs, le système international d'unités a été adopté. La variation de pression le long du joint est normalisée, pour mieux comparer les résultats avec la littérature.

**Tab 4.1:** Paramètres du tampon d'écoulement annulaire pour les calculs d'axes.

$\Delta P$ [bars]	$R$ [mm]	$L$ [mm]	$C_0 = C_1$ [mm]	$\omega$ [tr/min]	$\mu$ [Pa.s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\xi$	$\xi_e$	$\varepsilon_s = \varepsilon_r$
35	76.20	50.80	0.381	3 000	$1.3 \times 10^{-3}$	1 000	0.10	1.00	0.00

### 4.2.1 Vitesse circumférentielle

La vitesse circumférentielle  $u$  a été déterminée, initialement, pour trois valeurs différentes de la condition initiale :

$$u_0(0) = 0.0 ; u_0(0) = 0.5 \text{ et } u_0(0) = 1.0 .$$

$$\text{En plus: } \frac{L}{D} = 1 ; \frac{\bar{C}r}{R} = 0.005 , \text{ soit } L = 152,4 \text{ mm},$$

$$\text{et aussi : } \varepsilon_s = \varepsilon_r = 0.01$$

Les autres paramètres ont les mêmes valeurs que celles indiquées dans le **tableau 4.1**.

Les figures 4.1 et 4.2 illustrent la distribution de la vitesse circonférentielle le long du joint. On peut vérifier que les deux graphes présentent un comportement similaire avec des solutions qui convergent vers la valeur 0.5.

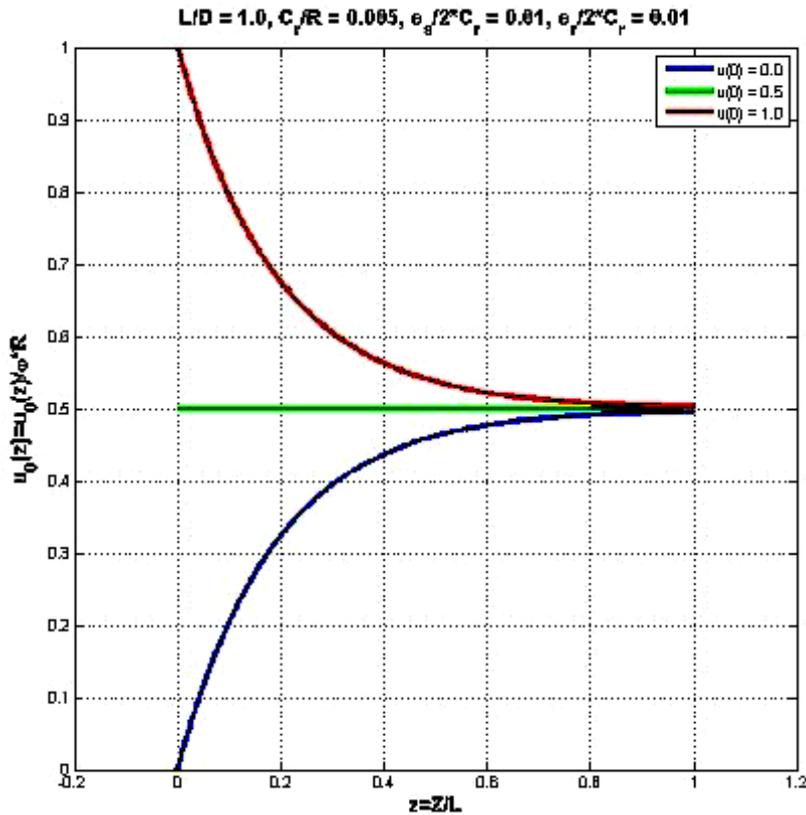


Fig 4.1:  $u_0(z)$  pour trois conditions initiales.

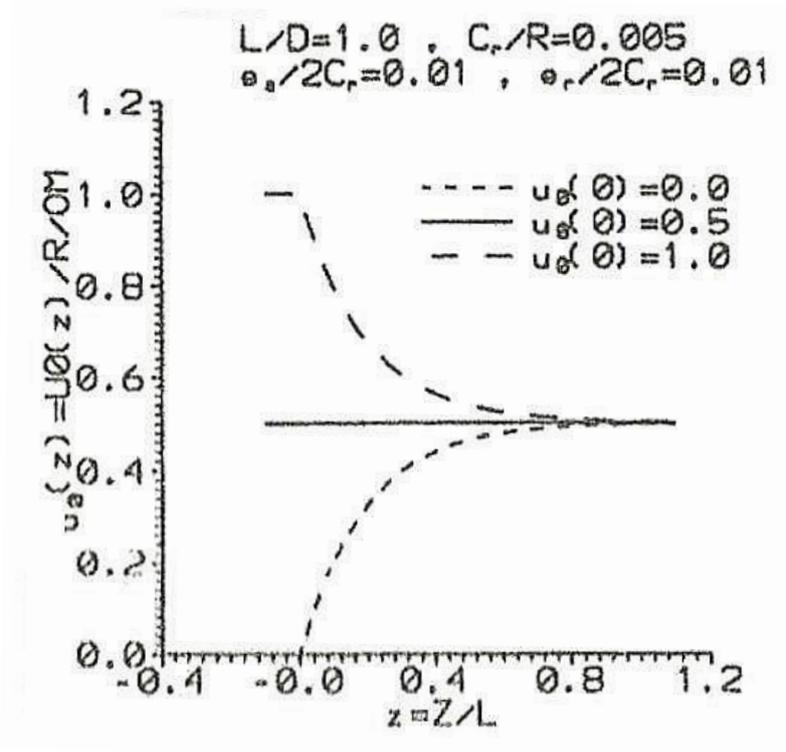


Fig 4.2:  $u_0(z)$  pour trois conditions initiales (CHILDS, 1993).

En modifiant les valeurs de la rugosité relative du rotor et du stator, où  $\epsilon_r = 0.00$  et  $\epsilon_s = 0.05$  respectivement, des courbes ont été générées pour les trois mêmes conditions initiales, représentées par les figures 4.3 et 4.4. Les autres paramètres présentent les mêmes valeurs citées pour le cas des figures 4.1 et 4.2.

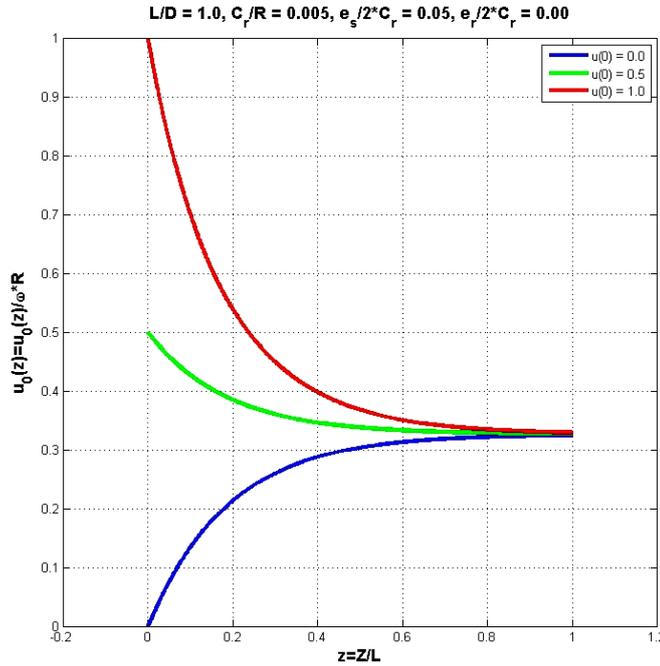


Fig 4.3:  $u_0(z)$  pour trois conditions initiales avec des rugosités relatives différentes pour le rotor et le stator.

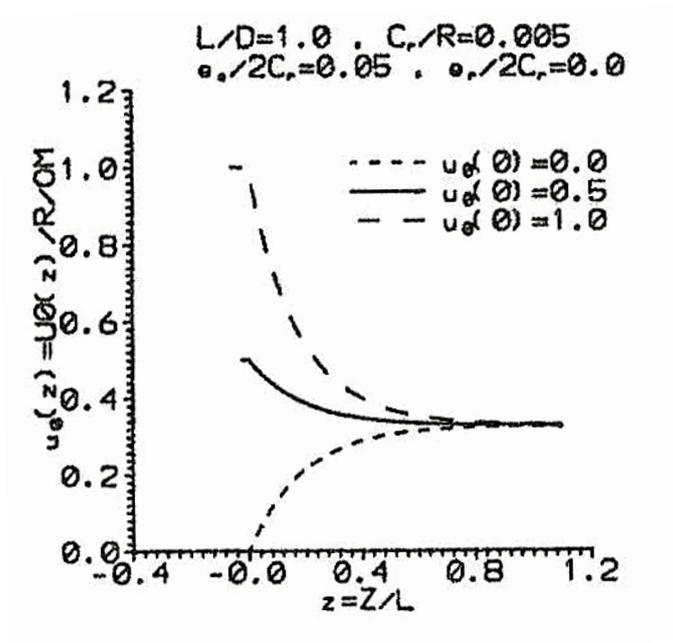


Fig 4.4:  $u_\theta(z)$  pour trois conditions initiales avec des rugosités relatives différentes pour le rotor et le stator (CHILDS, 1993).

On verra que, pour ce cas, les solutions convergent vers **0.33** au lieu de **0.5** comme dans le premier cas. En effet, sur les **figures 4.1 et 4.2**, il y a une tendance à la convergence dans la valeur de la vitesse moyenne entre les surfaces du rotor et du stator. Sur les **figures 4.3 et 4.4**, la convergence se produit à une vitesse inférieure à la valeur moyenne due à l'effet de dissipation inséré par la rugosité du stator, comme prévu.

#### 4.2.2 Pression

La distribution de pression a été déterminée en considérant la variation de différents paramètres. La première modification faite se réfère au jeu radial,  $\bar{C}r$ , dont la variation pour trois rapports  $\bar{C}r/R$  génère également une variation du nombre de Reynolds. Ce dernier est indiqué dans la légende du graphique avec la valeur du rapport  $\bar{C}r/R$ . Les **figures 4.5 et 4.6** montrent les résultats obtenus dans la simulation en volume fini et ceux de la référence, Childs (1993), respectivement.

La différence entre les gradients de pression pour les joints génère une force de rappel qui est opposée au déplacement de l'axe, ce qui entraîne une rigidité directe élevée. Le premier à expliquer ce mécanisme de raideur directe fut Lomakin (1958), et cet effet est aujourd'hui connu sous l'effet de Lomakin.

Les **figures 4.5 et 4.6** montrent qu'un jeu radial accru entraîne une augmentation du nombre de Reynolds et de la vitesse axiale moyenne; pour  $\bar{C}r/R = 0.0025$  on a  $W_0 = 37.29 \text{ m/s}$ , pour  $\bar{C}r/R = 0.005$  on a  $W_0 = 53.96 \text{ m/s}$  et pour  $\bar{C}r/R = 0.0075$  on a  $W_0 = 63.31 \text{ m/s}$ ; augmentant également la proportion de  $\Delta P$  absorbée à l'entrée, l'opposée étant également la même.

Le deuxième paramètre varié était le rapport  $L/D$ , comme le montrent les **figures 4.7 et 4.8**.

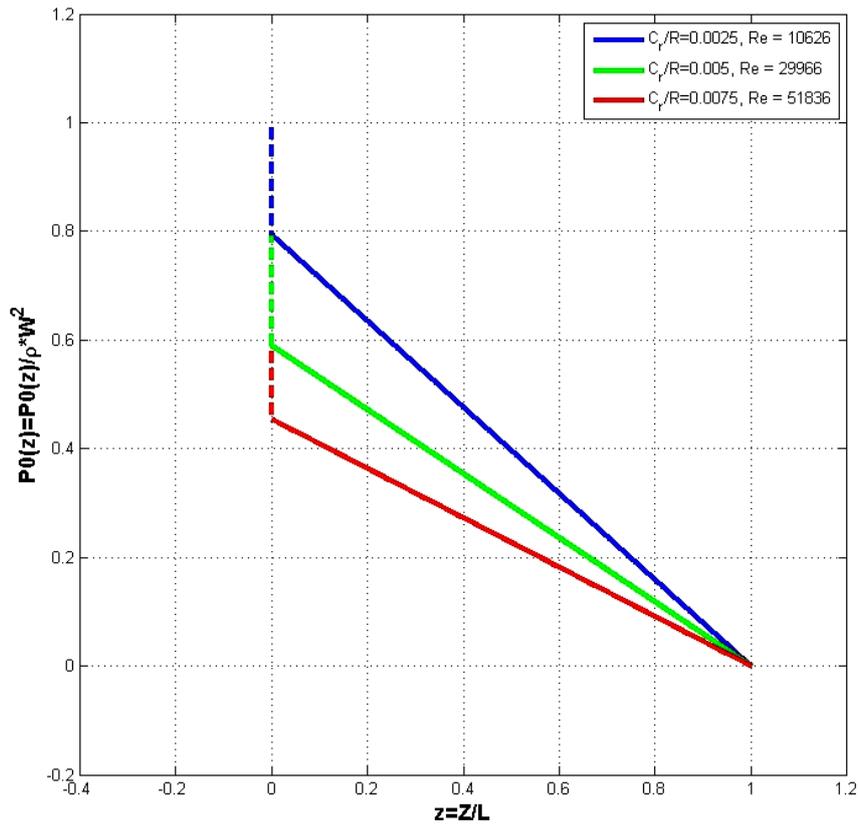


Fig 4.5:  $p_0(z)$  pour trois jeux radiaux

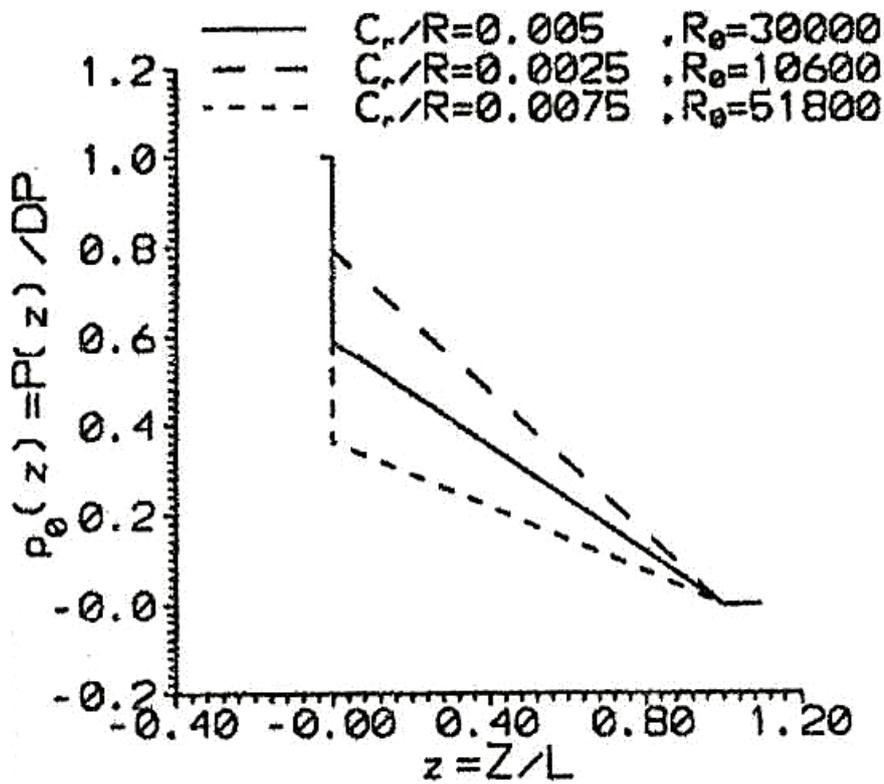


Fig 4.6:  $p_0(z)$  pour trois jeux radiaux (CHILDS, 1993)

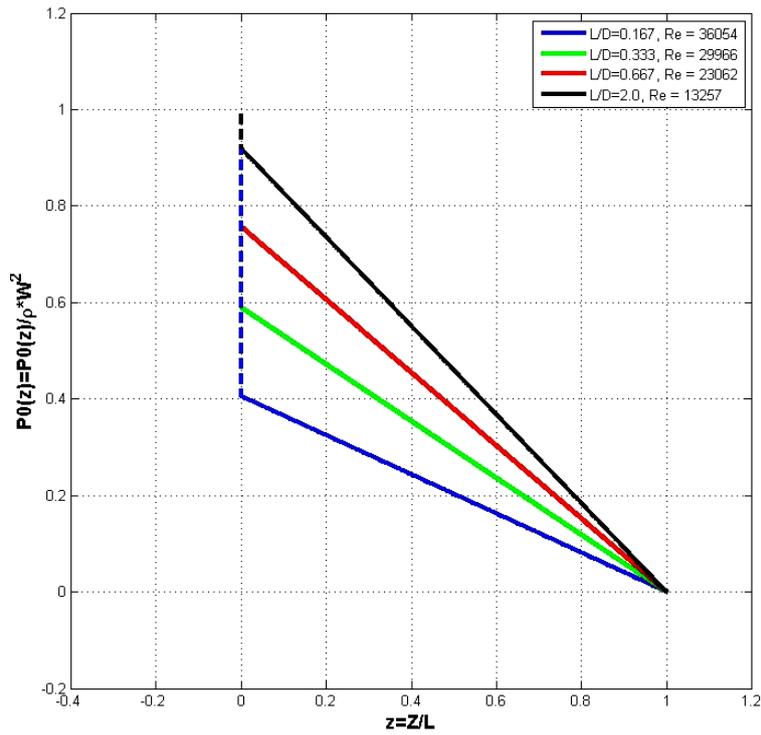


Fig 4.7:  $p_0(z)$  pour quatre rapports L/D radiaux.

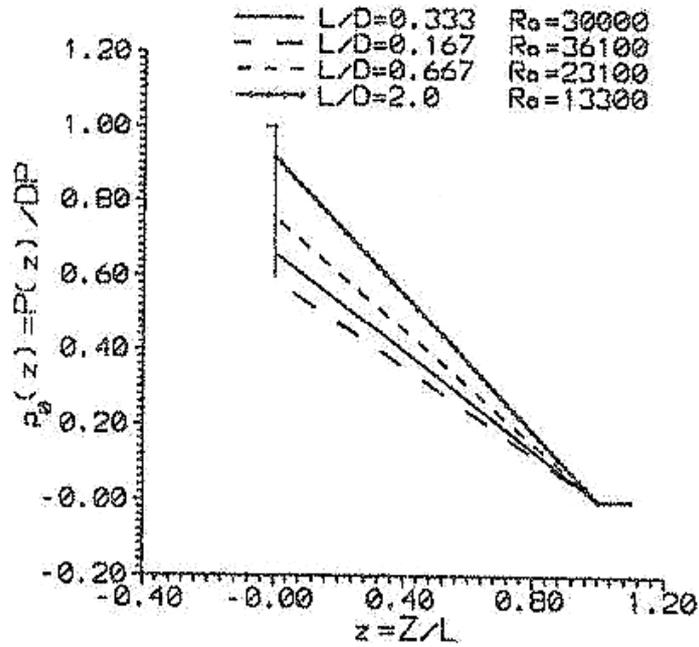


Fig 4.8:  $p_0(z)$  pour quatre rapports radiaux L/D (CHILDS, 1993).

On peut voir sur les figures 4.7 et 4.8 que l'augmentation du rapport  $L/D$  augmente le gradient de pression le long du joint et diminue donc la quantité absorbée  $\Delta P$  à l'entrée du joint d'écoulement.

Les figures 35 et 36 représentent la distribution de pression faisant varier la rugosité relative du stator selon trois altitudes ( $\varepsilon_s = 0,0$ ;  $\varepsilon_s = 0,1$ ;  $\varepsilon_s = 0,05$ ). Une rugosité accrue diminue la quantité absorbée  $\Delta P$  à l'entrée du joint et augmente le gradient de pression axiale.

Les figures 37 et 38 représentent la répartition de la charge le long du joint pour deux valeurs du facteur de récupération à la sortie,  $\xi_e$ . ( $\xi_e = 1,0$ ;  $\xi_e = 0,75$ ). La réduction de ce facteur provoque une augmentation de la quantité de  $\Delta P$  absorbée à l'entrée du joint et une augmentation du gradient de pression axial.

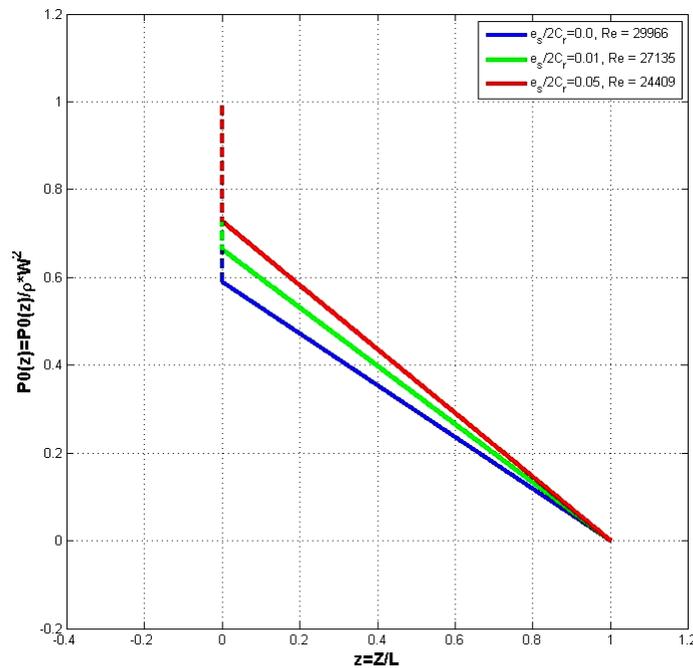


Fig 4.9:  $p_0(z)$  pour trois rugosités relatives de la paroi du stator.

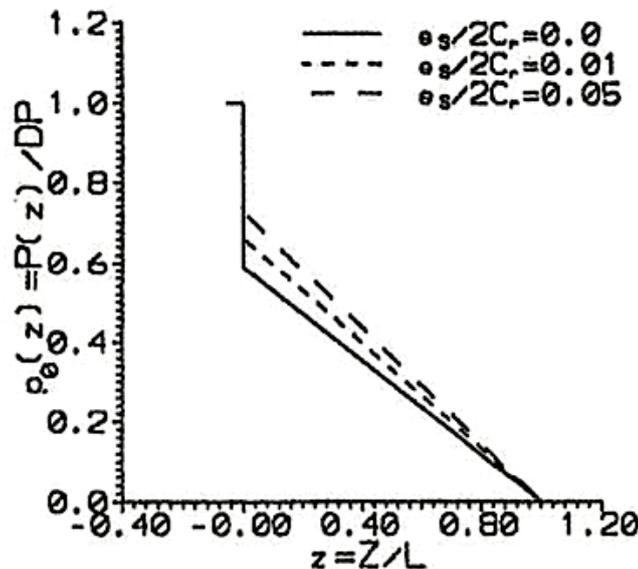


Fig 4.10:  $p_0(z)$  pour trois rugosités relatives de la paroi du stator (CHILDS, 1993).

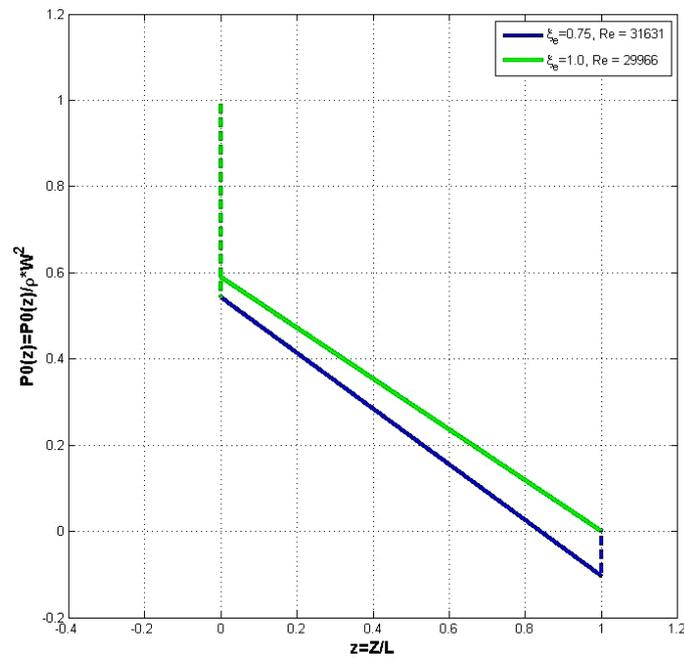


Fig 4.11:  $p_0(z)$  pour deux valeurs du coefficient du facteur de récupération

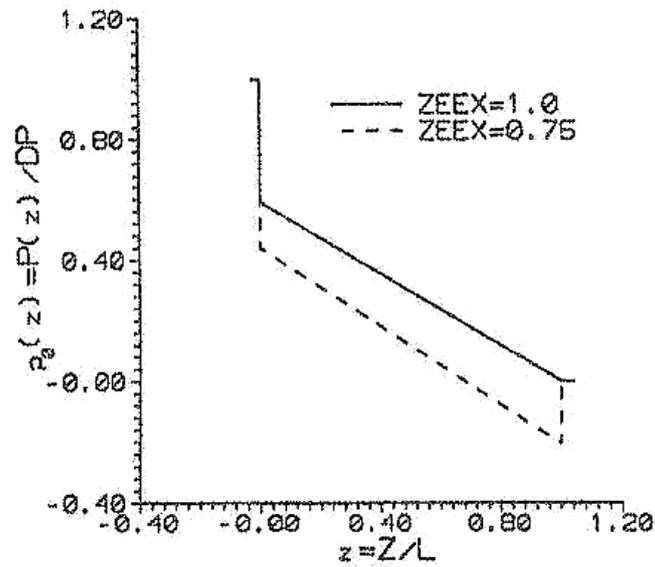


Fig 4.12:  $p_0(z)$  pour deux valeurs facteur de récupération (CHILDS, 1993).

### 4.2.3 Coefficients dynamiques

La solution du second étage permet de répartir les efforts tangentiels et radiaux en fonction de la fréquence sans dimension, qui représente la relation entre la fréquence de précession de la garniture mécanique et la fréquence de rotation de l'arbre, et par conséquent les coefficients de rigidité, d'amortissement et inertie du joint d'écoulement.

Pour la procédure de cette partie du problème, les valeurs des paramètres considérés sont données dans le **tableau 4.2**.

**Tab 4.2:** Paramètres du joint d'écoulement cylindrique pour les calculs du système perturbé

$\Delta P$ [bars]	$R$ [mm]	$L$ [mm]	$C_0 = C_1$ [mm]	$\omega$ [tr/min]	$\mu$ [Pa.s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\xi$	$\xi_e$	$\varepsilon_s = \varepsilon_r$
35	76.20	50.80	0.381	3 000	$1.3 \times 10^{-3}$	1 000	0.10	1.00	0.001

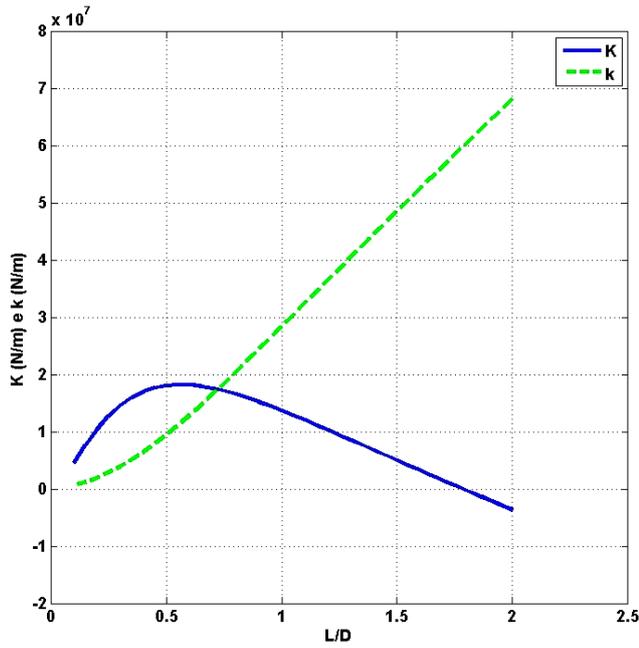
A partir des équations (3.144) et (3.145), il est possible de vérifier qu'une interpolation quadratique est effectuée pour déterminer les coefficients d'inertie, d'amortissement de croisement et de raideur. Alors que, pour déterminer le coefficient de raideur et l'amortissement direct, seule une interpolation linéaire est suffisante. Le signe barre (–) indique que les termes donnés dans les équations (3.144) et (3.145) sont sous forme adimensionnelle. Les valeurs des coefficients dynamiques calculées pour les paramètres du **tableau 4.2** sont présentées dans le **tableau 4.3**, ainsi que les valeurs obtenues par la référence bibliographique spécialisée (CHILDS, 1993).

**Tab 4.3 :** Valeurs calculées des coefficients dynamiques

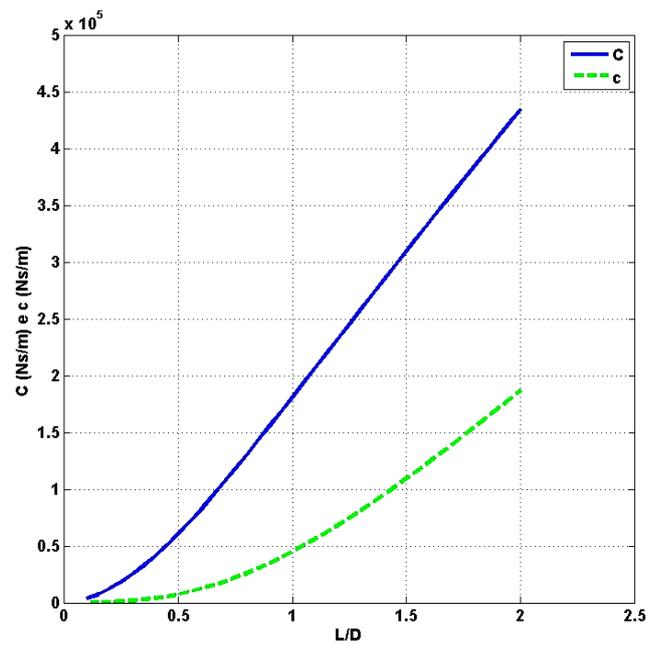
	$K [\times 10^7 \text{ N/m}]$	$K [\times 10^7 \text{ N/m}]$	$C [\times 10^5 \text{ N.s/m}]$	$C [\times 10^5 \text{ N.s/m}]$	$M [\text{kg}]$
Travail actuel	1.567	0.4728	0.301	0.2099	6.68
Childs (1993)	1.567	0.473	0.300	0.210	6.68

En plus de la comparaison entre les résultats présentés dans le **tableau 4.3**, l'influence de plusieurs paramètres physiques et opérationnels sur la détermination des coefficients dynamiques a été vérifiée. Les paramètres varient: relation entre la longueur du joint et le diamètre de l'arbre  $L/D$ , relation entre le jeu radial entre l'arbre et le joint d'étanchéité, et le rayon de l'arbre  $\bar{C}r/R$ , coefficient de perte d'entrée  $\xi$ , coefficient de récupération de la sortie  $\xi_e$ , rugosité relative du stator  $\varepsilon_s$ , chute de pression le long du joint  $\Delta P$  et la vitesse de rotation de l'axe  $\omega$ .

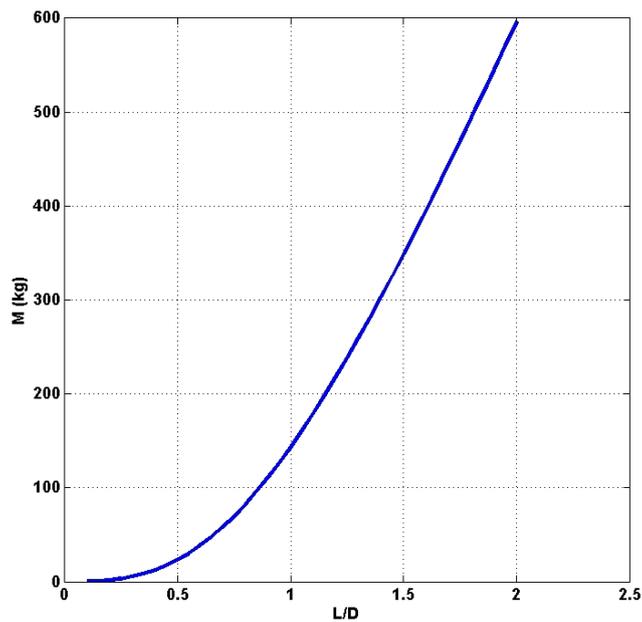
Les figures 4.13 et 4.14 représentent la dépendance des coefficients dynamiques sur  $L/D$ .



(a)



(b)



(c)

**Fig 4.13:** a) coefficients de rigidité par rapport à  $L/D$ ; b) coefficients d'amortissement en fonction de  $L/D$ ; c) Coefficient d'inertie par rapport à  $L/D$ .

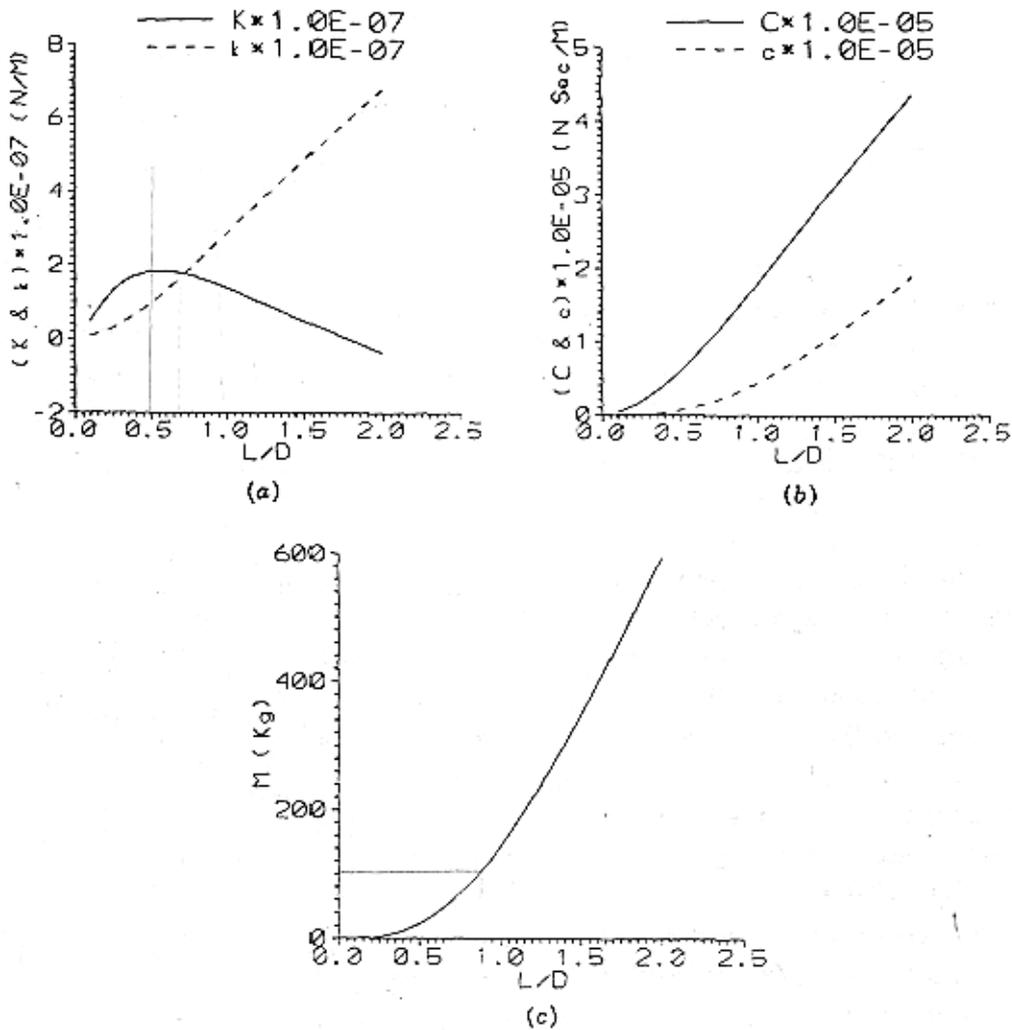
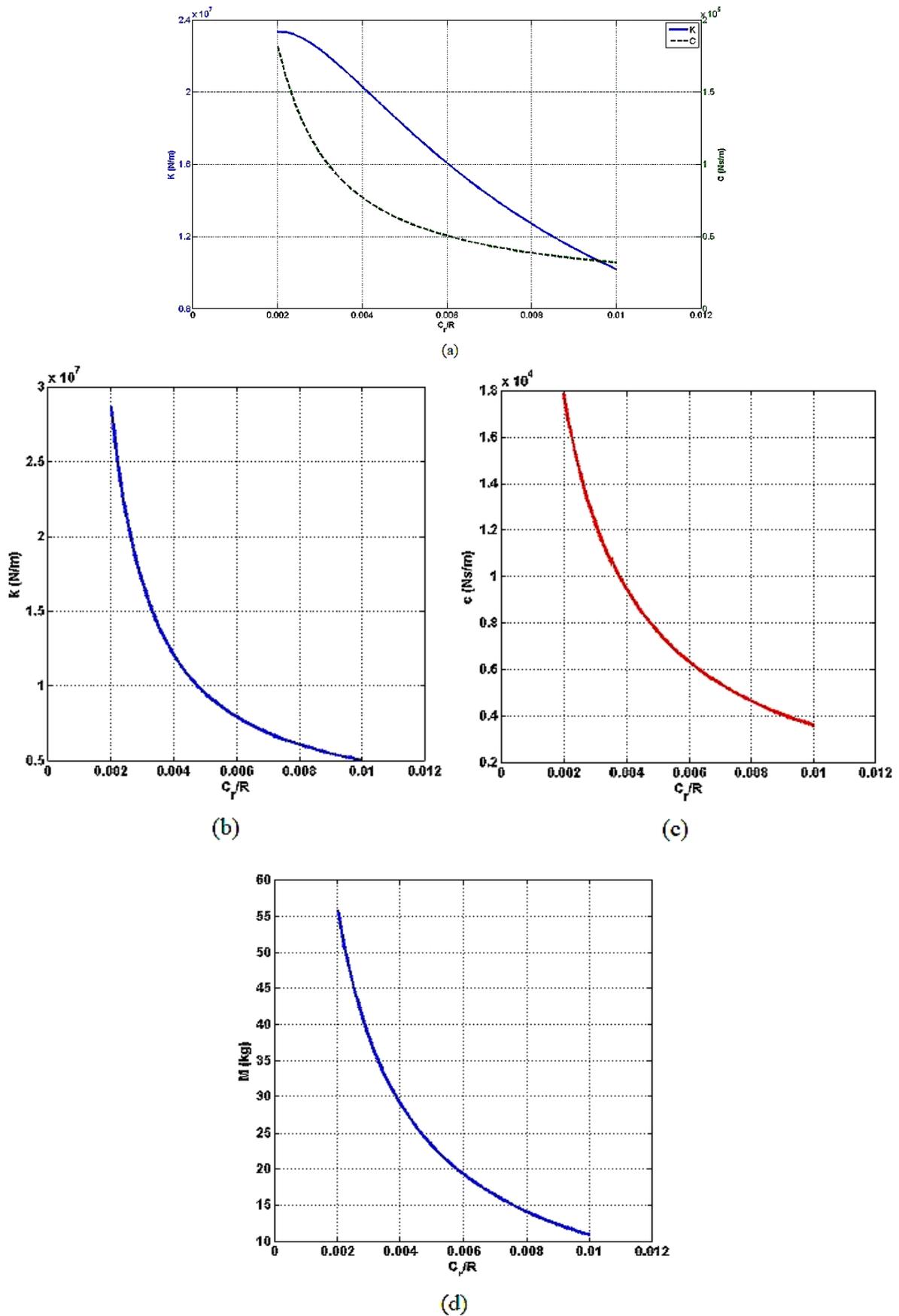


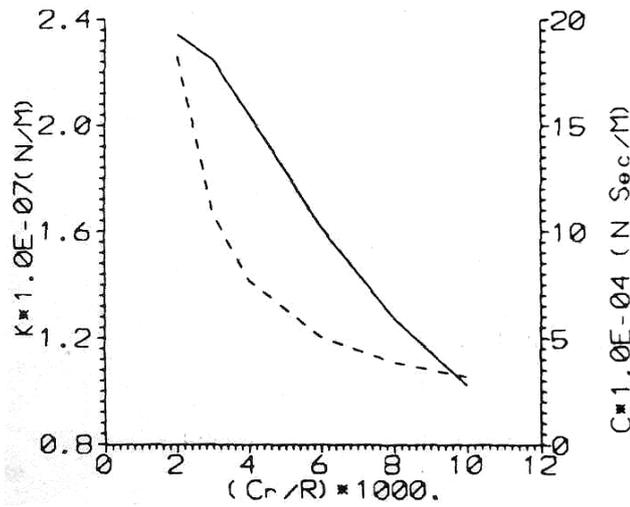
Fig 4.14 : a) coefficients de rigidité par rapport à  $L/D$ ; (b) coefficients d'amortissement en fonction de  $L/D$ ; (c) Coefficient d'inertie par rapport à  $L/D$ . (CHILDS, 1993).

La figures 4.13 montre que les coefficients d'amortissement, à la fois directs et croisés, les coefficients de raideur croisés et le terme d'inertie augmentent avec l'augmentation du rapport  $L/D$ . Cependant, le coefficient de rigidité directe a une valeur maximale autour de  $L/D = 0.5$  puis diminue jusqu'à atteindre une valeur négative en  $L/D = 1.75$ . Cet effet se produit parce que l'augmentation du rapport  $L/D$  provoque une réduction de l'influence de la chute de pression à l'entrée du joint, dans la distribution de pression, comme le montre figures 4.7. Suite à cette réduction, l'effet Lomakin diminue. Par conséquent, le terme de rigidité directe montre également une réduction. De plus, il est important de noter que le terme d'inertie prend des valeurs très élevées pour les joints longs.

Les figures 4.15 et 4.16 caractérisent les coefficients dynamiques en fonction de la variation de  $\bar{C}r/R$ , c'est-à-dire du rapport entre le jeu radial entre l'arbre et la garniture mécanique, par le rayon de l'arbre. Pour l'analyse de ces données, la longueur du joint était considérée égale au rayon de l'axe, donc  $L/D = 0.5$  et  $L = 76.2 \text{ mm}$ .



**Fig 4.15:** (a) Termes directs de rigidité et d'amortissement en fonction de  $\bar{C}r/R$   
 (b) Terme rigidité croisé par rapport à  $\bar{C}r/R$  , (c) Terme d'amortissement croisé en fonction de  $\bar{C}r/R$  , (d)  
 Terme d'inertie versus  $\bar{C}r/R$  . Pour  $L/D = 0.5$  .



**Fig 4.16:** termes directs de rigidité et d'amortissement en fonction de  $\bar{C}r/R$ , pour  $L/D = 0.5$ . (CHILDS, 1993).

Tous les coefficients dynamiques, illustrés à la figure 41, diminuent avec l'augmentation du rapport  $\bar{C}r/R$ . Selon Childs (1993), une importance particulière doit être accordée aux termes directs de rigidité et d'amortissement. La réduction de la rigidité directe peut entraîner un passage de la vitesse critique du système à la plage de fonctionnement. De plus, la baisse du terme d'amortissement direct signifie une réponse beaucoup plus nette du système au mouvement de l'arbre.

Les coefficients dynamiques sous l'influence du coefficient de perte d'entrée ( $\xi$ ) sont présentés aux figures 4.17 et 4.18.

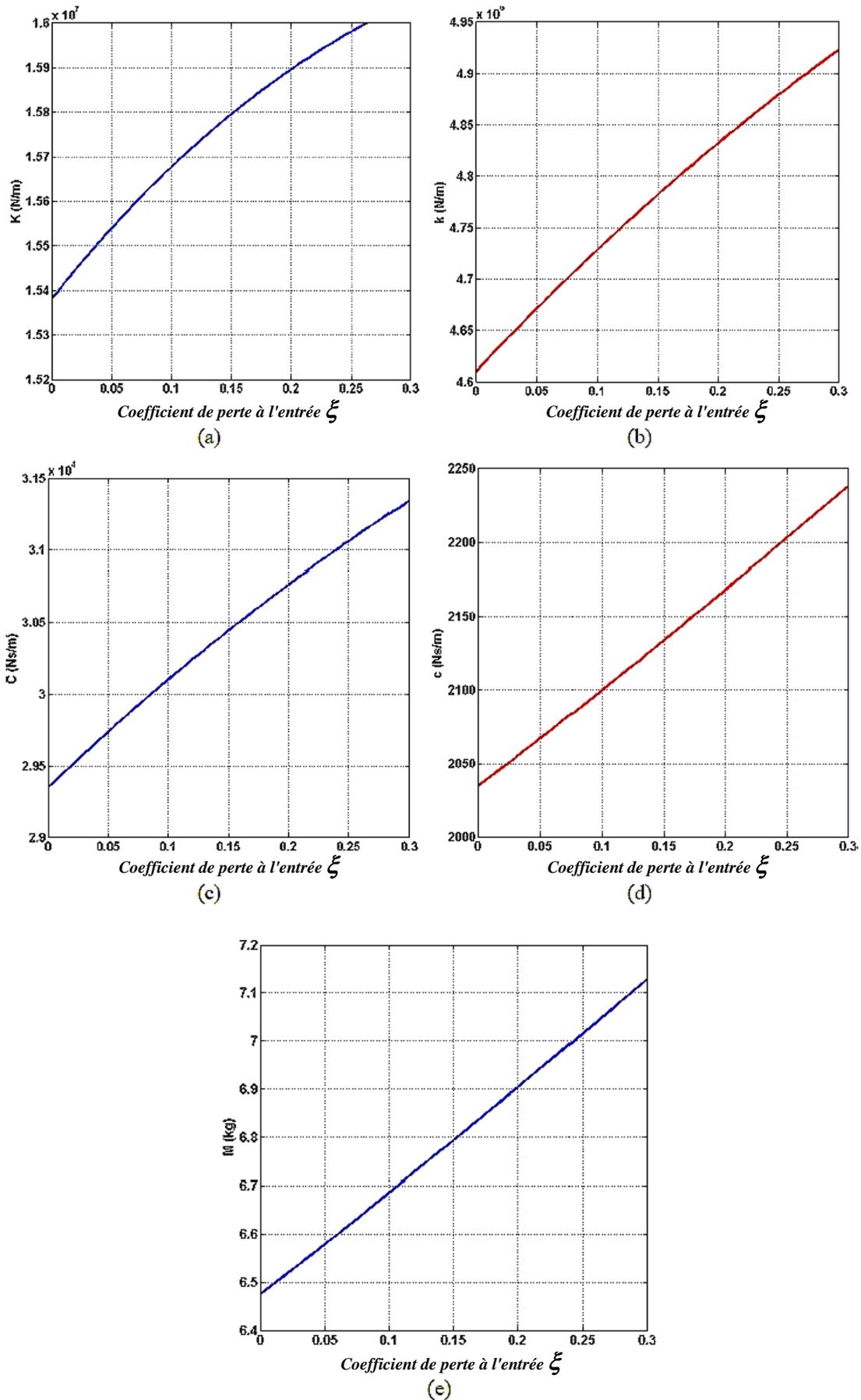


Fig 4.17 (a) Terme direct de rigidité en fonction  $\xi$ , (b) termes croisés de rigidité en fonction de  $\xi$ , (c) terme d'amortissement direct en fonction  $\xi$ , (d) termes croisés de l'amortissement en fonction  $\xi$ , (e) terme d'inertie en  $\xi$

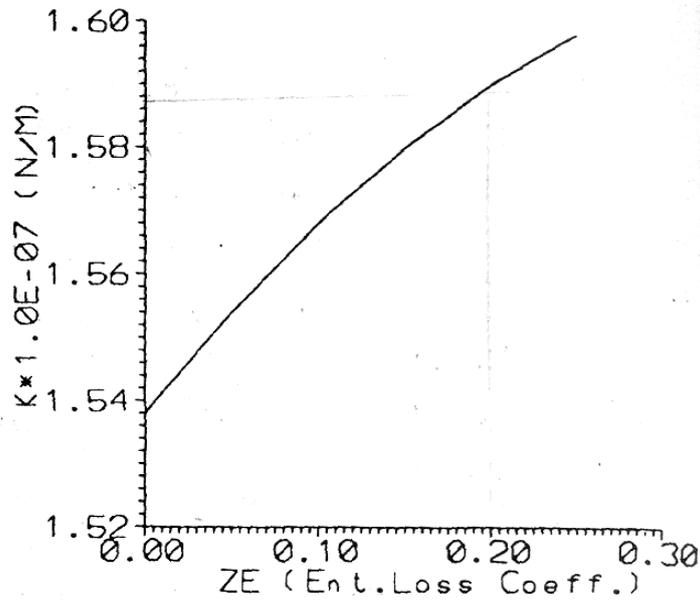


Fig 4.18: Rigidité directe par rapport à  $\xi$ . (CHILDS, 1993).

Comme on pouvait s'y attendre, les figures 4.17 et 4.18 montrent une augmentation des coefficients dynamiques avec l'augmentation du coefficient de perte d'entrée  $\xi$ , puisque l'influence de ce terme augmente la quantité de pression absorbée dans la distribution de perte de charge. Cependant, en variant de 0 à 0,25, le terme de raideur directe ne varie que d'environ 4%, malgré la forte dépendance de «l'effet Lomakin». Les autres coefficients dynamiques présentent également une faible variation en pourcentage de 6%, 6%, 8% et 8% respectivement pour  $k$ ,  $C$ ,  $c$  et  $M$ .

Les figures 4.19 et 4.20 représentent l'influence du coefficient de récupération  $\xi_e$ , sur les coefficients dynamiques. Le terme décrit dans le graphique est  $(1 - \xi_e)$ , puisque c'est le terme présenté dans les équations de contour. Ainsi, lorsque le coefficient présente une valeur égale à l'unité, il n'y a pas de récupération de charge, pour toute valeur inférieure à 1, cette récupération se produit.

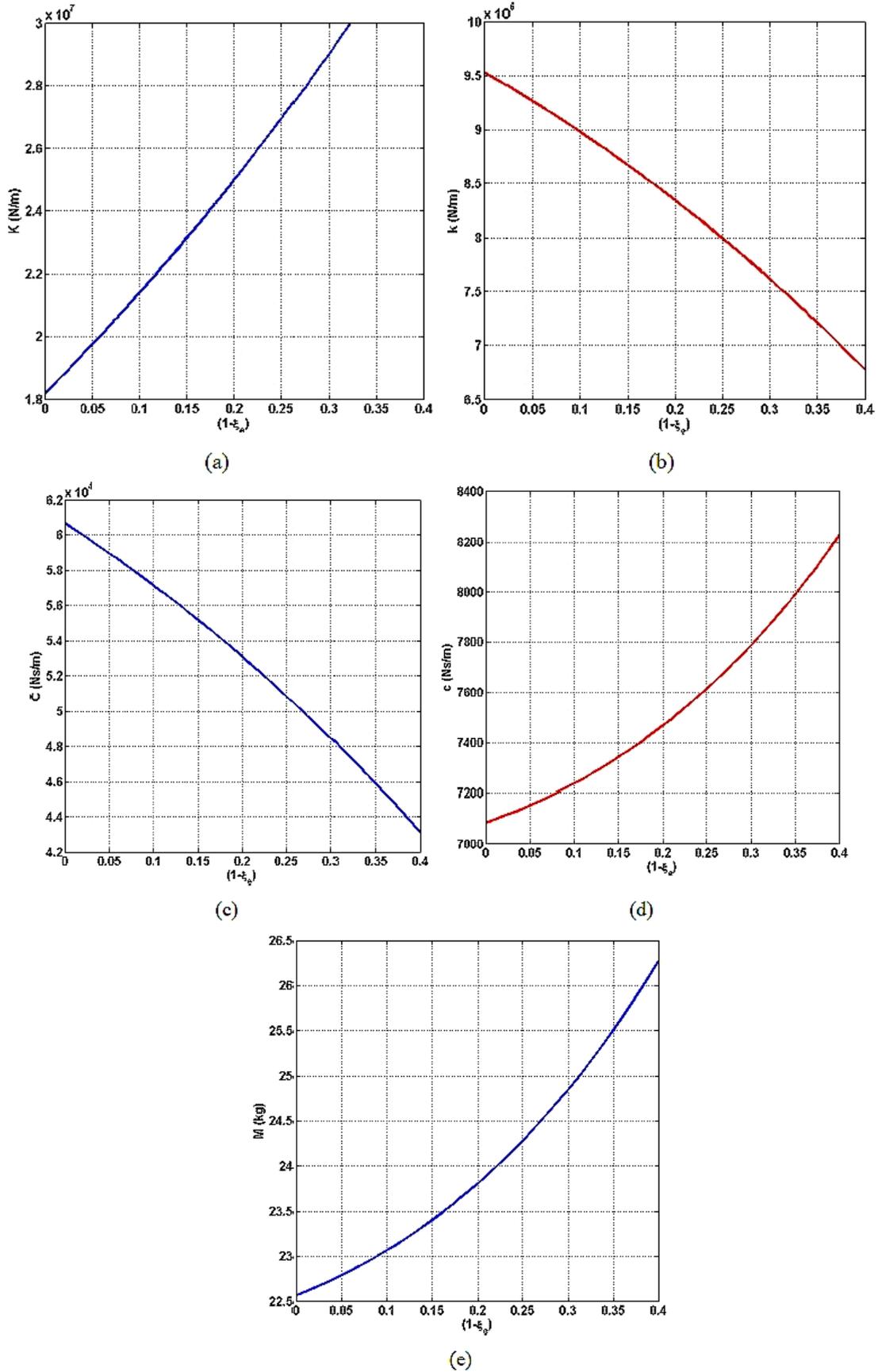
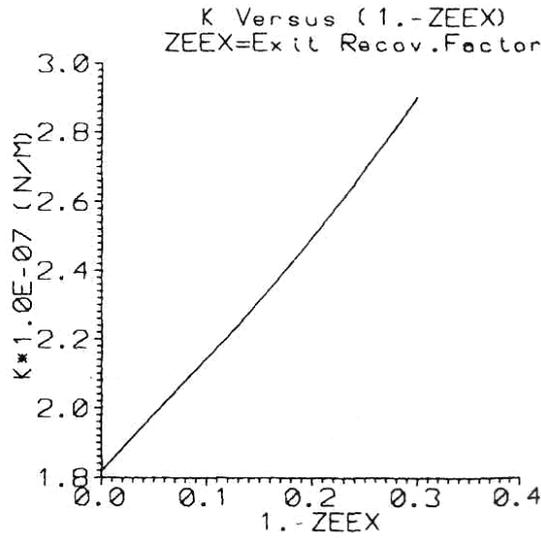


Fig 4.19 : (a) Terme direct de rigidité par rapport à  $(1 - \xi_e)$ , b) Terme croisé de rigidité à par rapport à  $(1 - \xi_e)$ , (c) terme d'amortissement direct en fonction  $(1 - e)$ , (d) terme croisé d'amortissement en fonction de  $(1 - \xi_e)$  (e) terme d'inertie en fonction de  $(1 - \xi_e)$ . Pour  $L/D = 0.5$ .



**Fig 4.20** : Terme direct de rigidité par rapport à  $(1 - \xi_e)$ . Pour  $L/D = 0.5$ . (CHILDS, 1993).

Comme décrit par Domm et al. (1967), plus l'effet de récupération de la pression est élevé, plus la valeur du terme de raideur directe est élevée. Sur les **figures 4.19** et **4.20**, ce terme montre une variation d'environ 60%. De plus, il est important de noter que les termes relatifs à la limite de stabilité du système,  $k$  et  $C$ , diminuent à mesure que les termes pour les fréquences vibratoires  $K$  et  $c$  augmentent.

Les coefficients dynamiques en fonction de la rugosité relative du stator sont représentés sur les **figures 4.21** et **4.22**. Pour obtenir ces données, le rapport  $L/D = 1.0$  soit  $L = 0.1524 m$ , a été considéré.

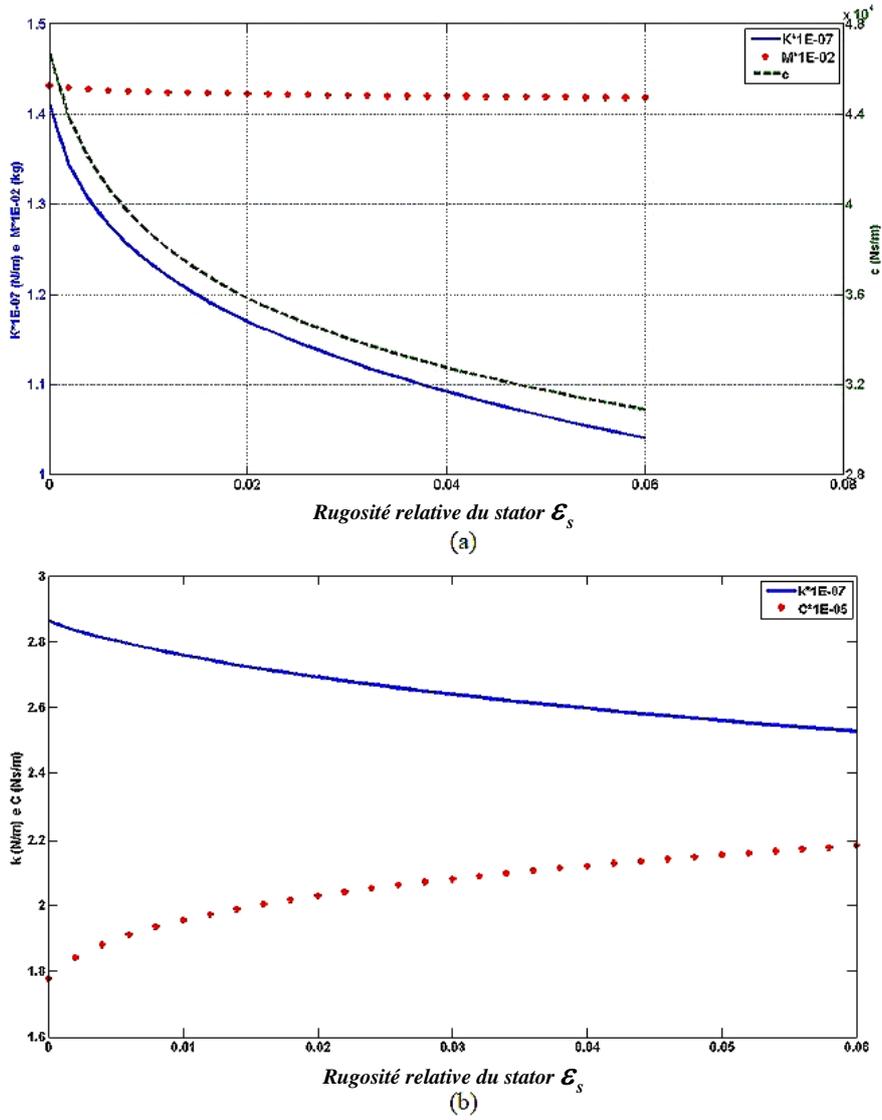


Fig 4.21: (a) Coefficients d'inertie, rigidité directe et amortissement croisé en fonction de  $\mathcal{E}_s$ ,  
 b) Coefficients de rigidité croisée et amortissement direct en fonction de  $\mathcal{E}_s$ . Pour  $L / D = 1.0$ .

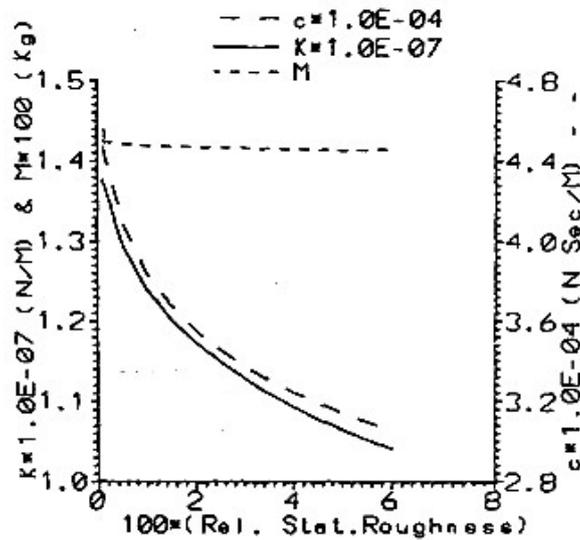


Fig 4.22: Coefficients d'inertie, raideur directe et amortissement croisé en fonction de  $\mathcal{E}_s$ ,  
 Pour  $L / D = 1.0$ . (CHILDS, 1993).

Le comportement du terme de rigidité directe est associé non seulement à l'érosion des  $\varepsilon_s$ , mais également à la longueur du joint, qui dans ce cas était considéré comme étant égal à la taille du diamètre de l'arbre. Étant donné que le joint est trop long, l'influence de la **figure 4.13 (a)** doit également être prise en compte. C'est-à-dire qu'en augmentant la rugosité relative du rotor et la longueur du joint, la quantité de pression absorbée à l'entrée du joint diminue, réduisant ainsi "l'effet Lomakin" et réduisant ainsi le terme de la rigidité directe. Cependant, le terme d'inertie est pratiquement insensible aux  $\varepsilon_s$ , contrairement à ce qui se passe avec la variation  $L/D$ . Il est également vérifié que la diminution du terme d'amortissement direct s'accompagne d'une augmentation de la rigidité croisée, ce qui peut entraîner une modification de la limite de stabilité du système.

Les **figures 4.23** et **4.24** montrent les coefficients de raideur et d'amortissement directs et le coefficient de rigidité croisée en fonction du rendement  $\Delta P$ .

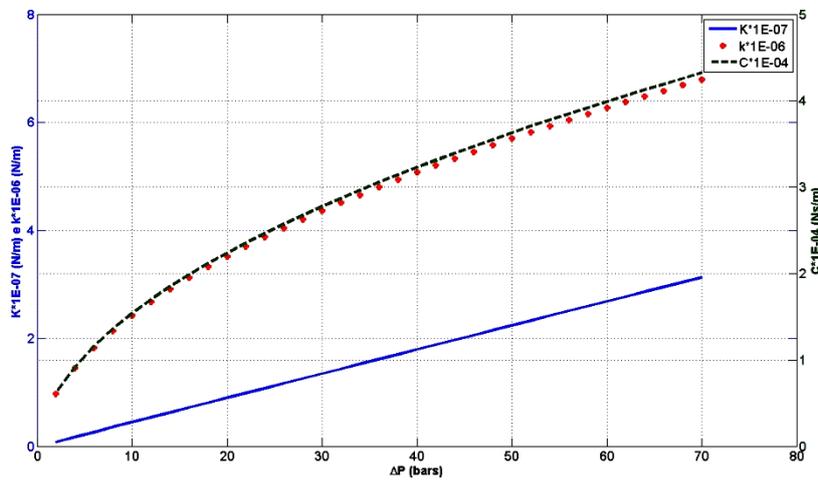


Fig 4.23: Coefficients de raideur et d'amortissement directs et coefficient de rigidité croisée en fonction de  $\Delta P$ .

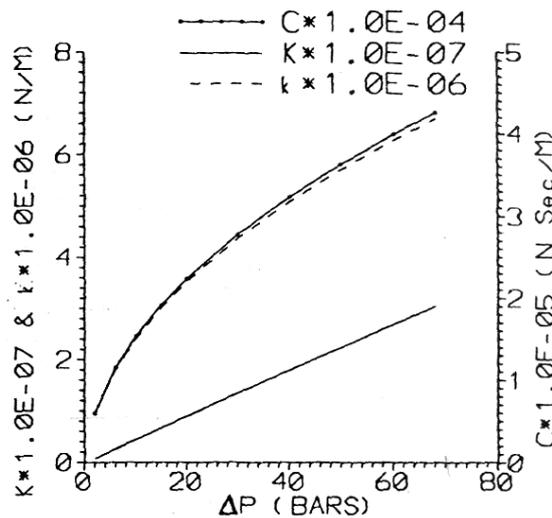
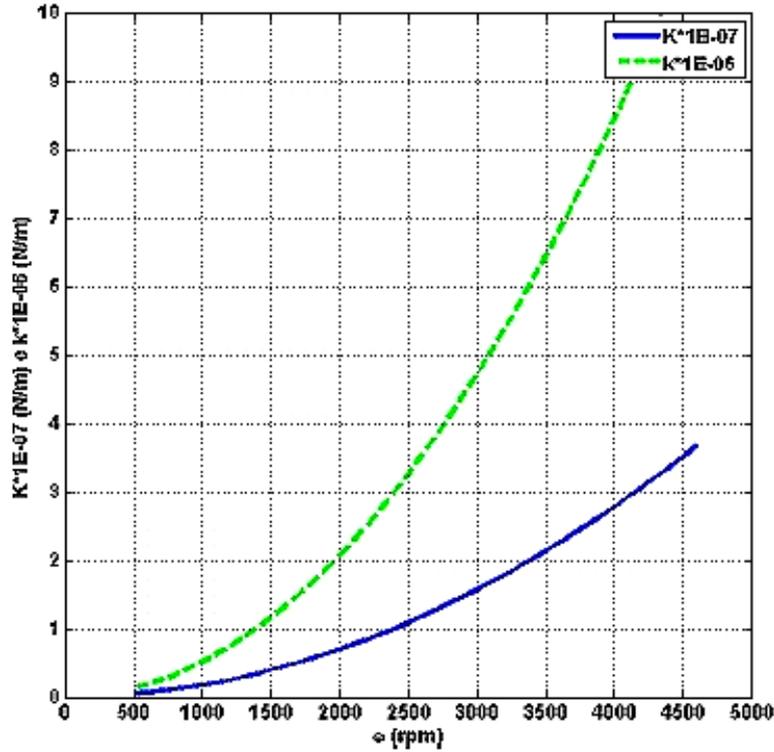


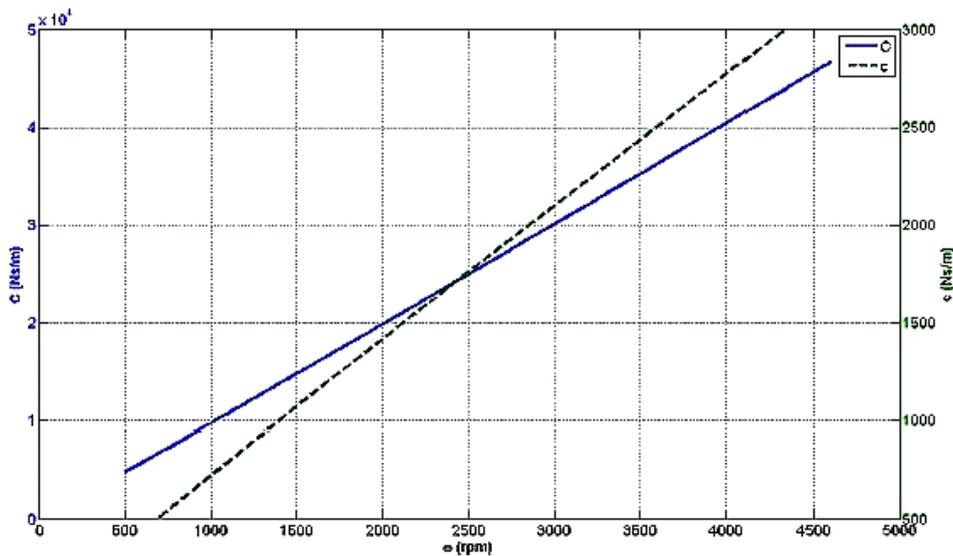
Fig 4.24 : Coefficients de raideur et d'amortissement directs et coefficient de rigidité croisée en fonction de  $\Delta P$ . (CHILDS, 1993)

Les termes croisés d'amortissement et d'inertie ne sont pas représentés sur les figures 4.23 et 4.24 car ils sont insensibles aux variations du gradient de pression. Le terme de raideur directe augmente linéairement en fonction de l'augmentation du  $\Delta P$ , tandis que les termes directs d'amortissement et de rigidité croisée augmentent également, mais non linéairement.

Les figures 4.25 et 4.26 représentent la variation des coefficients dynamiques par rapport à la vitesse de rotation de l'axe,  $\omega$ .

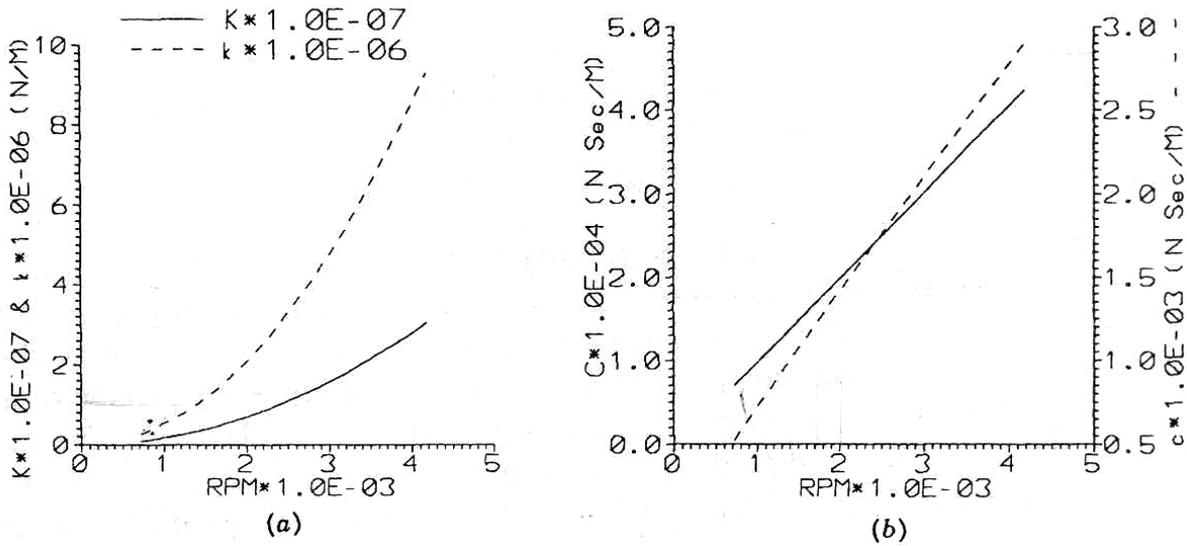


(a)



(b)

Fig 4.25: (a) Coefficients de raideur direct et croisé en fonction de  $\omega$ ,  
 (b) Coefficients d'amortissement direct et croisé en fonction de  $\omega$ .



**Fig 4.26:** (a) Coefficients de raideur directs et croisés en fonction de  $\omega$ ,  
 (b) Coefficients d'amortissement directs et croisés en fonction de  $\omega$ . (CHILDS, 1993).

Il est important de noter que la perte de charge du joint varie de manière quadratique en fonction de la rotation de l'arbre, par conséquent, pour chaque  $\omega$  une nouvelle valeur de  $\Delta P$  doit être calculée. Encore une fois, le terme d'inertie reste constant, il n'est donc pas représenté sur les figures 4.25 et 4.26. Les termes d'amortissement varient linéairement tandis que les termes de rigidité suivent une fonction parabolique. Ces résultats et leurs comparaisons respectives montrent que la méthode des volumes finis présente un résultat prometteur dans l'analyse des joints d'étanchéité.

**4.3 JOINTS PLATS CONIQUES**

L'analyse des joints coniques a été réalisée pour deux types de joints, en tenant compte pour cela de différents jeux radiaux à l'entrée et à la sortie. Les autres données géométriques et opérationnelles utilisées sont similaires à celles des joints plats cylindriques et sont représentées par le **tableau 4.4**.

**Tab 4.4:** Paramètres du Joint d'étanchéité conique pour les calculs avec le système perturbé

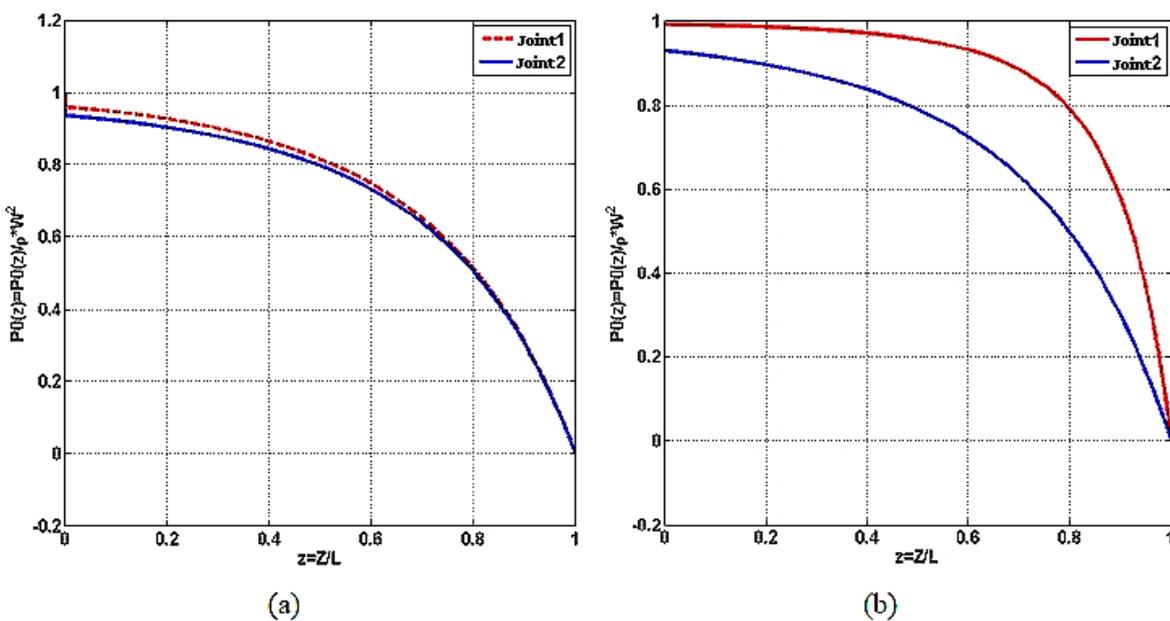
$\Delta P$ [bars]	$R$ [mm]	$L$ [mm]	$\omega$ [tr/min]	$\mu$ [Pa.s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\xi$	$\xi_e$	$\varepsilon_s = \varepsilon_r$
35	76.20	50.80	3 000	$1.3 \times 10^{-3}$	1 000	0.10	1.00	0.001

Les valeurs du jeu radial utilisées sont indiquées dans le **tableau 4.5**, ainsi que les valeurs de l'angle de pente,  $\alpha$ , pour chaque joint. Il est important d'analyser ce paramètre, car la théorie appliquée dans ce travail n'est valable que pour de très petits angles (**équation 2.7**). Ainsi, selon le **tableau 4.5**, l'applicabilité de la théorie est vérifiée, puisque  $\alpha$  est toujours inférieur à un degré.

**Tab 4.5:** (a) et (b) Valeurs des jeux radiaux d'entrée ( $C_0$ ) et de sortie ( $C_1$ ) pour les joints coniques.

(a)			(b)		
Joint 1	$C_0 = 0.381mm$	$\alpha = 0.22^\circ$	Joint 1	$C_0 = 0.762mm$	$\alpha = 0.65^\circ$
	$C_1 = 0.1905mm$			$C_1 = 0.1905mm$	
Joint 2	$C_0 = 0.762mm$	$\alpha = 0.43^\circ$	Joint 2	$C_0 = 0.762mm$	$\alpha = 0.43^\circ$
	$C_1 = 0.381mm$			$C_1 = 0.381mm$	

La **figure 4.27 (a) et (b)** décrivent la répartition de la pression le long de la longueur du joint pour les deux joints décrits dans les tableaux 4 et 5.



**Fig 4.27:** Répartition de la pression,  $p_0(z)$  pour deux types de joints coniques.

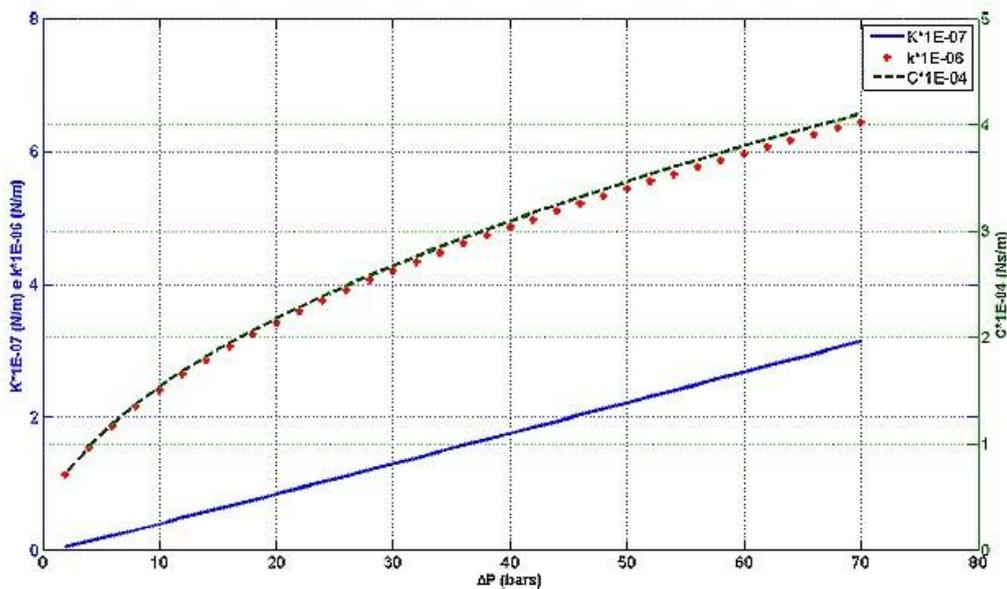
Comme le montre la **figure 4.27**, on observe que la distribution de pression présente une variation très subtile par rapport à l'augmentation du jeu radial, lorsqu'on maintient le rapport  $C_0/C_1$ , **figure 4.27 (a)**. Cependant, pour différentes raisons, **figure 4.27 (b)**, la différence de distribution de pression devient significative. **Le tableau 4.6** présente les valeurs des coefficients dynamiques pour les deux joints analysés à la **figure 4.27 (a)**.

**Tab 4.6** : Valeurs calculées des coefficients dynamiques.

	$K [\times 10^7 \text{ N/m}]$	$K [\times 10^7 \text{ N/m}]$	$C [\times 10^5 \text{ N.s/m}]$	$C [\times 10^5 \text{ N.s/m}]$	$M [\text{kg}]$
Joint 1	1.512	0.455	0.289	0.295	9.41
Joint 2	1.931	0.232	0.147	0.143	4.54

De même, l'augmentation du jeu radial entraîne une diminution de la valeur des coefficients dynamiques. Selon **Childs et Dressman (1985)**, l'introduction d'un angle dans le joint cylindrique d'origine, donnant lieu à un joint conique, entraîne une réduction du terme d'amortissement direct et une augmentation du terme d'inertie, mais le terme direct de rigidité reste presque constant. En comparant les valeurs du **tableau 4.6** (joint 1) avec le **tableau 4.3**, on peut constater que le terme d'inertie est celui qui présente la plus grande variation, de l'ordre de **40%**, puisque le terme d'amortissement direct subit une réduction de **4%**. Tandis que le terme direct de rigidité montre une diminution de l'ordre de **3,5%**.

Les **figures 4.28** et **4.29** montrent le comportement des termes direct de rigidité et d'amortissement et du terme de rigidité transversale pour les deux types de joint, présentés dans le **tableau 4.5**, en relation avec le gradient de pression. Les autres coefficients ne sont pas représentés sur le graphique car ils restent pratiquement constants.



**Fig 4.28:** Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à  $\Delta P$  pour le joint 1.

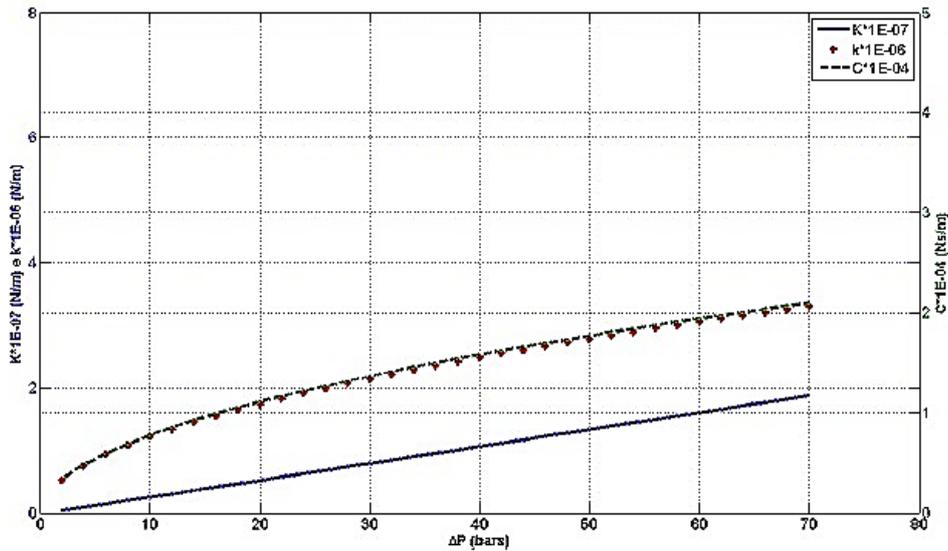
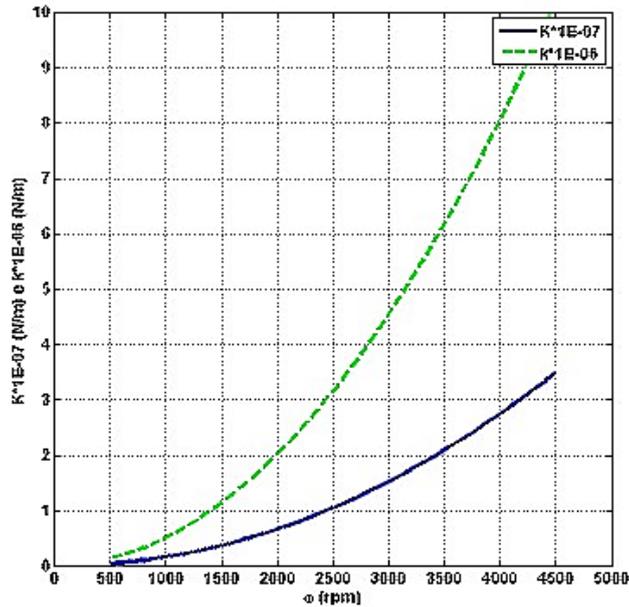


Fig 4.29: Coefficients directs de rigidité, d’amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à  $\Delta P$  pour le joint 2.

La même tendance observée pour les coefficients dans les joints cylindriques est présente dans les joints coniques, mais pour le joint 2, qui a un jeu radial moyen supérieur à celui du joint 1, les valeurs des coefficients dynamiques sont plus petites. Les figures 4.30 et 4.31 décrivent le comportement des coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre. Là encore, le terme d’inertie n’est pas représenté par sa constance par rapport à la vitesse de rotation.



(a)

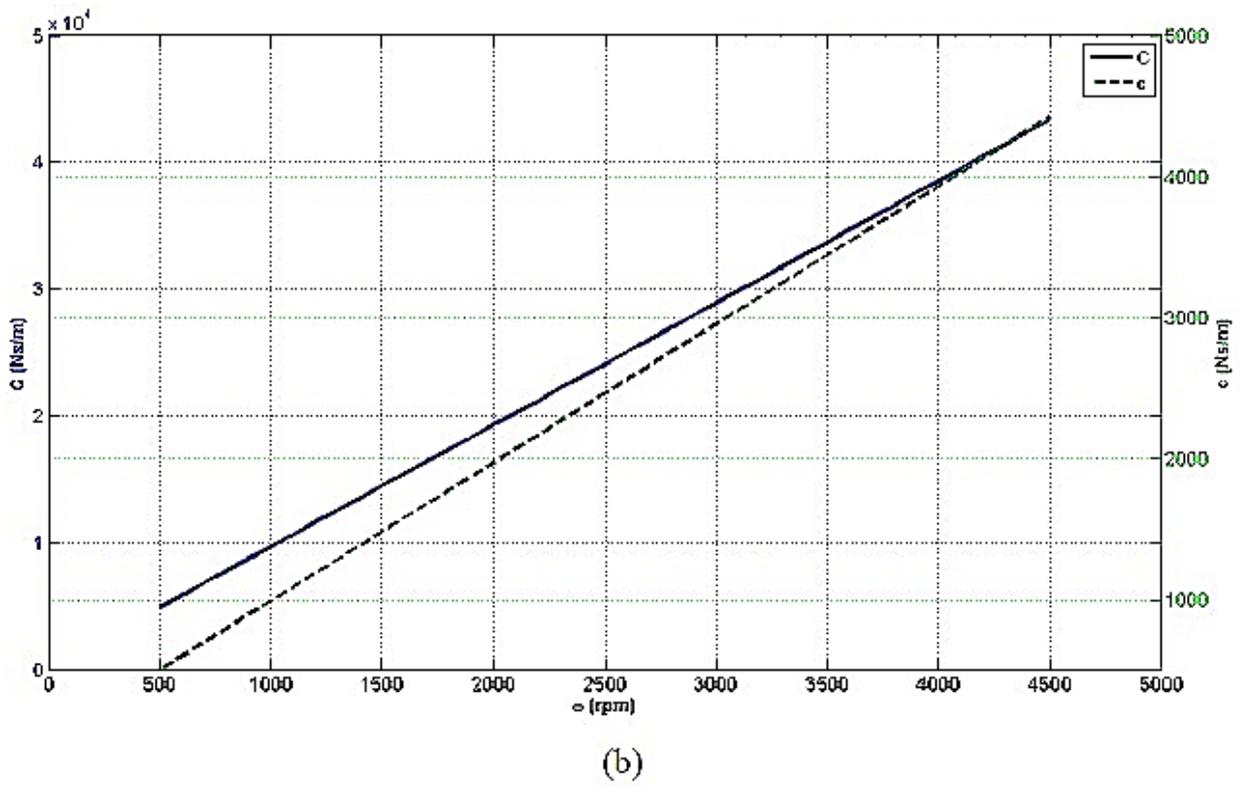
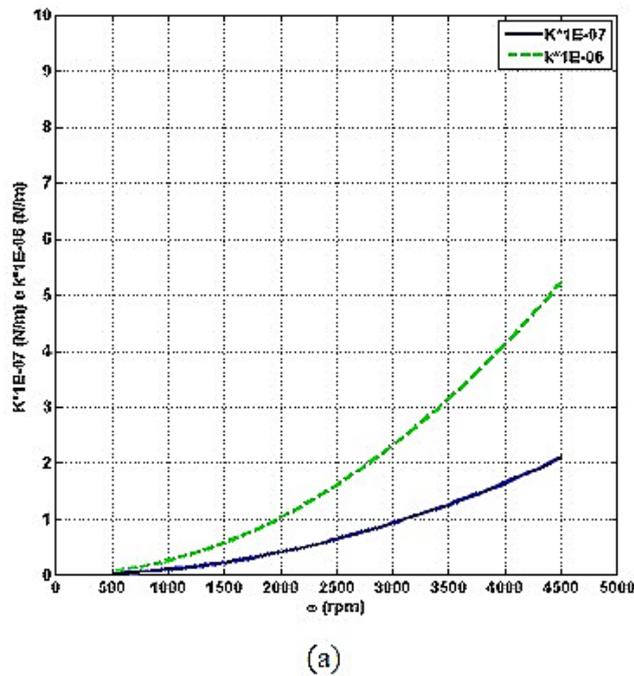
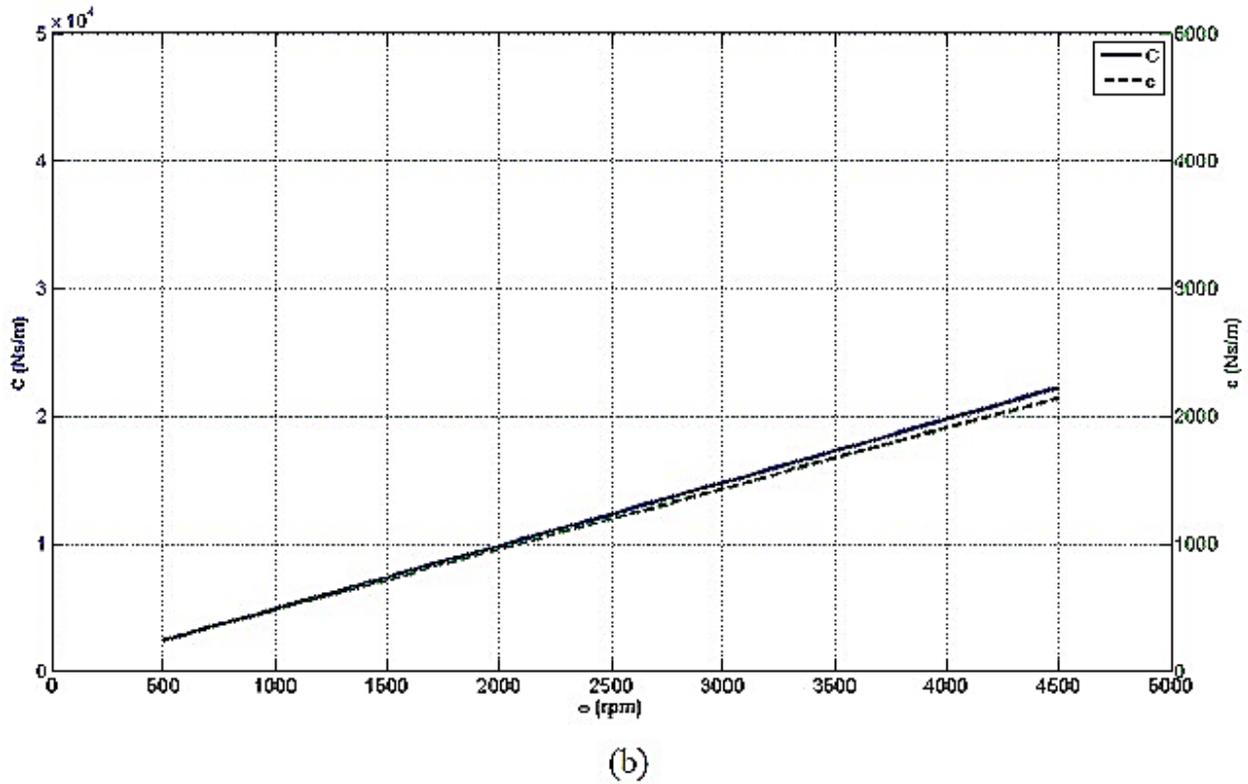


Fig 4.30: (a) Coefficients de rigidité directs et croisés par rapport à  $\omega$ , (b) Coefficients de croisement directs et croisés par rapport à  $\omega$ . Joint 1.





**Fig 4.31:** (a) Coefficients de rigidité directs et croisés par rapport à  $\omega$ ,  
 (b) Coefficients de croisement directs et croisés par rapport à  $\omega$ .

Comme sur les [figures 4.28 et 4.29](#), les coefficients dynamiques suivent le même comportement des joints d'étanchéité cylindriques en fonction de la vitesse de rotation, comme illustré aux [figures 4.30 et 4.31](#). De même, le jeu radial interfère avec les valeurs des coefficients, en les diminuant à mesure que le rapport, le jeu radial et le rayon de l'axe augmentent.

**4.4 JOINTS PLATS ETAGES**

La même analyse effectuée pour les joints coniques a été réalisée pour les joints décalés. Ainsi, deux types de joints ont été examinés et leurs spécifications sont décrites dans les **tableaux 4.7** et **4.8**.

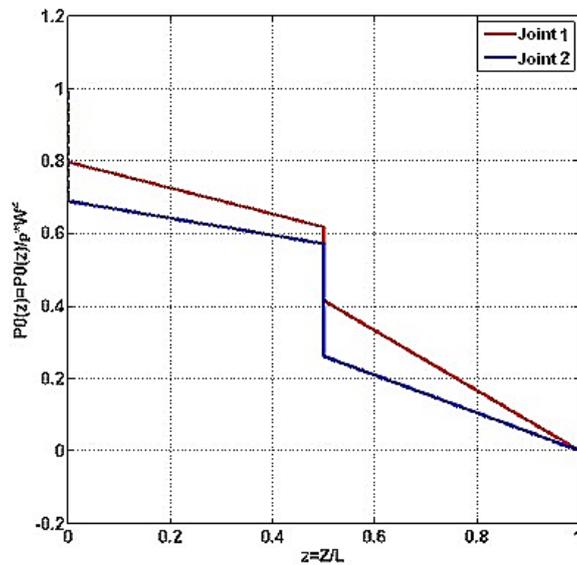
**Tab 4.7:** Paramètres du tampon d'écoulement étagé pour les calculs avec le système perturbé.

$\Delta P$ [bars]	$R$ [mm]	$L_1 = L_2$ [mm]	$\omega$ [tr/min]	$\mu$ [Pa.s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\xi$	$\xi_e$	$\varepsilon_s = \varepsilon_r$
35	76.20	25.40	3 000	$1.3 \times 10^{-3}$	1 000	0.10	1.00	0.001

**Tab 4.8:** Valeurs du jeu radial des entrées ( $C_0$ ) et de la sortie ( $C_1$ ) pour les joints étagés.

Joint 1	$C_{01} = C_{11} = 0.381mm$
	$C_{02} = C_{12} = 0.1905mm$
Joint 2	$C_{01} = C_{11} = 0.762mm$
	$C_{02} = C_{12} = 0.381mm$

La répartition de la pression, le long de la coordonnée  $z$ , pour les deux types de joints décrits dans les **tableaux 4.7** et **4.8** est illustrée à la **figure 4.32**



**Fig 4.32:** Répartition de la pression,  $p_0(z)$  pour les deux types de joints étagés.

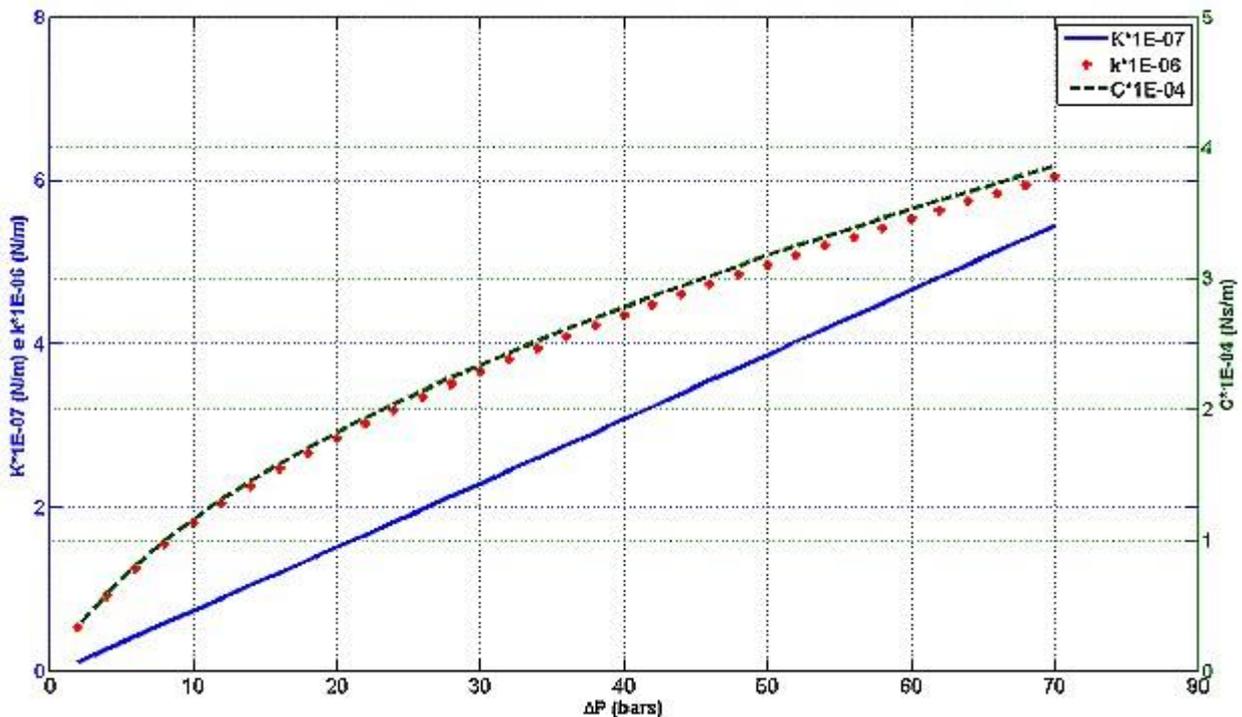
De manière similaire aux cas étudiés précédemment, on constate que l'augmentation du jeu radial dans le joint d'étanchéité à étages augmente la quantité de pression absorbée à l'entrée du joint. Etant donné que le joint étagé est constitué de deux sections de joints cylindriques, le même effet apparaît au point de jonction des sections de joint.

Malgré l'augmentation de l'effet Lomakin illustrée à la **figure 4.32**, les coefficients dynamiques, y compris la raideur directe, diminuent avec l'augmentation de la valeur du jeu radial. Les valeurs de ces coefficients dynamiques sont présentées dans le **tableau 4.9**.

**Tab 4.9** : Valeurs calculées des coefficients dynamiques.

	$K [\times 10^7 \text{ N/m}]$	$K [\times 10^7 \text{ N/m}]$	$C [\times 10^5 \text{ N.s/m}]$	$C [\times 10^5 \text{ N.s/m}]$	$M [\text{kg}]$
Joint 1	2.685	0.402	0.256	0.4107	14.125
Joint 2	1.705	0.388	0.249	0.720	24.801

L'analyse des coefficients du **tableau 4.9** et des coefficients dynamiques pour les joints cylindriques et coniques révèle certaines différences. Dans le cas de joints décalés, lorsque le jeu radial augmente, les termes d'amortissement direct en raideur directe et en rigidité transversale diminuent à mesure que les termes d'inertie et d'amortissement croisé augmentent. Ceci est dû à l'effet de la deuxième section cylindrique du joint à gradins. Dans ce cas, la vitesse circonférentielle a une condition initiale autre que zéro, qui résulte de la valeur provenant de la première section. En outre, une autre perte de charge abrupte se produit, ce qui augmente le terme de rigidité directe par rapport aux joints d'étanchéité analysés aux points 4.2.1 et 4.2.2. Les **figures 4.33 et 4.34** montrent l'influence de la perte de charge sur les coefficients dynamiques de chacun des joints décrits dans les tableaux 7 et 8.



**Fig 4.33**: Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à  $\Delta P$  pour le joint 1.

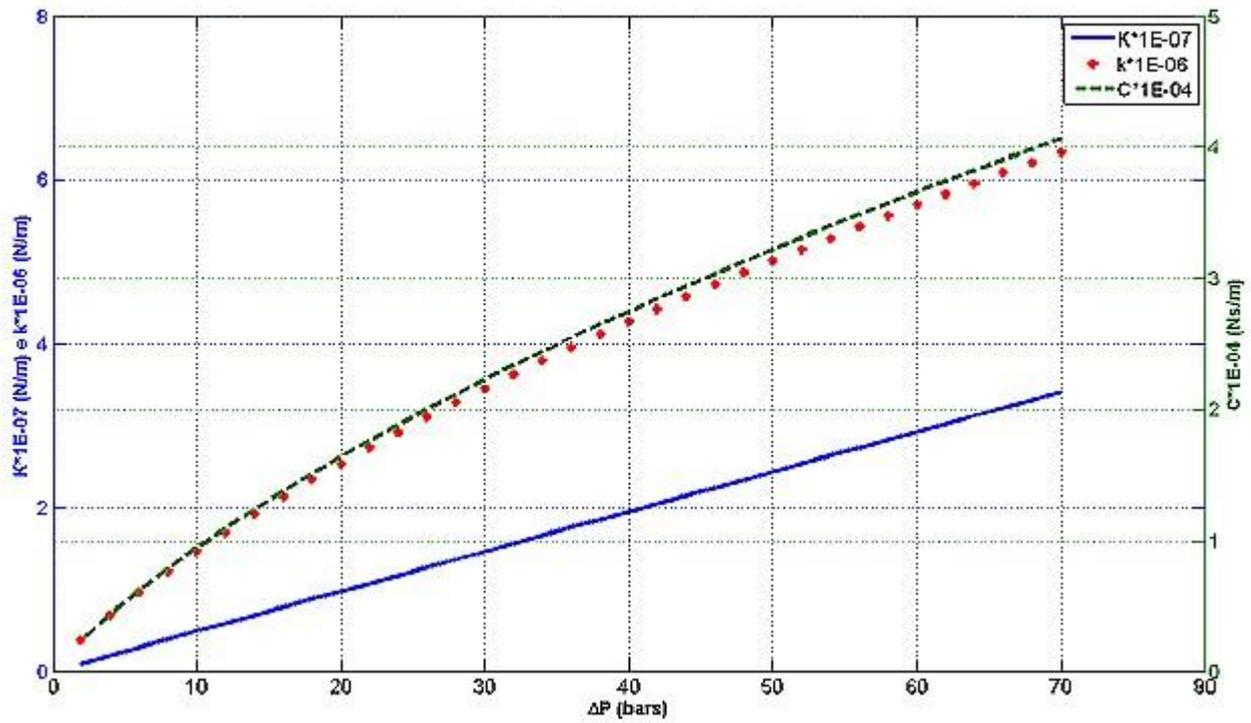
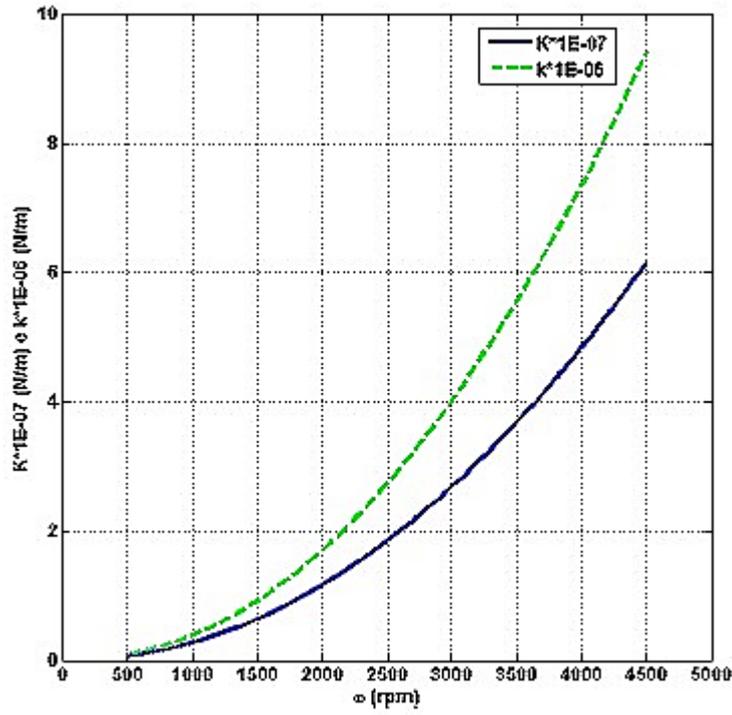
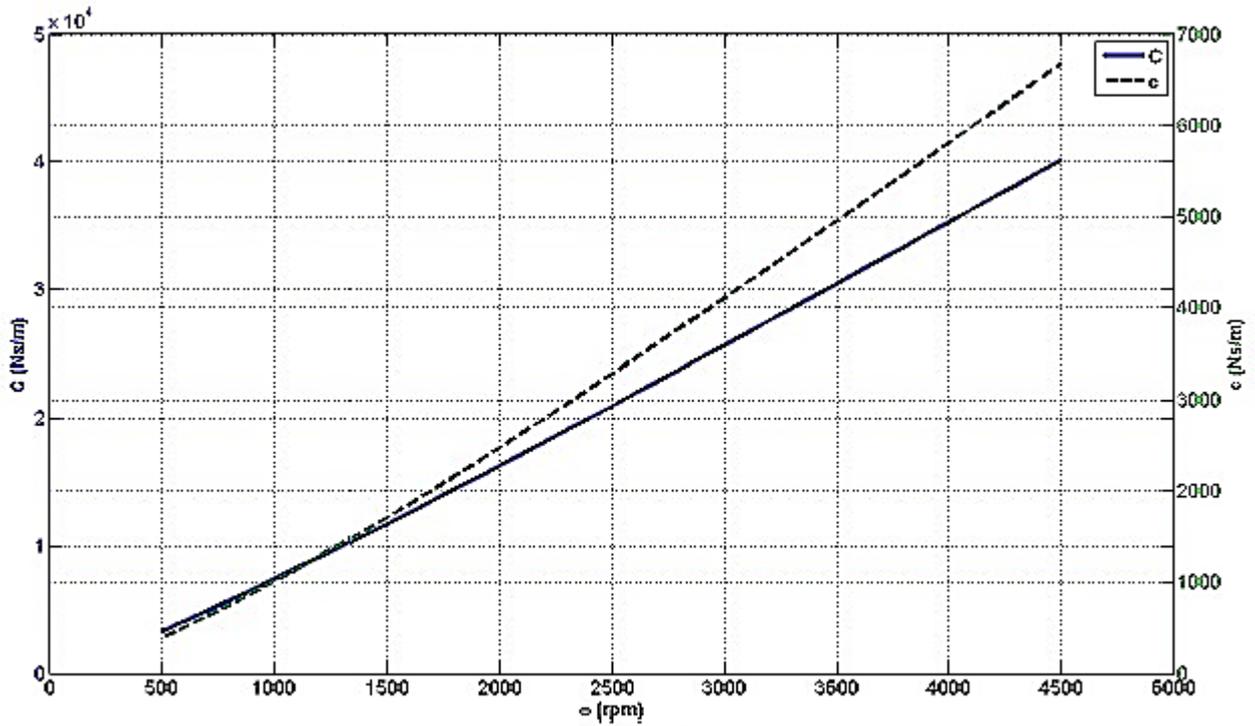


Fig 4.34: Coefficients directs de rigidité, d'amortissement direct et de rigidité croisée par rapport à  $\Delta P$  pour le joint 2.

Le profil de la distribution des coefficients illustrés aux figures 4.33 et 4.34 est similaire à celui des joints cylindriques et décalés. Toutefois, avec le jeu radial accru, les termes d'amortissement direct et de rigidité transversale ne varient pas de manière significative, car le terme de rigidité directe présente une diminution de 48%. Les coefficients dynamiques en fonction de la vitesse de rotation sont représentés par les figures 4.35 et 4.36 pour le joint 1 et le joint 2, respectivement.

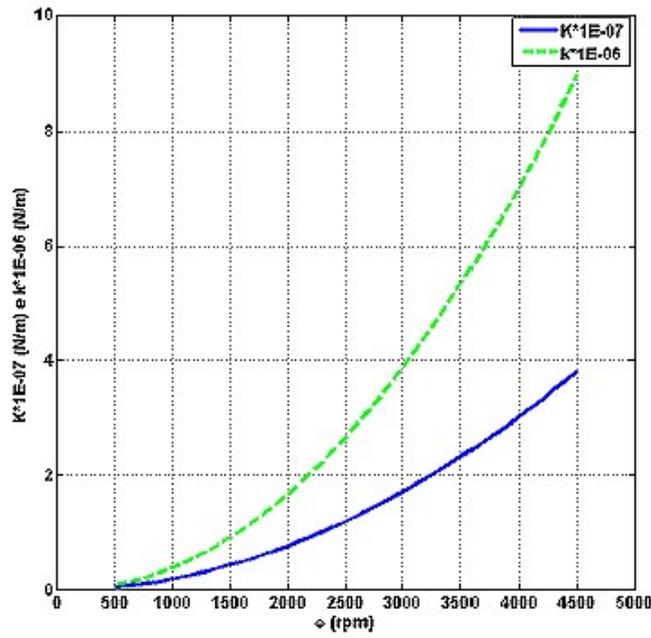


(a)

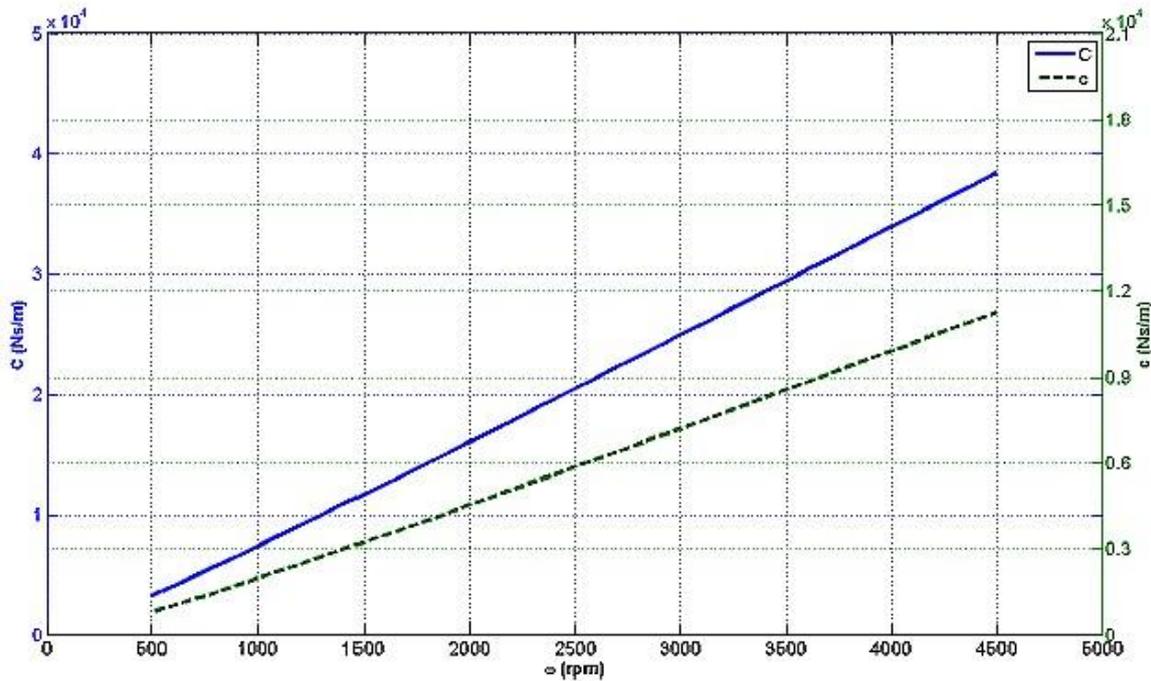


(b)

Fig 4.35: (a) Coefficients directs et transversaux de rigidité en fonction de la vitesse de rotation, (b) Coefficients directs et de croisement de l'amortissement en fonction de  $\omega$ . Joint1.



(a)



(b)

Fig 4.36: (a) Coefficients directs et transversaux de rigidité en fonction de la vitesse de rotation, (b) Coefficients directs et de croisement de l'amortissement en fonction de  $\omega$ . Joint 2.

Dans ce cas, les coefficients d'amortissement direct et de rigidité transversale varient peu lorsque le jeu radial est modifié, alors que le terme de rigidité directe présente une chute considérable. Comme mentionné précédemment, en raison des nouvelles conditions pour l'analyse du joint étagé, la valeur du coefficient de croisement de l'amortissement augmente avec l'augmentation du jeu radial, mais présente toujours le même comportement linéaire en relation avec la variation de la vitesse de rotation.

---

# Chapitre 05

*COMPORTEMENT DYNAMIQUE*

*DU*

*SYSTÈME ROTOR COMPLET*

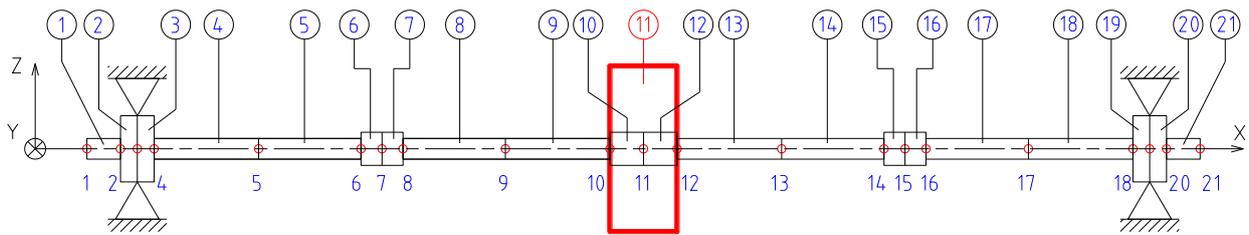
---

Afin d’analyser l’influence des joints d’étanchéité sur le système rotor complet (c’est-à-dire arbre, paliers, joints d’étanchéité et fondation), la simulation numérique du comportement dynamique du système rotor complet, offre la possibilité de prendre en compte le comportement flexible de la fondation qui supporte les composants du système tournant. Le rotor complet étant un système matériel ayant plusieurs degrés de liberté, une analyse numérique par élément finis s’impose. De plus, les trois types de configurations de joints d’étanchéité annulaires considérés dans ce travail ont été analysés.

**5.1. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS**

**5.1.1. Considérations générales**

En vue d’une simulation numérique par éléments finis, le modèle adopté dans notre cas comporte **21** éléments dont **20** éléments de poutre et **1** élément de disque rigide (**figure 5.1**) avec **21** nœuds. Chaque nœud possède quatre degrés de liberté, dont deux en translation et deux en rotation.



**Fig 5.1:** Modèle en éléments finis du système rotor complet

La taille et le type de chaque élément sont listés dans le **tableau 5.1**.

**Tab 5.1:** Discrétisation par éléments finis.

Elément	Noeuds	Type d'élément	Diamètre [mm]	Longueur[mm]
1	1-2	Poutre	12	40
2	2-3	Poutre	30	10
3	3-4	Poutre	30	10
4	4-5	Poutre	12	72.5
5	5-6	Poutre	12	67.5
6	6-7	Poutre	20	5
7	7-8	Poutre	20	5
8	8-9	Poutre	12	67.5
9	9-10	Poutre	12	72.5
10	10-11	Poutre	20	21.5
11	11	Disque	<i>Di= 20 ; De=90</i>	43
12	11-12	Poutre	20	21.5
13	12-13	Poutre	12	72.5
14	13,14	Poutre	12	67.5
15	14,15	Poutre	20	5
16	15,16	Poutre	20	5
17	16,17	Poutre	12	67.5
18	17,18	Poutre	12	72.5
19	18,19	Poutre	30	10
20	19,20	Poutre	30	10
21	20,21	Poutre	12	40



Les figures 5.3, 5.4 et 5.5 décrivent le comportement de trois nœuds, respectivement, le nœud 3, en référence au premier palier, le nœud 7, en référence au tourillon où le joint d'étanchéité sera ajouté et, enfin, le nœud 11, où il se trouve l'élément de disque. Les axes *OY* et *OZ* se rapportent, respectivement à la direction horizontale et vertical du système.

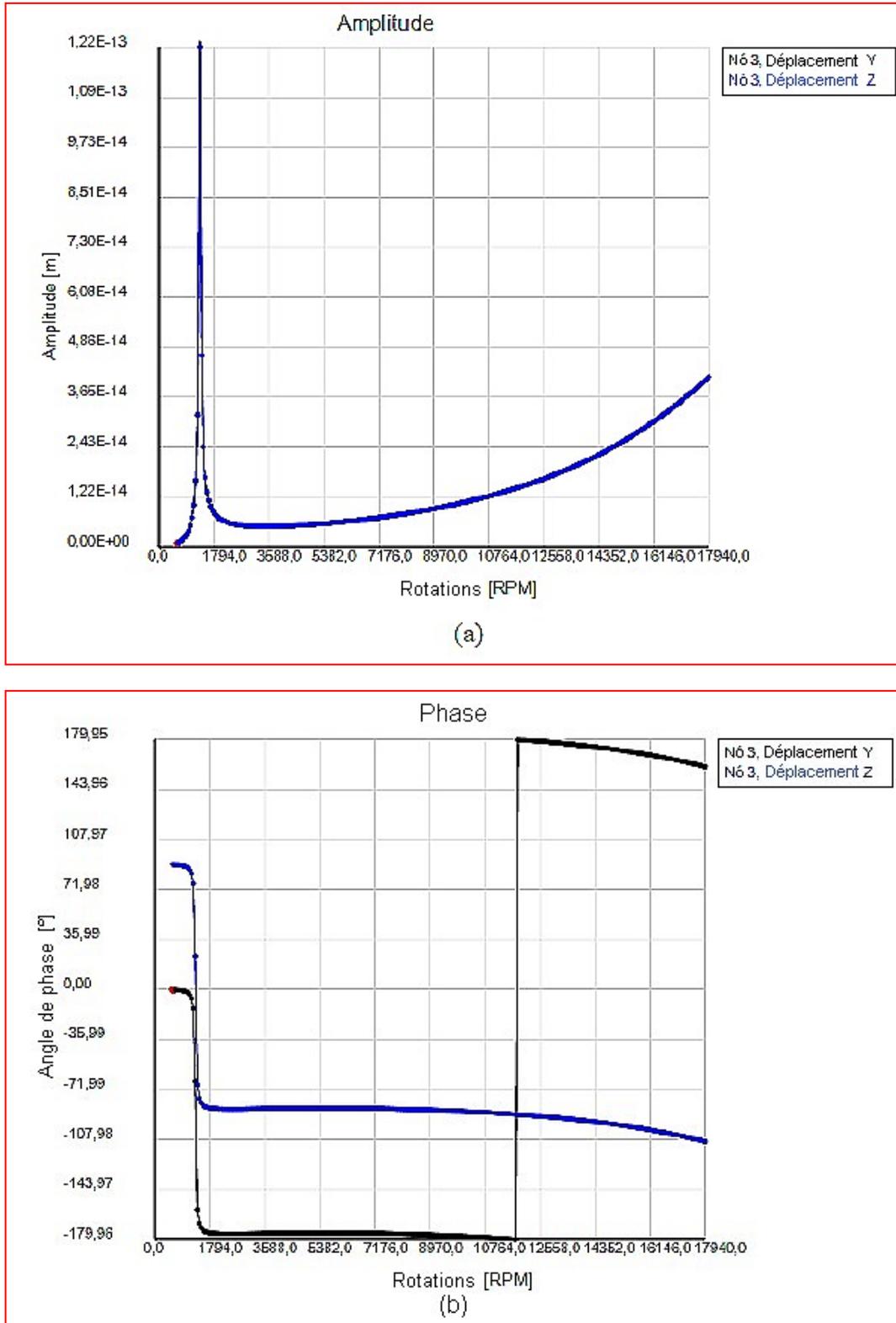
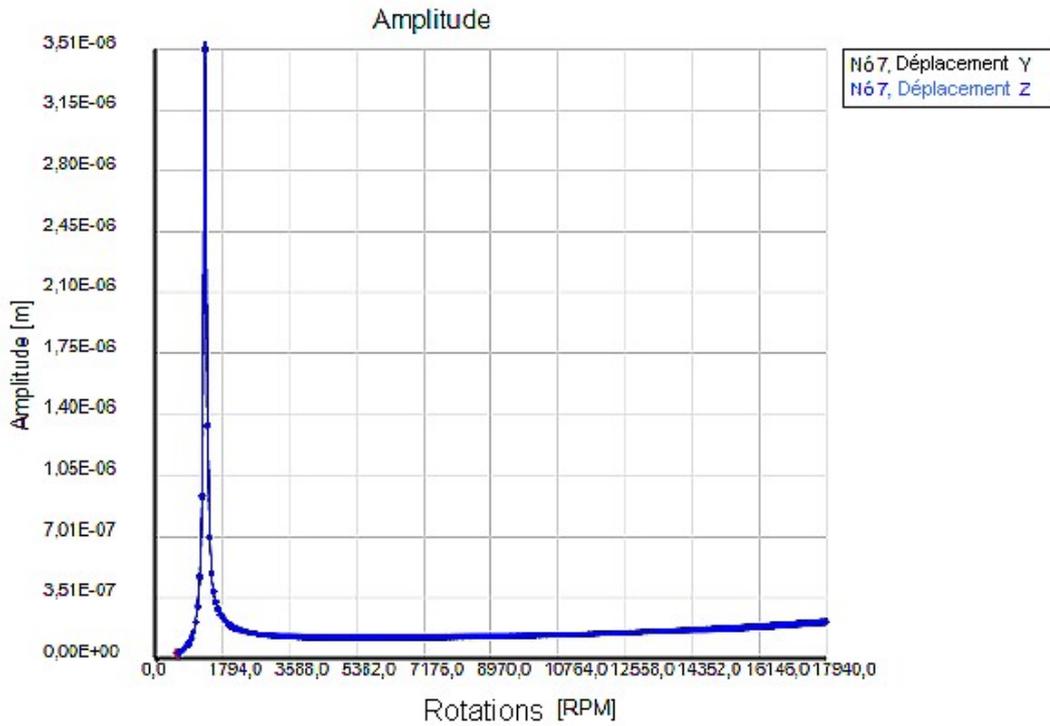
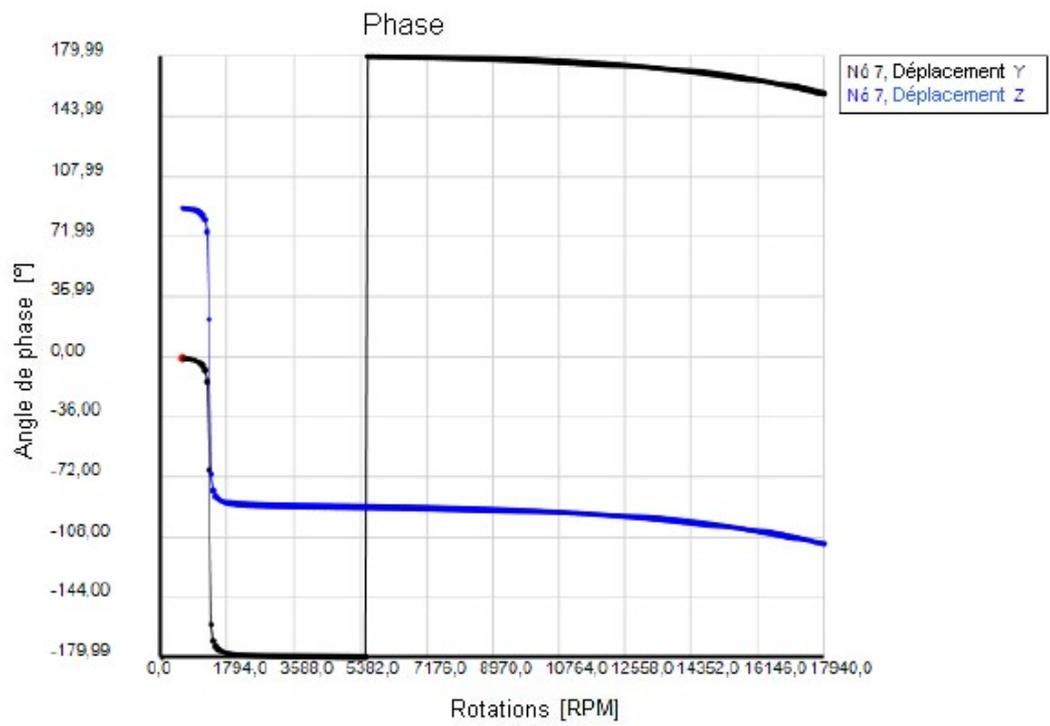


Fig 5.3: (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3

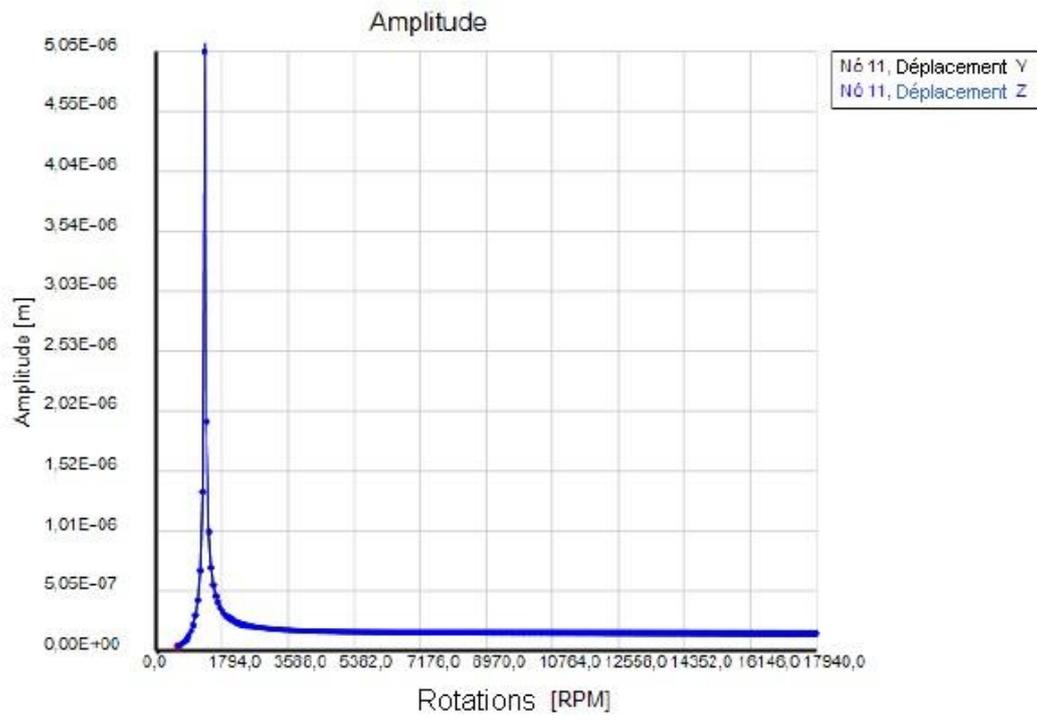


(a)

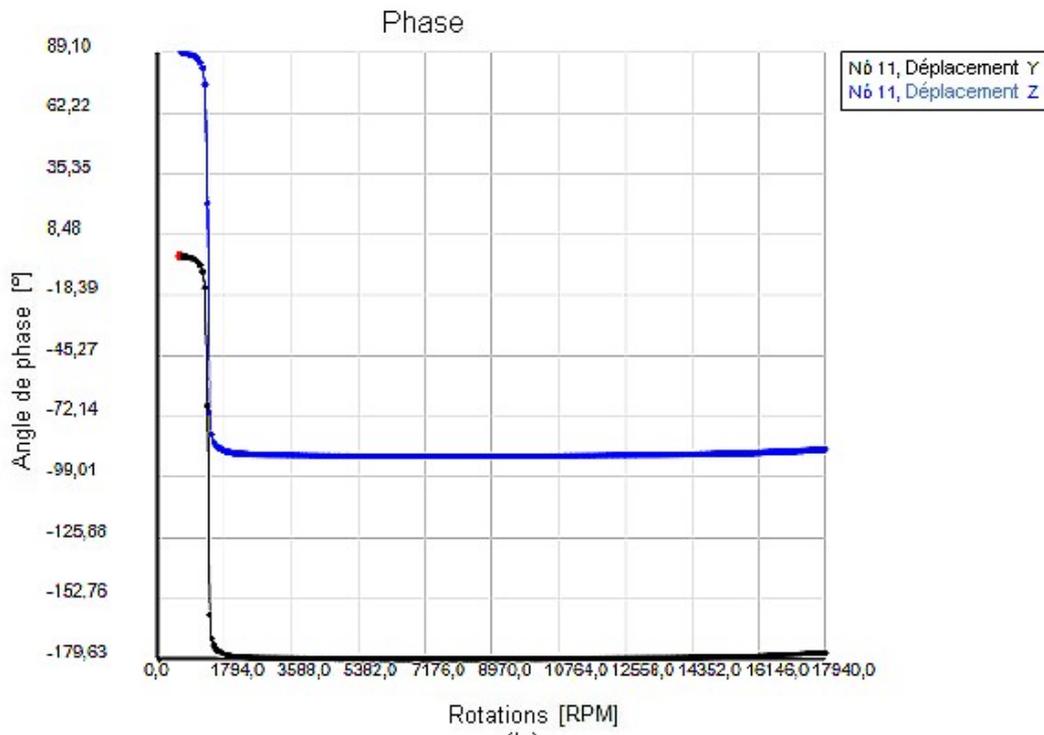


(b)

Fig 5.4: (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.



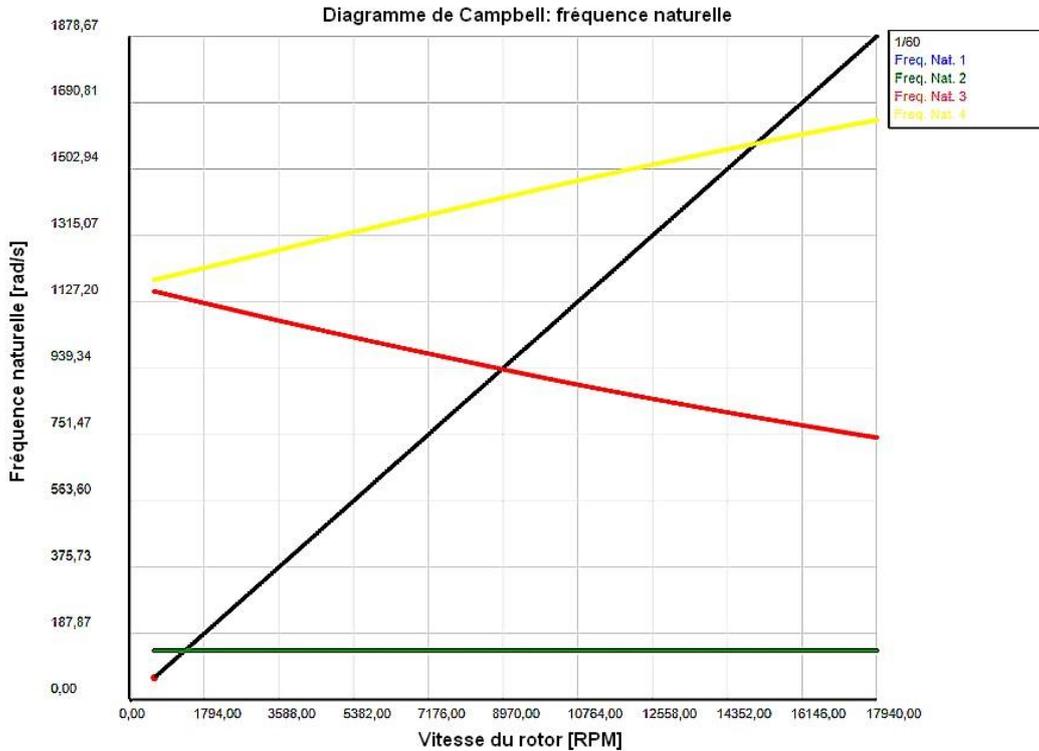
(a)



(b)

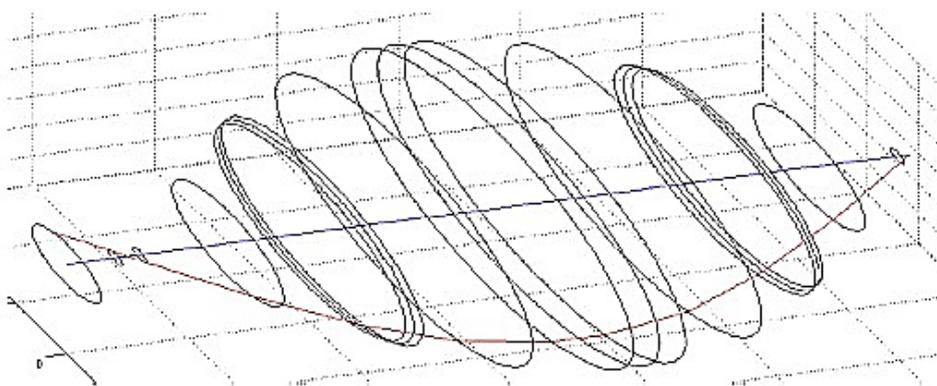
Fig 5.5: (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11

La **figure 5.6** présente le diagramme de Campbell utilisé pour cette analyse. Elle montre les fréquences naturelles (ou propres) du système en fonction de la vitesse de rotation du rotor. Dans ce cas, la fréquence naturelle du système se situe autour de **1345 tr/min (141 rad/s)** et les amplitudes des déplacements suivant **Y** et **Z** sont les mêmes.



**Fig 5.6:** diagramme de Campbell pour système rotor sans joint d'étanchéité

La fréquence naturelle observée dans la réponse au déséquilibre coïncide avec le croisement de la ligne de fréquence de rotation avec la courbe de fréquence propre du premier mode dans le diagramme de Campbell. Cependant, cette représentation n'est que qualitative, puisque les orbites présentées sont toujours considérées comme cylindriques et que l'échelle est normalisée par la plus grande amplitude (**Figure 5.7**).

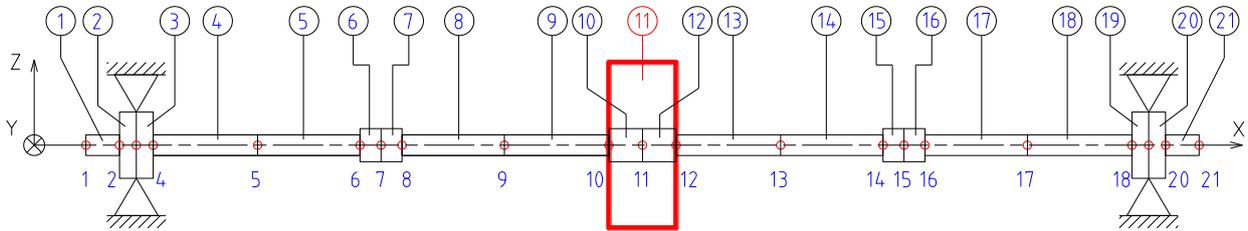


**Fig 5.7:** Mode de vibration du système rotor à la vitesse critique de 1345 tr / min.

5.2.2 Système rotor avec joints d'étanchéité

5.2.2.1 Système rotor avec joints cylindriques

Pour la simulation du comportement dynamique du système rotor avec joint d'étanchéité cylindrique, le modèle en éléments finis est donné par la **figure 5.8**. Les données relatives à ce dernier sont présentées dans le **tableau 5.4**.



**Fig 5.8:** Modèle en éléments finis du système rotor avec joints d'étanchéité

Les données relatives à ce dernier sont présentées dans le **tableau 5.4**.

<b>Tab 5.4:</b> Caractéristiques du joint mécanique cylindrique.		
Longueur	Jeu radial moyen	Différence de pression
$L [mm]$	$\bar{C}r [\mu m]$	$\Delta P [bar]$
<b>10</b>	<b>50</b>	<b>13</b>

Deux cas de comportement sont à considérer concernant la fondation par rapport à l'axe vertical **Z** :

- Fondation rigide
- Fondation flexible

1° Système rotor sur fondation rigide

Les paramètres de ce type de structure sont présentés dans le **tableau 5.5**.

**Tab 5.5:** Paramètres de structure de fondation dans le sens vertical (z).

Masse	Coefficient d'amortissement	Coefficient de rigidité
$M [kg]$	$C [N.s/m]$	$K [N/m]$
<b>7.5</b>	<b>300</b>	<b><math>15 \times 10^5</math></b>

Les coefficients de rigidité et d'amortissement du joint d'étanchéité présentant les caractéristiques indiquées dans le **tableau 5.4** sont donnés aux **figures 5.9** et **5.10**. Il est à noter que les coefficients de rigidité directe ont un ordre de grandeur supérieur aux termes transversaux, ainsi que pour les conditions d'amortissement. Cela est dû au fait que les rapports  $L/D$  et  $\bar{C}r/R$  sont relativement faibles, respectivement **0.5** et **0.005**. Ce problème se produit également pour les joints d'étanchéité coniques et étagés décrits dans les rubriques suivantes.

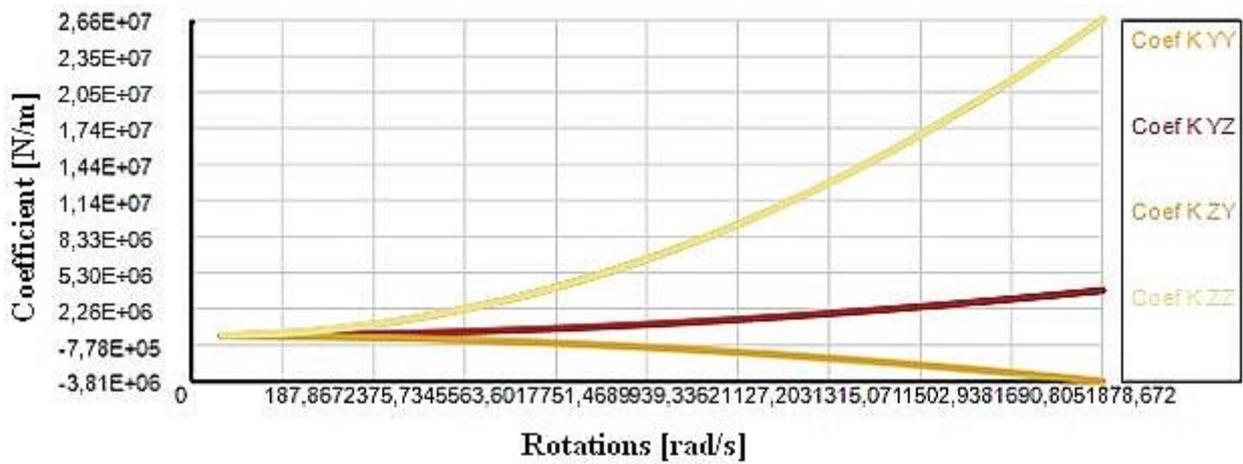


Fig 5.9: Coefficients de rigidité du joint d'étanchéité cylindrique.

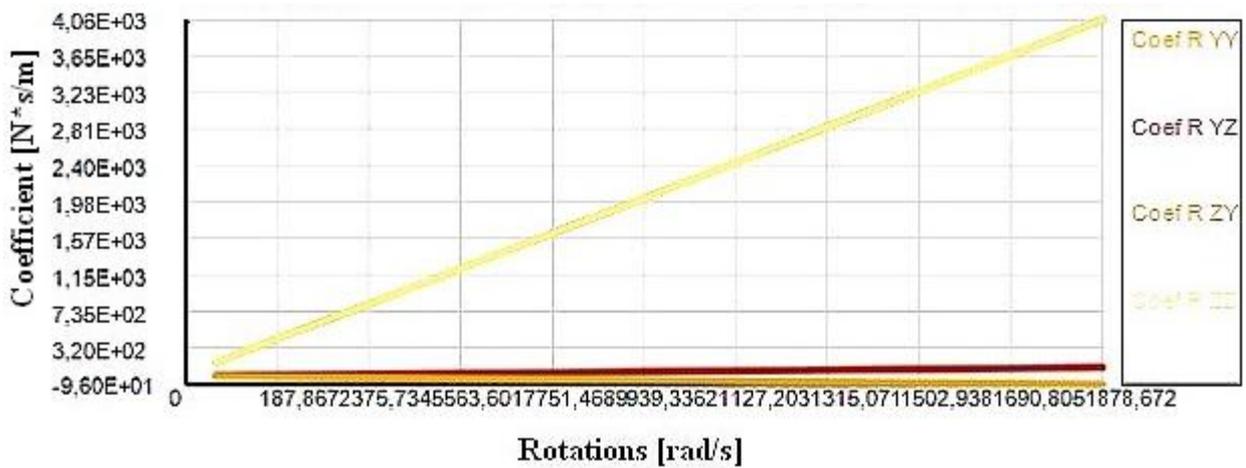
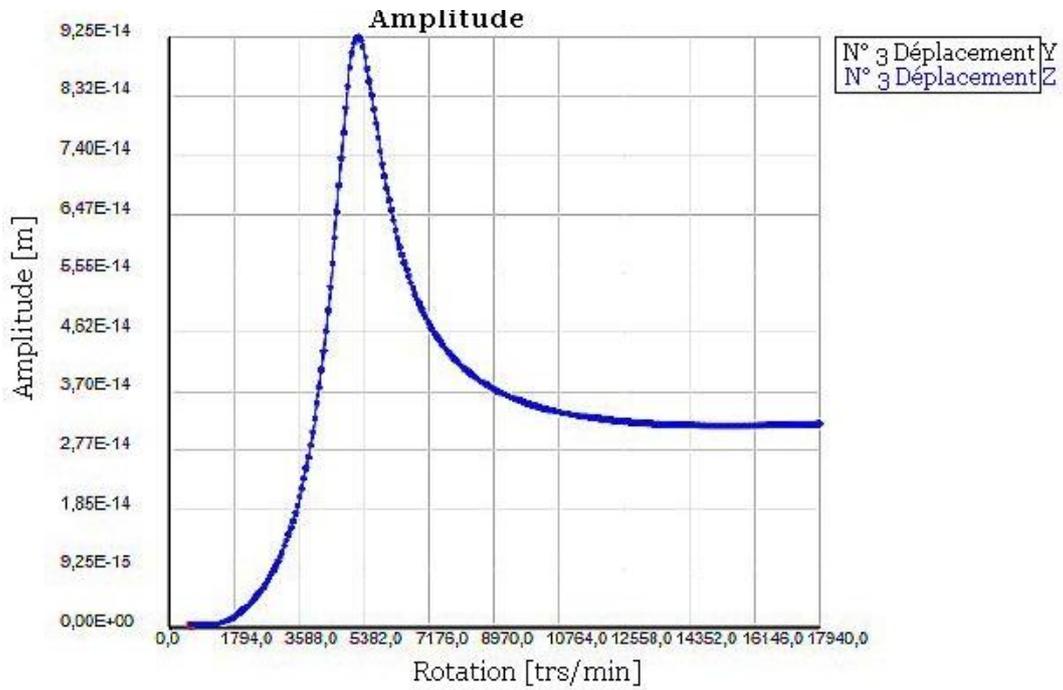
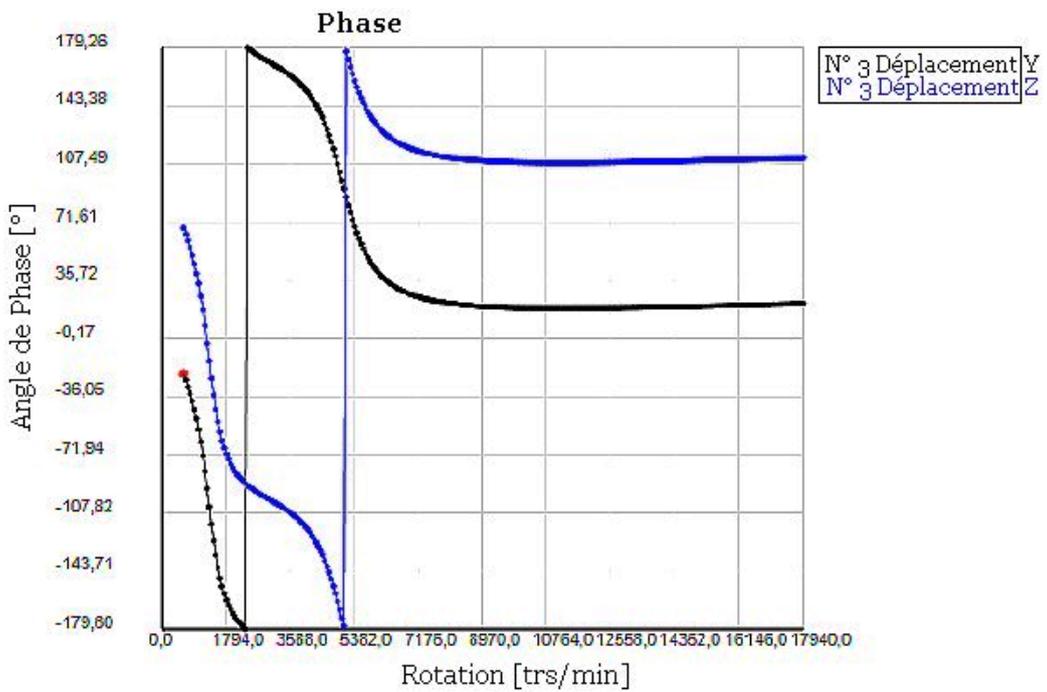


Fig 5.10: Coefficients d'amortissement du joint d'étanchéité cylindrique.

Les amplitudes et les phases des noeuds par rapport au roulement (noeud 3), au joint (noeud 7) et au disque (noeud II) sont représentées aux figures 5.11 à 5.13. Comme le diagramme de Campbell à la figure 5.14.

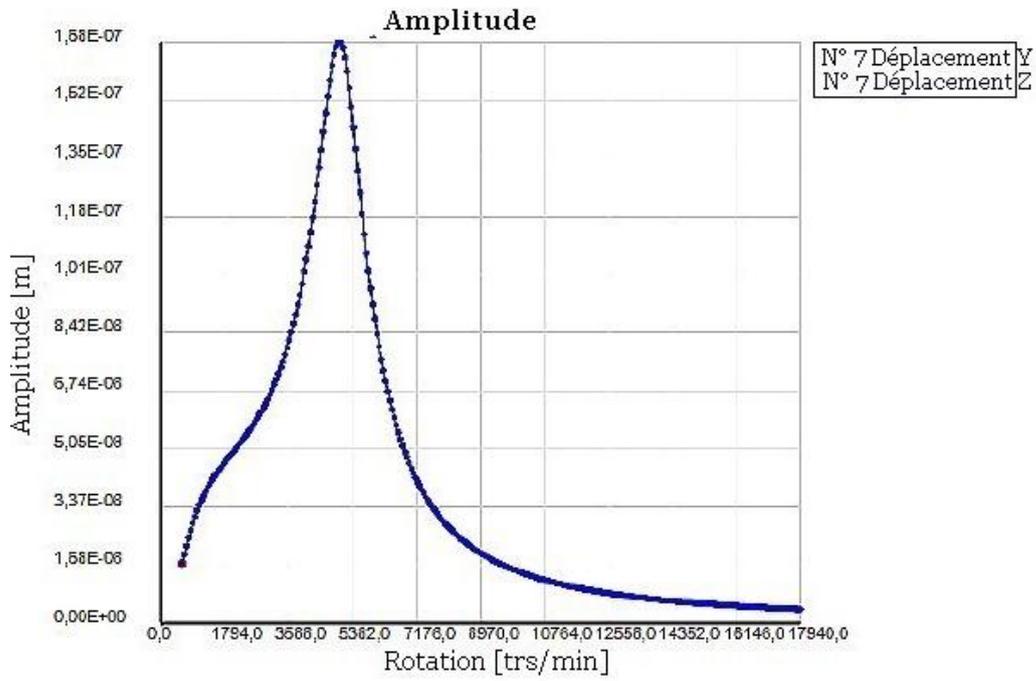


(a)

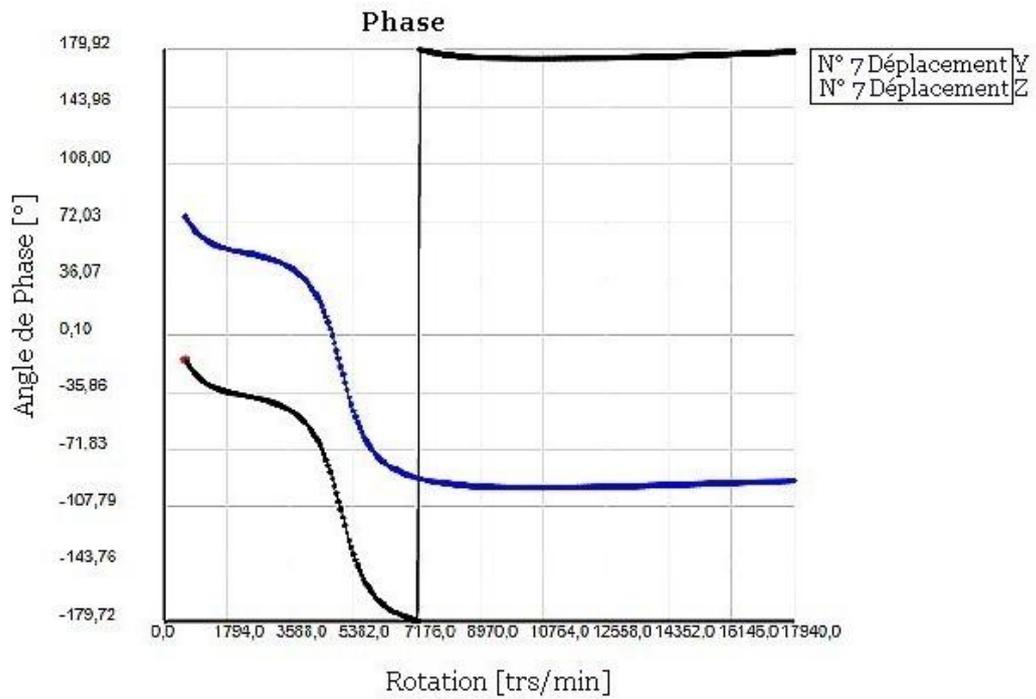


(b)

Fig 5.11: (a) Amplitude du noeud 3, (b) Phase du noeud 3.

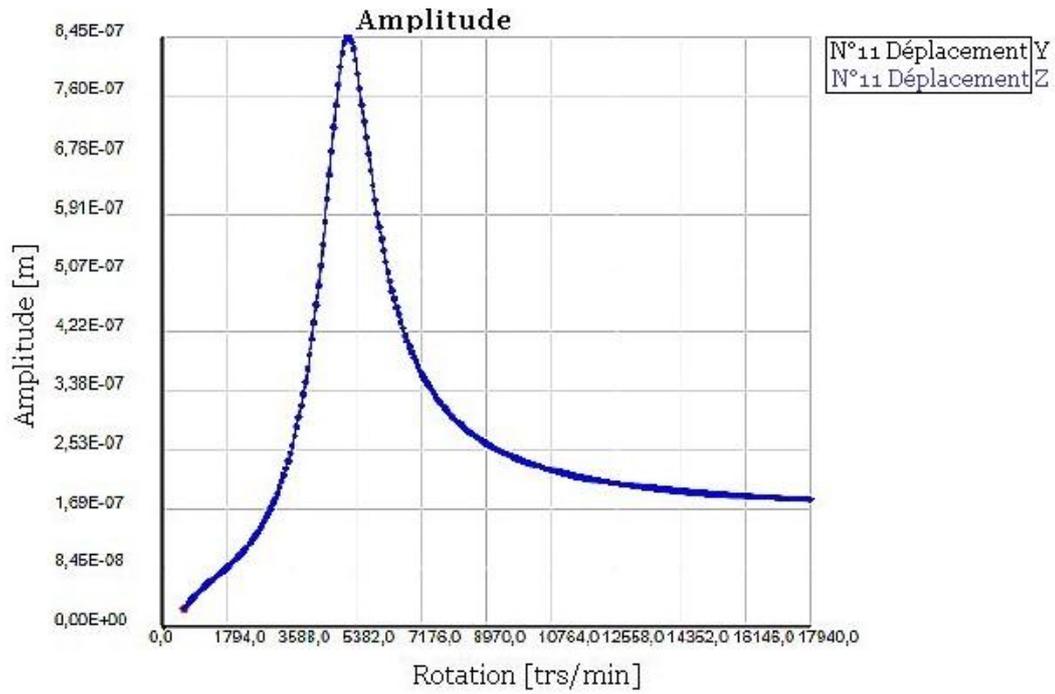


(a)

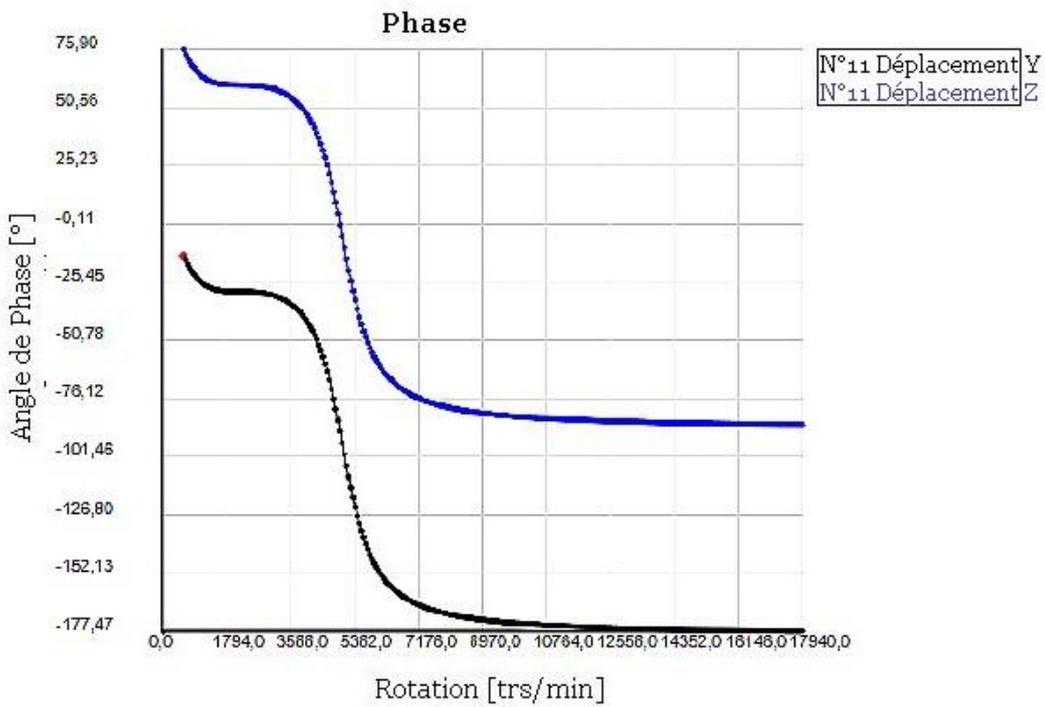


(b)

Fig 5.12: (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.



(a)



(b)

Fig 5.13: (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11.

De la comparaison entre les figures 5.3 à 5.5 et les figures 5.11 à 5.13, on peut noter que l'ajout du joint de flux dans le système a modifié la première fréquence propre de **1345.5 tr/min** à **5160 tr/min**. La confirmation de ce fait est vérifiée à l'aide des diagrammes de Campbell, figures 5.6 et 5.14, qui illustrent également l'altération de la seconde fréquence propre caractérisant un raidissement général du système. Il y a aussi une augmentation de l'amortissement dans le système, mise en évidence par la diminution des pics d'amplitude et de leur amplification dans les nœuds analysés.

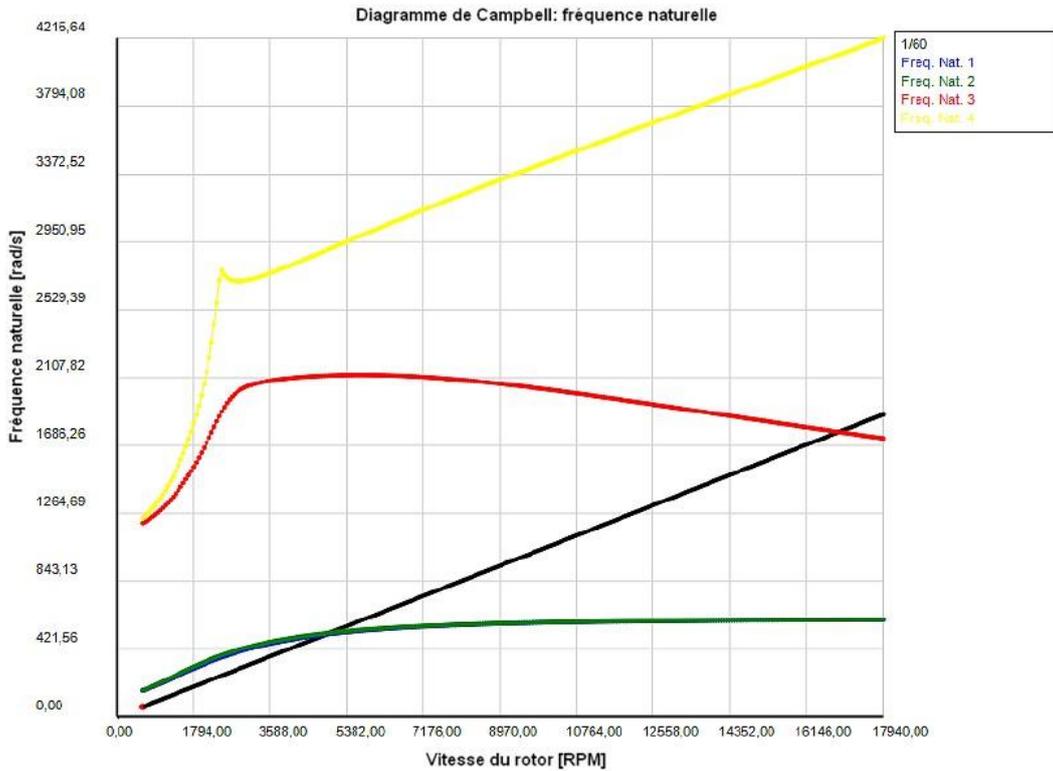


Fig 5.14: diagramme de Campbell pour système rotor avec joint d'étanchéité

La figure 5.15 décrit le mode de fonctionnement du système de palier rigide - arbre – joint cylindrique à la fréquence de résonance du rotor avec joints d'étanchéité et fondation rigide.

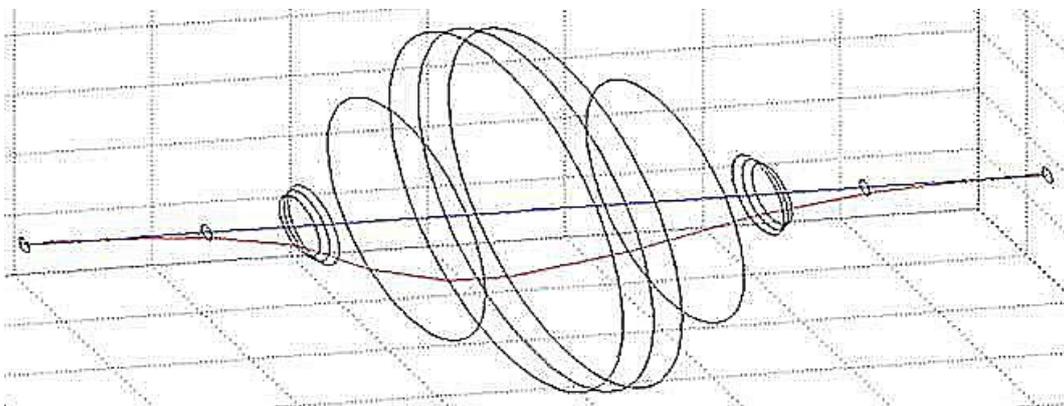
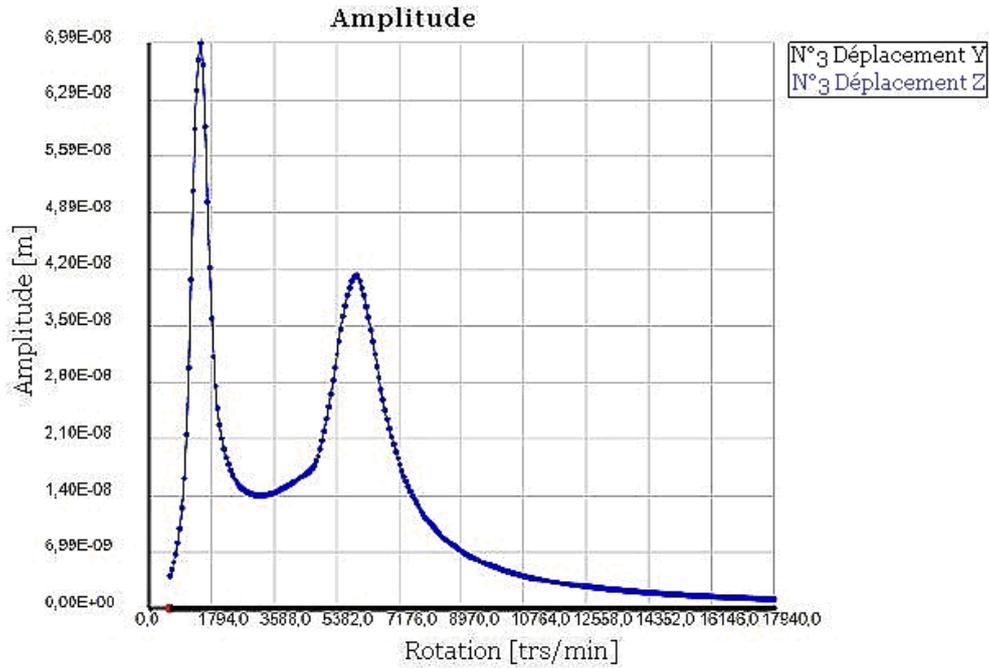


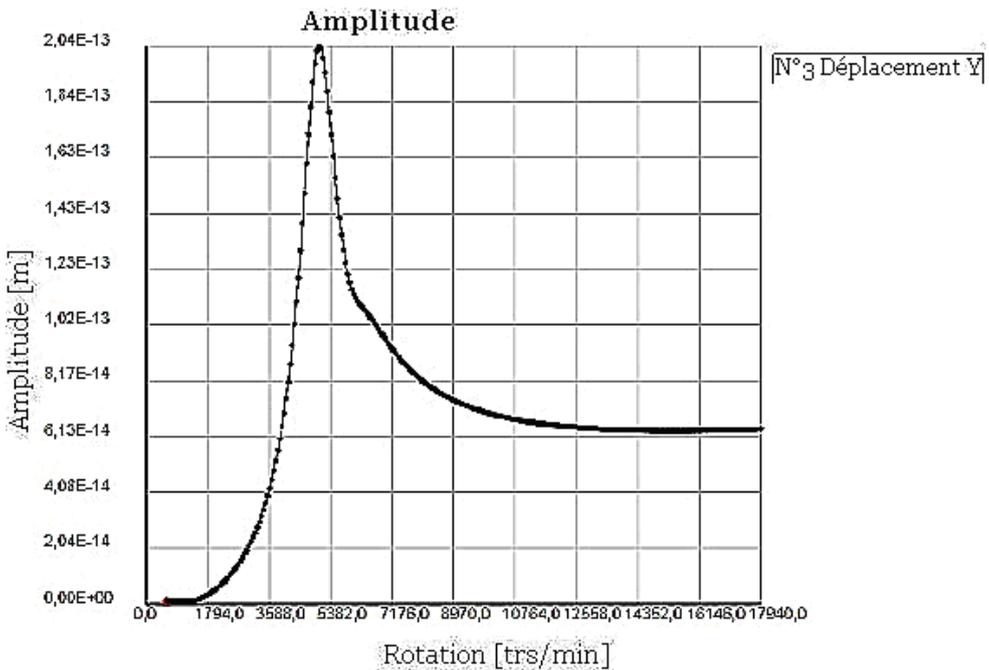
Fig 5.15: Mode de fonctionnement du système à 5160 tr / min.

2° Système rotor sur fondation flexible

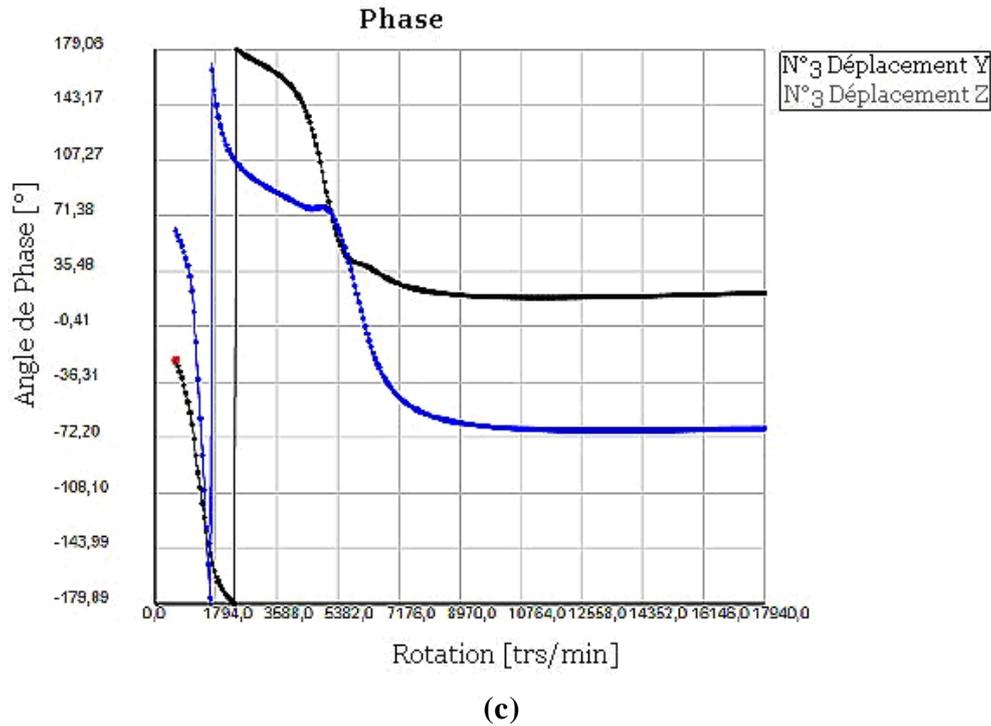
Les figures 5.16 à 5.18 représentent les amplitudes et les phases des nœuds analysés, en considérant maintenant la base flexible dans la coordonnée verticale Z, dans ce cas avec l'influence du joint d'étanchéité. La figure 5.19 décrit le diagramme de Campbell pour cette condition. La fréquence propre non adossée de la structure de fondation, dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 14, est de 141,1 rad / s ou 1350 tr / min (22,5 Hz).



(a)



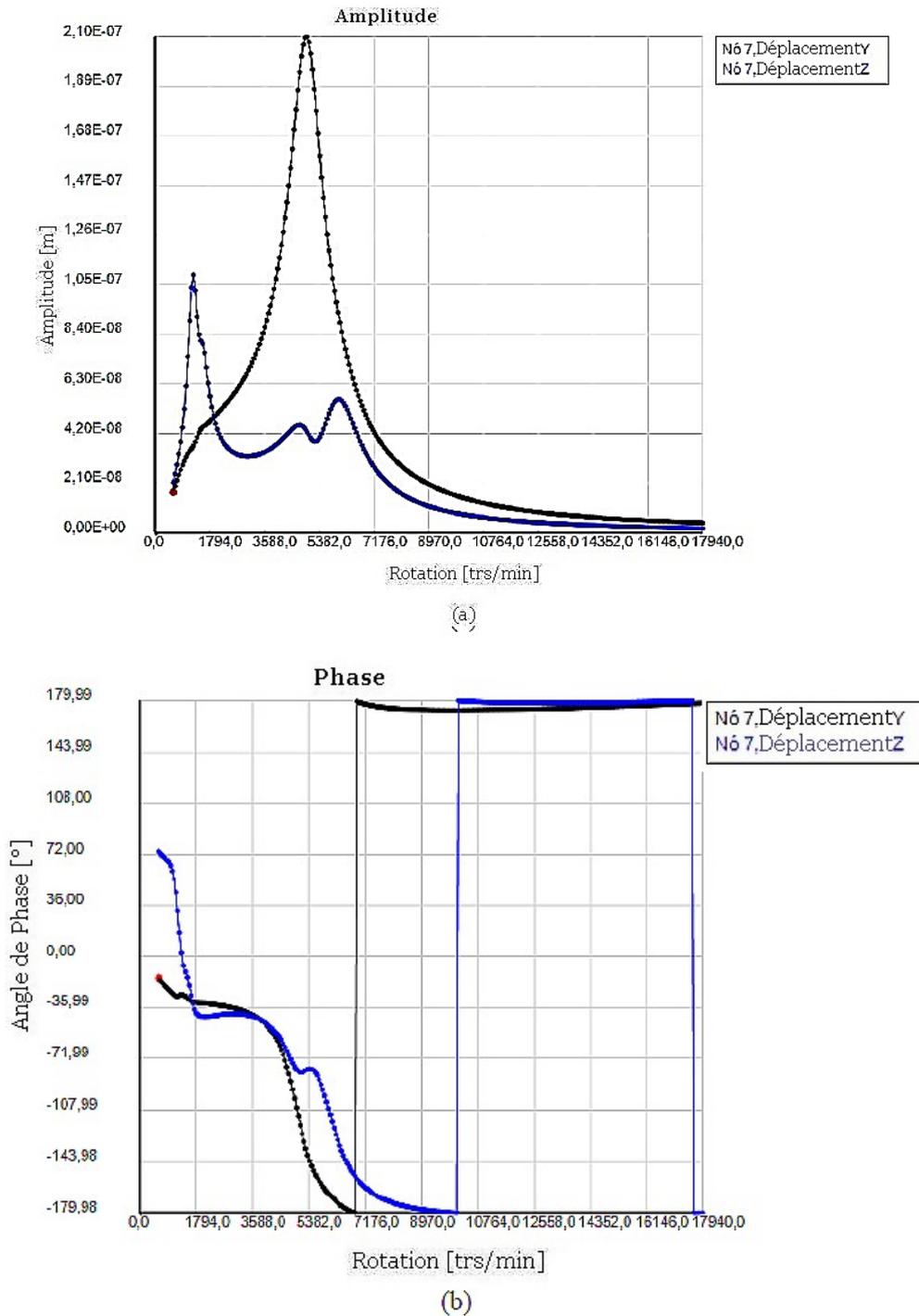
(b)



**Fig 5.16 :** (a) Amplitude dans Y et Z dans le nœud 3, (b) Amplitude dans Y dans le nœud 3  
(c) Phase dans Y et Z dans le nœud 3.

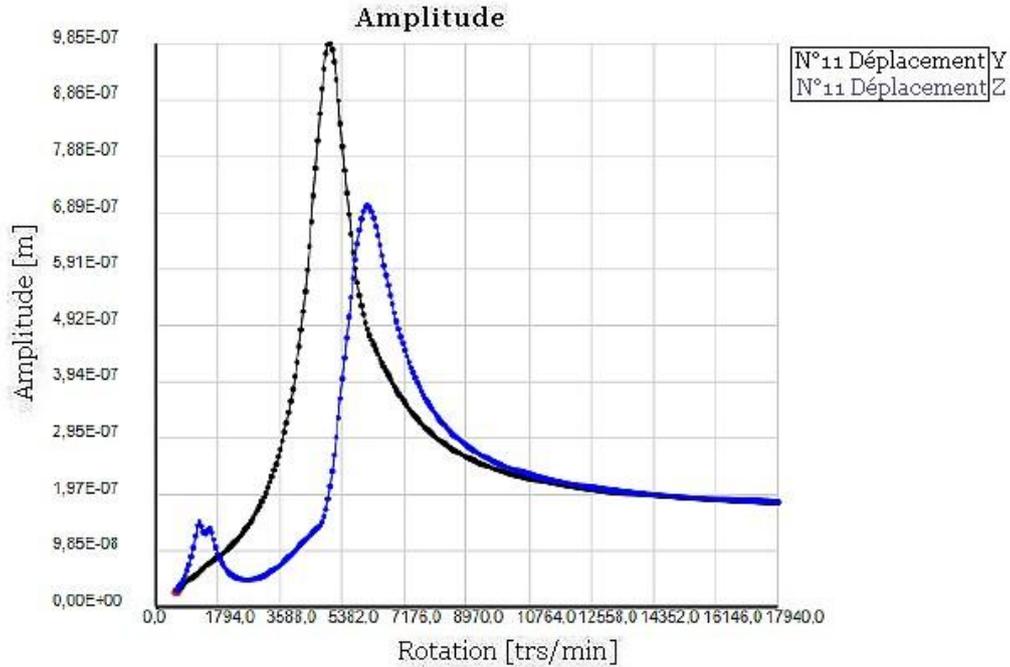
On peut voir sur la **figure 5.16a** que l'amplitude du décalage **Z** augmente considérablement par rapport au cas précédent. En effet, le roulement rigide relie l'arbre directement à la fondation. Ainsi, la flexibilité de la fondation dans la direction **Z** contribue de manière marquée à la réponse sur les nœuds porteurs. Un autre point à souligner concerne la fréquence propre de la fondation qui est flexible, dont le pic est supérieur à celui associé à la flexibilité de l'arbre et située à **5830 tr/min** (**610.5 rad/s**). À la coordonnée horizontale **Y**, l'amplitude de crête reste identique à celle de la **figure 5.11a**, à **5160 tr/min** (**540 rad/s**).

La **figure 5.17** montre l'amplitude et la phase du nœud 7, qui fait référence au nœud où la garniture mécanique cylindrique est insérée. Trois nouvelles fréquences ont été identifiées dans la direction Z: l'une est la fréquence propre de la fondation, avec une amplitude plus grande, la seconde à 5160 tr / min (540 rad / s) et la troisième à 5830,5 tr / min (610,5 rad / s), tous deux dus à la flexion de la tige.

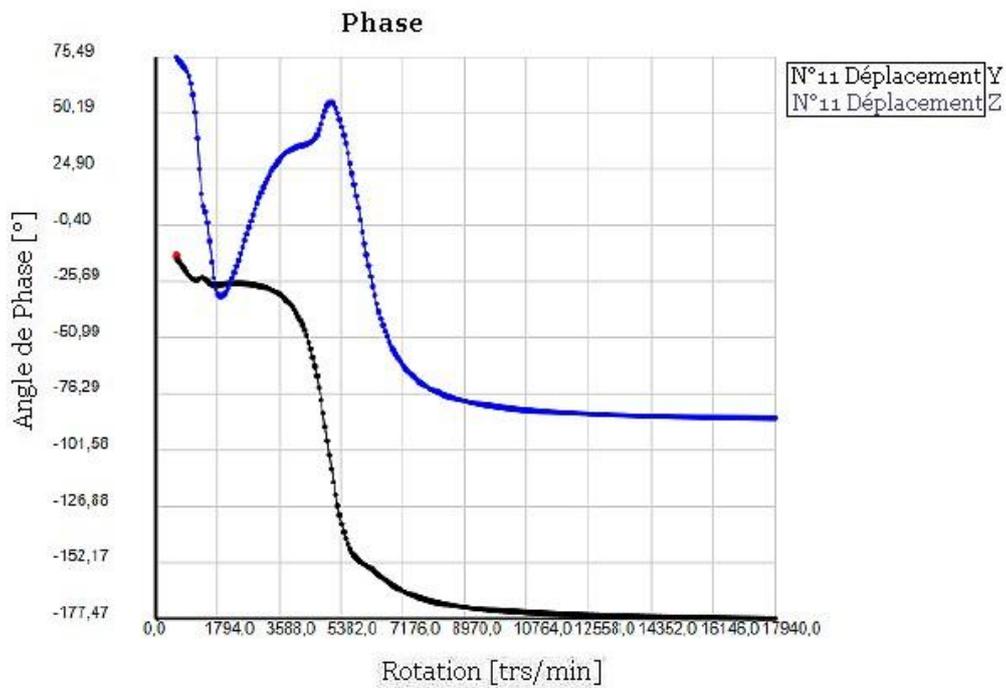


**Fig 5.17:** (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.

Pour ce nœud, la fréquence propre du système joint d'arbre-joint subit un déploiement à deux fréquences très proches, en raison de l'effet gyroscopique des tourillons sur les joints d'écoulement, qui sont couplés à la fondation. Ces deux fréquences, à 5160 tr / min et 5830,5 tr / min, caractérisent les modes de vibration en flexion du système. Il est également à noter que le déplacement vertical (Z) a une amplitude inférieure au déplacement horizontal (Y), contrairement à ce qui se passe dans le nœud porteur.



(a)



(b)

Fig 5.18: (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11.

Toujours pour l'élément nodal, le nœud 11, le décalage de direction verticale a deux pics, qui se rapportent aux fréquences de 1350 tr / min (141,1 rad / s) et de 5830,5 tr / min (610,5 rad / s). Cependant, pour ce nœud, le pic de plus grande amplitude est associé à la fréquence naturelle de flexion de l'axe. Bien que la fondation ne soit flexible que dans la direction z, l'amplitude du déplacement dans y subit une légère variation, ce qui montre que même un joint de petite taille couple le système transmettant les effets d'une direction à une autre dans tous les nœuds analysés. La fréquence propre reste toutefois à 5160 tr / min (540 rad / s) dans cette direction. Il est important de noter que dans les nœuds de palier (3) et de joint d'étanchéité (7), l'effet de la structure de fondation est plus expressif, car ces composants connectent le rotor et la structure à travers un film fluide de comportement anisotrope. Pour le nœud de disque, où se situe le déséquilibre de masse résiduelle, l'effet prédominant est celui de la flexion du rotor.

Le diagramme de Campbell (**figure 5.19**) montre quatre nouvelles courbes de fréquence propres représentant la base flexible à chaque point de connexion au système, ces points étant les deux roulements et les deux joints. On remarquera également que le premier mode de l'axe, représenté par les fréquences propres 5 et 6, montre maintenant une différence notable entre les mouvements de précession en avant et en arrière, qui n'était pas observée avant l'introduction de la base flexible.

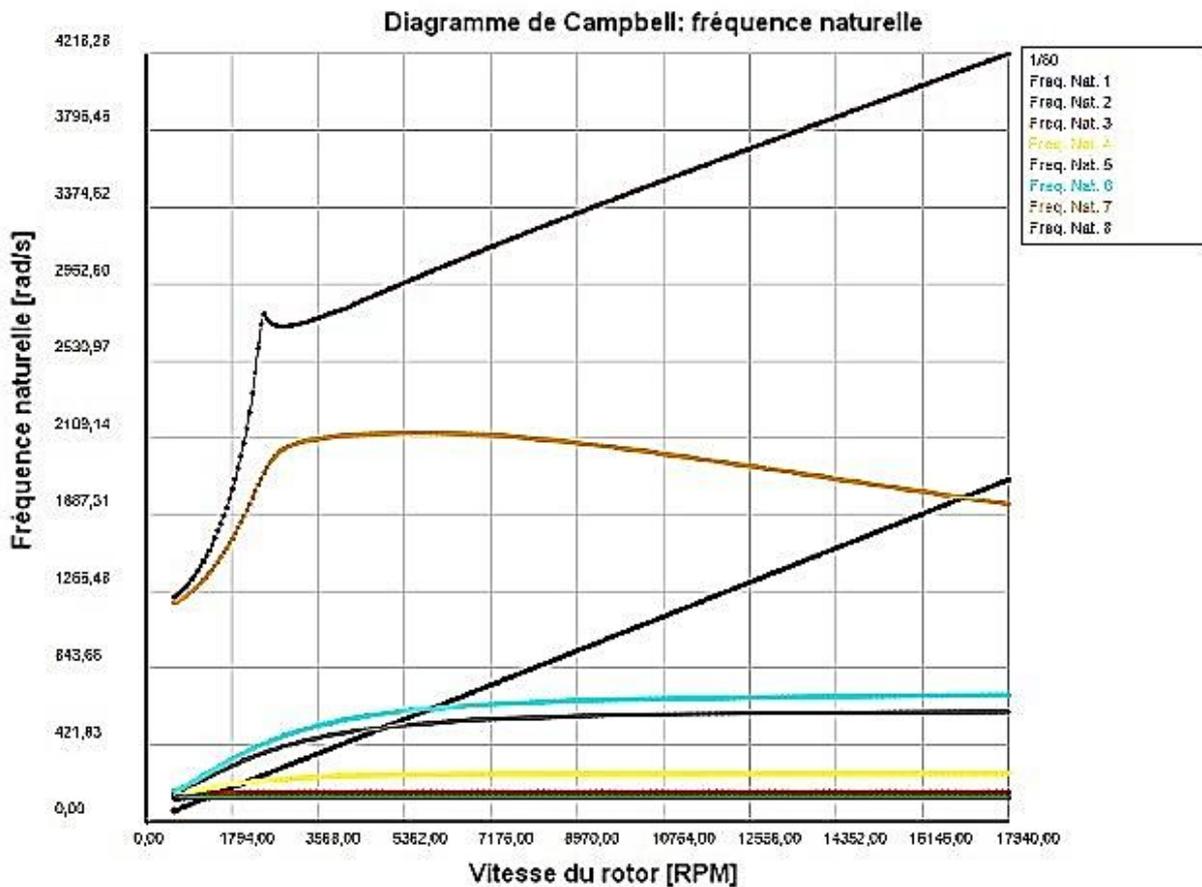
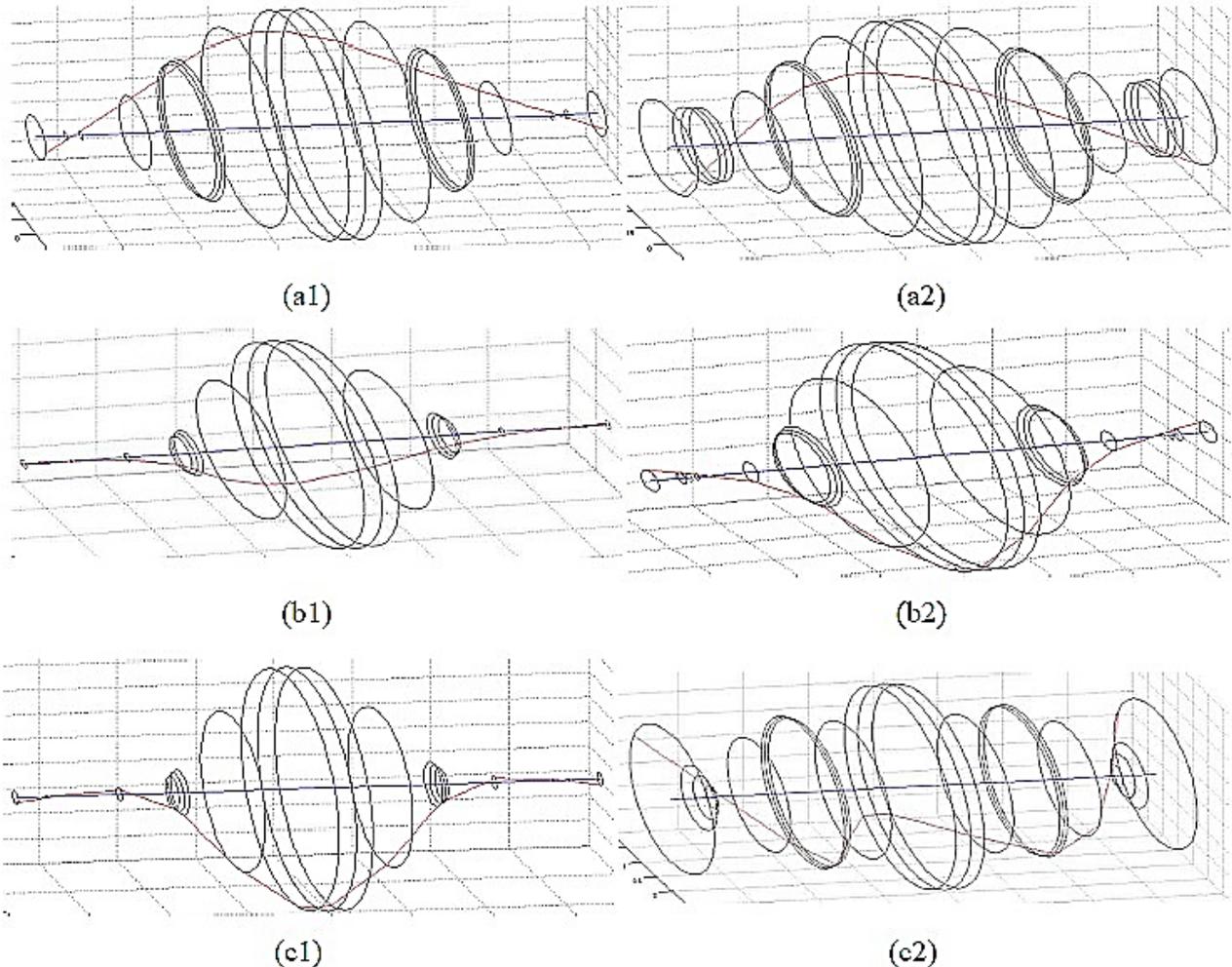


Fig 5.19: Diagramme de Campbell

Cette différence entraîne la distinction des fréquences propres, à savoir 5160 tr / min (540 rad / s) et 5830.5 tr / min (610.5 rad / s).

Les modes de fonctionnement du système dans les trois fréquences propres excitées sont décrits à la **figure 5.20**. Sur les **figures 5.20 (a1) et (a2)**, les modes de fonctionnement sont observés à 1350 tr / min sans et avec la base flexible, respectivement. On observe que cette fréquence est associée au bon mode de la fondation flexible, ce qui provoque un déplacement marqué des nœuds porteurs (**Figure 5.20 (a2)**). Les **figures 5.20 (b1) et (b2)** montrent le mode de flexion du rotor dans la coordonnée Y à 5160 tr / min, tandis que la figure 5.20 (c1) et (c2) montre le mode de flexion en Z à 5830,5 tr / min. Notez que la fondation flexible influence de manière explicite le mode de flexion en Z (**Figure 5.20 (c2)**), tandis que dans la direction Y, la fréquence propre reste à 5160 tr / min. (**Figure 5.20 (b1) et (b2)**).



**Fig 5.20 :** Mode de fonctionnement du système a: (a) 1350 tr / min. (b) 5160 tr / min. (c) 5830,5 tr / min.

5.2.2.2 Système rotor avec joint conique

Les spécifications du joint d'étanchéité conique utilisé pour cette analyse sont présentées dans le **tableau 5.6**. Nous avons utilisé ici la même méthodologie que celle indiquée au point 5.2.2.1, c'est-à-dire que nous avons d'abord considéré le système arbre-palier rigide - joint avec fondation rigide et, puis, évaluer le même système avec une fondation flexible dans la direction verticale, ses paramètres étant donnés dans le **tableau 5.6**.

Tab 5.6: Caractéristiques du joint mécanique conique.

Longueur $L(mm)$	Jeu radial initial $C_0(\mu m)$	Jeu radial final $C_1(\mu m)$	Perte de charge $\Delta P(bars)$
10	100	25	13

Bien que l'intervalle initial soit quatre fois plus grand que le jeu radial final du joint, l'angle d'inclinaison du joint ( $\alpha$ ) est très petit,  $\alpha = 0.43^\circ$ , confirmant ainsi l'approximation du modèle utilisé dans l'analyse (chapitre 2). Les **figures 5.21** et **5.22** représentent, dans cet ordre, les coefficients de rigidité et d'amortissement du joint décrit dans le **tableau 5.6**.

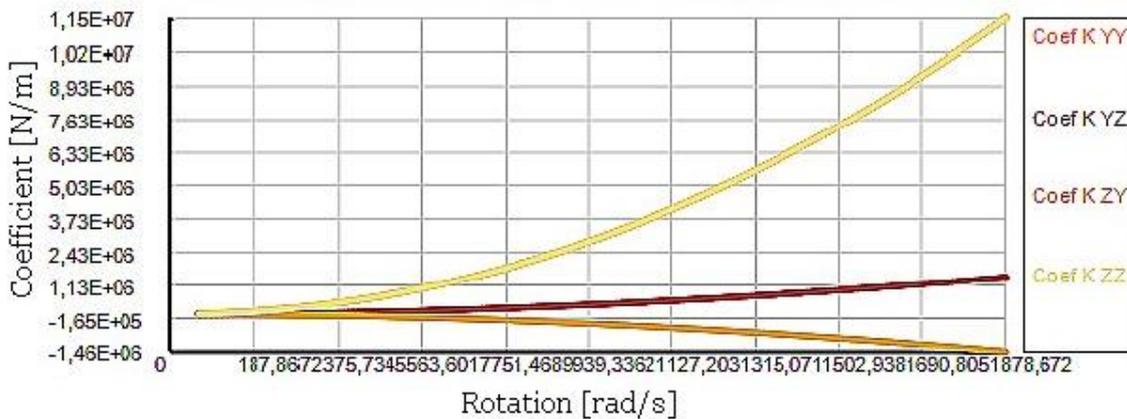


Fig 5.21 : Coefficients de rigidité du joint d'étanchéité conique.

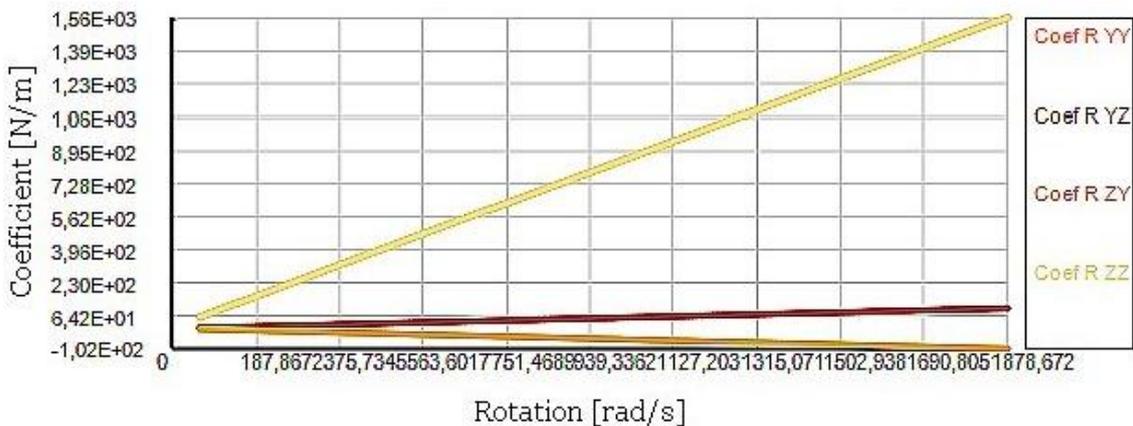
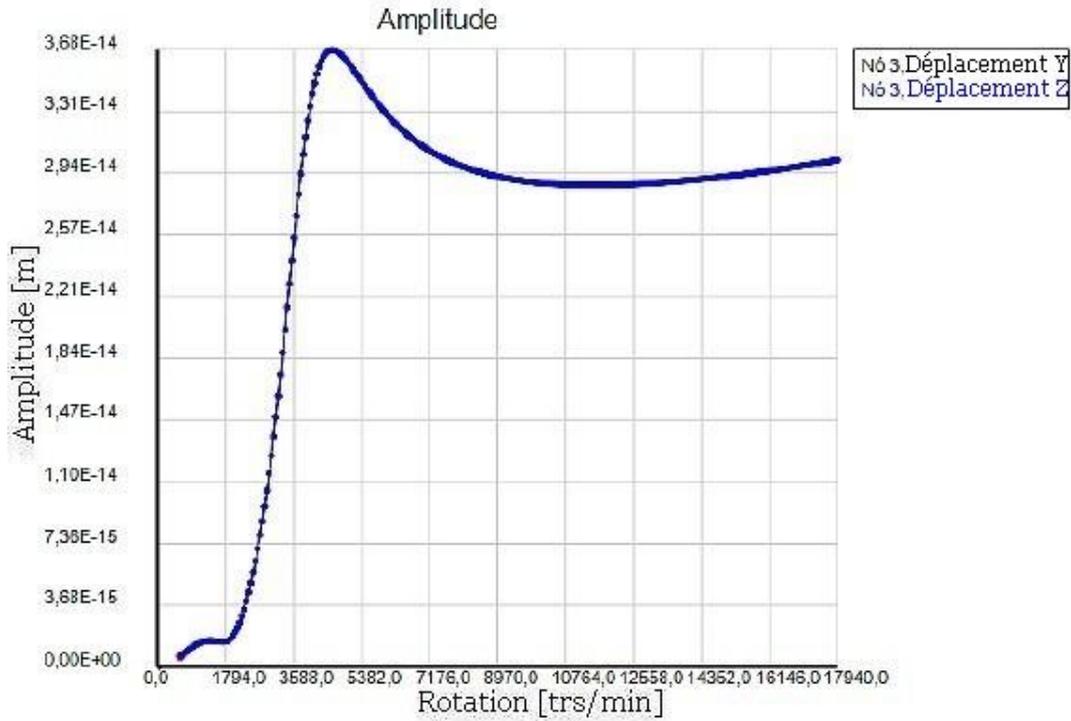


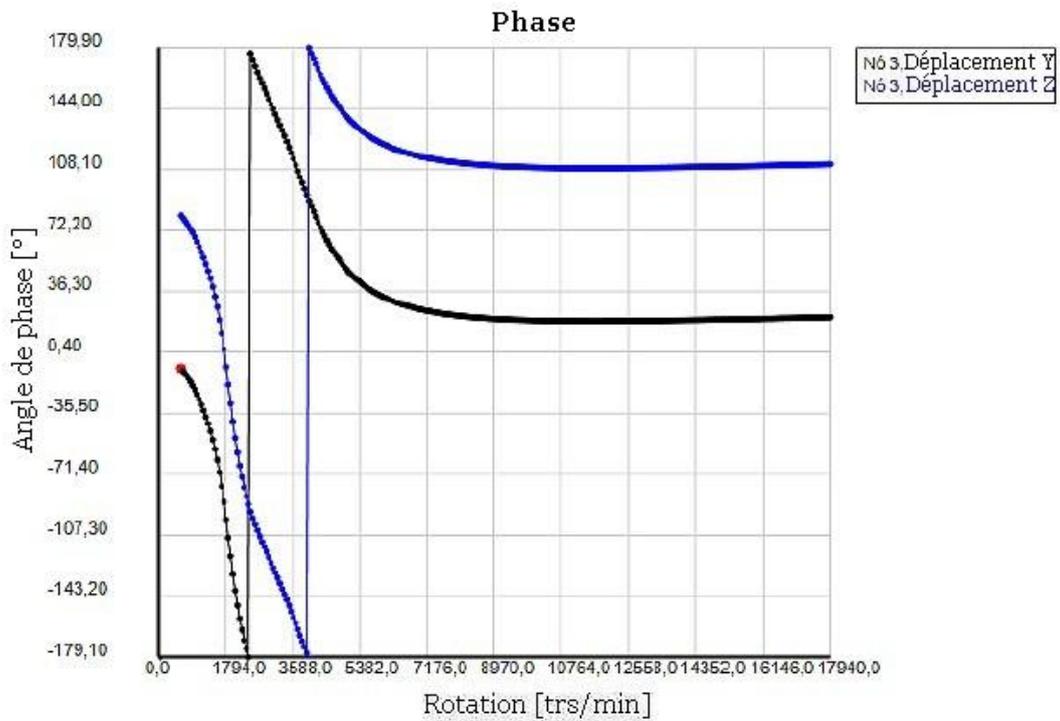
Fig 5.22 : Coefficients d'amortissement du joint d'étanchéité conique.

1° Système rotor avec joint d'étanchéité sur fondation rigide

Dans ce cas, l'effet d'une fondation flexible n'est pas incorporé, seuls les joints d'étanchéité sont insérés. Ainsi, les figures 5.23 à 5.25 représentent les amplitudes et les phases des nœuds 3, 7 et 11, respectivement. La figure 87 représente le diagramme de Campbell du système.



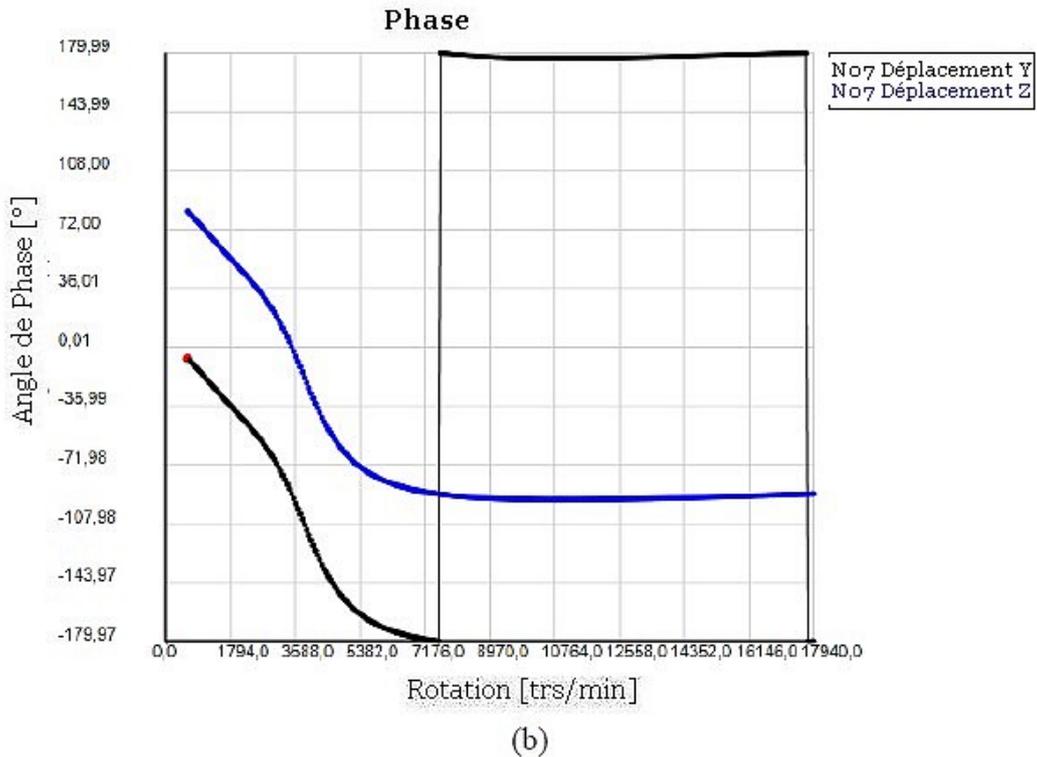
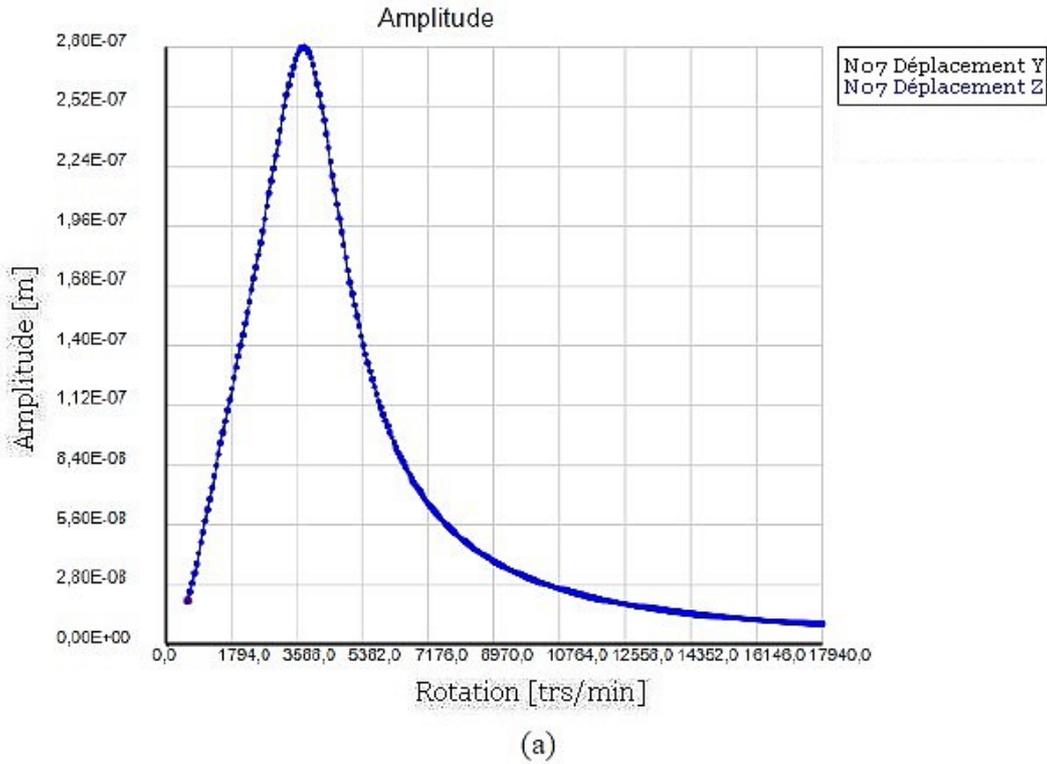
(a)



(b)

Fig 5.23: (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3.

En comparant la **figure 5.23** à la **figure 5.11**, il est à noter que le pic de l'amplitude du nœud 3, avec l'ajout du joint conique, diminue par rapport au système utilisant le joint cylindrique. Cependant, l'amplitude après ce pic montre une décroissance beaucoup plus faible sur la **figure 5.23**, de seulement 21%, alors que sur la **figure 5.11**, cette réduction est de 66%. De plus, le pic de résonance est décalé à 3810 tr / min (399 rad / s).



**Fig 5.24** : (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.

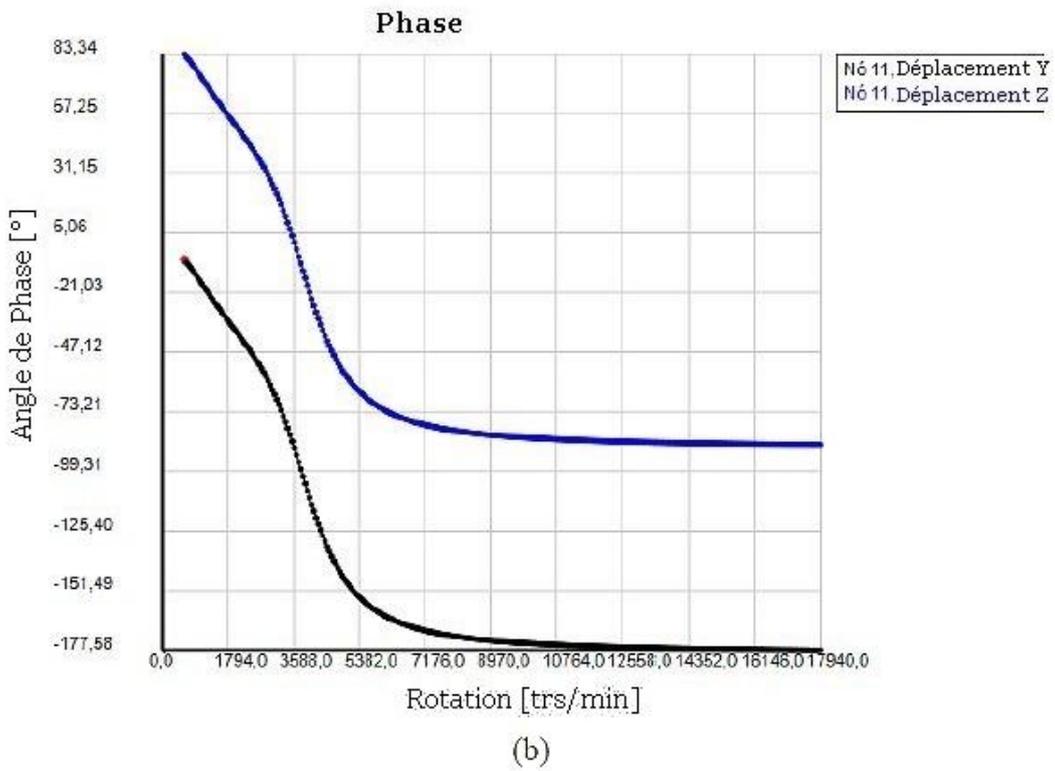
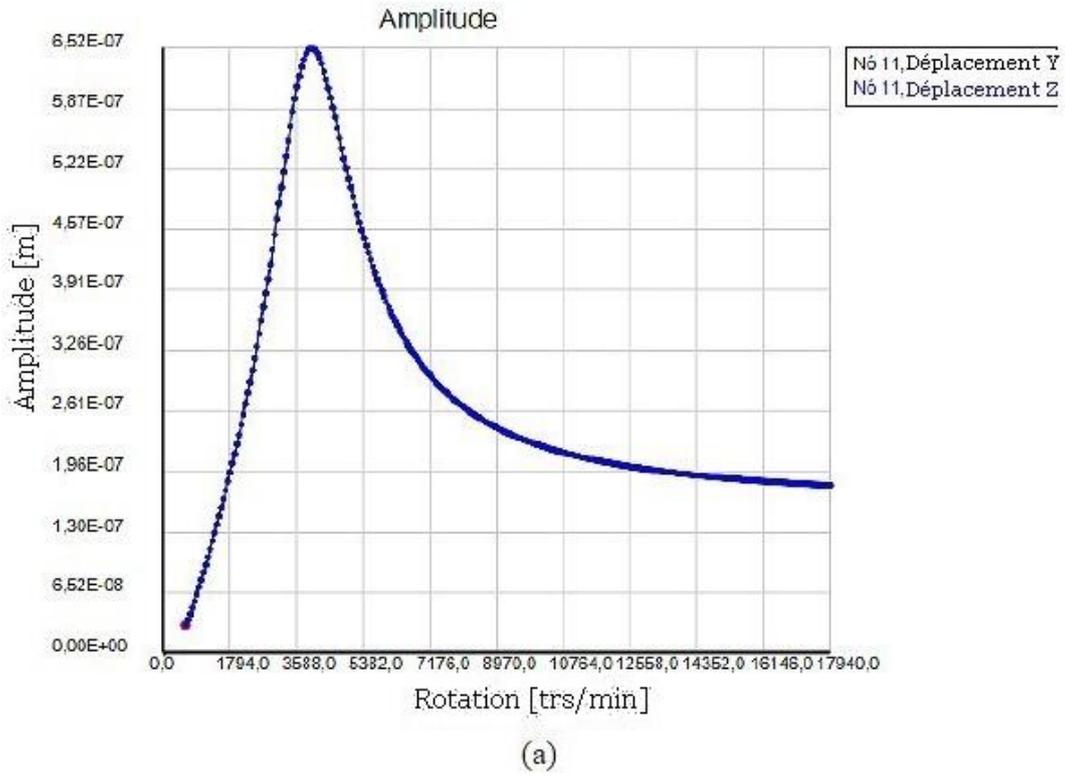


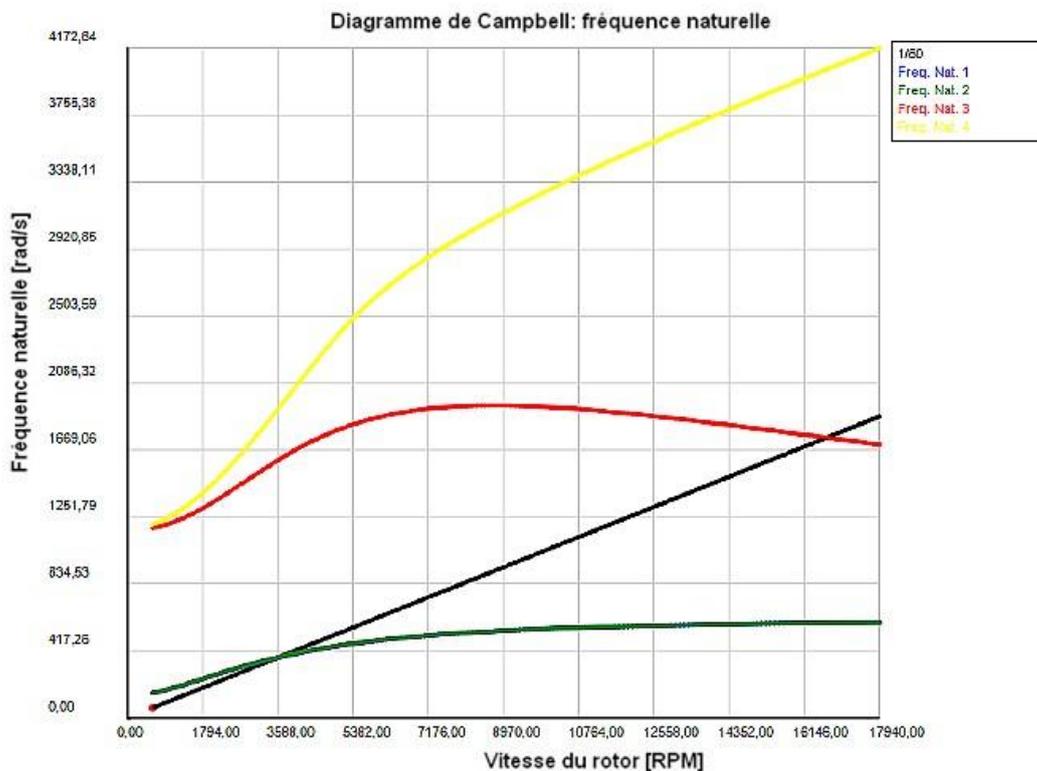
Fig 5.25 : (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11.

Les figures 5.24 et 5.25 présentent un comportement similaire à celui illustré aux figures 5.11 et 5.12, mais le pic d'amplitude varie, présentant une légère augmentation du nœud 7 et une diminution du nœud 11.

La **figure 5.26** montre la fréquence propre de l'ensemble tournant, et des conditions de résonance représentée par l'intersection des lignes caractéristiques des modes de vibration du système avec la courbe de la fréquence de rotation. A noter que l'insertion du joint d'étanchéité conique modifie à nouveau la fréquence propre du système. Cependant, dans ce cas, cette fréquence (3810 tr / min) est inférieure à celle du système avec joint cylindrique (5160 tr / min).

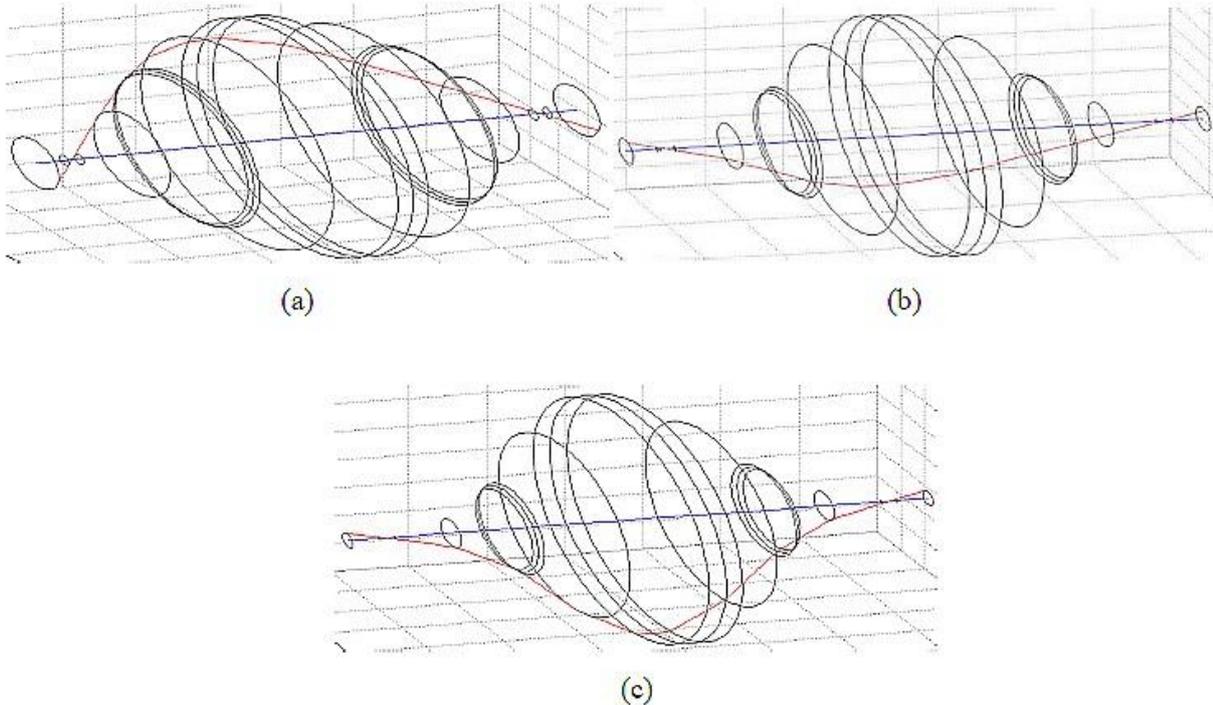
En outre, en comparant les déplacements des nœuds 3, 7 et 11, **figures 5.23 (a), 5.24 (a) et 5.25 (a)**, respectivement, avec des déplacements du système avec fondation rigide, **figures 5.3 (a), 5.4 (a) et 5.5 (a)**, il est vérifié que l'amplitude maximale à chaque nœud a diminué et qu'il y a une augmentation des pics, mettant en évidence l'augmentation de l'amortissement dans le système.

La fréquence à laquelle se produit le pic de déplacement, ou fréquence propre, a également changé, comme cela a déjà été le cas pour les joints cylindriques, indiquant un raidissement du système, car cette fréquence est plus élevée que dans le cas où seul le roulement est dur et sans présence des joints d'étanchéité. Cependant, cette rigidité est inférieure à celle des joints cylindriques en raison de la plus petite amplitude des termes de rigidité des joints coniques.



**Fig 5.26:** Diagramme de Campbell.

La **figure 5.27** montre le mode de fonctionnement du système pour trois fréquences de fonctionnement, la **figure 5.27 (b)** étant caractéristique de la fréquence propre du système avec des joints d'étanchéité coniques et une fondation rigide.



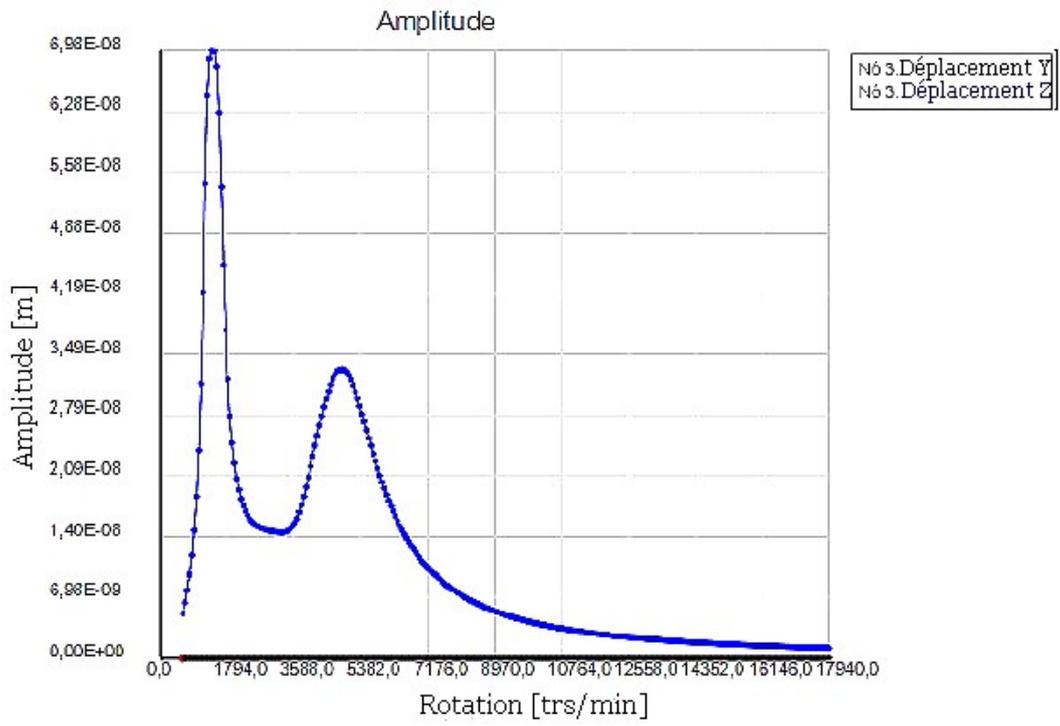
**Fig 5.27** : Mode de fonctionnement : (a) 1350 tr / min. (b) 3810 tr / min. (c) 4934 tr / min.

## 2° Système rotor avec joint d'étanchéité sur fondation flexible

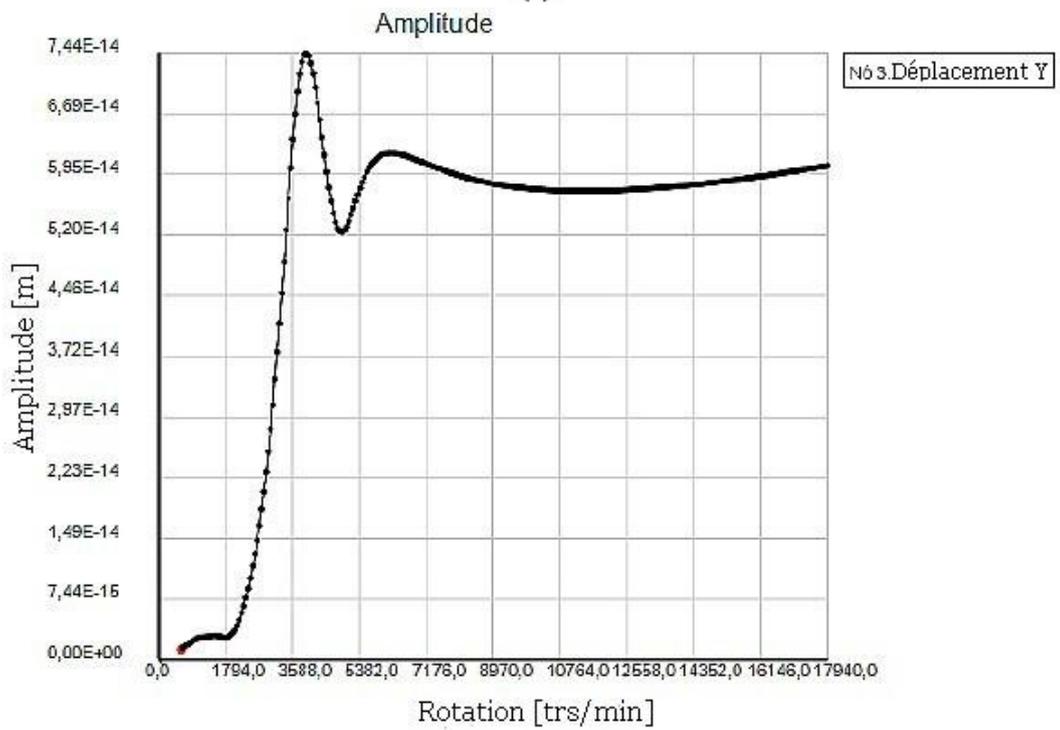
Les **figures 5.28 à 5.30** représentent les amplitudes et les phases des nœuds 3, 7 et 11, dans cet ordre, en considérant, pour le système arbre - palier rigide - joint conique, une fondation flexible dans la direction verticale avec les caractéristiques indiquées dans le **tableau 5.5**. La **figure 5.31** décrit le diagramme de Campbell pour cette configuration.

L'influence du joint d'étanchéité conique est facilement perceptible à la **figure 5.28 (b)**, car la fondation n'est flexible que dans la direction verticale (Z), mais ses effets sont remarquables dans la direction Y, où l'amplitude présente deux pics, le premier étant le plus grand, faisant référence à la fréquence propre de l'axe en flexion et le second, autour de 4934 tr / min (517 rad / s), faisant référence à une antirésonance avec fréquence dans la direction Z due au couplage par les termes croisés rigides.

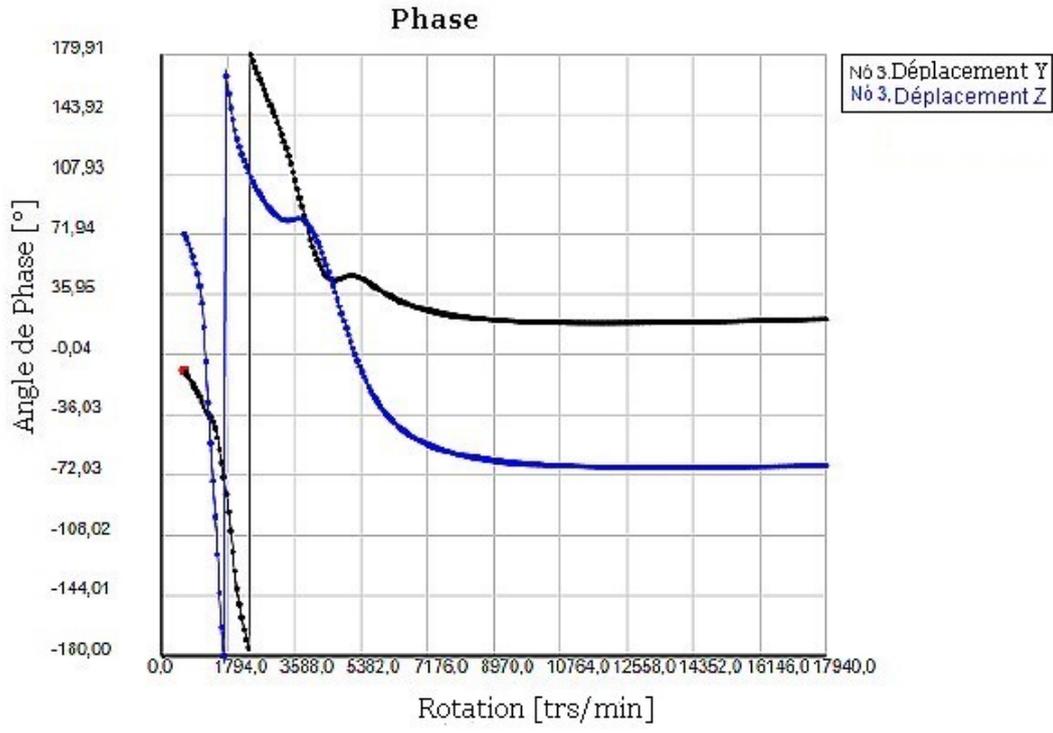
Le déplacement en Z est similaire à celui présenté pour les joints cylindriques. À ce nœud, l'amplitude dans Z est nettement plus grande que dans Y.



(a)

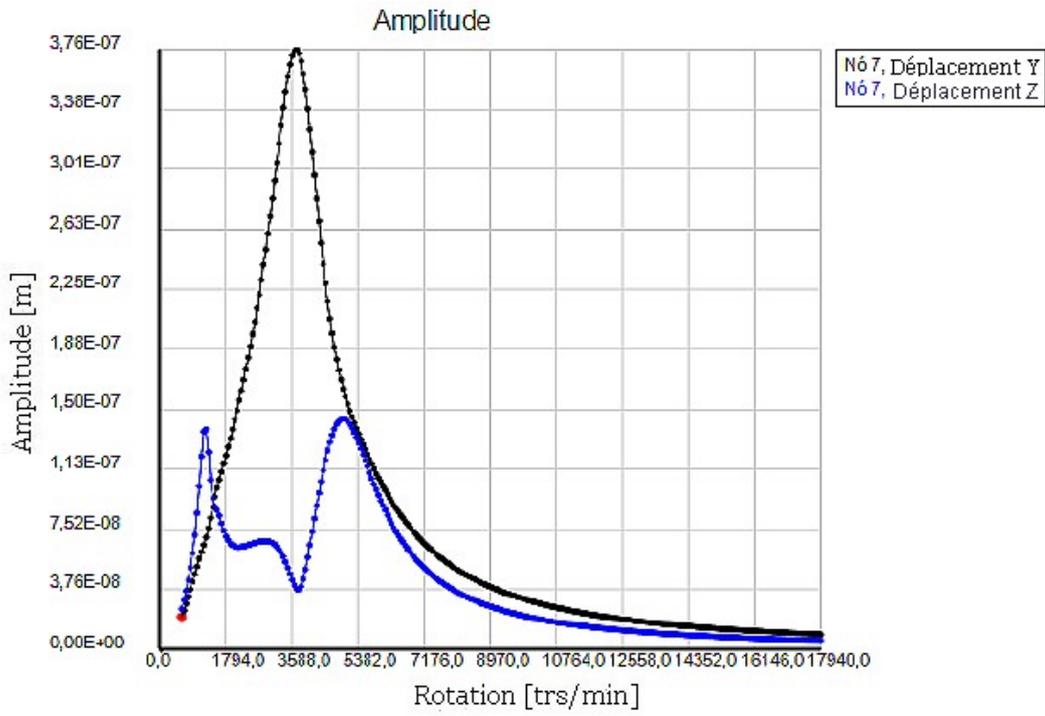


(b)

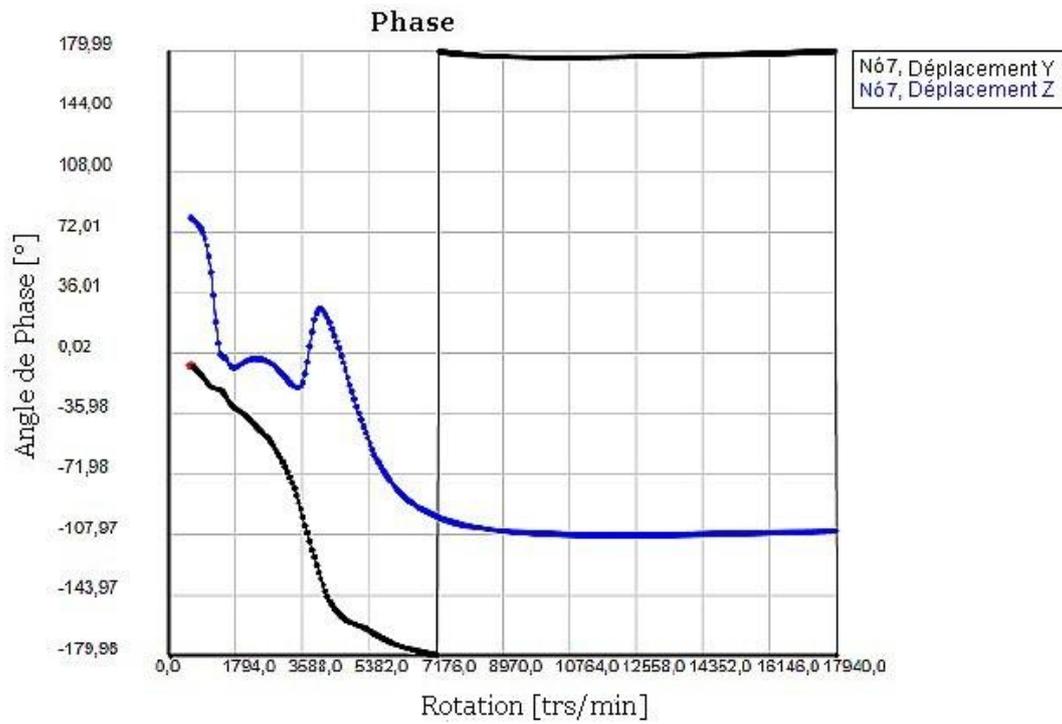


(c)

Fig 5.28: (a) Amplitude du nœud 3, (b) Amplitude du déplacement y dans le nœud 3 (c) Phase du nœud 3.

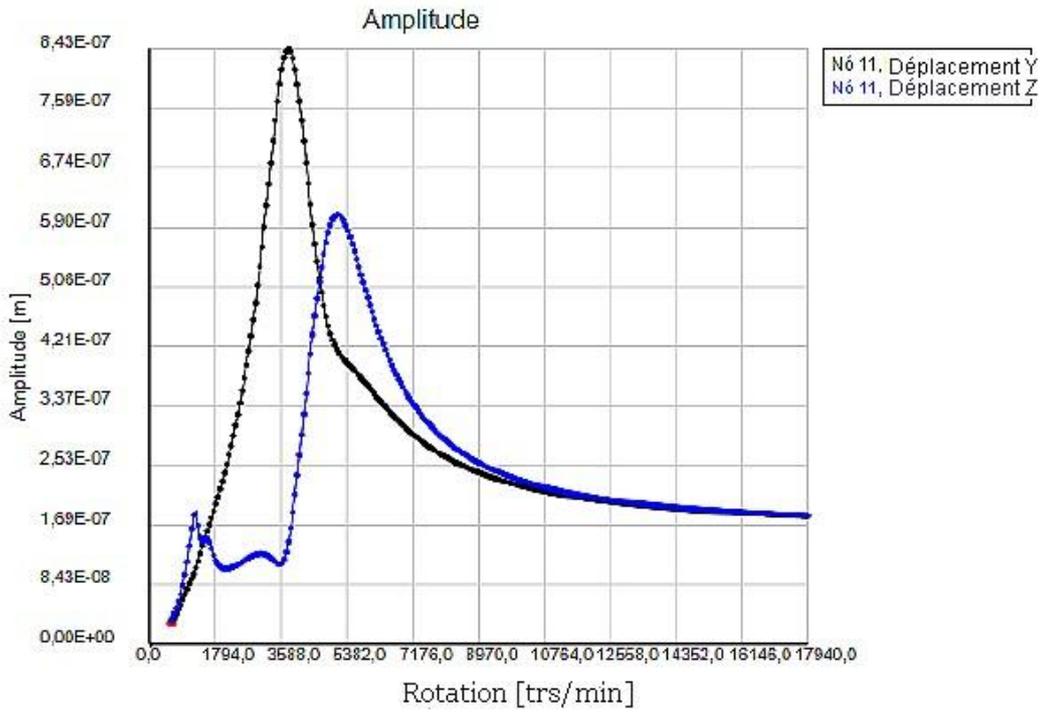


(a)

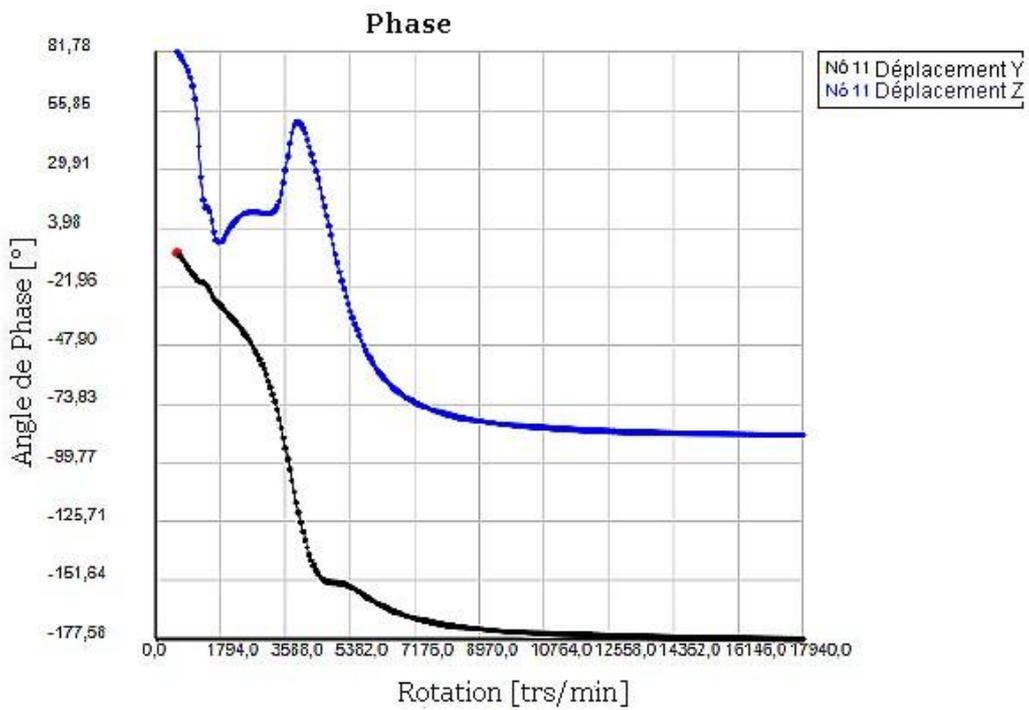


**Fig 5.29** : (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.

Pour le nœud auquel le joint d'étanchéité est attribué, le déplacement dans la direction verticale présente une forme similaire à celle indiquée pour les joints cylindriques. Cependant, le dernier pic, illustré à la **figure 5.29 (a)**, est pratiquement le double de la valeur de pic indiquée à la **figure 5.17 (a)**. De plus, les fréquences auxquelles les pics se produisent sont également différentes puisqu'elles dépendent des fréquences propres du système. Ainsi, le premier pic présenté dans la direction Z est influencé par les fréquences propres de la fondation. Le deuxième pic, très amorti, et le troisième sont liés aux modes de flexion du rotor, qui se dévient sous l'effet de la fondation.



(a)



(b)

Fig 5.30 : (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11.

Le diagramme de Campbell de la **figure 5.31** représente les fréquences propres du système en considérant une base flexible. À environ 1350 tr / min (141,4 rad / s), la fréquence naturelle de la base flexible est excitée. Le mode de vibration en flexion du système est divisé en deux fréquences propres, avec des fréquences de l'ordre de 3810 tr / min (399 rad / s) et 4934 tr / min (517 rad / s).

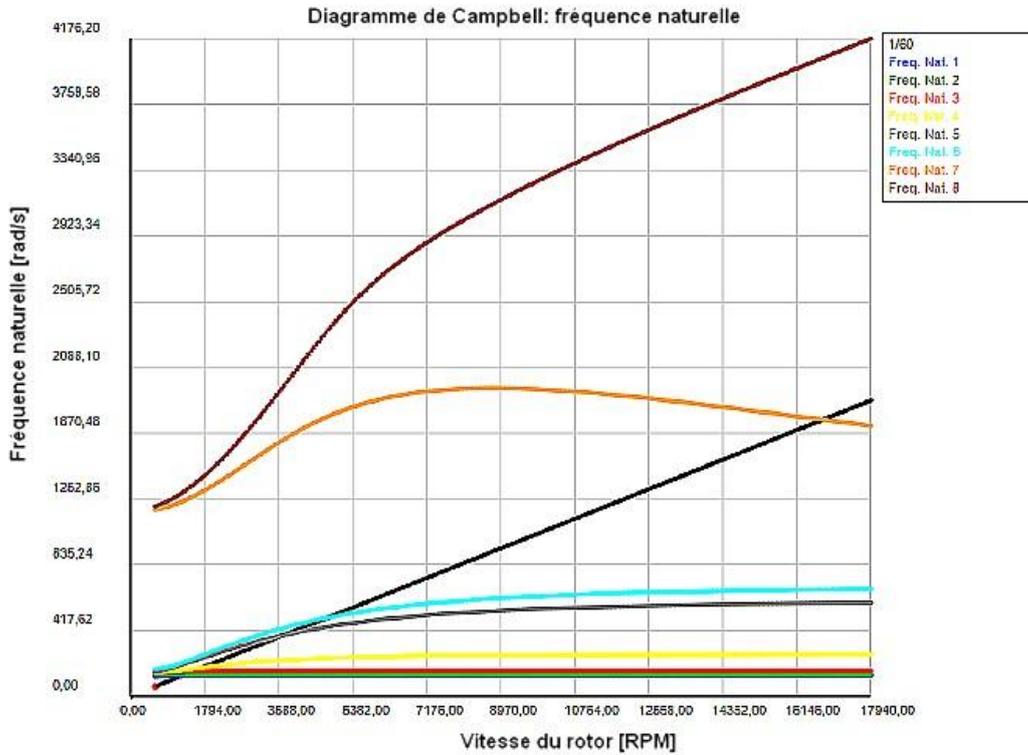


Fig 5.31: diagramme de Campbell.

Les modes de fonctionnement pour la fréquence propre de la fondation et les deux fréquences propres des modes de flexion de l'axe sont illustrés à la **figure 5.32**.

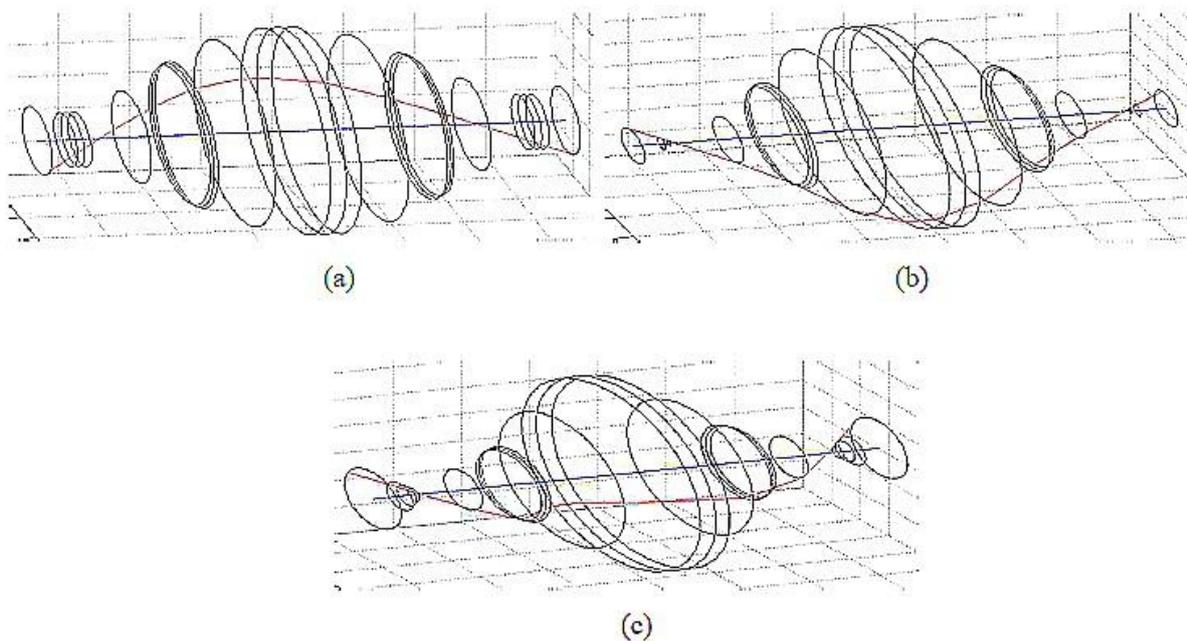


Fig 5.32 : Mode de fonctionnement a : (a) 1350 tr / min. (b) 3810 tr / min. (c) 4934 tr / min.

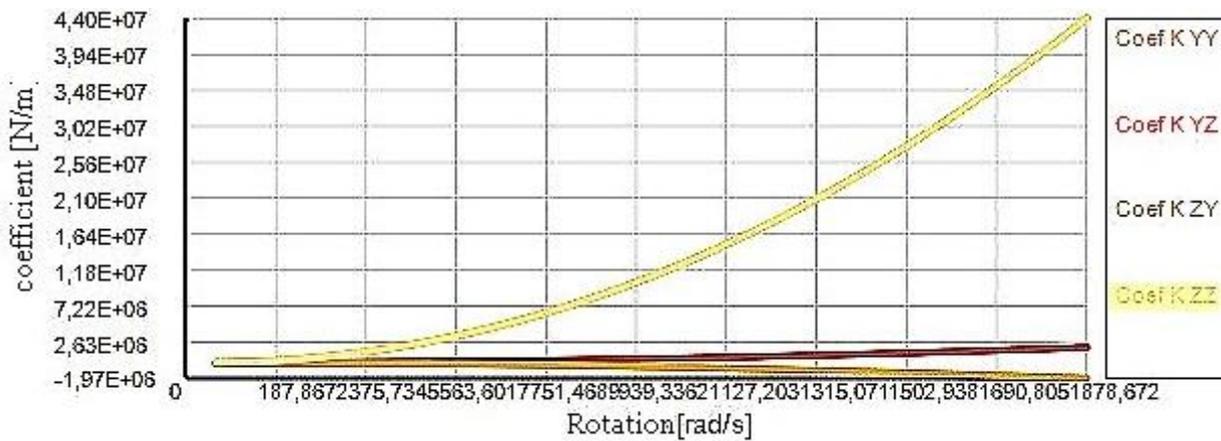
5.2.2.3 Système rotor avec joint étagé

Dans cette partie, les analyses concernent un joint annulaire étagé et une fondation, désormais rigides, maintenant flexibles, seront effectuées. Les caractéristiques du joint mécanique utilisé sont présentées dans le **tableau 5.7**.

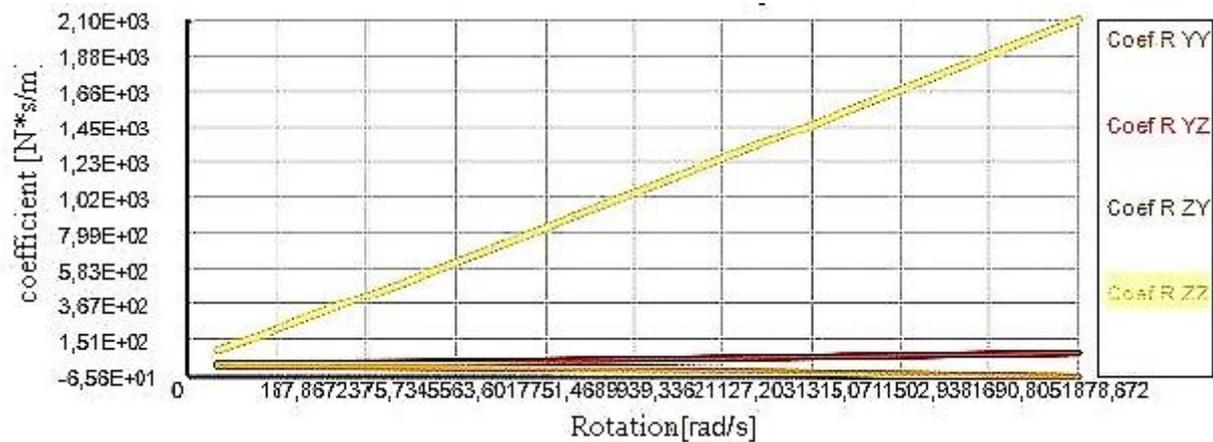
**Tab 5.7:** Caractéristiques du joint d'étanchéité étagé

Longueur de chaque étage $L(mm)$	Jeu radial 1 <sup>er</sup> étage $C_r(\mu m)$	Jeu radial 2 <sup>ème</sup> étage $C_r(\mu m)$	Perte de charge $\Delta P(bars)$
5	50	25	13

Les coefficients de rigidité et d'amortissement du joint décrits dans le tableau 16 sont illustrés aux **figures 5.33** et **5.34**. Comme pour les joints cylindriques et coniques, les termes directs de rigidité et les coussins ont environ un ordre de grandeur plus grand que les termes croisés.



**Fig 5.33 :** Coefficients de rigidité du joint étagé



**Fig 5.34 :** Coefficients d'amortissement du joint d'étanchéité étagé.

Les amplitudes et phases des nœuds relatifs au roulement 3, au joint 7 et au disque dur 11 sont illustrées aux **figures 5.35**, **5.36** et **5.37**.

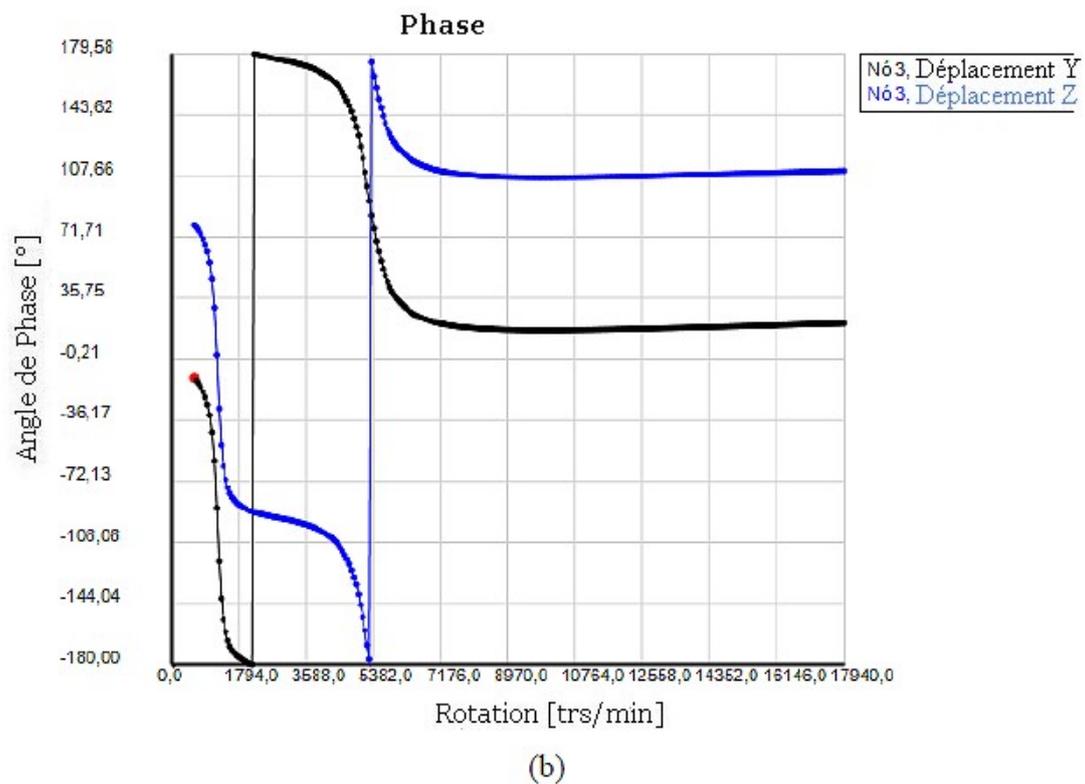
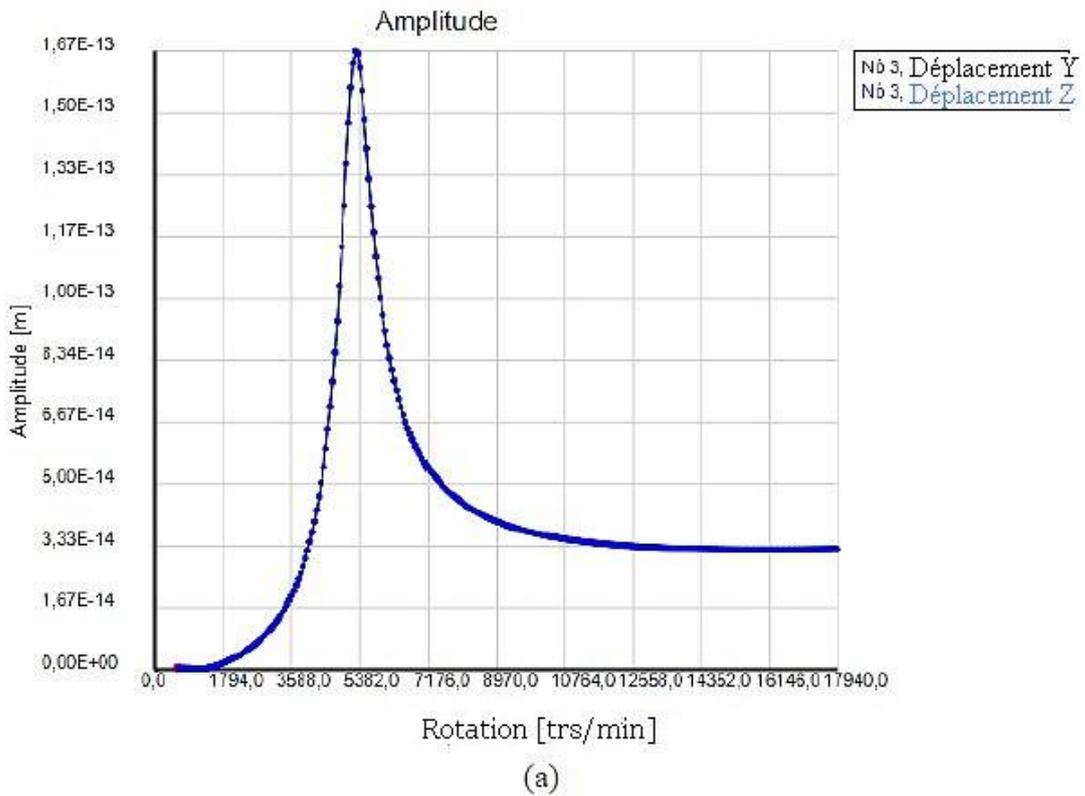
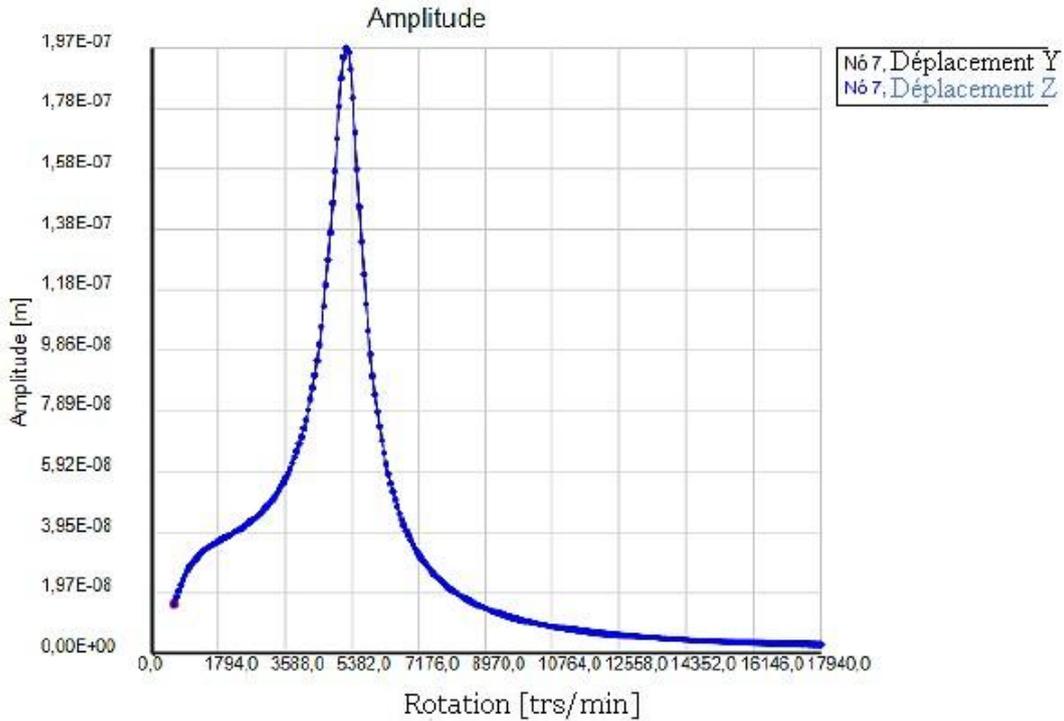


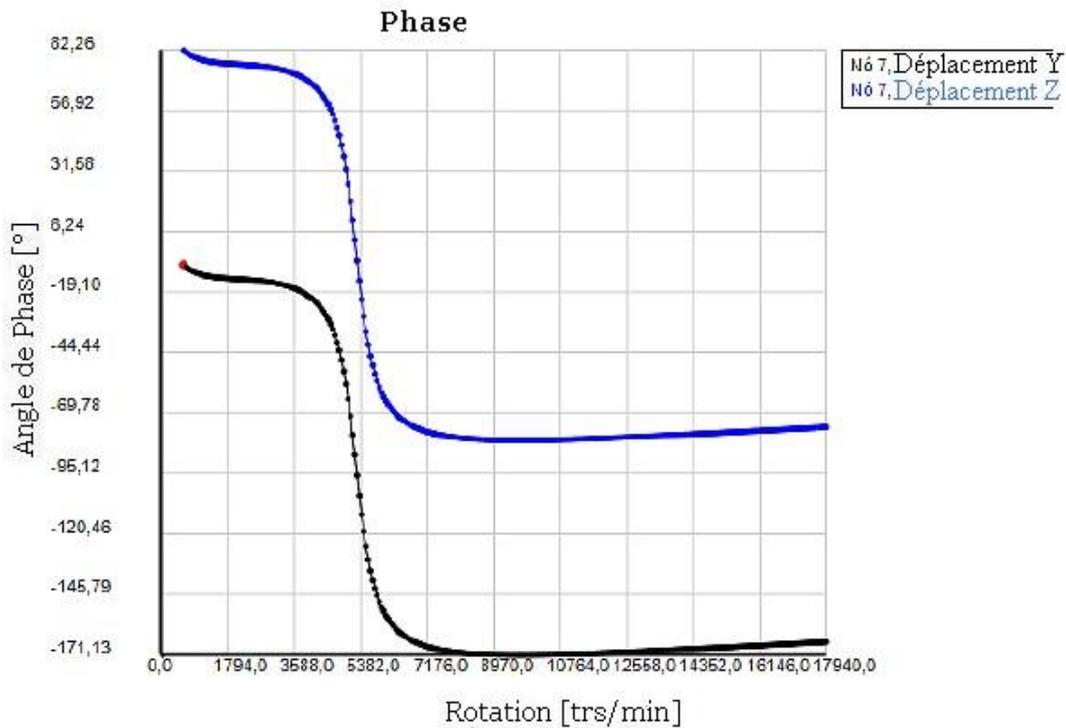
Fig 5.35 : (a) Amplitude du nœud 3, (b) Phase du nœud 3.

L'amplitude maximale du nœud 3, illustrée à la **figure 5.35 (a)**, est supérieure à celle observée dans les simulations précédentes. On constate également que ce pic est plus étroit que ceux présentés lors de l'ajout de joints cylindriques ou coniques.

De cette manière, le joint de type décalé est le moins dommageable du système. L'augmentation de la rigidité est toutefois similaire à celle présentée par le joint d'étanchéité cylindrique, car la première fréquence propre a été décalée à environ 5 300 tr / min (555 rad / s), comme illustré à la **figure 5.38**, ce qui rend le système plus rigide.



(a)



(b)

Fig 5.36 : (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.

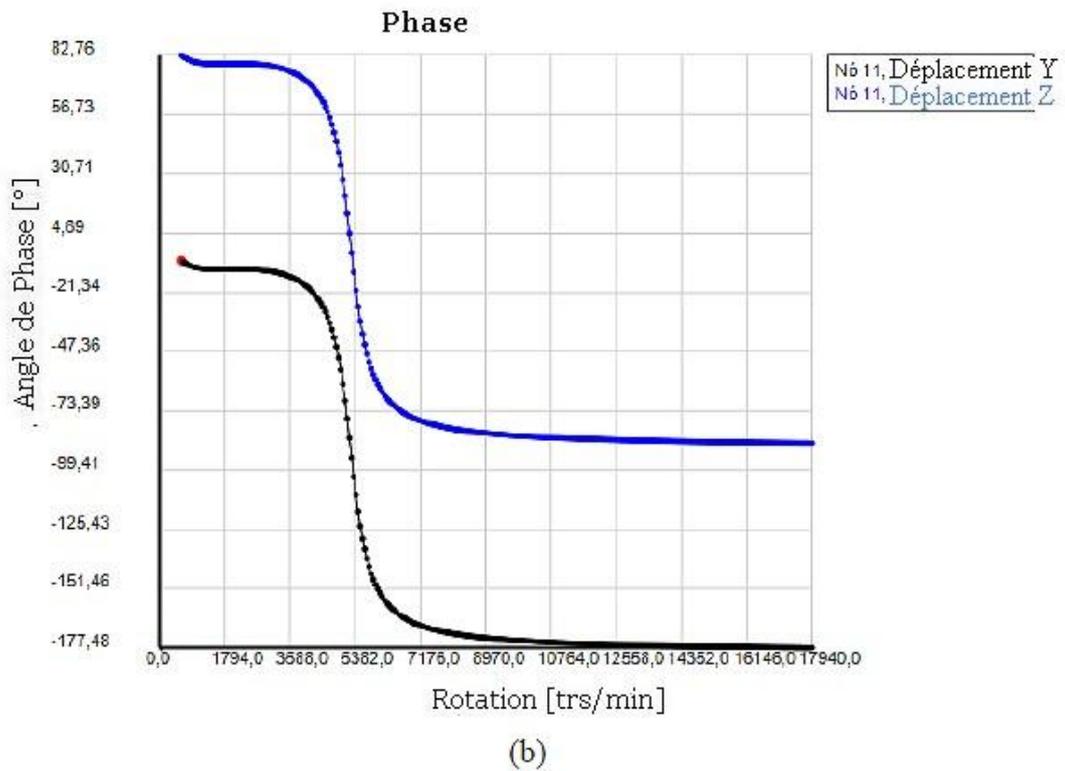
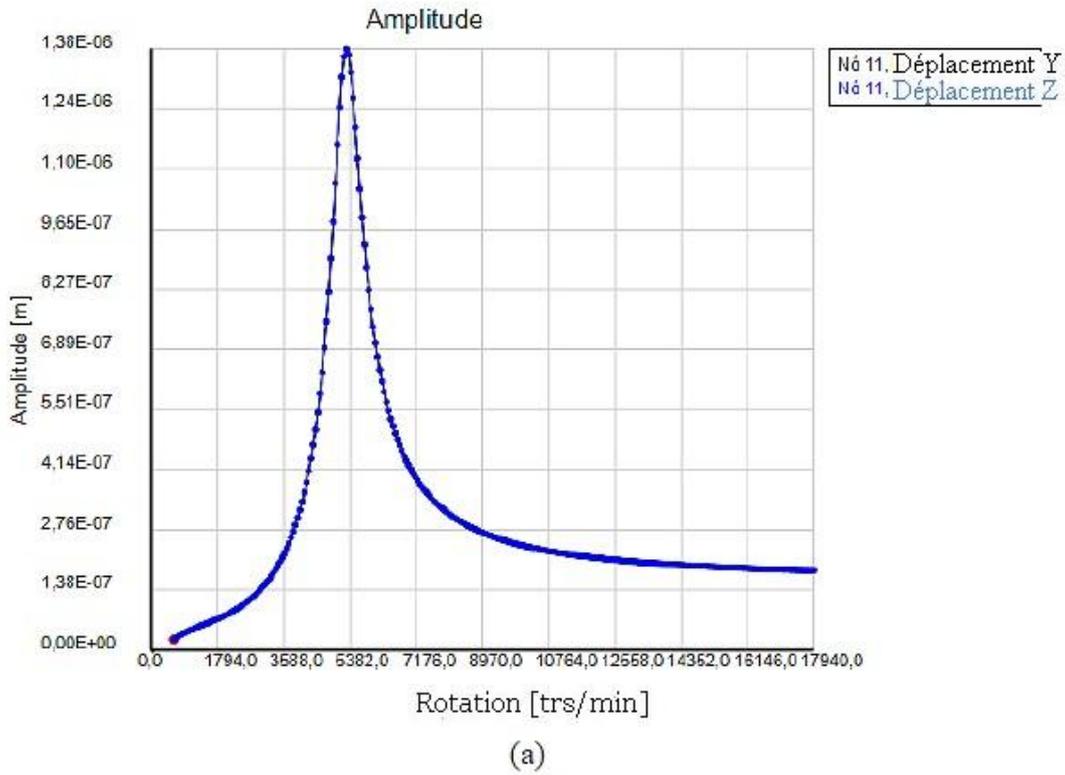


Fig 5.37 : (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11.

Les amplitudes présentées aux nœuds 7 et 11 sont similaires à celles analysées pour les autres types de joints, mais avec des amplitudes plus grandes. La **figure 5.38** montre les fréquences propres du système. La première fréquence propre est de l'ordre de 5300 tr / min (555 rad / s).

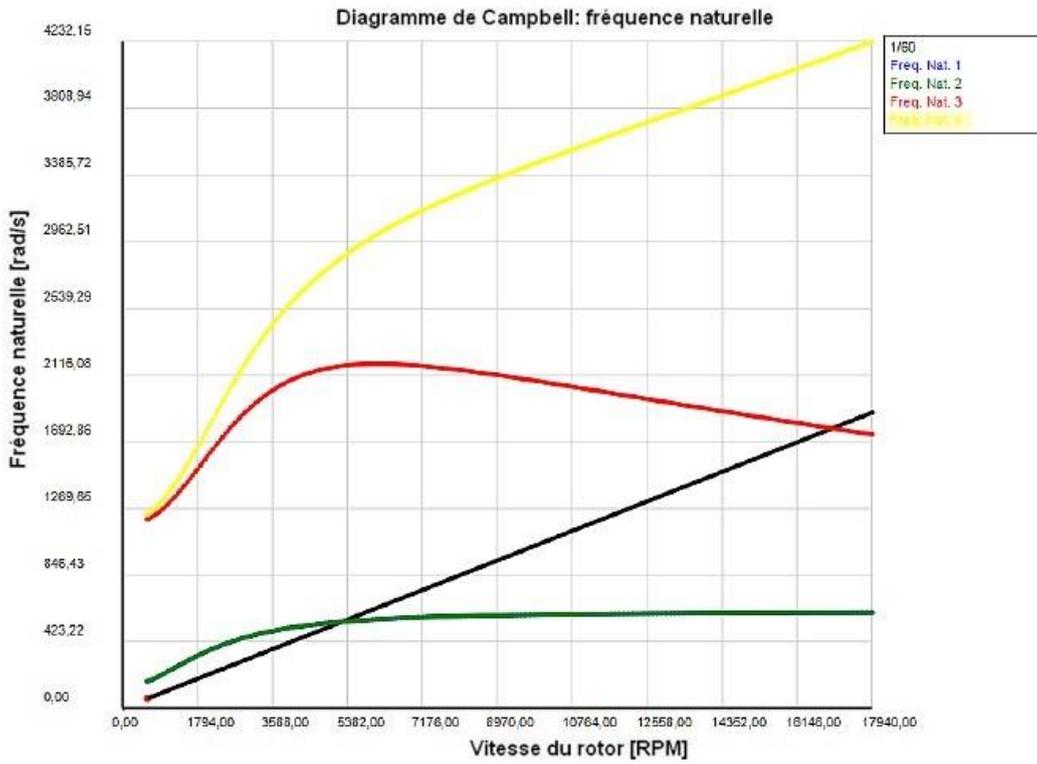


Fig 5.38 : diagramme de Campbell.

La **figure 5.39** représente la déformée du système pour trois fréquences de fonctionnement avec fondation rigide. La **figure 5.39 (b)** décrit, de manière qualitative, le mode de fonctionnement de la fréquence naturelle de flexion du rotor.

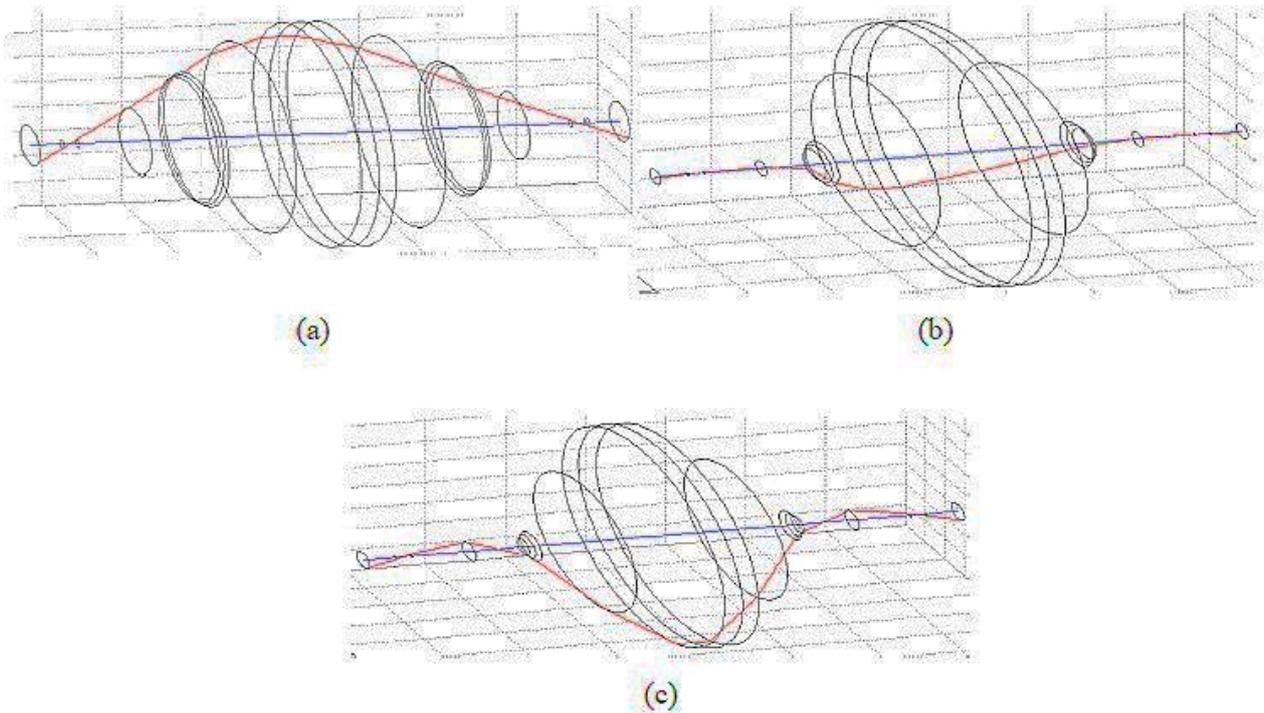
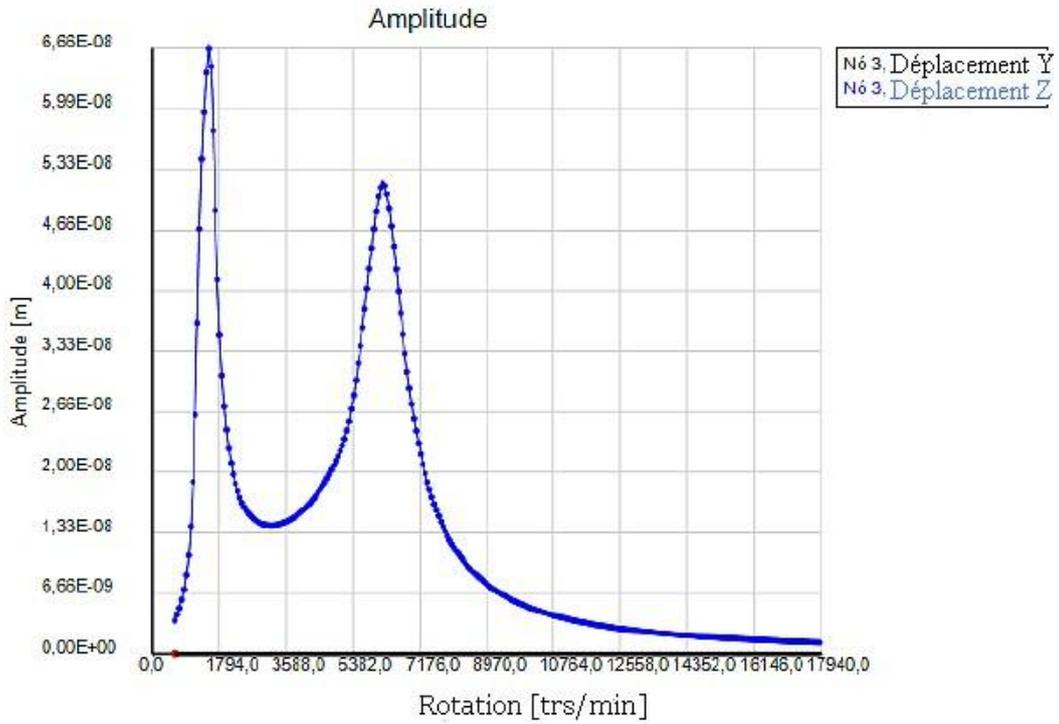
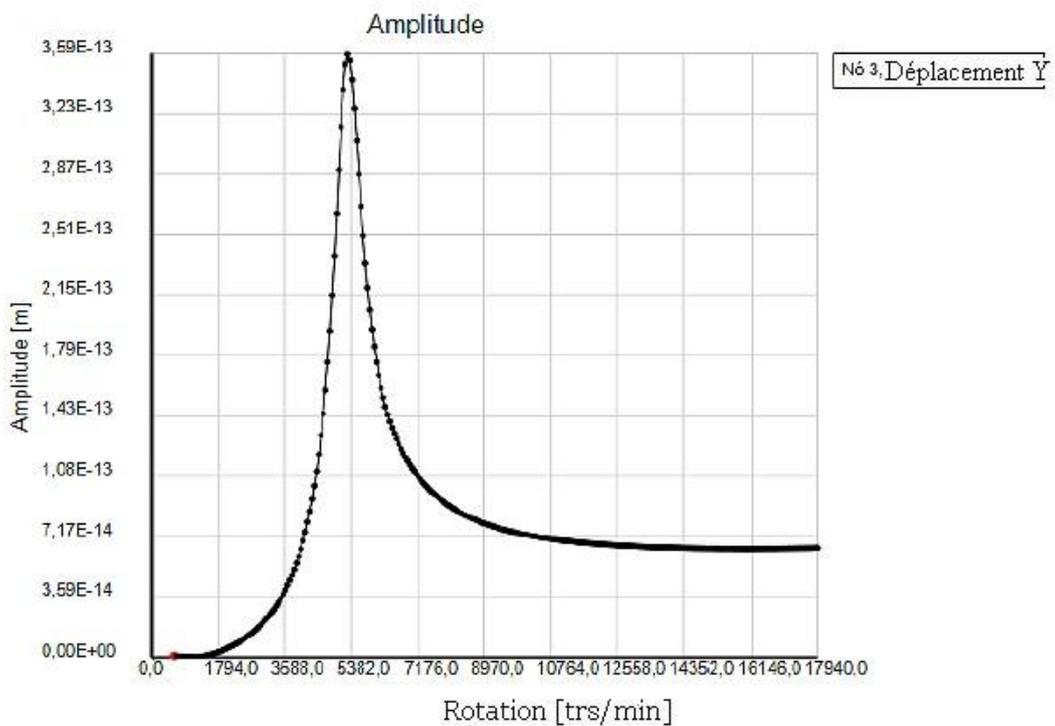


Fig 5.39 : Mode de fonctionnement du système a : (a) 1350 tr/min. (b) 5300 tours par minute. (c) 6279 tours/minute.

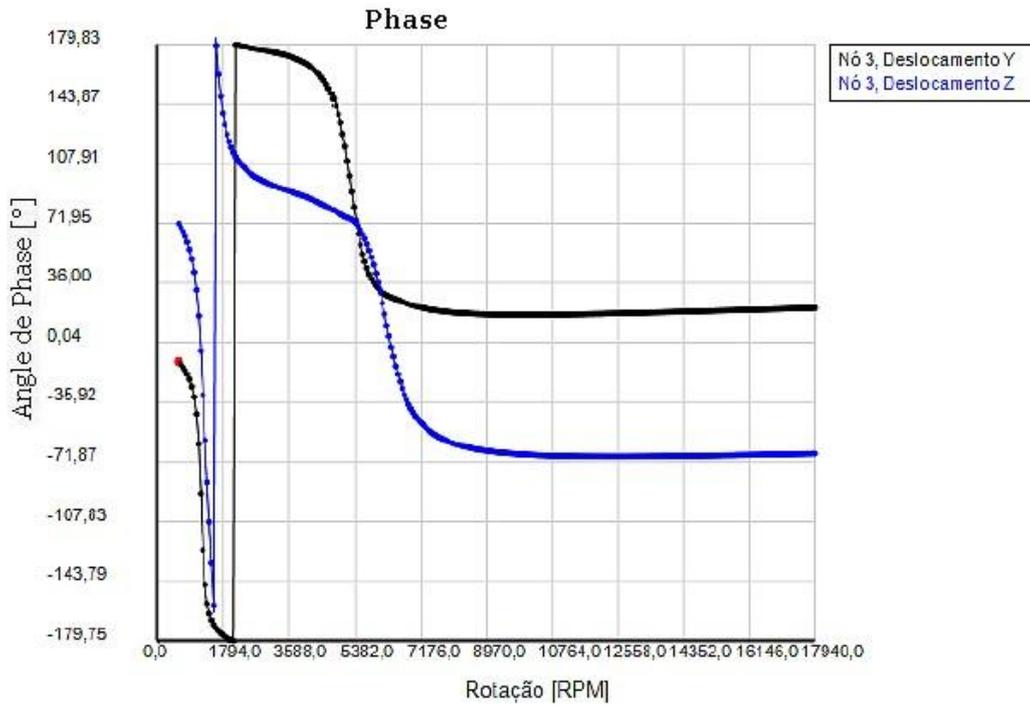
Les figures 5.40 à 5.42 représentent les amplitudes et les phases des nœuds analysés en considérant une base flexible présentant les caractéristiques présentées dans le tableau 5.5. La figure 5.43 décrit le diagramme de Campbell pour cette configuration.



(a)



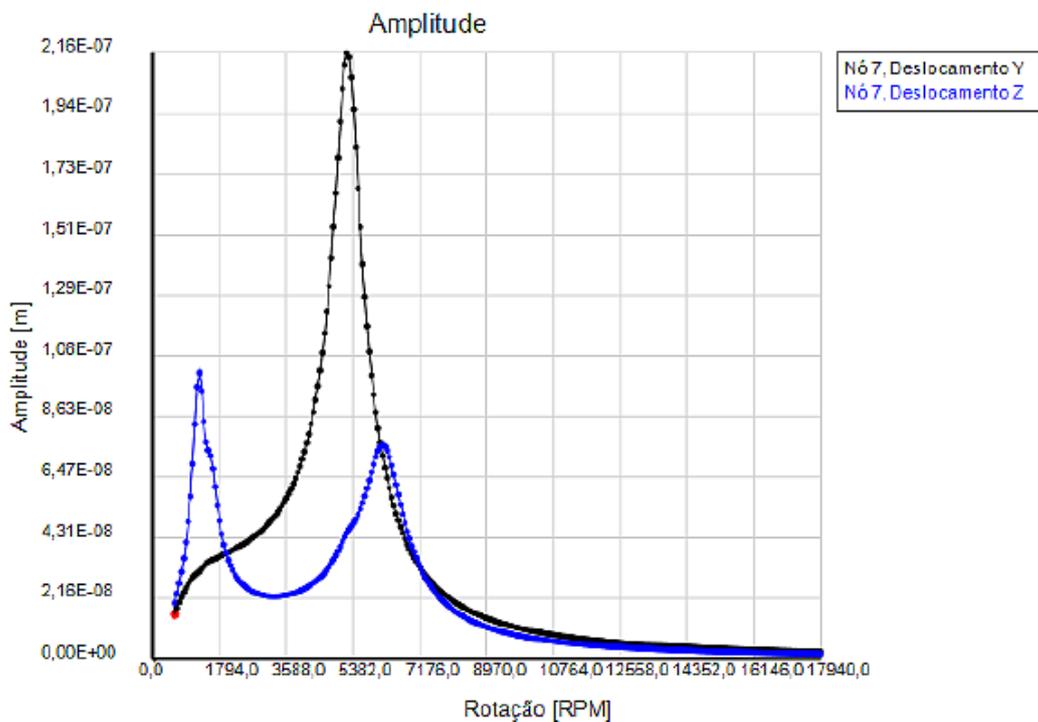
(b)



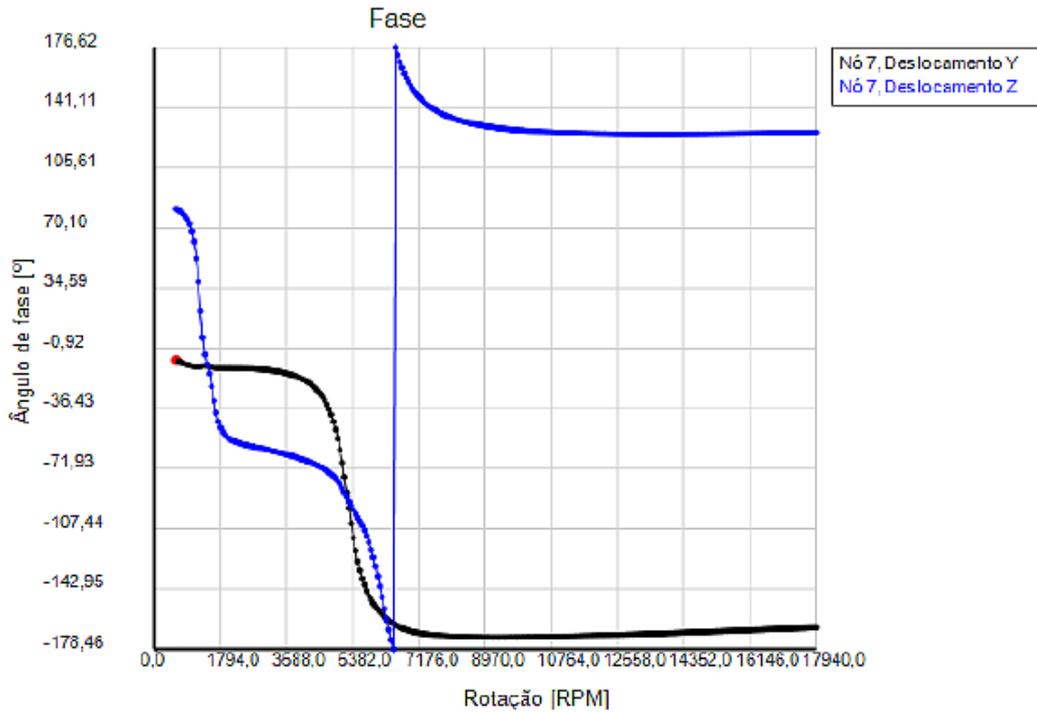
(c)

Fig 5.40 : (a) Amplitude du nœud 3, (b) Amplitude en Y du nœud 3 (c) Phase du nœud 3.

Les pics décrits dans le déplacement dans la direction verticale, représentés sur la **figure 5.40 (a)** sont liés aux fréquences naturelles en raison de l'influence de la fondation souple et la fréquence propre de premier mode de flexion de l'arbre. Ce dernier pic est plus grand que ceux présentés pour les deux autres phoques analysés. Le déplacement dans la direction Y est excité dans la première fréquence propre du mode de flexion du premier axe.



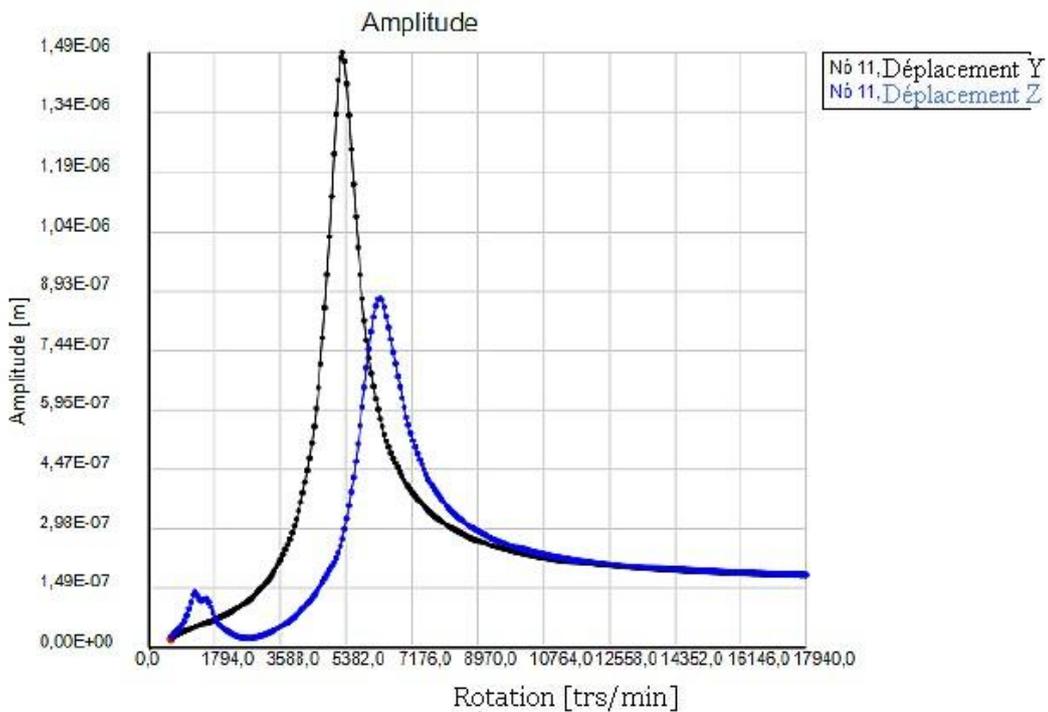
(a)



(b)

Fig 5.41 : (a) Amplitude du nœud 7, (b) Phase du nœud 7.

Pour le nœud 7, le décalage dans la direction Z montre également des pics dans les mêmes fréquences naturelles que celles excitées au nœud 3. Il s'agit du premier pic associé à la base flexible et du second ; en flexion du premier axe à 5300 tr / min (555 rad / s) et est représenté par un petit écart de la courbe dans la région correspondante, ainsi que par le pic indiqué dans la direction Y.



(a)

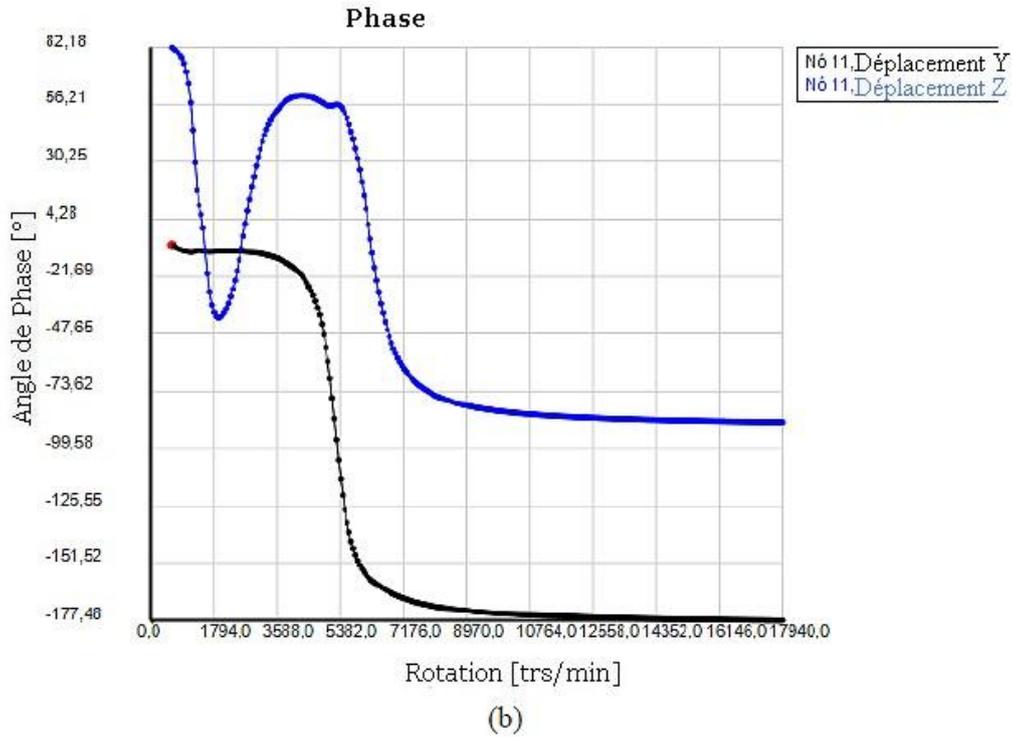


Fig 5.42 : (a) Amplitude du nœud 11, (b) Phase du nœud 11.

Le nœud correspondant au disque dur présente un comportement similaire aux systèmes précédents avec d'autres types de joints analysés. Dans la direction Z, les deux mêmes fréquences naturelles, excitées sur les figures 5.40 et 5.41, sont également excitées sur la figure 5.42, mais dans ce cas, le deuxième pic est celui ayant la plus grande amplitude.

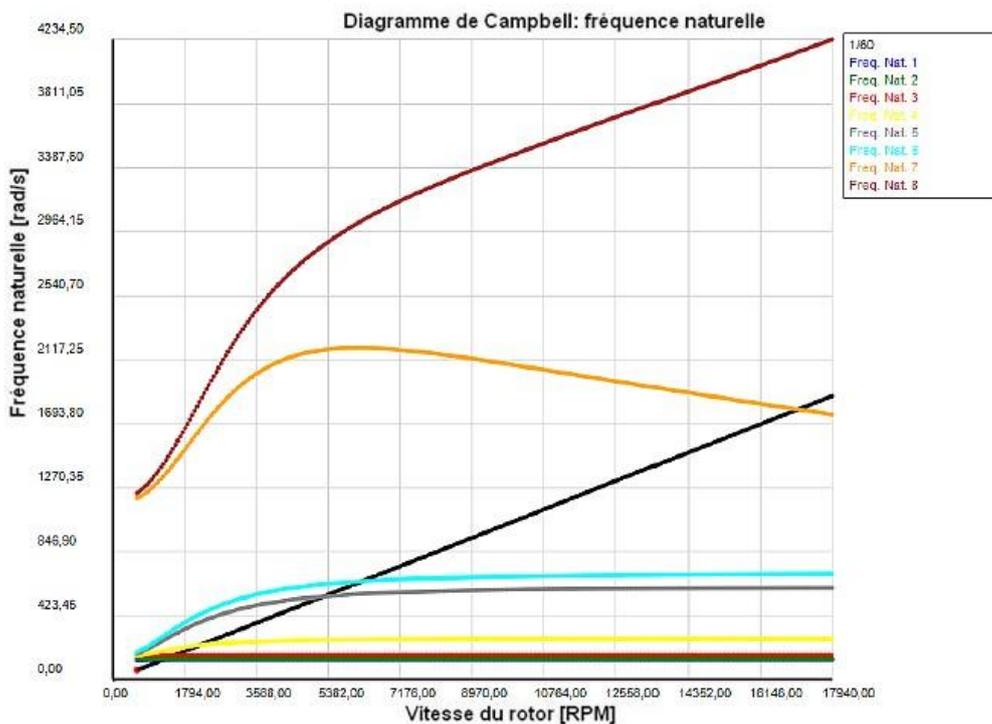
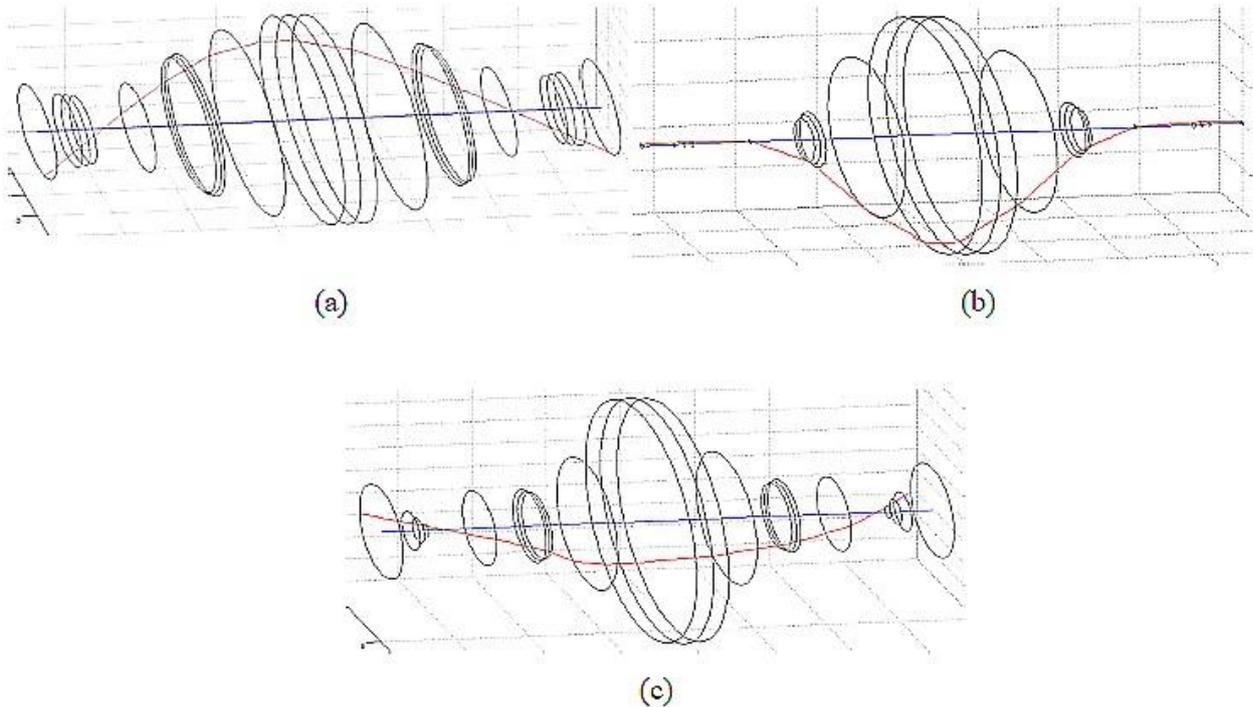


Figure 5.43 : diagramme de Campbell.

Le diagramme de Campbell, illustré à la **figure 5.43**, montre les fréquences propres du système, ainsi que l'ouverture du premier mode sur deux fréquences naturelles proches (5300 tr / min et 6279 tr / min), ainsi que l'augmentation des fréquences propres due à la base flexible (1350 tr / min).

Les modes de vibration du système dans les fréquences propres présentés par le diagramme de Campbell sont décrits à la **figure 5.44**, considérant maintenant les effets de la fondation flexible.



**Fig 5.44 :** Mode de fonctionnement du système a : (a) 1350 tr/min. (b) 5300 tours par minute. (c) 6279 tours/minute.

De nouveau, sur la **figure 5.44 (a)**, l'influence du mode de vibration de la fondation à 1350 tr / min est observée. La **figure 5.44 (b)** montre le mode de flexion en y, maintenu à 5 300 tr / min, et enfin, la **figure 5.44 (c)**, le mode de flexion en Z à 6 279 tr / min, avec une influence significative de la fondation.

---

---

*CONCLUSION*  
*GÉNÉRALE*

---

---

Les joints d'étanchéité présentent un comportement turbulent, en raison du jeu radial, relativement plus élevé entre le joint d'étanchéité et l'arbre par rapport à celui des roulements lubrifiés, de la vitesse axiale élevée et de la perte de charge qui les traverse, et ne peut donc pas être étudié à partir de la théorie de Reynolds. Ainsi, les équations qui régissent les fluides sont nécessaires à l'analyse des caractéristiques du fluide le long du joint. Une revue bibliographique a été réalisée afin de comprendre les concepts physiques impliqués dans le système analysé, ainsi que de vérifier l'évolution dans les études des joints d'écoulement au fil des ans.

En analysant l'axe centré, il a été possible de vérifier que les caractéristiques géométriques des garnitures mécaniques exerçaient une grande influence sur la répartition de la pression et la vitesse circumférentielle. L'étude du système perturbé a permis de déterminer les coefficients, direct et croisé, de la rigidité et de l'amortissement, en plus des termes d'inertie. À partir de ces coefficients, les joints d'étanchéité pourraient être intégrés à l'analyse numérique d'un système rotatif.

Il a été vérifié que la variation des paramètres géométriques et opérationnels, tels que le rapport entre le jeu radial, entre le joint et l'arbre, et le rayon de l'axe  $Cr/R$ , le rapport longueur du joint sur le diamètre de l'arbre  $L/D$ , la rugosité relative  $\epsilon_s$ , le coefficient de perte à l'entrée du joint  $\xi$ , le coefficient de récupération à la sortie du joint  $\xi_e$ , le gradient de pression  $\Delta P$  et la vitesse de rotation de l'axe  $\omega$ , peut modifier de manière significative les coefficients dynamiques des joints d'étanchéité cylindriques plats et, par conséquent, affecter la condition de résonance du système en rotation.

Il est important de noter que le cas le plus critique se produit lorsque le rapport  $L/D$  le rend très grand parce que le terme d'inertie atteint des valeurs très élevées et que le terme direct de rigidité devient de plus en plus petit, devenant négatif dans le cas présenté. L'analyse des joints coniques permet de constater que la relation entre la variation de pression et les coefficients dynamiques n'est pas linéaire, car en augmentant l'écart de ce type de joint, mais en maintenant le rapport  $Cr/R$ , la répartition de la pression reste pratiquement constante, alors que les coefficients dynamiques montrent une variation remarquable de **40%** pour les termes de rigidité directe, de **50%** pour les termes de rigidité croisée et d'amortissement direct et de **52%** pour les termes de croisement d'amortissement et d'inertie.

En outre, on peut constater que les trois types de joints analysés présentent un comportement similaire lors du changement de paramètres tels que la perte de charge et la vitesse de rotation de l'arbre. Les résultats obtenus pour les joints plats cylindriques sont en accord avec ceux trouvés dans la littérature, soulignant que tous les graphiques présentés ont été calculés avec le facteur de friction de Moody's, identique à celui utilisé dans la littérature de référence.

Il a été vérifié que l'application de la méthode des volumes finis présentait un résultat satisfaisant dans l'analyse des joints d'étanchéité mécaniques, ce qui est très prometteur pour l'étude future de joints d'écoulement plus complexes avec une géométrie, tels que le joint à labyrinthe et le nid d'abeilles.

Il a été noté que la présence du joint d'étanchéité renforçait le système en modifiant sa fréquence naturelle. En plus, l'existence de cet élément sur la ligne d'arbre, représente un autre point de couplage entre l'arbre et la fondation et constitue donc un autre élément de transfert de l'effet de flexibilité de la structure pour la réponse dynamique du rotor.

En perspective à des travaux futurs, l'analyse des timbres de circulation est un thème prometteur, présentant une grande variété de nouveaux travaux à développer, à savoir :

- *Développer des relations pour déterminer les coefficients de perte d'entrée et de récupération de la sortie du joint.*
- *Analyse de la stabilité d'un système de joint d'arbre.*
- *Développement de nouveaux modèles de joints mécaniques avec des géométries plus complexes, tels que les joints à labyrinthe et en nid d'abeille.*
- *Analyse à l'aide de fluides gazeux.*
- *Inclusion des effets de moment pour le calcul des longs joints.*

---

***RÉFÉRENCES***  
***BIBLIOGRAPHIQUES***

---

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [1] **MARTIN, J.**, "*Étanchéité en mécanique*", B5420 V2, Techniques de l'ingénieur, 2004.
- [3] **JOSEPH L. FOSZCZ, PE**, "*A guide to shaft seals*", Plant engineering magazine march 1, 2001.
- [2] **FANCHON, J. J.**, "*Guide des sciences et technologies industrielles*", édition AFNOR-NATHAN, 2001.
- [5] **HORVE, L.**, "*Shaft seals for dynamic applications*", Chicago Rawhide Manufacturing, Company Elgin, Illinois, Marcel Dekker, Inc., 1996.
- [4] **ARTEMA**, "*Garnitures mécaniques-Technologie*", Association des outements des transmissions de l'étanchéité et de la mécatronique associée, Technique de l'ingénieur. 2012
- [7] **MAYER, E.** "*Garnitures mécaniques axiales*"; Editorial Euro-América Ltd., Première édition brésilienne, 1979.
- [6] **ALAN O. LEBECK**, "*Principles and design of mechanical face seals*", mechanical seals, John Wiley and sons, Inc, 1991.
- [8] **EAGLEBURGMANN**, "*Magnetic Fluid seal*", <https://www.ekkeagle.com/en/wp-content/uploads/2014/09/EKK-Magnetic-fluid-seal-CAT-N004E-11122.pdf> (consulté le 09/04/2019)
- [9] **NORTON, R. L.** "*Machine design*", 2e édition, São Paulo: Bookman, 2006.
- [10] **CHILDS, D. W.** "*Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Anaysis*", John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [11] **VANCE, J. M.** "*Rotordynamics of Turbomachinery*"; John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [12] **TAO, L. N.** "*A theory of lubrication in short journal bearings with turbulent flow*". Transactions of ASME, p. 1734, 1958.
- [13] **HIRS, G. G.** "*A bulk-flow theory for turbulence in lubricant films*". Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME, series F, v. 95, n. 2, p. 137, 1973.
- [14] **LOMAKIN, A. A.** "*Calculation of critical speeds and securing of the dynamic stability of hydraulic high-pressure machines with reference of the forces arising in the gap seals*". Energomashinostroenie, 4.1, 1958.
- [15] **BLACK, H. F.** "*Effects of hydraulic forces in anular pressure seals on the vibrations of centrifugal pump rotors*", Journal of Mechanical Engineering Science, v. 11, n. 2, pp. 206-213, 1969.
- [16] **BLACK, H. F.; JENSEN, D. N.** "*Dynamic hybrid properties of annular pressure seals*", Proc. Mechanical Engineering, v. 184, pp. 92-100, 1970.
- [17] **BLACK, H. F.; JENSEN, D. N.** "*Effects of high-pressure ring seals on pump rotor vibrations*", ASME Paper, n. 71-WA/FF-38, 1971.
- [18] **FLEMING, D. P.** "*High stiffness seals for rotor critical speed control*", ASME Paper, n. 77-DET-10, 1977.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [19] **CHILDS, B. S.; CHILDS, W. D; DRESDEN, J.** "Estimation of seal bearing stiffness and damping parameters from experimental data". IMech E, 1980.
- [20] **BLACK, H. F.**, "Effects of Fluid-Filled Clearances on Centrifugal Pump and Submerged Motor Vibrations," *Proceedings Eighth Turbomachinery Symposium*, Texas A&M University, pp. 29-39, Nov. 1979.
- [21] **CHILDS, D. W.** "Dynamic analysis of turbulent annular seals based on Hirs lubrication equation". *Journal of Lubrication Technology, Transactions of ASME*, 1982.
- [22] **CHILDS, D.W.** et **DRESSMAN, J.B.** "Convergent-tapered annular seals: analysis and testing for rotordynamic coefficients. *Journal of tribology*", 1985, vol. 107, no 3, p. 307-316.
- [23] **NELSON, H. D.** "Rotor dynamics equations in complex form. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*", 1985, vol. 107, no 4, p. 460-461.
- [24] **SAN ANDRES, Luis et CHILDS, Dara.** "Angled Injection—Hydrostatic Bearings Analysis and Comparison to Test Results". *Journal of Tribology*, 1997, vol. 119, no 1, p. 179-187.
- [25] **HA, T.; LEE, Y.; KIM, C.** "Leakage and rotor dynamic analysis of a high-pressure floating ring seal in the turbo pump unit of a liquid rocket engine". Elsevier, 2002.
- [26] **KWANKA, K.** "Dynamic coefficients of stepped labyrinth gas seals". *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, v. 122, pp. 473-477, July 2000.
- [27] **DERELLI, Y.; ESER, D.** "Effects of shear stress forces to rotordynamic coefficients in staggered labyrinth seals". *Journal of Power and Energy*, v. 220, Part A, pp. 387-394, 2006.
- [28] **SHEN, X.Y.; JIA, J. H.; ZHAO, M.; JING, J. P.** "Numerical and experimental analysis of the rotor bearing-seal system". *Journal of Mechanical Engineering Science* v. 222, part C, pp. 1435-1441, 2008.
- [29] **BROL, K. B.** "Modelagem e Análise de Selos de Fluxo Aplicados a Máquinas Rotativas", Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- [30] **BAMBERGER, Y.**, "Mécanique de l'ingénieur, Tome 2: Milieux déformables", Edition Hermann, 1981.
- [31] **CHEN, S, WANG, M, XIA, Z**, " Multiscale fluid mechanics and modeling", 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Procedia IUTAM 10, pp 100 – 114, 2014
- [32] **LOUISNARD, O.**, "Cours de mécanique de fluide", Ecole des mines d'Albi, 2012.
- [33] **FOX, R.W. and MCDONALD, A.T.**, "Introduction to fluid mechanics, John Wiley&Sons", Inc., New York, (1994).
- [34] **FREDERIC, M.**, "Mécanique des fluides", Laboratoire FAST, Université paris sud, 2017

---

---

# *ANNEXES*

---

---

## Annexe A

### Expression du jeu entre rotor et stator

L'objet de cette annexe est l'établissement de l'expression du jeu  $H$ , dans le film, en fonction:

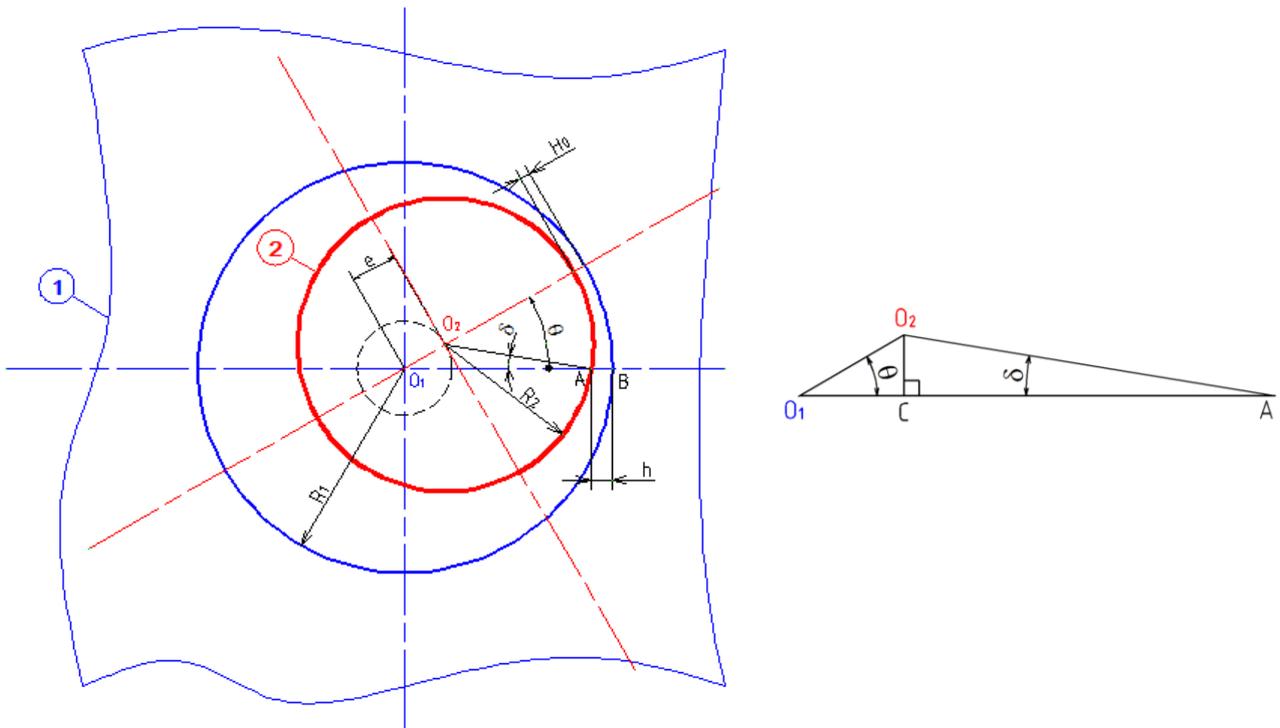
- du jeu radial  $H_0$ ,

$$H_0 = R_1 - R_2 \quad (A.1)$$

- de l'excentricité relative  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{O_1 O_2}{H_0} = \frac{e}{H_0} = \frac{e}{R_1 - R_2} \quad (A.2)$$

- L'angle  $\theta$  définit à partir de l'axe  $O_1 X_s$



De l'examen de la [figure 1](#), résulte l'expression de  $h$

$$H = |AB| = |O_1 B| - |O_1 A| = R_1 - |O_1 A| \quad (A.3)$$

Pour déterminer  $|O_1 A|$ , abaissons la perpendiculaire  $O_2 C$  sur  $O_1 A$ . Ce qui nous permet d'écrire:

$$|O_1 A| = |O_1 C| + |CA| = e \cdot \cos \theta + R_2 \cdot \cos \delta \quad (A.4)$$

Dans le triangle  $O_1 O_2 C$  et  $CO_2 A$  on peut écrire:

$$O_2 C = e \cdot \sin \theta = R_2 \cdot \sin \delta \quad (A.5)$$

D'où:

$$\sin \delta = \frac{e \cdot \sin \theta}{R_2} \quad (A.6)$$

---

En plus en sait que:

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} \quad (\text{A.7})$$

La relation (6) dans (7) donne:

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_2}\right)^2 \sin^2 \theta} \quad (\text{A.8})$$

Dans la majeure partie des problèmes étudiés, la valeur de  $e/R_2$  étant très petite, de l'ordre de  $0.002$ , on obtient alors:

$$\cos \delta \approx 1 \quad (\text{A.9})$$

L'approximation (9) dans la relation (4) permet d'obtenir  $|O_1A|$ :

$$|O_1A| = e \cdot \cos \theta + R_2 \quad (\text{A.10})$$

Et par suite l'expression (3) devient :

$$H = (R_1 - R_2) - e \cdot \cos \theta \quad (\text{A.11})$$

Les relations (1) et (2) dans (11), permet d'obtenir l'expression du jeu  $H$  en fonction de l'angle  $\theta$  :

$$H(\theta) = H_0 (1 + \varepsilon \cdot \cos \theta) \quad (\text{A.12})$$

---

## ملخص

تفاعل عمل ميكانيك السوائل مع عمل نظام في حركة دورانية , الذي بدوره يتكون من محور , محامل , دوارات , وصلات عازلة و هياكل الدعم ويتم ادراج معاملات ديناميكية مكافئة في النموذج الرياضي للأنظمة الدوارة. حيث هذا الاخير تم الحصول عليه باستعمال طريقة العناصر المحددة . في هذا العمل يتم تقييم المعاملات الديناميكية الخاصة بالقصور الذاتي والصلابة والتخميد في الوصلات العازلة على اساس ارتباطها بالخصائص الهندسية لهذه الوصلات العازلة وظروف تشغيل الماكنة. بعد ذلك ، بمجرد دمجها في النموذج الرياضي لنظام في حركة دورانية وصلات العزل من نوع مسطحة , مخروطية و مدرجة هم بدورهم يتم تحليلهم على اساس الاستجابة الديناميكية الشاملة لألة الدوران مع تحديد المعاملات الديناميكية للتخميد والتصلب والقصور الذاتي مع التحقق من تأثيرها على ظروف تشغيل النظام . بذلك المحاكات و تحليل الوصلات العازلة تم ادماجهم بطريقة مثيرة للاهتمام و واعدة في اطار موضوع البحث حول الآلات الدوارة.

كلمات البحث: وصلات العزل، طريقة حجم محدد، الآلات الدوارة، المعاملات الديناميكية.

---

## ABSTRACT

*The interaction of work fluid mechanics with that of the rotary system itself, basically composed of axes, bearings and rotors, is performed by inserting equivalent dynamic coefficients in the mathematical model of the rotor, the latter being obtained by the finite element method. In this paper, the dynamic coefficients of inertia, stiffness and damping of the flat seals analyzed here are evaluated, from the point of view of the dependence of the geometric characteristics of the seals and the operating conditions of the machine. Then, once incorporated into the entire rotating system model. The flow seals (Joint d'étanchéité) are also analyzed from the point of view of their influence on the overall dynamic response of the rotating machine. The mechanical seals (Garnitures mécaniques) of the cylindrical, conical and stepped type were analyzed, determining, for this purpose, the dynamic coefficients of damping, stiffness and inertia. In addition, the influence of physical and operational parameters of the system in relation to these elements were verified. Therefore, the modeling and analysis of flow seals are inserted in an interesting and promising way in the context of the global research theme in rotary machines.*

*Key words: fluid seals, finite volume method, rotating machinery, dynamic coefficients.*

---

## RESUMÉ

*L'interaction du travail de la mécanique des fluides avec celle du système en mouvement de rotation, lui-même composé essentiellement d'axes, roulements et rotors, est réalisée en insérant des coefficients dynamiques équivalents dans le modèle mathématique du rotor, ce dernier étant obtenu par la méthode des éléments finis. Dans ce travail de thèse, les coefficients dynamiques d'inertie, de rigidité et d'amortissement des joints plats analysés ici sont évalués, du point de vue de la dépendance des caractéristiques géométriques des joints et des conditions du fonctionnement de la machine. Ensuite, une fois incorporé dans l'ensemble du modèle du système en rotation, les joints d'étanchéités sont également analysés du point de vue de leur influence sur la réponse dynamique globale de la machine tournante. Les joints d'étanchéité annulaires de type cylindrique, coniques et étagés ont été analysés, déterminant à cet effet les coefficients dynamiques d'amortissement, de raideur et d'inertie. En outre, l'influence des paramètres physiques et opérationnels du système par rapport à ces éléments a été vérifiée. Par conséquent, la modélisation et l'analyse des joints d'étanchéité sont insérées de manière intéressante et prometteuse. Dans le contexte du thème de recherche global sur les machines tournantes.*

*Mots clé: Joints Plats, Méthode des volumes finis, Machines tournantes, Coefficients dynamiques.*

---