

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN _ TIARET

Faculté Des Sciences Appliquées

Département De Génie Civil



Mémoire

Présenté en Vue d'Obtenir
Le Diplôme de MASTER en Génie Civil

Option Structures

Par

GHALI Bochra

GUELLIL Hayet

**Solution analytique par la théorie de
l'élasticité des poutres consoles en FGM
soumises à charges d'ordres supérieure**

Soutenue Publiquement : 29/09/2021 Devant les membres du jury :

DR.K.BOUAAKKAZ

Président

DR.HH.ABDELAZIZ

Encadreur

DR.M.AIT AMAR MEZIANE

Examineur

DR.R.BENFARHET

Examineur

Promotion :2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*R*emerciement

Allah le bénéfique soit loué et qu'il nous guide sur la bonne voie.

Ainsi Nous remercions très chaleureusement notre encadreur

Dr. Mr. ABDELAZIZ Hadj Henni pour tous ses conseils et ses orientations pour la réalisation de ce travail.

Aux membres du jury qui ont bien voulu lire et évaluer le présent
Mémoire

Nous remercions tous ceux qui nous ont aidés et témoigner leur
sympathie

*D*édicace

A nos chers parents, pour leurs dévouements, leurs amours, leur compréhension, leurs sacrifices, leur tendresse, leurs prières et leur patience à notre égard.

*N*os chers frères et sœurs : Pour leurs soutien durant toute la période de nos études.

*N*os amis: pour leur compagnie et bons moments passés ensemble.

A nos camarades de classe (promotion 2020-2021).

*A*tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

L'objectif de ce travail consiste à trouver une solution analytique de l'élasticité basée sur une modélisation mathématique plus avancée à l'étude du comportement des poutres consoles caractérisées par des rapports de module de l'élasticité fonctionnellement gradués (FGM) à travers l'épaisseur de la poutre. Dans ce cadre, nous utilisons une fonction de contrainte d'Airy relative aux problèmes des poutres en flexion soumise à des charges de degrés supérieurs à savoir linéaire et en même temps elle est satisfaisante aux conditions de chargement sur les faces de la poutre.

Une partie de calcul numérique est consacrée à prédire et d'analyser la distribution des contraintes et des déplacements à travers l'épaisseur et la longueur de la poutre respectivement sous une charge linéaire mentionnée de chargement mentionnées précédemment.

Mots clés : FGM, contraintes, déplacements, Fonction d'Airy, poutre console.

Abstract

The objective of this work is to find an analytical solution of the elasticity based on a more advanced mathematical modeling to the study of the behavior of cantilever beams characterized by functionally graded modulus of elasticity (FGM) ratios through the thickness of the beam. In this framework, we use an Airy stress function related to the problems of beams in bending subjected to loads of higher degrees namely linear and at the same time it is satisfactory to the loading conditions on the beam faces.

A part of the numerical calculation is devoted to predict and analyses the distribution of stresses and displacements through the thickness and length of the beam respectively under a linear loading mentioned above.

Key words: FGM, stresses, displacements, Airy function, console beam.

الملخص

الهدف من هذا العمل هو إيجاد حل تحليلي للمرونة يعتمد على نمذجة رياضية أكثر تقدمًا لدراسة سلوك عوارض وحدة التحكم التي تتميز بمعامل متدرج وظيفيًا لنسب المرونة من خلال سمك الحزمة. في هذا السياق ، نستخدم دالة إجهاد تتعلق بمشاكل انحناء الحزم المعرضة لأحمال من درجات أعلى ، أي الخطية ، وفي نفس الوقت تكون مرضية لظروف التحميل على وجوه العارضة. يتم تخصيص جزء من الحساب العددي للتنبؤ وتحليل توزيع الضغوط والتهجير من خلال سمك وطول الحزمة على التوالي تحت الحمل الخطي المذكور أعلاه التحميل.

SOMMAIRE

Remerciements.....	I
Dédicace	II
Résumé	III
Abstract	VI
ملخص	VII
Sommaire.....	VIII
Liste des figures	IX
Liste des tableaux	XIV
Notations.....	XV
Introduction Générale.....	1

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

1.1 Introduction.....	4
1.2 Définition des matériaux composites.....	5
1.2.1. Renforts.....	5
a. Fibres de verre.....	6
b. Fibres de carbone	8
c. Fibres d'aramide	11
d. Fibres végétales.....	13
1.2.2. Matrices	13
1.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	14
1.3.1 Les Techniques de fabrication des matériaux fonctionnels FGMs	17
1.3.2 Coulage en bande (Tape Casting)	20
1.3.3 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	20
1.3.4 Dépôt par Electrophorèse.....	21
1.3.5 Compaction sèche des Poudres	21
1.3.6 Projection thermique.....	21
1.3.7 C. V. D. et P. V. D.....	22

1.3.8.Frittage et Infiltration.....	22
1.3.9.Frittage Laser Différentiel.....	22
1.3.10.Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	23
1.3.11.Application des FGM dans le domaine du Génie civil.....	24
1.4 Les propriétés matérielles effectives des matériaux FGM.....	26
1.5 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	27
1.6 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	29
1.7 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM.....	31
1.7.1. Les modèles de poutre pour les matériaux à gradient de propriétés	31
1.7.2. Le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT)	32
1.7.3. Le modèle de poutre Timoshenko (TBT).....	35
1.8 Conclusion.....	37

Chapitre 2 : Les différentes théories des poutres

2.1 Introduction.....	39
2.2 Historique des théories des poutres.....	39
2.3 Le comportement des poutres composites.....	39
2.4 Les différents types de poutres.....	40
2.4.a. Poutre simple.....	40
2.4.b. Poutre console.....	40
2.4.c. Poutre avec porte-à-faux	40
2.4.d. Poutre continue.....	40
2.4.e. Poutre a doublé encastrement.....	41
2.4.f. Poutre supportée à double encastrement.....	41
2.5 Les différentes théories des poutres.....	41

2.6	Modèle d'Euler Bernoulli.....	41
2.7	Modèle de Timoshenko.....	43
2.8	Théorie d'Ordre Elevé.....	45
2.9	Conclusion.....	47

Chapitre 3: La théorie de l'élasticité

3.1.	THEORIE DE L'ELASTICITE	49
3.2.	Définitions générales	49
3.3.	Contraintes et équilibres	51
3.3.1.	Contrainte	51
3.3.2.	Etat de contrainte	52
3.3.3.	Transformation de contrainte	53
3.3.4.	Contraintes principales	54
3.3.5.	Equation d'équilibre	55
3.4.	Déformation et compatibilité	56
3.4.1.	Déformations et déplacements	56
3.4.2.	Transformation des déformations	58
3.4.3.	Les déformations principales	59
3.4.4.	Compatibilité de déformation	60
3.5.	Relations contraintes-déformations	62
3.5.1.	Caractérisation des matériaux	62
3.5.2.	Loi de Hooke loi constitutive	63
3.6.	Formulations générales et stratégies de solution	67
3.6.1.	Les équations fondamentales de l'élasticité	68
3.6.2.	Conditions aux limites	69

3.6.3. Formulation des contraintes	72
3.6.4. Formulation des déplacements	73
3.7. Hypothèses fondamentales de l'élasticité linéaire	74
3.7.1. Energie de déformation	75
3.7.2. Théorèmes fondamentaux	78

Chapitre 4: Solution analytique par la théorie de l'élasticité d'une poutre console en E-FGM

4.1. Introduction	82
4.2. Formulation théorique	83
4.2.1. Propriétés des matériaux constitutifs du FGM	84
4.2.1.1. Les propriétés matérielles des poutres E-FGM	84
4.2.2. Description du problème et équations de base	85
4.3. Solution général	86
4.4. Résultats numériques et discussion	91
4.5. conclusion	95
CONCLUSION GENERALE	97
Références bibliographiques.....	99

Listes des figures

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux à gradient de propriété

Figure1.1.Principaux matériaux de renforts.....	6
Figure1.2. Fibres de verre [1]	7
Figure 1.3.Tissu de fibres de verre [2]	7
Figure 1.4. Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage des fibres de verre.....	7
Figure 1.5. Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de.....	8
Figure1.6. Plaques et rouleaux en fibres de carbone [3,4]	9
Figure1.7.Utilisation des fibres de carbone dans la famille des Avions Airbus [5].....	10
Figure1.8. Tissu en fibre d'aramide(Kevlar) [6].....	11
Figure1.9.Processus de fabrication des fibres d'aramide	12
Figure1.10 : Exemples de fibres végétales	13
Figure1.11. Familles des matrices	14
Figure1.12. (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés.....	15
Figure 1.13. Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	16
Figure 1.14. Protection thermique	17
Figure 1.15.Principe de la méthode coulage en bande	20
Figure 1.16. Disposition du procédé frittage laser	23
Figure 1.17. Applications des FGM dans divers domaines.....	24
Figure 1.18. Géométrie d'une poutre en FGM.....	26
Figure 1.19. Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM.....	28
Figure 1.20. Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.....	30
Figure 1.21. Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.....	33
Figure 1.22. Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).....	34
Figure 1.23. Illustration du modèle de la poutre de Timoshenko (TBT).....	36

Chapitre 2 : Les différentes théories des poutres

Figure 2.1. Cinématique d'Euler Bernoulli.....	42
Figure 2.2. Cinématique de la poutre de Timoshenko	44
Figure 2.3. Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.....	45

Chapitre 3: La théorie de l'élasticité

Figure 3.1. Solide soumis à des charges externes	51
Figure 3.2. Comportement des contraintes.....	52
Figure 3.3. Contraintes générales et principales.....	54
Figure 3.4. Forces de volume et de surface agissantes sur une portion du corps	55
Figure 3.5. Déformation typique pour un élément rectangulaire	56
Figure 3.6. Déformation géométrique bidimensionnelle.....	57
Figure 3.7. Interprétation physique de la compatibilité de déformation.....	60
Figure 3.8. Courbes uni axiales contrainte-déformation typiques pour trois structures de matériaux.....	63
Figure 3.9. Conditions aux limites typiques	69
Figure 3.10. Déformation sous une contrainte un axiale uniforme.....	75
Figure 3.11. L'énergie de déformation pour une déformation un axiale	75

Chapitre 4: Solution analytique par la théorie de l'élasticité d'une

poutre console en E- FGM

Figure 4.1. Géométrie et chargement de la poutre console	84
Figure 4.2. Distribution du module de Young sur l'épaisseur de la poutre E-FGM pour différents rapports $E_1/E_2=1, 2, 5, 10$ et 20	92
Figure 4.3. Contrainte normale (σ_x/q_0) adimensionnelle pour différents rapports de la poutre en porte-à-faux E-FGM à $x=L/2$	92
Figure 4.4. Contrainte tangentielle (τ_{xz}/q_0) adimensionnelle pour différents rapports de la poutre en porte-à-faux E-FGM à $x=L/2$	93
Figure 4.5. Courbes de déflexion adimensionnelle pour différents rapports de la poutre en porte à faux E-FGM à $z=0$	94

Liste des tableaux

Tableau 1.1. Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques mécaniques (fibres seules)	10
Tableau 1.2. Vue d'ensemble des méthodes de fabrication des FGMs	19

LISTE DE NOTATIONS

G	Module de cisaillement dans le plan (x, z)
E	Module de Young suivant x
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young du métal
W	Déplacement transversale
W_b	Déplacement dû à la flexion
w_s	Déplacement dû au cisaillement
N	Coefficient de Poisson
$V(z)$	Fraction volumique
P	Paramètre du matériau
A	Longueur de la plaque
B	Largeur de la plaque
H	Epaisseur de la plaque
$u_0, v_0, w_0,$	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$.
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
θ_i	rotations autour de l'axe i
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Les éléments de contraintes normales
r_{xy}, r_{yz}, r_{xz}	Les éléments de contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	les éléments de déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	les éléments de déformations de cisaillement
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	les coordonnées cartésiennes rectangulaires
δU	l'énergie de déformation virtuelle
δV	le travail virtuel externe
δK	la variation de l'énergie cinétique
$q, N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0$	Les charges transversales appliquées
$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ et	Champ virtuel de déplacement
$\delta \phi_z$	
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Efforts normaux

M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
∂	Dérivée partielle
C_{ij}	Coefficient de rigidité
P_m, P_c	les propriétés correspondantes du métal et la céramique
$f(z)$	La fonction de forme
λ	fraction de volume de porosité
ρ	densité matérielle de la structure FGM
$\{..\}$	Vecteur colonne
$[..]$	Matrice
$A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s$	Les composantes de rigidité
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ et ϕ_{mn}	les coefficients de déplacement maximum inconnus
ω	fréquence naturelle
FGM	Matériau fonctionnellement gradué
Al	L'aluminium
Al_2O_3	Oxyde d'aluminium
Si3N4	Nitrure de silicium
SUS304	Acier inoxydable
CLPT	La théorie classique de la plaque laminée
FSDT	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre
ESDPT	La théorie de déformation de cisaillement exponentielle de la plaque.
TSDT	La théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre
HSDT	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé
$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

INTRODUCTION

GENERALE

Introduction générale

Ces dernières années, les matériaux classés fonctionnellement (FGMS) ont attiré de plus en plus d'attention. En raison de leurs propriétés matérielles qui varient continuellement dans l'espace à l'échelle macroscopique, les FGMS sont donc généralement supérieurs aux matériaux conventionnels à matrice fibreuse en termes de comportement mécanique. Aujourd'hui, les FGMS sont largement utilisés dans divers domaines de la science et de l'ingénierie : électronique, chimie, optique, biomédecine, etc.

À mesure que l'application des FGMS augmente, de nouvelles méthodologies doivent être développées pour les caractériser et également pour concevoir et analyser des composants structurels constitués de ces derniers Matériaux [1-5]. Les publications sur la réponse du faisceau FGM aux charges mécaniques et autres sont limitées. Shi et ses collègues [6-8] ont étudié la réponse des poutres FGM. Sankar et ses collègues [9-11] ont développé des méthodes analytiques pour l'analyse thermomécanique et de contact des poutres FGM et aussi pour les poutres sandwich avec noyaux FGM. Dans leurs études, les propriétés thermomécaniques de la FGM ont toutes été supposées varier à travers l'épaisseur de manière exponentielle. Zhu et Sankar [12] ont résolu les équations d'élasticité bidimensionnelles pour une poutre de FGM soumise à un chargement transversal au moyen d'une méthode combinée des séries de Fourier-Galerkin, dans laquelle la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre était donnée par un polynôme et le coefficient de Poisson était supposé constant. Un nouvel élément de poutre basé sur la théorie des déformations de cisaillement du premier ordre a été développé pour étudier le comportement thermoélastique des structures de poutre FGM en Chakrabort et Gopalakrishnan [13] et Chakraborty et al. [14]. Dans ces articles, la variation exponentielle et la loi de puissance des distributions de propriétés matérielles ont été utilisées. Des solutions analytiques professionnelles pour les plaques et les poutres ont également été présentées par Ding et al. [15] et Huang et al. [16]. Sur la base de l'hypothèse d'une variation d'ordre supérieur du déplacement axial à travers la poutre, diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont également été développées [17-20]. Yaghoobi et Torabi [21] ont étudié les réponses post-flambement et les vibrations libres non linéaires de poutres FGM géométriquement imparfaites reposant sur une fondation élastique non linéaire. Li et al. [22] ont examiné les vibrations de FGM. Plaques sandwich. Zhao et al [23] ont examiné le comportement de vibration libre des plaques FGM en utilisant la méthode k_p -Ritz sans élément. Talha et Singh [24] ont étudié les réponses de flexion et de vibration libre des plaques FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Wei et al. [25] ont utilisé une méthode analytique basée sur la théorie de poutre de déformation de cisaillement de premier ordre pour l'analyse de vibration libre. Bouremana et al. [26] ont développé une nouvelle théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre basée sur la position de surface neutre [27] pour l'analyse de la flexion et des

vibrations libres des poutres FGM. Ould Larbi et al. [28] ont proposé une théorie de poutre de déformation de cisaillement efficace également basée sur la position de surface neutre pour la flexion et les vibrations libres des poutres FGM. Récemment, une théorie trigonométrique simple et raffinée des poutres d'ordre supérieur a été développée pour la flexion et les vibrations des poutres FGM, où le l'effet d'étirement de l'épaisseur a également été inclus [29, 30, 31]. Un examen critique des recherches récentes sur les plaques FGM a été présenté récemment par Jha et al. [32]. Dans cette recherche , l'approche de la fonction de contrainte est utilisée pour étudier le problème d'une poutre en porte-à-faux FGM exponentielle soumise à une charge uniformément répartie. La solution analytique peut être facilement dégénérée en celle d'une poutre homogène.

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

Chapitre 1 : Généralités sur les matériaux à gradient de propriétés

1.1. Introduction :

Les matériaux composites légers dont les rapports de résistance/poids et épaisseur/poids sont très grands, ont été utilisés avec succès dans l'industrie de génie civil, aéronautique et dans d'autres applications technologiques. Cependant, les matériaux composites traditionnels généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique de métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

L'amélioration des performances de la pièce structurale peut conduire à chercher au sein d'un même Matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différentes matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de cette tenace pose le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température. La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisent à la déformation plastique ou de fissuration. une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un Matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM)).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

1.2. Définition des matériaux composites [1] :

Un matériau composite peut être défini comme une combinaison de deux matériaux ou plus qui résulte par la formation d'un matériau dont les performances mécaniques, thermiques, électrique et physico-chimiques améliorées. Contrairement aux alliages métalliques dont chaque matériau retraits expropriées physiques et mécaniques.

Le matériau composite est constitué d'un renfort, qui contribue aux propriétés mécaniques de la pièce, et d'une matrice, le rôle de ce dernier est d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort. La matrice permet de transférer les flux d'efforts entre les plis, de garantir la tenue à l'environnement (Corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température. Aujourd'hui, il existe une grande variété de matériaux composites qui peuvent être classés selon différents critères. La nature de la matrice est un de ces critères qui permet de classer les composites en trois grandes familles:

- Les Composites à Matrices Organiques (CMO), telles que les polymères organiques (Résine thermodurcissable ou thermoplastique);
- Les Composites à Matrices Céramiques (CMC) réservés aux applications à haute température ;
- Les Composites à Matrice Métallique (CMM).

Ces matériaux peuvent aussi être classés selon la nature du renfort, ou selon l'objectif recherché de leurs utilisations. Si l'optimisation des coûts est le principal objectif, on parle de composites à 'grande diffusion'. En revanche, pour une utilisation dans le but d'optimiser les performances mécaniques ou thermiques, liées à une réduction de poids, on parlera de composite 'hautes performances' [2].

1.2.1. Définition du renfort [3] :

Le renfort du matériau composite est le constituant qui supporte la grande partie des efforts mécaniques. Il peut se présenter sous différentes formes (Figure 1.1) :

- Particulaire, charges sous forme de microbilles, de fibres broyées, d'écaille soude poudre micro ou nano particulaire,
- Fibres courtes, pour les renforts surfaciques non texturés tel que le mat,

- Fibres continues pour les renforts texturés tels que les tissus ou les renforts unidirectionnels tels que les nappes.

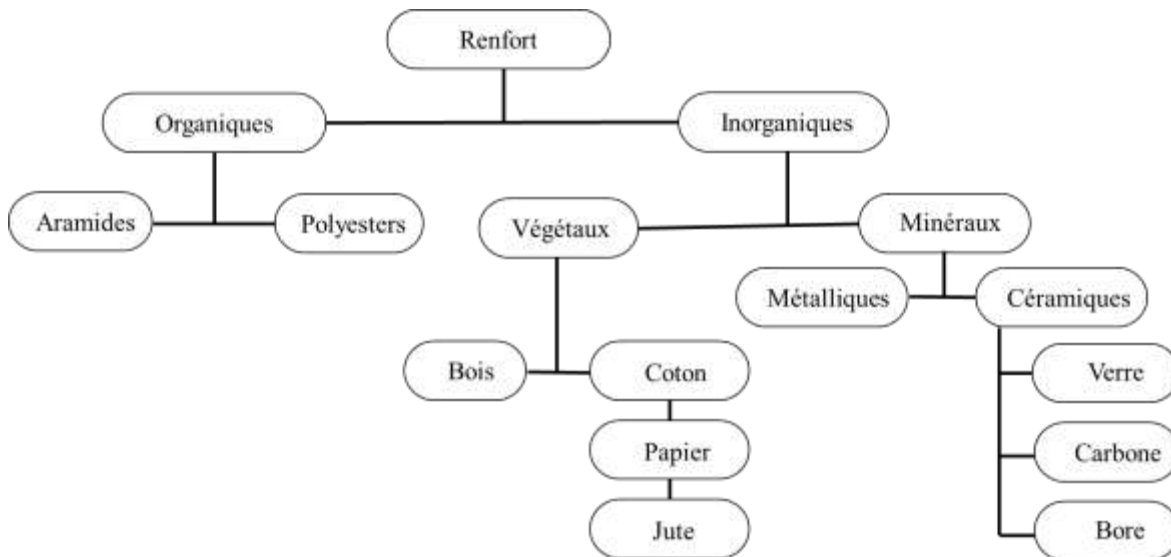


Figure1.1. Principaux matériaux de renforts

Le type de tissu est choisi en fonction de son adaptabilité, c'est-à-dire son aptitude à recouvrir la forme plus ou moins complexe de la pièce sans faire de plis. Il est aussi, surtout, choisi en fonction des sollicitations mécaniques que va subir la pièce.

Par miles fibres les plus employées, nous citons:

a. Fibres de verre [4] :

Ces fibres sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (Bâtiment, nautisme et autres applications non-structurales aéronautiques) (Figures 1.2- 1.3). Leur fabrication se fait en général par étirage illustré dans la figure1.4 Les oxydes minéraux constituant la matière première (Silice, alumine etc...) sont mélangés en proportion voulue suivant le type de fibre de verre désiré .Ce mélange est ensuite porté à très haute température ($>1500^{\circ}\text{C}$) afin d'être liquéfié pour être étiré à travers une filière sous forme de filaments de diamètres calibrés. Ces filaments isotropes sont ensimés pour optimiser l'adhésion

de la matrice, puis assemblés pour former les fils, eux-mêmes stockés sous forme de bobine. Cette bobine est alors étuvée, pour éliminer l'eau résiduelle et pour stabiliser l'ensimage. Les fibres de verre ainsi obtenues sont amorphes, ce qui leur confère des caractéristiques mécaniques, parfaitement isotropes. Cependant, leur faible module d'élasticité, ainsi que leur densité supérieure aux fibres de carbone limitent leur utilisation pour la fabrication de pièces structurales.



Figure1.2. Fibres de verre [1]



Figure 1.3. Tissue de fibres de verre [2]

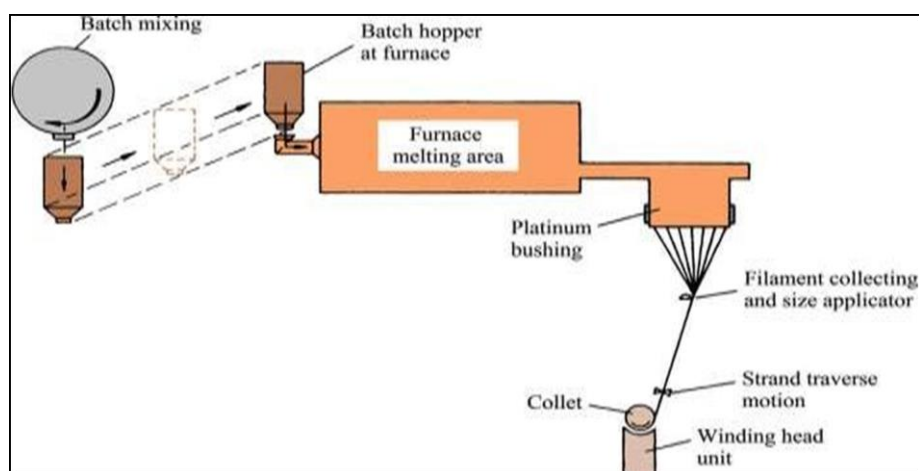


Figure 1.4. Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage des fibres de verre [5]

b. Fibres de carbone [1] :

Sont utilisées pour des applications structurales telles que les panneaux monolithiques du caisson central de l'A380 (Figure 1.5-1.6). Ces fibres sont généralement obtenues par pyrolyse d'un précurseur organique sous atmosphère contrôlée (figure 1.5). Le plus utilisé de ces précurseurs est le Poly Acrylo Nitrile (PAN). Celui-ci est oxydé entre 200 et 300 °C sous air ambiant puis carbonisé sous azote entre 800 et 1500°C. Il ne subsiste alors que la structure la mellairehexagonale2Dd'atomes de carbone, figure1.6.

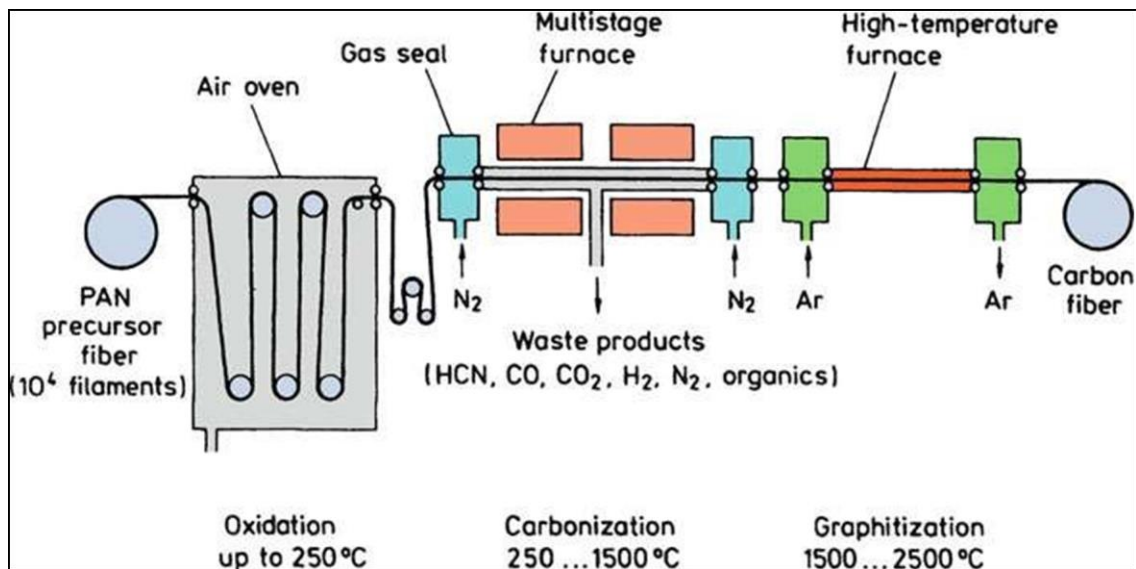


Figure 1.5. Schéma du principe de fabrication des fibres de carbone à base de PAN

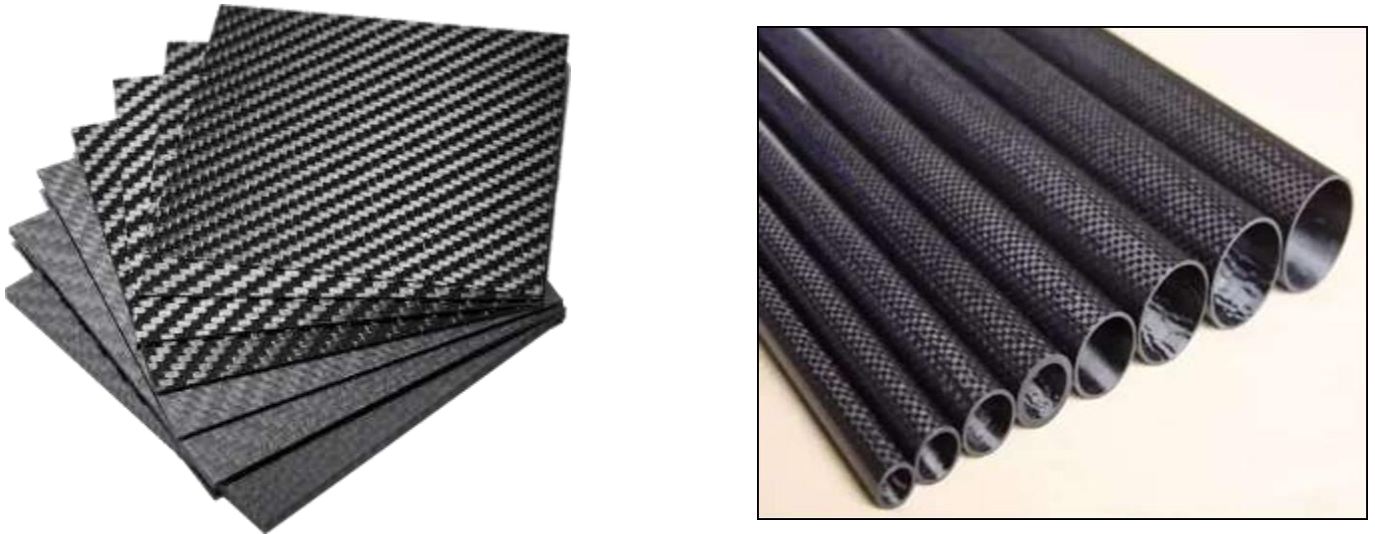


Figure1.6. Plaques et rouleaux en fibres de carbone [3,4]

Les filaments dits à Haute Résistance (HR) de 7 μm de diamètre ainsi que ceux dits à Module Intermédiaire (IM) sont ainsi obtenus. Les filaments à haut module (HM) voir très haut module (THM) (5,5 μm de diamètre) subissent en revanche une étape supplémentaire de graphitisation autour de 3000°C, sous argon. Cette graphitisation entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux et permet d'augmenter la rigidité des fibres. Tel que utilisés en aviation, figure1.7.



Figure1.7.Utilisation des fibres de carbone dans la famille des Avions Airbus [5]

De même que pour les filaments de verre, les filaments de carbone sont soumis à un traitement de surface (Imprégnation par un produit spécifique) afin d'améliorer les propriétés d'adhérence fibre/matrice, tableau 1.1.

Tableau 1.1 : Catégories de fibres de Carbone selon leurs caractéristiques

Mécaniques (fibres seules) [6]

Type de fibre	Module élastique E (GPa)	Contrainte à rupture σ_R (Mpa)	Exemple de fibre
Haute Résistance (HR)	$E_l < 265$	3500	P-30X(Cytec),F1
Module Intermédiaire(IM)	$265 < E_l < 320$	5600	P-55S(Cytec),F2
Haut Module (HM)	$320 < E_l < 440$	4400	M40J(Torayca)
Très Haut Module (THM)	$E_l > 440$	3900	P-75S(Cytec),M55J (Torayca)

Ce traitement de surface est suivi par un procédé d'ensimage textile-plastique qui facilite l'accrochage de la matrice organique, qui protège les fibres contre l'abrasion et qui favorise l'agglomération des filaments lors de la fabrication des mèches. Il est

important de noter que les fibres de carbone sont sensibles à l'oxygène dès 400°C, et qu'elles présentent une mauvaise résistance aux chocs. Enfin, le prix de ces fibres reste relativement élevé, mais il n'accessé de diminuer avec l'augmentation des volumes de production.

c. Fibres d'aramide :

Plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar®, Twaron®, Technora®, Nomex®,etc...[2] utilisées pour des applications spécifiques telles que la protection balistique (Gilets pare-balles) ou bien pour les réservoirs souples de carburant en Formule 1.

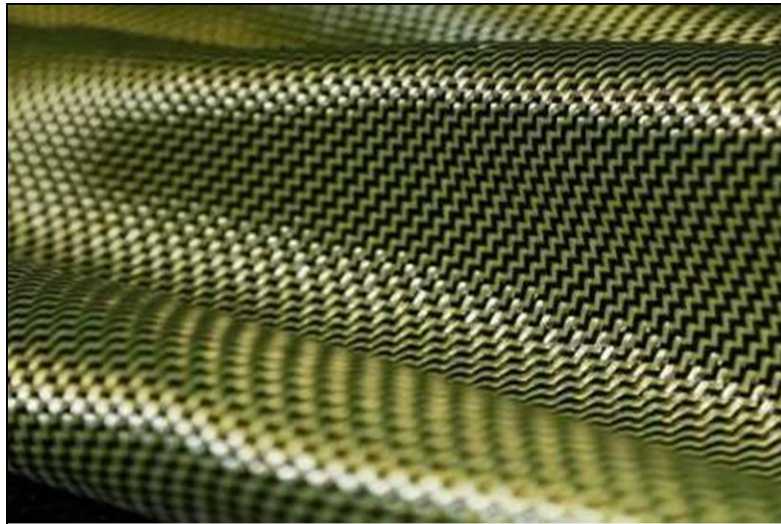


Figure1.8.Tissue en fibre d'aramide(Kevlar) [6]

Pour les fibres aramides, la méthode « Dry jet wet spinning » est utilisée. Le processus est illustré à la figure 1.9. La polycondensation en solution de diamines et d'halogénures de diacides à basses températures (Près de 0°C) donne les polyamides formant un aramide.

Les basses températures sont utilisées pour inhiber toute génération des sous-produits et favoriser la formation de polyamide. Le polymère résultant est pulvérisé, lavé et séché ; mélangé avec H₂SO₄ concentré ; et extrudés à travers une filière à environ 100 °C .Les jets des orifices traversent environ 1 cm de couche d'air avant de pénétrer dans un bain d'eau froide (0 - 4 °C). La fibre se solidifie dans une lame d'air et l'acide est

éliminé dans le bain de coagulation. Le capillaire de la filière et l'intervalle d'air provoque et la rotation et l'alignement des domaines, ce qui donne des résultats hautement cristallins et orientés tels que les fibres. La température plus élevée permet d'utiliser une solution de filage plus concentrée et des vitesses de filage plus élevées. Des vitesses de rotation de plusieurs centaines de mètres par minute peuvent être atteintes. [7].

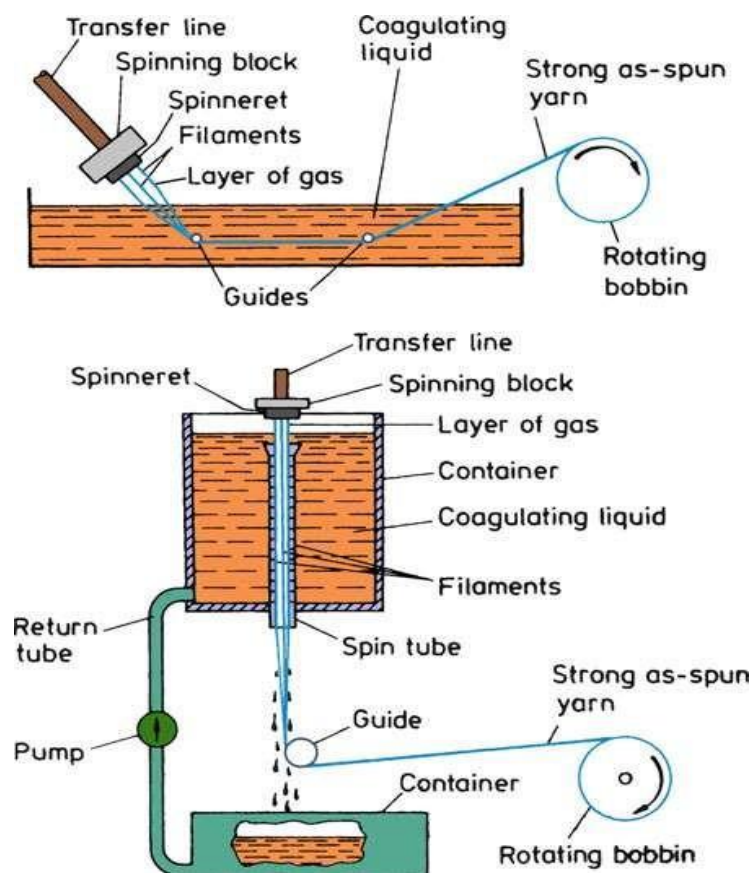


Figure1.9.Processus de fabrication des fibres d'aramide [7]

d. Fibres végétales :

Présentent l'avantage d'être particulièrement écologiques, car sont mises en œuvre à partir de produits naturels, tel que le chanvre, le lin ou le bambou (Figure 1.10).



Figure1.10 : Exemples de fibres végétales [8,9]

Ces fibres au prix modeste sont de plus en plus utilisées pour la fabrication des composites dits «d'entrée de gamme». [2] ;[7] .

1.2.2. Matrices :

L'objectif principal de la matrice se résume dans la transmission des efforts mécaniques au renfort. Elle doit aussi assurer la protection du renfort vis-à-vis des différentes conditions environnementales (Oxydation, vieillissement humide, corrosion,...). On distingue trois catégories principales :

- Résines thermoplastiques;
- Résines thermodurcissables
- Élastomères.[23]

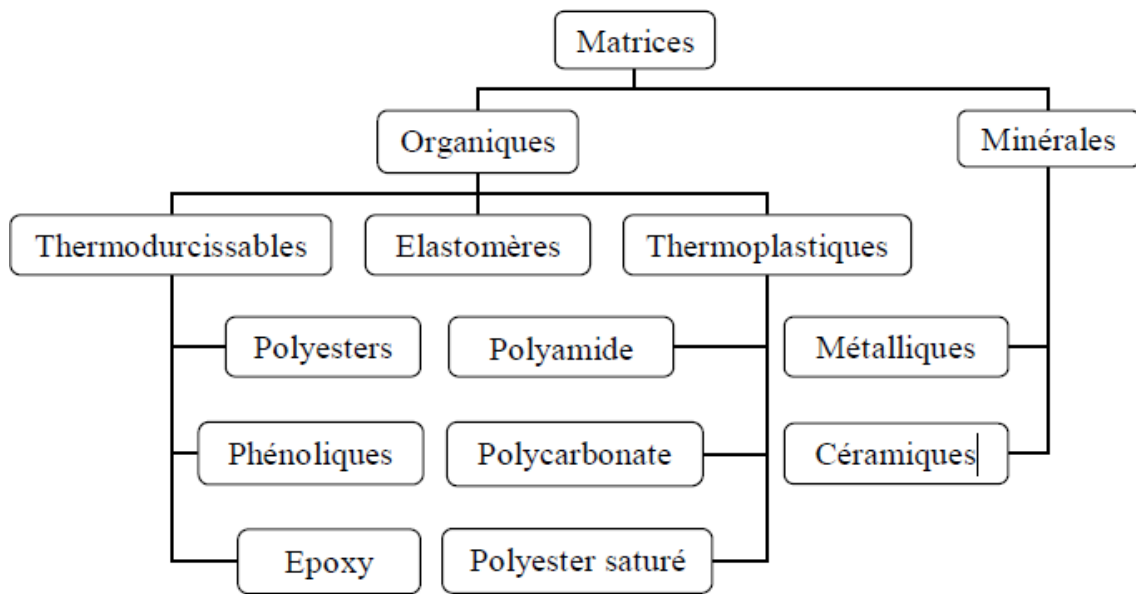


Figure1.11. Familles des matrices

1.3 Concept des matériaux à gradient de propriétés:

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue figure 1.12 (a) ou discrète figure 1.12 (b) à travers l'épaisseur [8]. Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces (provoquant le délaminage) et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les indus aéronautiques, aérospatiale, biomécanique, automobile et dans bien d'autres applications technologiques.



Figure 1.12. (a) Variation continue des propriétés (b) Variation discrète des propriétés.

Le changement continu dans la composition et donc dans la micro structure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.4. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de micro structure différente.

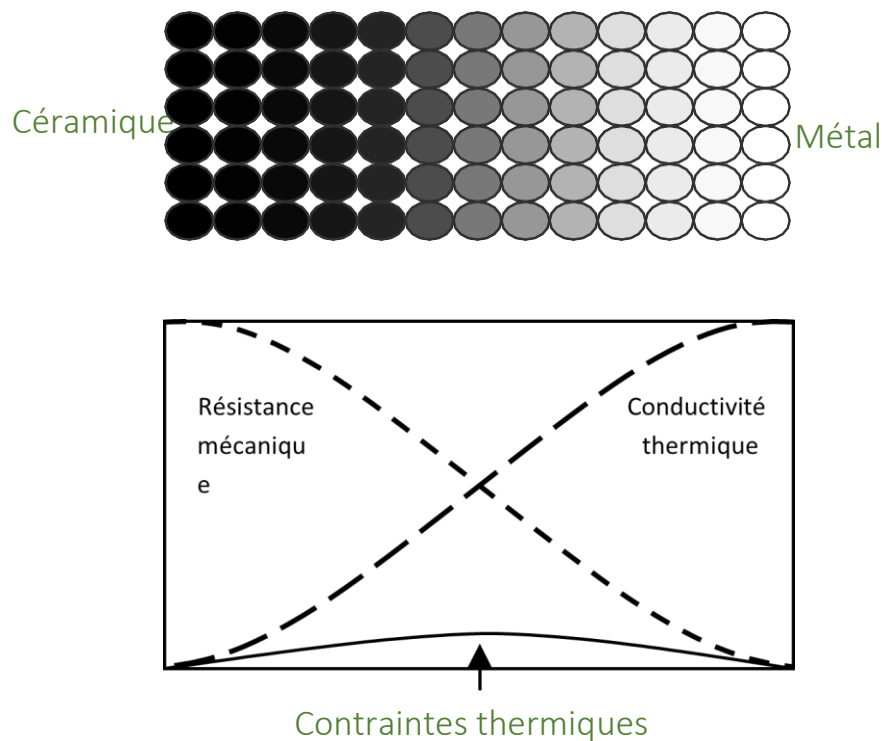


Figure 1.13. Concept des matériaux à gradient de propriétés.

La figure 1.14 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition).

Il montre également comment un FGM peut alléger Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

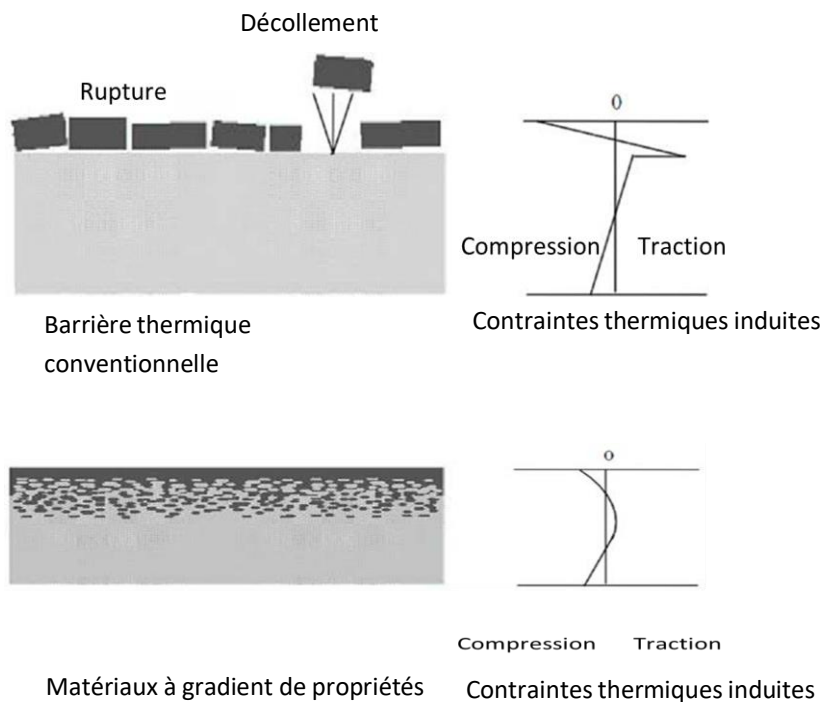


Figure 1.14. Protection thermique [9].

1.3.1. Les Techniques de fabrication des matériaux fonctionnels FGMs :

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être

produits.

Il existe plusieurs méthodes différentes physiques et chimiques pour la fabrication des FGMs selon le type de matériaux, l'application et les commodités accessibles. Les méthodes de traitement des FGMs peuvent être classées en deux grandes catégories basées sur le traitement constructif et le transport de masse [10].

Dans la première catégorie, le FGM est construit couche par couche en commençant par une distribution appropriée dans laquelle les gradients sont littéralement construits. L'avantage de cette technique est de fabriquer un nombre illimité de gradients. Pendant ce temps, dans la seconde catégorie, les gradients à l'intérieur d'un composant dépendent du phénomène de transport naturel tel que le flux de fluide, la diffusion d'espèces atomiques ou la conduction thermique. Cependant, les progrès de la technologie d'automatisation au cours des deux dernières décennies ont offert des processus de gradation constitutifs technologiquement et économiquement réalisables. Les techniques existantes et les plus à jour pour la fabrication des FGMs sont données en détail et la vue d'ensemble des processus de fabrication est présentée dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2. Vue d'ensemble des méthodes de fabrication des FGMs [11].

S1.NO	Process	Variability of transition function	Versatility in phase content	Type of FGM	Versatility in component geometry
1	Powder stacking	Very good	Very good	Bulk	Moderate
2	Sheet lamination	Very good	Very good	Bulk	Moderate
3	Wet powder spraying	Very good	Very good	Bulk	Moderate
4	Slurry dipping	Very good	Very good	Coating	Good
5	Jet solidification	Very good	Very good	Bulk	Very good
6	Sedimentation/centrifuging	Good	Very good	Bulk	poor
7	Filtration/slip casting	Very good	Very good	Bulk	Good
8	Laser cladding	Very good	Very good	Bulk, Coating	Very good
9	Thermal spraying	Very good	Very good	Coating, Bulk	Good
10	Diffusion	Moderate	Very good	Joint, Coating	Good
11	Directed solidification	Moderate	Moderate	Bulk	Poor
12	Electrochemical gradation	Moderate	Good	Bulk	Good
13	Foaming of polymers	Moderate	Good	Bulk	Good
14	PVD, CVD	Very good	Very good	Coating	Moderate
15	GMFC process	Very good	Moderate	Bulk	Good

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration es matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après :

1.3.2. Coulage en bande (Tape Casting) :

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure 1.15). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

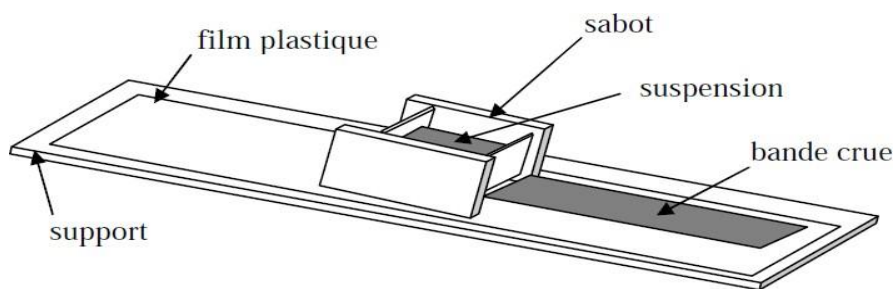


Figure 1.15. Principe de la méthode coulage en bande [12].

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et *al.* 1947, et depuis d'autres travaux ont été réalisés [12]. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de BaTiO_3 . On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques (BaTiO_3 principalement).

1.3.3. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule

poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- formation du tesson ou "prise » ;
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

1.3.4. Dépôt par Electrophorèse :

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [13].

1.3.5. Compaction sèche des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délitage. La densification sera enfin l'étape finale [14] . Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

1.3.6. Projection thermique :

Le dépôt par projection thermique se décline en quatre techniques différentes : la projection par flamme, la projection par arc électrique, la projection par plasma (VPS) et la projection thermique à froid. Pour l'ensemble de ces techniques, la fabrication du FGM tient au contrôle de la distribution de la poudre dans la buse de projection thermique.

1.3.7. C. V. D. et P. V. D. :

Le dépôt en phase vapeur physique ou chimique est une technique dans laquelle les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peut être utilisé pour élaborer un matériau à gradient de propriétés sur des substrats de formes compliquées, [15].

1.3.8. Frittage et Infiltration :

Cette méthode passe par deux étapes et convenable à la mise en forme d'un composite FGM résultant de la combinaison de deux matériaux sous des températures de fusion extrêmement différentes. La première étape est de produire une matrice frittée à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour réduire les contraintes thermiques [16].

1.3.9. Frittage Laser Différentiel :

La puissance du laser permet de contrôler la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié. Yuki et *al.* 1990 ont fabriqué une pièce F.G.M de PSZ/Mo. La figure I.7 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

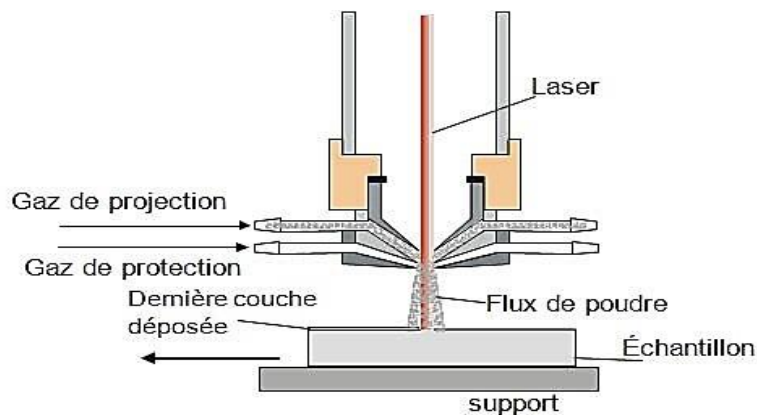


Figure 1.16. Disposition du procédé frittage laser différentiel [17].

1.3.10. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.8. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

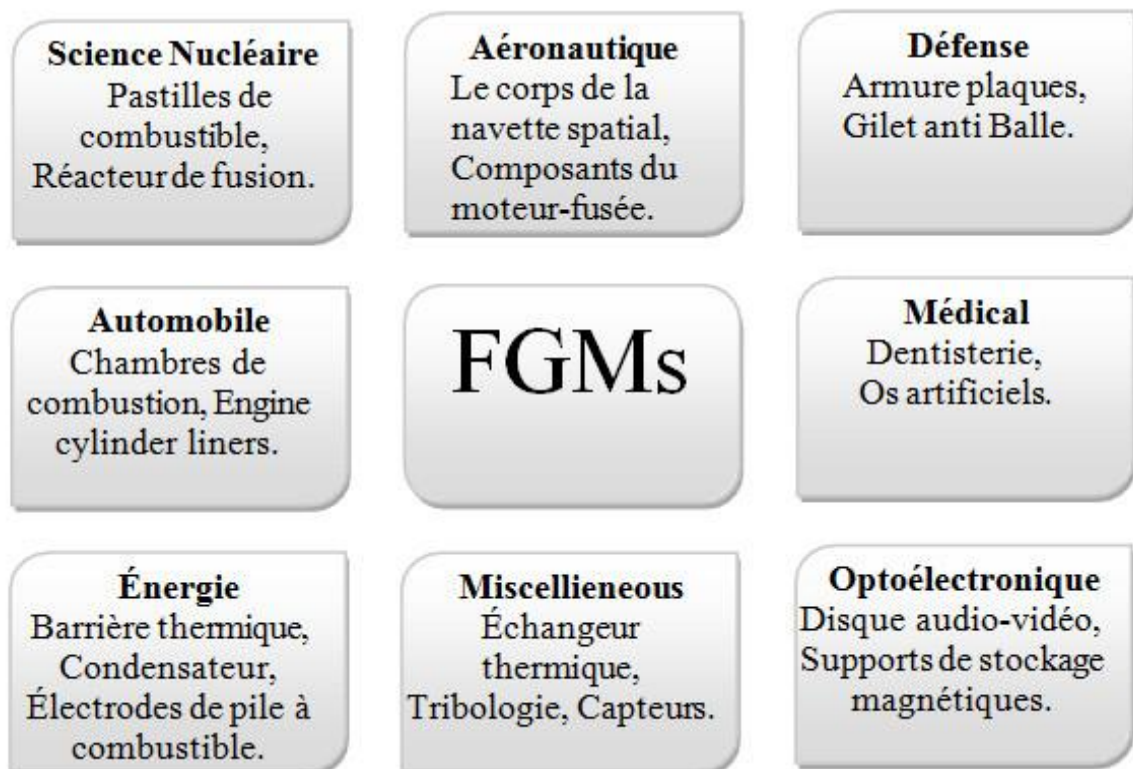


Figure1.17. Applications des FGM dans divers domaines.

1.3.11. Application des FGM dans le domaine du Génie civil :

1.3.11.1. Les joints dans la charpente métallique :

Lors de l'assemblage des éléments en charpente métallique, on est obligé de réaliser des soudures entre deux éléments de nature/nuance différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints FGM est optimale.

1.3.11.2. Les grands vitrages dans les zones chaudes :

L'utilisation des vitres en FGM a pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout et le poids des structures.

1.3.11.3. Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements):

Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation [18].

1.3.11.4. Les chaussées souples (Functionally Graded Concrete Materials for Flexible Pavements) :

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux pour éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs tout en obtenant un comportement optimisé, augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité [19].

1.3.11.5. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel):

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches [20].

1.4. Les propriétés matérielles effectives des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

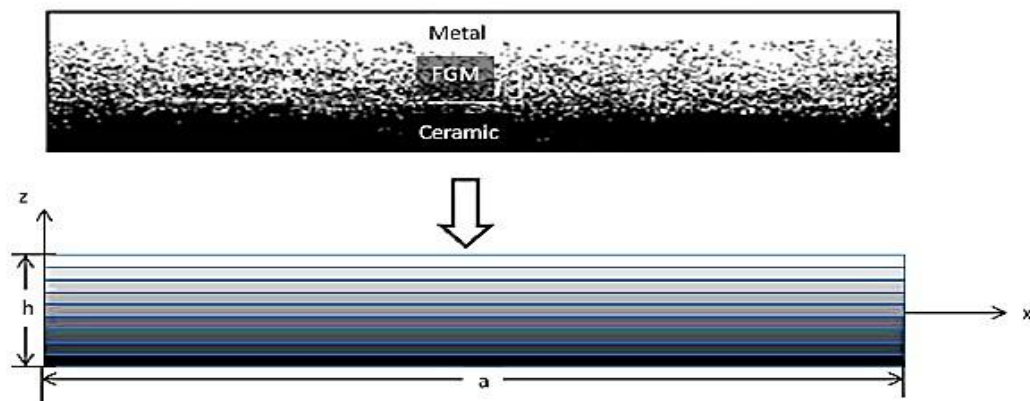


Figure 1.18. Géométrie d'une poutre en FGM.

La coordonnée x définit la longueur de la poutre, tandis que l'axe z perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les besoins. Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la poutre en FGM varie en fonction de la loi de puissance (**P-FGM** : la fonction polynômiale) ou la fonction exponentielle (**E-FGM**) ou avec la fonction sigmoïde (**S-FGM**).

1.5. Propriétés matérielles d'une poutre P-FGM:

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1-1)$$

Où k est un paramètre matériel h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction Volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles de la poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [21]:

$$E(z) = E_1 + (E_2 - E_1)V(z) \quad (1-2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la poutre, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la figure 1.19.

Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure

Pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

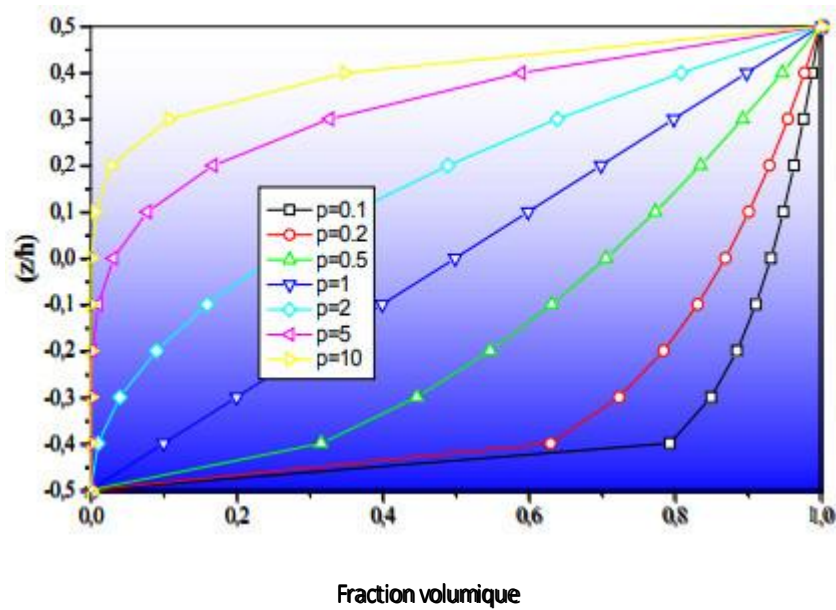


Figure 1.19. Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM.

1.6. Propriétés matérielles d'une poutre S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une poutre P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une poutre composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement G. Bao., L. Wang (1995). Par conséquent, Chung et chi (2003) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1-3a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1-3b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_1 + [1 - V_1(z)] E_2 \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1-4.a)$$

$$E(z) = V_2(z) E_1 + [1 - V_2(z)] E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1-4.b)$$

La figure 1.20. Montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (1-4a) et (1-4b) représente les distributions sigmoïdes, dans une poutre S-FGM.

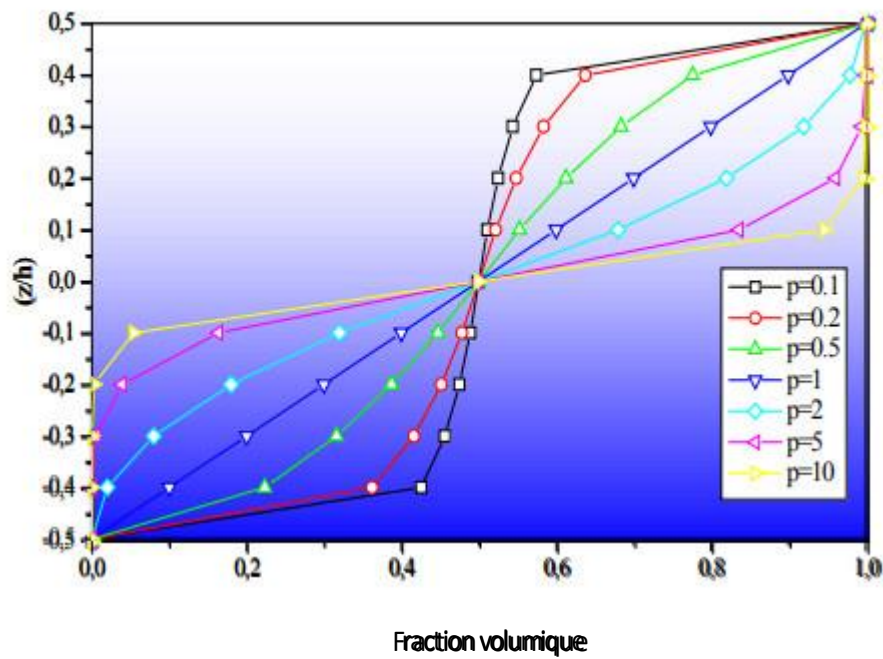


Figure 1.20. Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM.

1.7. Les propriétés matérielles d'une poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [22] :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+h/2)} \quad (1-5a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (1-5b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la figure 1.21.

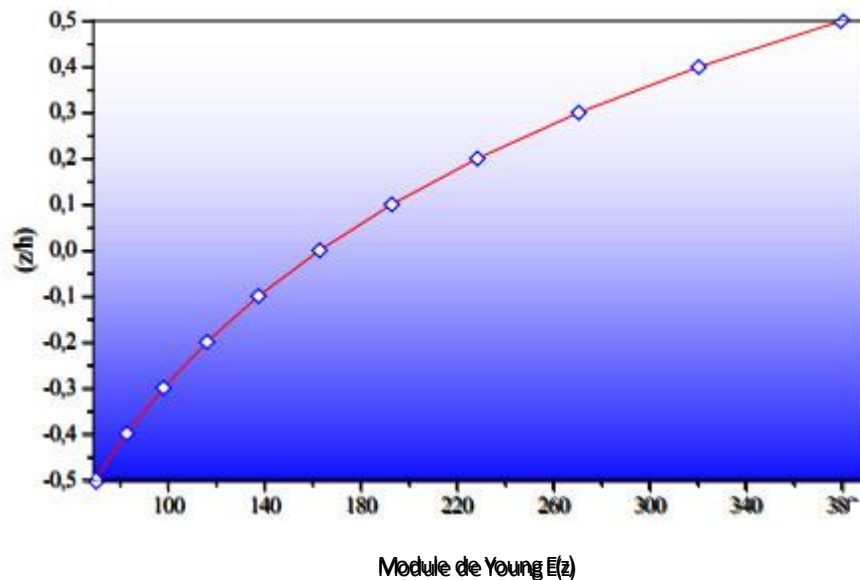


Figure 1.21. Variation du module de Young dans une poutre E-FGM.

1.7.1. Les modèles de poutre pour les matériaux à gradient de propriétés :

Le terme de « poutre » désigne un élément de structure dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Et soumis à des charges qui provoquent la déformation de flexion. Des théories de poutre sont développées en supposant que la forme du champ de déplacement ou le champ de contrainte en tant que combinaison linéaire des fonctions inconnues et la coordonnée dans l'épaisseur exprimée généralement sous la forme :

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^n z^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (1-6)$$

Où φ_i est la 1^{ème} composante du déplacement ou de la contrainte, (x, y) sont les coordonnées en plan, z est la coordonnée dans l'épaisseur, t représente le temps et φ_i^j sont des fonctions à déterminer. Le facteur temps ne sera pas considéré ici. Il existe de nombreuses théories de la poutre avec différentes formes de la formule (1.6) qui cherchent une expression de φ_i^j . Une critique sur les modèles de plaques peut être trouvée dans Ghugal et Shimpi (2002), et Tung, N. V, (2004).

Afin d'étudier le comportement des poutres en matériaux à gradient de propriété, quatre modèles de poutres ont été développés pour ce matériau sont brièvement présentés : le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT :Classical beam theory), le modèle de poutre basé sur la théorie de la poutre de Timoshenko (TBT :Timoshenko beam theory), le modèle de poutre basé sur la théorie du troisième ordre de la déformation de cisaillement (TSBT) et le modèle de poutre basé sur la théorie sinusoïdale de la déformation de cisaillement (SSBT).

1.7.2. Le modèle classique de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT) :

Ce modèle basé sur la théorie classique de poutre (CBT) satisfait l'hypothèse d'Euler- Bernoulli avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à l'axe moyen avant déformation, reste droite après

déformation. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion. Une description détaillée des modèles de poutres, y compris le modèle actuel peut être trouvée dans Timoshenko et Woinowsky-Kreiger, (2009), Reddy.J (1997 et 1999).

Sur la base des hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement de ce modèle de poutre (CBT) développée est donné par l'équation suivante :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw_0(x)}{dx}$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (1-7a)$$

$$(1-7b)$$

Où (u_0, w_0) sont deux fonctions de déplacement inconnues de l'axe médian de la poutre ($z = 0$), Figure 1.22.

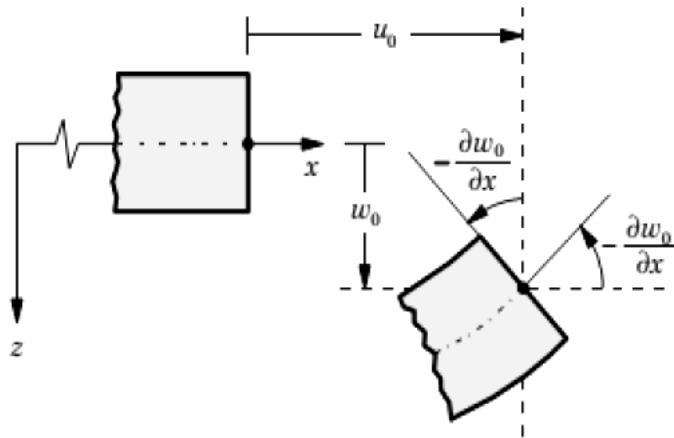


Figure 1.22. Illustration du modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).

Puisque ce modèle ne prend pas l'énergie de cisaillement en compte, il donne des résultats inexacts pour les poutres épaisses. Cependant, en raison de sa simplicité avec seulement trois degrés de liberté de déplacement, ce modèle classique reste une bonne approche en premier. Les analyses du comportement des poutres fonctionnellement graduées (FGBs) à l'aide du modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli (CBT) ont été étudiées par He et al. 2001.

1.7.3. Le modèle de poutre basé sur la théorie du premier ordre de la déformation de cisaillement (FSDT) (Timoshenko TBT) :

Contrairement au modèle classique, ce modèle prend en compte les déformations de cisaillement transversales, qui sont assumées constantes dans l'épaisseur de la poutre. Le modèle nécessite donc un facteur de correction pour calculer l'effort de cisaillement transverse. Les premières études sur la théorie de premier ordre de la déformation de cisaillement de la poutre (FSDT) peuvent être trouvées dans Reissner, E., (1945et1975), Mindlin. Les études sur ce modèle peuvent être trouvées dans Timoshenko et Woinowsky- Kreiger, (2009), Reddy.J (1997), Miara et Podio-Guidugli (2006). La théorie du premier ordre est basé sur le champ de déplacement selon les mêmes hypothèses et restrictions que la théorie classique, mais la poutre est à l'état de normalité détendue,

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(x) + z\phi(x) \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (1-8a)$$

$$(1-8b)$$

Où (u_0, w_0) et (ϕ_x) sont les déplacements dans la surface moyenne et la rotation autour de l'axe y , respectivement, Figure 1.15. Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie des poutres classique décrite dans la section précédente en

remplaçant $\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique.

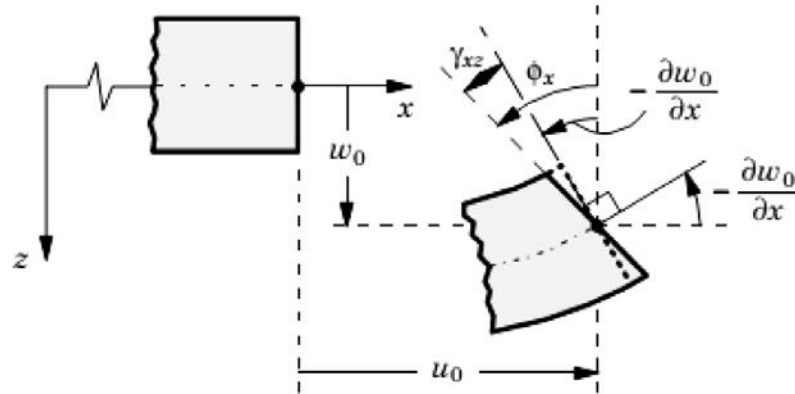


Figure 1.23. Illustration du modèle de la poutre de Timoshenko (TBT).

Le modèle FSDT a été largement utilisé pour l'analyse des matériaux à gradient de propriété en raison de sa simplicité de l'analyse et la programmation [24] ;[25].

Cependant, le fait que la déformation de cisaillement transversale est constante dans l'épaisseur, il nécessite donc une correction quand on calcule les contraintes transversales de cisaillement et les efforts. Pratiquement, une correction de cisaillement transverse du modèle de la plaque homogène a été prise.

En outre, afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur des poutres ont été développées. Plusieurs auteurs ont appliqué la théorie de poutre à ordre élevé pour les matériaux à gradient de propriétés (FGMs). Dans la section suivante, nous allons rappeler deux

modèles de poutres basés sur des théories de la déformation de cisaillement à ordre élevé utilisés pour l'analyse des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) : un modèle de poutre basé sur la théorie de la déformation de cisaillement à ordre élevé (TSDT) proposé par Reddy.J (1997 et 1999) et un modèle de la poutre basé sur la théorie de la déformation de cisaillement sinusoïdale (SSDT) étudié par Zenkour, A. M., (2003 ; 2004a et 2004b) [24] .

1.8. CONCLUSION :

Ce chapitre nous a permis de comprendre ce qu'est un matériau composite et un matériau a gradient de propriétés, et ce a travers l'historique de la fabrication des FGM dès les premiers pas de leur naissance. Nous avons passé en revue les méthodes d'élaboration des matériaux a gradient de propriétés comme : coulage en bande ; compaction sèche des poudres ; C.V.D. et P.V.D. etc. Nous avons également décrit par la suite les propriétés physiques et mécaniques des FGM (métal & céramiques) .Enfin nous avons terminé par l'étude des différentes lois possibles qui servent a décrire la variation des propriétés matérielles du matériau suivant l'épaisseur de la poutre, ces pouvaient être puissance, exponentielles ou même sigmoïdes.

Chapitre 02 :

Les différentes théories des poutres

Chapitre 02 : Les différentes théories des poutres

2.1 Introduction :

Le terme poutre désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes.

2.2 Historique des théories des poutres :

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne put finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui écrivirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. A cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

2.3 Le comportement des poutres composites [1] :

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériaux traditionnels, métalliques par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base sur les plans rigidité et résistance, et qui sont

concentrées dans la direction des fibres. L'importance de développer une analyse sur le comportement des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites et ceci à partir des différentes mais sur des éprouvettes en forme de poutres.

2.4 Les différents types de poutres :

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

a• Poutre simple :

C'est une poutre reposant sur deux supports : l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

b• Poutre console :

C'est une poutre encastrée dans un mur à une extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

c• Poutre avec porte-à-faux :

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double), elle a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). Les poutres sont classées suivant leurs appuis. Ces trois précédents types de poutres entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), parce qu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même des équations d'équilibre.

d• Poutre continue :

C'est une poutre supportée par l'un des deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

e• Poutre a double encastrement :

C'est une poutre supportée par deux encastrements, elle est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

f• Poutre supportée à double encastrement :

C'est une poutre supportée par deux encastrements ayant un ou plusieurs supports. C'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixation ou support que nécessaire, Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre mais les équations de la statique ne suffisent pas à analyser ces poutres. On aura donc recours à différentes méthodes.

2.5 Les différentes théories des poutres [2] :

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

2.6 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory. CBT) :

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre).

La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section reste plane.

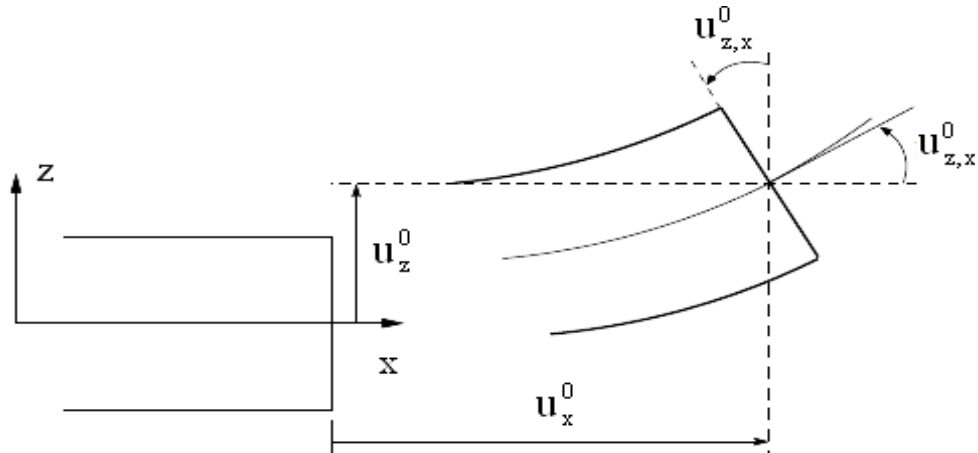


Figure 2.1. Cinématique d'Euler Bernoulli

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$\psi(z) = 0. \quad (2-1)$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = \overline{u^0(x)} - z \cdot w_x^0(z) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2-2)$$

$u(x, z)$:représente le déplacement suivant X et $w(x, y)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La relation autour de l'axe Y ,provoquée par la flexion est tel que

$$w_x^0(z) = \frac{\partial w^0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2-3)$$

u_0, w_0 sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées, Ceci est la conséquence de la négligence de la

déformation transversale.

2.7 Modèle de Timoshenko(FSDBT) :

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone d'indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe, qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure 2.3). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. [Timoshenko, 1972]. Dans le cas où nous avons un élanement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit $\psi(z) = z$. Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + z \cdot \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = \bar{w}^0(x) \end{cases} \quad (2-4)$$

Avec,

γ_{xz}^0 : est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = w_x^0 - \varnothing^0(x) \quad (2-5)$$

$\varnothing^0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

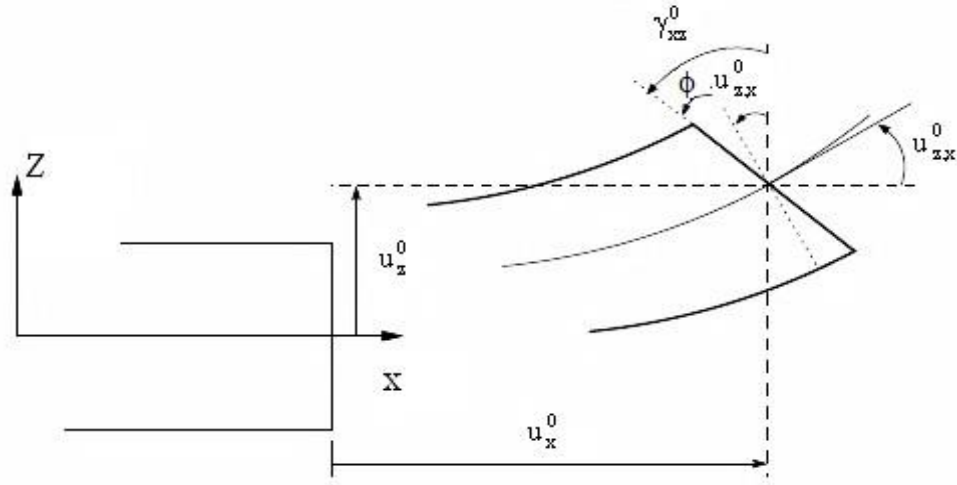


Figure 2.2. Cinématique de la poutre de Timoshenko

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = -W_x^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \\ \gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \end{cases} \quad (2-6)$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz} = G_{xz} \cdot \gamma_{xz}^0 \quad (2-7)$$

G_{xz} : est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement

Cette contradiction mène à introduire des coefficients pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par [Mandin et Deresiewicz]. Cowper et Murty ont donné de nouvelles expressions de ce coefficient pour différentes sections de la poutre. La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques. Bien qu'issues de la théorie classique, ces solutions sont

toutefois entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

La non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à

essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est la théorie d'ordre élevé.

2.8 Théorie d'Ordre Elevé :

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure 2.3). La fonction $\Psi(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\Psi'(z)$ représente le cisaillement.

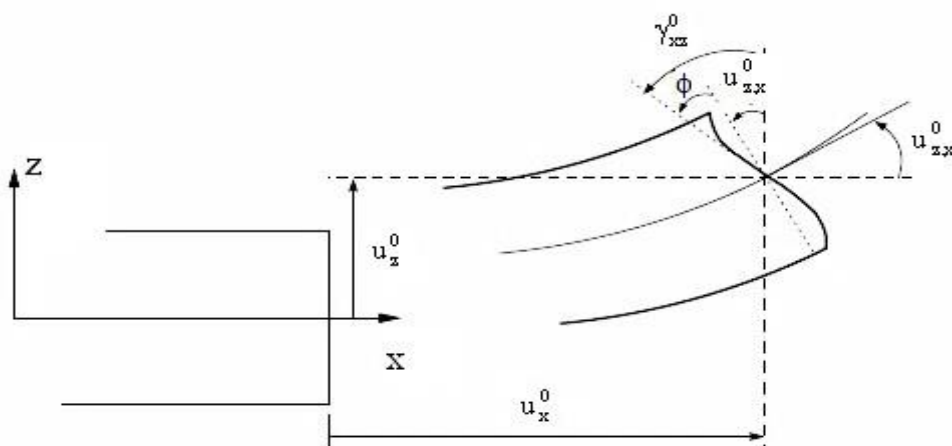


Figure 2.3 Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw_x^0(x) + \Psi(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (2-8)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_x^0(x) + \Psi'(z)\gamma_{xz}^0(x) + w_x^0(x) \quad (2-9)$$

$$\gamma_{xz} = \Psi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (2-10)$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$\Psi'(z)|_{z = \pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (2-11)$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (2.11).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\Psi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM.

1.) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CBT):

$$\Psi(z) = 0 \quad (2-12)$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\Psi(z) = z \quad (2-13)$$

3-) Le modèle de puissance avec l'approche de (PSDBT) [5]:

$$\Psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2-14)$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par (ESDBD)[6]:

$$\Psi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (2-15)$$

5-) Le modèle trigonométrique :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \quad (2-16)$$

Avec, h: étant l'épaisseur de la poutre.[3]

2.9 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter l'historique des théories des poutres. Dans un premier temps, nous avons présenté le comportement des poutres composites qui est plus complexe que celui d'une poutre en matériaux traditionnels, métalliques par exemple, et nous l'avons terminé par une démonstration des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT).

Chapitre 3 :

La théorie de l'élasticité

3.1. THEORIE DE L'ELASTICITE :

La théorie de l'élasticité trouve son origine dans la pratique, le domaine de construction, (pont construction mécanique automobile...), font signe de l'utilisation des propriétés des corps solides ...), capables de supporter et transmettre certaines sollicitations. L'étude des propriétés de la matière permet la compréhension des phénomènes, les prévoirait, de concevoir dans les conditions souhaitables.

La théorie de l'élasticité est l'une des branches les plus vigoureuses de la mécanique des milieux continus déformables, ses lois régissent l'étude de tous les corps solides qui nous environnent, du point de vue de leurs équilibres et leurs mouvements.

3.2. Définitions générales :

L'élasticité est la capacité physique d'un corps à reprendre sa forme initiale après suppression de la sollicitation. Le corps est parfaitement élastique s'il recouvre complètement sa forme originale après suppression de la charge; il est partiellement élastique si la déformation produite par les forces externes ne disparaît pas complètement après avoir retiré la charge. Dans le cas d'un corps parfaitement élastique, le travail dû aux forces externes, pendant la déformation, est entièrement transformé en énergie potentielle de déformation. Dans le cas d'un corps partiellement élastique une partie du travail, créé par les forces externes pendant la déformation, se dissipe sous forme de chaleur dans le corps pendant la déformation non élastique.[1]

Le modèle du corps élastique est caractérisé par les hypothèses fondamentales suivantes[3] :

Hypothèse de l'espace-temps newtonien : l'espace est euclidien (à trois dimensions), le temps est indépendant des coordonnées spatiales.

Hypothèse du milieu continu : chaque domaine élémentaire contient de la matière,

Cette hypothèse permet de considérer toutes les quantités comme fonctions du point dans le domaine élastique occupé par le corps.

Hypothèse de la rigidisation des parties (ou de la solidification) : un corps se

trouve en équilibre si, et seulement si, les forces agissant sur chacune de ses parties forment un système nul ; cette hypothèse permet de séparer une partie arbitraire du corps, de remplacer l'action du reste par certaines forces, et de déterminer ces dernières par la condition que l'équilibre du corps entier reste intact.

Hypothèse de la dépendance locale : Les forces intérieures (tension) sont des fonctions du point, de la déformation, de la température...etc.

Hypothèse de l'élasticité idéale : il existe une correspondance biunivoque entre les déformations et les tensions. Ceci caractérise un certain état de la matière, étant dans lequel la connaissance des tensions et celle des déformations fournissent des informations équivalentes. Et les hypothèses simplificatrices:

Hypothèse de linéarité géométrique :

les déformations sont des fonctions linéaires des dérivées des déplacements.

Hypothèse de linéarité physique:

les tensions sont des fonctions linéaires des déformations.

Hypothèse d'isotropie : les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec la direction autour du point.

Hypothèse d'homogénéité:

les propriétés mécaniques du matériau ne changent pas avec le point dans le corps.

3.3. Contraintes et équilibres :

3.3.1. Contrainte :

Sous l'action des charges externes $P_1, P_2, \dots, P_n$ appliquées sur un corps, des efforts internes se produisent pour le mettre en équilibre. Ces derniers, sont que la résultante des efforts élémentaires agissant sur chaque section de l'élément sollicité par les forces extérieures. On appelle ces efforts élémentaires, *contraintes* ζ . [4]

On considère les plans sécants A et A' passant par un point O d'un corps sollicité par des forces extérieures (Figure I.1). Une contrainte normale σ de traction ou de compression au point O est l'effet d'éloignement ou de rapprochement respectivement des plans A et A' . L'effet de glissement des deux plans est attribué aux contraintes tangentielles τ . L'existence simultanée des contraintes normales et tangentielles tend à déplacer les plans suivant la direction de la résultante dite, *vecteur contrainte* P (ΔF).

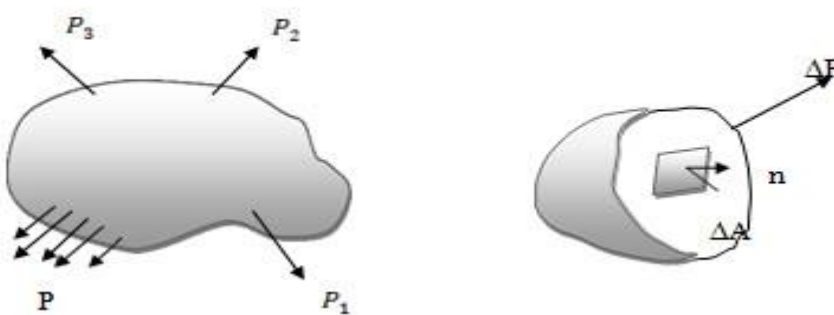


Figure 3.1. Solide soumis à des charges externes

3.3.2. Etat de contrainte :

Découpons au voisinage du point O du corps sollicité un parallèle de rectangle infiniment petit de cotes dx , dy , dz . Sur chaque face de ce parallèle de agissent une contrainte normale et deux contraintes tangentielle. La contrainte normale est positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positive de l'axe considéré ou sur une facette négative dans le sens négatif de cet axe. Une contrainte tangentielle est Positive quant elle agit sur une facette positive dans le sens positif de l'axe parallèle à cette facette ou sur une facette négative dans le sens négatif de l'axe parallèle de cette facette. Toutes les contraintes de l'élément, sont représentées sur la Figure 3.2.

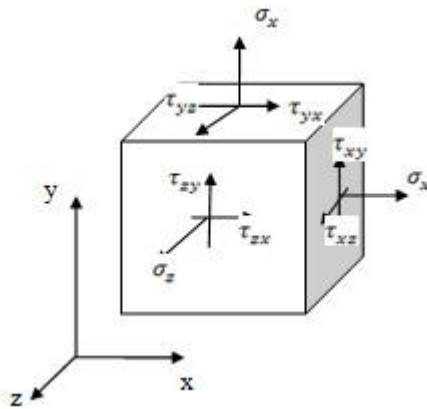


Figure 3.2. Comportement des contraintes

L'état de contrainte plan est le cas particulier d'une seule facette du volume où sur chaque côté agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle.

L'état de contrainte linéaire est le cas particulier d'un seul côté de la facette sur le quel agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle.

3.3.3. Transformation de contrainte :

Nous pouvons déterminer des nouveaux comportements dans n'importe quel autre système en utilisant la matrice de rotation. [5]

Pour le cas général tri dimensionnel, la matrice de rotation est donnée par:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

$$\text{Où } Q_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$$

Utilisant cette notation, les relations de transformation pour les contraintes deviennent

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{zx} n_1 l_1) \\ \sigma'_y &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{zx} n_2 l_2) \\ \sigma'_z &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{zx} n_3 l_3) \\ \tau'_{xy} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \tau_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + l_1 n_2) \\ \tau'_{yz} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \tau_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \tau_{zx} (n_2 l_3 + l_2 n_3) \\ \tau'_{zx} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + \tau_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \tau_{zx} (n_3 l_1 + l_3 n_1) \end{aligned} \quad (3-2)$$

Pour le cas bidimensionnel, les comportements de contraintes sont:

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau'_{xy} &= -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (3-3)$$

Elles peuvent être écrites en termes de double angle :

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma'_y &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau'_{xy} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

(3-4)

3.3.4. Contraintes principales :

En variant l'angle θ , les contraintes normales et tangentielles varient. Et pour n'importe quel tenseur de contrainte nous pouvons établir le problème de la valeur principale et résoudre l'équation caractéristique pour déterminer les valeurs et les directions. L'équation caractéristique générale pour les contraintes

$$\det[\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}] = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0 \quad (3-5)$$

Où σ sont les contraintes principales; I_1, I_2, I_3 sont les invariants.

$$\begin{aligned}I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3\end{aligned} \quad (3.6)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les contraintes principales

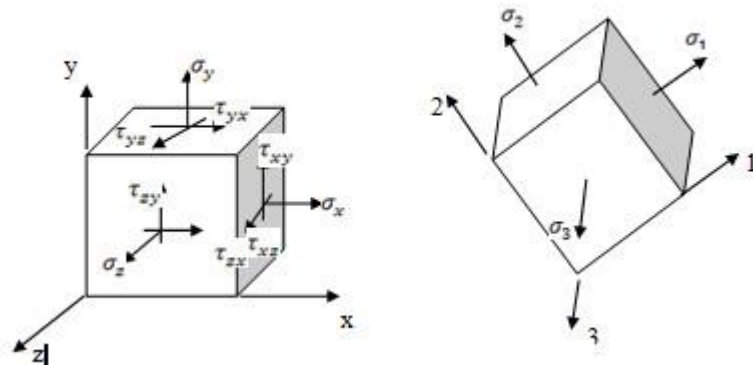


Figure 3.3. Contraintes générales et principales

Dans le système des coordonnées principales, la matrice des contraintes prend la forme diagonale spéciale

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

3.3.5. Equation d'équilibre :

Le champ des contraintes dans un solide élastique est distribué continument dans le corps et déterminé uniquement par les charges appliquées. Ces charges doivent satisfaire l'équation d'équilibre statique. La somme des forces et des moments est égale à zéro. Si le corps entier est en équilibre, donc toute partie est en équilibre. Alors, nous partitionnons le solide en sous domaines et appliquons le principe d'équilibre à cette région.

Considérons un sous domaines fermé avec un volume V et surface S à l'intérieur d'un corps en équilibre.

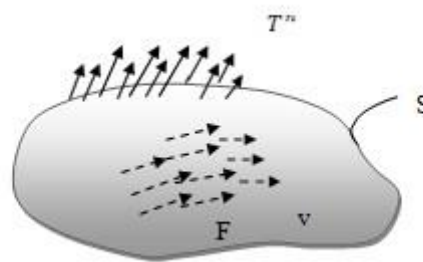


Figure 3.4. Forces de volume et de surface agissantes sur une portion du corps

L'équation d'équilibre est donnée par l'équation suivante:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (3-8)$$

Les équations d'équilibres en notation scalaire s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0\end{aligned}\quad (3-9)$$

Donc, tous les champs de contraintes élastiques doivent satisfaire ces relations afin d'être en équilibre statique .

3.4. Déformation et compatibilité :

3.4.1. Déformations et déplacements :

Sous l'action d'un chargement externe ou d'une variation de température, les dimensions d'un corps varient: il en résulte une déformation. Nous pouvons distinguer deux types de déformations, le premier est la déformation normale, le deuxième est la déformation de cisaillement.[2]

La figure 3.5. illustre une déformation bidimensionnelle d'un élément rectangulaire avec des dimensions originales dx par dy . Après déformation, l'élément prend la forme montrée par le contour en pointillé. Les déplacements des points de références ont indiqués dans la figure 3.6.



Figure 3.5. Déformation typique pour un élément rectangulaire

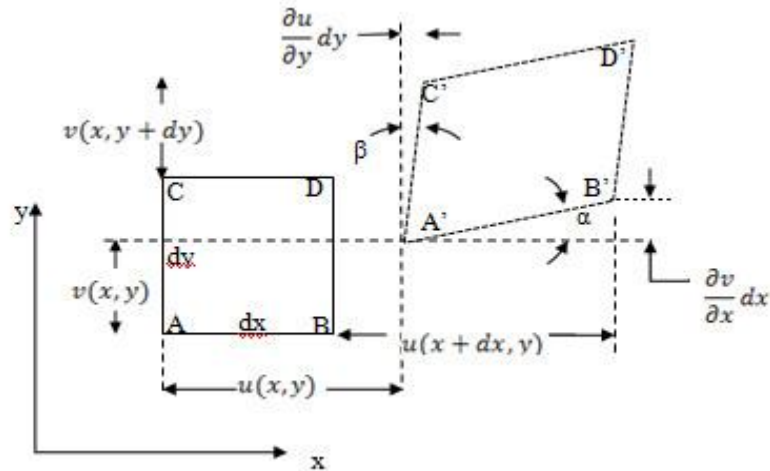


Figure 3.6. Déformation géométrique bidimensionnelle

Le point de référence A est pris en coordonnées (x, y) , et les déplacements de ce point sont $u(x, y)$ et $v(x, y)$. Les déplacements correspondants au point B sont $u(x+dx, y)$ et $v(x+dx, y)$, et les déplacements pour les autres points de coin sont définis d'une manière analogue. Pour la théorie des petites déformations, $u(x+dx, y) \approx u(x, y) + (\partial u / \partial x) dx$, avec expansions similaires pour les autres termes.

La déformation normale ou extensionnelle dans la direction n est définie par le changement de longueur par unité de longueur des fibres orientés dans la direction n . La théorie des petites déformations donne:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3-10)$$

La déformation de cisaillement est définie par le changement d'angle entre deux directions orthogonales. Pour les petites déformations.[4]

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3-11)$$

Dans le cas général tridimensionnel, les trois comportements de déformations normales et les trois comportements de déformation de cisaillement sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-12)$$

En utilisant l'écriture tensorielle ij , les relations déformations-déplacements peuvent être exprimées sous forme:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Les six équations de comportements indépendants décrivent la théorie des petites déformations, et cet ensemble des équations est référé comme les relations *déformations-déplacements*.

3.4.2. Transformation des déformations :

Si la déformation est donnée pour un système de coordonnées, nous pouvons déterminer le nouveau comportement dans n'importe quel système de rotation. Pour le cas tridimensionnel la matrice de rotation est définie comme l'équation(3.1):

Les relations de transformation sont:

$$\begin{aligned} e'_x &= e_x l_1^2 + e_y m_1^2 + e_z n_1^2 + 2(e_{xy} l_1 m_1 + e_{yz} m_1 n_1 + e_{zx} n_1 l_1) \\ e'_y &= e_x l_2^2 + e_y m_2^2 + e_z n_2^2 + 2(e_{xy} l_2 m_2 + e_{yz} m_2 n_2 + e_{zx} n_2 l_2) \\ e'_z &= e_x l_3^2 + e_y m_3^2 + e_z n_3^2 + 2(e_{xy} l_3 m_3 + e_{yz} m_3 n_3 + e_{zx} n_3 l_3) \\ e'_{xy} &= e_x l_1 l_2 + e_y m_1 m_2 + e_z n_1 n_2 + e_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + e_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + e_{zx} (n_1 l_2 + l_1 n_2) \\ e'_{yz} &= e_x l_2 l_3 + e_y m_2 m_3 + e_z n_2 n_3 + e_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + e_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + e_{zx} (n_2 l_3 + l_2 n_3) \\ e'_{zx} &= e_x l_3 l_1 + e_y m_3 m_1 + e_z n_3 n_1 + e_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + e_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + e_{zx} (n_3 l_1 + l_3 n_1) \end{aligned} \quad (3-14)$$

Pour le cas bidimensionnel la matrice s'écrit:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

Sous cette transformation les déformations deviennent:

$$\det[e_{ij} - e\delta_{ij}] = -e^3 + \vartheta_1 e^2 - \vartheta_2 e + \vartheta_3 = 0 \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} e'_x &= \frac{e_x + e_y}{2} + \frac{e_x - e_y}{2} \cos 2\theta + e_{xy} \sin 2\theta \\ e'_y &= \frac{e_x + e_y}{2} - \frac{e_x - e_y}{2} \cos 2\theta - e_{xy} \sin 2\theta \\ e'_{xy} &= \frac{e_y - e_x}{2} \sin 2\theta + e_{xy} \cos 2\theta \end{aligned}$$

La relation de transformation peut être appliquée directement pour établir les transformations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.[5]

3.4.3. Les déformations principales :

Nous pouvons identifier et déterminer les valeurs de déformation principales et les directions principale en résolvant l'équation caractéristique suivante :

$$\det[e_{ij} - e\delta_{ij}] = -e^3 + \vartheta_1 e^2 - \vartheta_2 e + \vartheta_3 = 0 \quad (3-17)$$

Où e est la déformation principale et les invariants fondamentaux de la déformation peuvent être exprimés par les trois déformations principales:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 \vartheta_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ \vartheta_2 \vartheta_2 &= e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \\ \vartheta_3 \vartheta_3 &= e_1 e_2 e_3 \end{aligned} \quad (3-18)$$

Le premier invariant $\vartheta_1 = \vartheta$ est nommé la délation cubique, parce qu'il a une relation avec le changement de volume de l'élément matériel.

La matrice de déformation dans le système de coordonnées principales prend la forme diagonale

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

On note que dans le système de coordonnées principales, la déformation ne produit pas de cisaillement mais uniquement une extension.

3.4.4. Compatibilité de déformation :

Pour assurer la continuité de l'uniformité des déplacements, les déformations doivent satisfaire les relations additionnelles nommées les équations d'intégrabilité ou les équations de compatibilité. Avant de développer ces équations, il est instructif de considérer l'interprétation géométrique de ce concept. L'exemple bidimensionnel est montré dans la figure (3-7) où le solide élastique est premièrement divisé en série d'éléments dans le cas (a). Pour la simple visualisation, considérons uniquement quatre éléments. Dans la configuration indéformée montrée dans le cas (b), ces éléments sont unis parfaitement. Après déformation arbitraire pour chaque élément être construction le solide, pour le cas (c), les éléments ont été unis et arrangés de façon continue et d'un déplacement uniforme. [5]

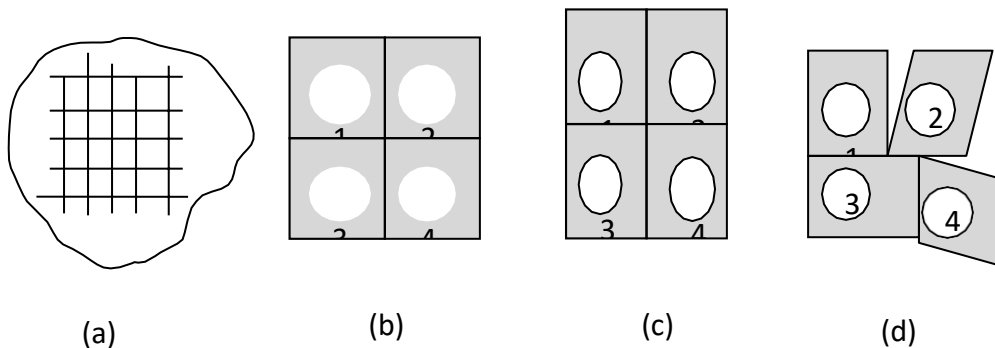


Figure 3.7 Interprétation physique de la compatibilité de déformation

Cependant, pour le cas (d), les éléments ont été individuellement déformés sans aucun intérêt pour les déformations avoisinantes. Il est observé dans ce cas que le système ne sera pas ajusté sans des vides et des écarts, et cette situation produits un champ de déplacement discontinu. Nous concluons donc que les comportements de déformation doivent être de manière ou d'autre reliés pour produire des déplacements continus et uniformes. La procédure de développer ces équations est basée sur l'élimination des déplacements des relations de déformation-déplacement.

Ceci nous conduit à une équation de compatibilité de Saint VENANT sous forme tensorielle.

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (3-20)$$

Ce système conduit à 81 équations individuelles, la pluparts, sont répétées et nous aurons six équations restent in dépendantes. Ces relations deviennent pour l=k:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3-21)$$

Ces relations sont de conditions nécessaires et suffisantes pour des déplacements continues et uniformes dans une région simplement connexe.

3.5. Relations contraintes-déformations :

3.5.1.Caractérisation des matériaux :

Les relations qui caractérisent les propriétés physiques des matériaux sont appelées les équations constitutives; la théorie de la mécanique réelle a établi quelques principes pour le développement des équations constitutives, la majorité des lois constitutive sont été développées au moyen des relations empiriques basées sur l'évidence expérimentale. Pour une certaine classe de matériaux solides le comportement mécanique est défini par les relations constitutives contraintes déformations. Ces relations expriment la contraintes en fonction des déformations, et des propriétés des matériaux.

L'une des techniques est le test de la tension simple dans la quelle un cylindre spécial préparé est chargé axialement dans une machine à test .La déformation est déterminée par le changement de longueur entre les marques de référence sur l'échantillon. Les données de charge mesurées par les cellules de charge sont divisées par l'aire pour calculer les contraintes. Les données de contrainte-déformation sont rapportés et tracés en utilisant la technique expérimentale standard. Il est observé que chaque matériau montre une réponse contraintes-déformation initiale pour des petites déformations qui est approximativement linéaire. Elle est suivie par un changement de comportement non linéaire qui conduit à une large déformation et finale ment se termine par une rupture.

Observe aussi dans la région initiale que si le chargement est enlevé l'échantillon retourne à sa forme originale et la déformation disparaisse. Cette caractéristique est le descripteur primaire du comportement élastique. Cependant, à un certain point sur la courbe contraintes-déformation, le déchargement ne fait pas amener l'échantillon à une

déformation nulle et il résulte une certaine déformation plastique permanente.[5]

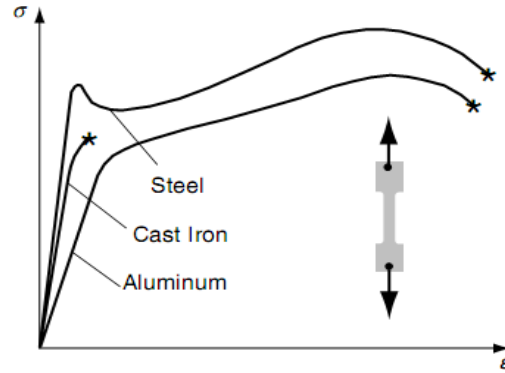


Figure 3.8. Courbe uniaxiale les contrainte-déformation typiques pour trois structures de matériaux

Conclut par cette étude, que la variété des matériaux réels montre un comportement élastique linéaire sous des petites déformations. Ce la conduit à un modèle constitutif linéaire pour le cas de charges axiales unidimensionnelles donnée par la relation $\sigma = E\varepsilon$, Où est la pente de la courbe contrainte-déformation un axiale.

3.5.2. Loi de Hooke loi constitutive :

Se basant sur les observations précédentes, et dans le but de construire la loi constitutive générale tridimensionnelle pour les matériaux élastiques, nous concluons que chaque comportement de contrainte est linéaire ment relié de chaque comportement déformation.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= C_{11}e_x + C_{12}e_y + C_{13}e_z + 2C_{14}e_{xy} + 2C_{15}e_{yz} + 2C_{16}e_{zx} \\
 \sigma_y &= C_{21}e_x + C_{22}e_y + C_{23}e_z + 2C_{24}e_{xy} + 2C_{25}e_{yz} + 2C_{26}e_{zx} \\
 \sigma_z &= C_{31}e_x + C_{32}e_y + C_{33}e_z + 2C_{34}e_{xy} + 2C_{35}e_{yz} + 2C_{36}e_{zx} \\
 \tau_{xy} &= C_{41}e_x + C_{42}e_y + C_{43}e_z + 2C_{44}e_{xy} + 2C_{45}e_{yz} + 2C_{46}e_{zx} \\
 \tau_{yz} &= C_{51}e_x + C_{52}e_y + C_{53}e_z + 2C_{54}e_{xy} + 2C_{55}e_{yz} + 2C_{56}e_{zx} \\
 \tau_{zx} &= C_{61}e_x + C_{62}e_y + C_{63}e_z + 2C_{64}e_{xy} + 2C_{65}e_{yz} + 2C_{66}e_{zx}
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

Où les coefficients C_{ij} sont des paramètres matériels, les facteurs de deux est présent à cause de la symétrie de déformation. On note que cette relation doit être exprimée par

l'écriture des déformations par une fonction linéaire des comportements des contraintes

La relation (3.22) peut être exprimée dans une notation standard de tenseur par l'écriture

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (3-23)$$

Où C_{ijkl} est le tenseur de quatrième ordre dont les comportements incluent tous les paramètres nécessaires pour caractériser le matériau. Basant sur la symétrie du tenseur de contrainte et déformation, le tenseur d'élasticité doit avoir les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} \\ C_{ijkl} &= C_{jilk} \end{aligned} \quad (3-24)$$

En général, le tenseur du quatrième ordre C_{ijkl} a 81 composantes. Toutefois, les relations (3.24) réduisent le nombre de composantes indépendantes à 36, ce qui fournit la correspondance avec la forme (3.21). Les composantes de C_{ijkl} sont appelés modules élastiques et ont des unités de contraintes (force/surface).

Appliquant l'hypothèse simplificatrice de l'*homogénéité* le comportement élastique ne varie pas dans l'espace, et donc tous les modules élastiques sont constants

Similaire à l'homogénéité, une autre propriété *isotropie* à faire à des différences dans les modules de matériau à l'égard de l'orientation

La forme tensorielle (3.23) fournit un moyen simple d'établir les relations isotropes contrainte-déformation. Si l'on suppose un comportement isotrope, le tenseur d'élasticité doit être le même dans toutes les rotations du système de coordonnées. Le quatrième ordre du tenseur d'élasticité doit satisfaire:

$$C_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} \quad (3-25)$$

Utilisant la forme générale contrainte-déformation nous aurons:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (3-26)$$

Où nous avons utilisé notamment les constantes d'élasticités λ et μ . La constante λ est appelée la constante de Lamé, et μ est appelé le module de cisaillement ou module de rigidité. L'équation(3.26) peut être écrite dans des équations scalaires individuelles

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_x \\ \sigma_z &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_z \\ \sigma_y &= \lambda(e_x + e_y + e_z) + 2\mu e_y \\ \tau_{xy} &= 2\mu e_{xy} \\ \tau_{yz} &= 2\mu e_{yz} \\ \tau_{zx} &= 2\mu e_{zx}\end{aligned}\tag{3-27}$$

Les relations (3.26) ou (3.27) sont appelés lois Hooke généralisée pour les solides élastiques linéaires isotropes. Hooke en 1678, a proposé pour la première fois que la déformation d'une structure élastique est proportionnelle à la force appliquée. Il convient de noter que seulement deux des constantes élastiques sont nécessaires pour décrire le comportement des matériaux isotropes. [6]

Les relations contraintes -déformations (3.26) ou (3.27) doivent être inversées pour exprimer la déformation en fonction de la contrainte.

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)e_{kk}\tag{3-28}$$

Et nous pouvons écrire

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\tag{3-29}$$

Où $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ est appelé le module d'élasticité ou le module de Young, et $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)]$ est considéré comme le ratio de Poisson. La relation (3.29) doit être écrite en composants (scalaires) qui forment les six équations

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 e_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\
 e_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
 e_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau_{xy} \\
 e_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} \\
 e_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{2\mu} \tau_{zx}
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

La forme constitutive de (3.29) ou (3.30) montre à nouveau que seulement deux constantes élastiques sont nécessaires pour formuler la loi de Hooke pour les matériaux isotropes. En utilisant l'une des formes isotropes de la loi de Hooke, il peut être démontré que les principaux axes de contrainte coïncident avec les principaux axes de déformation.

3.6. Formulations générales et stratégies de solution :

Les résultats comprennent un système différentiel et algébrique de relations entre les contraintes, les déformations, et déplacements. La formulation générale s'achève par le développement des conditions aux limites appropriées. Ces conditions précisent le phénomène qui se produit sur la limite du corps et plus généralement, le chargement qui a créé physiquement des contraintes internes, déformations, et les champs des déplacements. Bien que les champs des équations sont les mêmes pour tous les problèmes, les conditions aux limites sont différentes pour chaque problème. Par conséquent, le bon choix de conditions aux limites est essentiel pour la solution du problème, il est donc important d'acquérir une bonne compréhension de l'évolution des procédures. La combinaison des champs des équations avec les conditions aux limites, établit les problèmes fondamentaux de la valeur limite de la théorie. Cela nous amène

finalement en deux formules différentes, en termes de l'une en termes de déplacements et l'autre en termes de contraintes. Parce que ces problèmes aux limites sont difficiles à résoudre, de nombreuses stratégies ont été développées pour aider à la solution du problème.

3.6.1. Les équations fondamentales de l'élasticité :

Nous pouvons résumer le champ des équations de base ou les équations fondamentales pour l'élasticité linéaire isotopique sous les formules indicielles suivantes.

Les relations déformations-déplacements :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-31)$$

Les relations de compatibilités :

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0 \quad (3-32)$$

Les équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (3-33)$$

La loi constitutive élastique (loi de Hooke) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \\ e_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3-34)$$

Par conséquent, le système général du champ des équations d'élasticité correspond aux 15 relations (3-31), (3-33) et (3-34). Il est pratique de définir l'ensemble de ce système en utilisant un opérateur généralisé de notation comme

$$\mathfrak{Z}\{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, \lambda, \mu, F_i\} = 0 \quad (3-35)$$

3.6.2. Conditions aux limites :

Les types de conditions aux limites pour les applications de l'élasticité incluent la spécification de la façon dont le corps est pris en charge (supporté) ou chargé. Ce concept est mathématiquement formulé par les déplacements ou les tractions aux points limites. La figure (3.9) illustre cette idée générale pour trois cas typiques, y compris tractions, déplacements, et un mélange de cas pour lesquels les tractions sont indiquées sur la frontière S_t et les déplacements sont donnés sur la portion restante S_u .

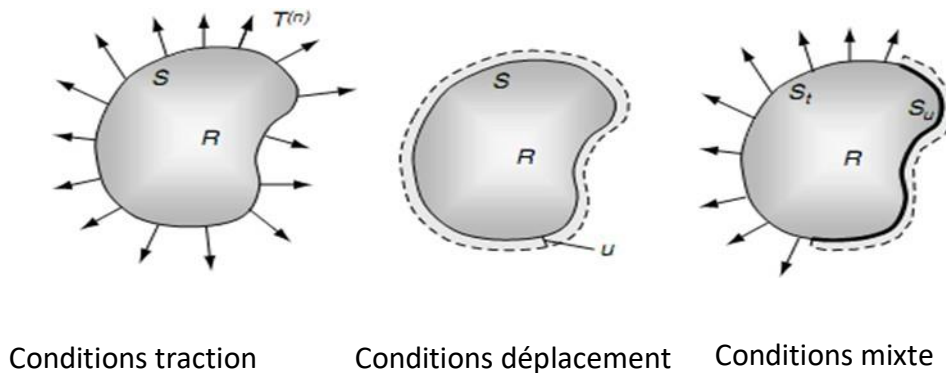


Figure 3.9. Conditions aux limites typiques

Donc nous pouvons formuler et classier les trois problèmes fondamentaux de la valeur-limite dans la théorie de l'élasticité qui sont liés à la résolution du système général de champ des équations(3-33). Notre présentation est limitée au cas statique.

Problème1: Problème traction

Déterminer la distribution des déplacements, déformations, et contraintes à l'intérieur d'un corps élastique en équilibre lorsque les forces du corps sont données et la répartition des tractions est prescrite sur la surface du corps

$$T_i^{(n)}(x_i^{(s)}) = f_i(x_i^{(s)}) \quad (3-36)$$

Où $x_i^{(s)}$ désignent les points de frontière (limites) et $f_i(x_i^{(s)})$ sont les valeurs de la traction.

Problème2: Problème déplacement

Déterminer la distribution des déplacements, déformations et contraintes à l'intérieur d'un corps élastique en équilibre lorsque les forces du corps sont données et la distribution des déplacements est prescrite sur la surface du corps,

$$u_i^{(n)}(x_i^{(s)}) = g_i(x_i^{(s)}) \quad (3-37)$$

Où $x_i^{(s)}$ désignent les points de frontière (limites) et $g_i(x_i^{(s)})$ sont les valeurs de déplacement.

Problème3: Problème mixte

Déterminer la distribution des déplacements, déformations, et contraintes à l'intérieur, la traction est prescrite par (3-36) sur la surface S_T , et la répartition des déplacements est prescrite que par (3-37) sur la surface du corps S_u (voir Figure 3.9).

La simplification de (3-35) est nécessaire pour le développement des méthodes de solution analytique. Sur la base de la description du problème 1 avec seulement les

conditions aux limites de tractions, il serait souhaitable d'exprimer le système fondamental uniquement en termes de contrainte, qui est, $\mathfrak{S}^t\{\sigma_{ij}, \lambda, \mu, F_i\}$ de manière à réduire le nombre d'inconnues dans le système. De même pour le problème 2,

La formulation des déplacements seule ment est exprimée sous la forme $\mathfrak{S}^u\{u_i, \lambda, \mu, F_i\}$ de manière à simplifier le problème. Nous allons maintenant pour suivre ces formulations spécialisées et déterminons explicitement ces systèmes d'équations .[5]

3.6.3. Formulation des contraintes :

Pour le premier problème fondamental de l'élasticité, les conditions aux limites doivent être données que dans les termes de tractions ou comportements de contrainte .En vue de développer des méthodes de solution pour ce cas, il est très utile de reformuler le système général (3-33), en éliminant les déplacements et les déformations et ainsi obtenir un nouveau système uniquement en termes de contraintes. Nous allons maintenant inclure les équations de compatibilité dans le système fondamental. Donc, nous commençons par l'utilisation de la loi Hooke (3-34) et nous éliminons les déformations des relations de compatibilité (3-32) pour obtenir

$$\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{mm,kk} \delta_{ij} + \sigma_{mm,ij} \delta_{kk} - \sigma_{mm,jk} \delta_{ik} - \sigma_{mm,ik} \delta_{jk}) \quad (3-38)$$

Après quelques simplifications et modifications nous obtenons les relations de compatibilité en termes de contraintes et sont communément appelés les équations de compatibilité de Beltrami-Michelle.

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{2+\nu} \sigma_{kk,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} F_{k,k} - F_{ij} - F_{j,i} \quad (3-39)$$

Pour le cas sans les forces de volume, ces relations peuvent être exprimées comme les six équations scalaires:

$$\begin{aligned} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0 \end{aligned} \quad (3-40)$$

Ainsi, en combinant ces équations avec les équations d'équilibre (3-33) on a les données nécessaires pour résoudre les six relations pour les six contraintes inconnues pour le cas en trois dimensions. Ce système constitue la formulation des contraintes de la théorie de l'élasticité et est approprié pour une utilisation avec les problèmes des conditions de limites de traction. Une fois les contraintes déterminées, les déformations sont disponibles à partir de la loi de Hooke (3-34), et les déplacements peuvent être alors être calculée par l'intégration de (3-31).

Le système d'équations pour la formulation des contraintes est en croassez complexe, et les solutions analytiques sont déterminées pour ce cas en utilisant des fonctions de contraintes. Ce concept prévoit une représentation des contraintes qui satisfait les équations d'équilibre. Pour le cas à deux dimensions, ce concept représente des contraintes dans le plan en termes d'une fonction unique. La représentation satisfait l'équilibre, et le reste des équations de compatibilité les rendent en une seule équation aux dérivées partielles (équation bi harmonique)enter mes de *fonction de contrainte*.

3.6.4. Formulation des déplacements :

La réduction du champ d'équations en termes de déplacements uniquement est le système dénommé formulation de déplacements. Il est plus utile lorsqu'il est associé aux conditions limites de déplacement dans le problème 2. Dans ce cas, nous éliminons les déformations et les contraintes du système fondamental (3-35). Ceci est facilement accompli en utilisant les relations déformation-déplacement et la loi de Hooke pour donner

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3-41)$$

qui peut être exprimé en six équations scalaires

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3-42)$$

Utilisant ces relations dans les équations d'équilibre nous aurons

$$\mu u_{i, kk} + (\lambda + \mu) u_{k, ki} + F_i = 0 \quad (3-43)$$

qui sont les équations d'équilibre en termes de déplacements et sont désignés comme les équations de Navier ou Lamé. Ce système peut être exprimé en termes de trois équations scalaires comme

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_x &= 0 \\ \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_y &= 0 \\ \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (3-44)$$

Où le Laplacien est donnée par $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$.

Les équations de Navier sont la formulation souhaitée pour le problème de déplacements, et le système représente trois équations pour les trois inconnus de composantes de déplacement. Semblable à la formulation de contraintes, ce système est encore difficile à résoudre, et de nouvelles techniques mathématiques ont été développées dans le but de simplifier ces équations pour la solution du problème. Ces méthodes emploient *les fonctions de potentiel de déplacement*.

3.7. Hypothèses fondamentales de l'élasticité linéaire :

3.7.1. Énergie de déformation :

Le travail effectué sur un élément, et emmagasiné à l'intérieur, sera appelée énergie de déformation. Il est supposé que l'élément reste élastique et aucune énergie cinétique n'est développée, c'est-à-dire quel retrait des charges résulte de la récupération complète de l'énergie stockée dans le corps. [6]

Afin de quantifier ce comportement, nous voulons à présent déterminer l'énergie de déformation en fonction de la contrainte et de la déformation qui en résulte dans le solide élastique. Considérons d'abord le cas de déformation uni axial et uniforme sans les forces de volume, comme le montre la Figure 3.10.

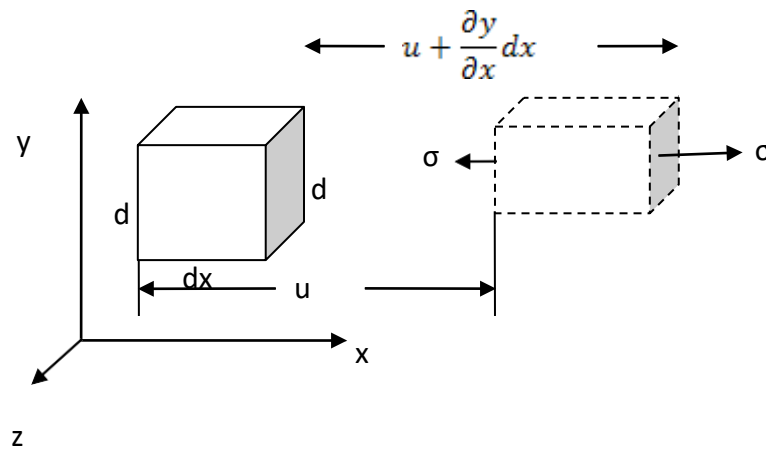


Figure 3.10. Déformation sous une contrainte uni axiale uniforme

Si l'élément cubique de dimensions dx , dy , dz est sous l'action d'une contrainte normale uniforme σ_x dans la direction x comme montré, nous avons une force $\sigma_x dy dz$ qui produit un travail sur l'extension $\epsilon_x dx$. La relation entre ces deux quantités durant la contrainte est représentée par la ligne droite (figure 3.11.), et le travail effectué durant la déformation est donné par l'aire $\frac{1}{2} (\sigma_x dy dz) (\epsilon_x dx)$ du triangle.

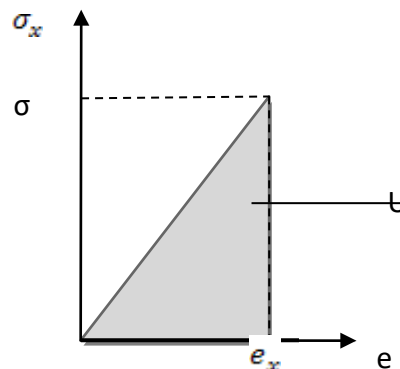


Figure 3.11. L'énergie de déformation pour une déformation uni axiale

Ecrivons dU pour ce travail nous aurons:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (3-45)$$

De la même manière où l'élément est soumis aux six comportements, l'énergie de déformation devient:

$$dU = U_0 dx dy dz \quad U = \iiint U_0 dx dy dz \quad (3-46)$$

$$\text{Où} \quad U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (3-47)$$

U_0 est la quantité de travail par unité de volume, ou l'énergie de déformation par unité de volume.

En utilisant la loi de Hooke, nous pouvons exprimer l'énergie de déformation uniquement en fonction des contraintes:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \quad (3-48)$$

d'où

$$U = \frac{1}{2} \iiint \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] + \frac{1}{G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right\} dx dy dz \quad (3-49)$$

Comme nous pouvons l'écrire:

$$U(\sigma) = \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2) - \frac{\nu}{2E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

$$U(\sigma) = \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{jj} \sigma_{kk}$$

Nous pouvons aussi exprimer la quantité de travail uniquement en fonction des comportements de déformation

$$U_0 = \frac{1}{2} \lambda \Theta^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \quad (3-50)$$

d'où

$$U = \iiint \left[\frac{1}{2} \lambda \Theta^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dV \quad (3-51)$$

Avec $\Theta = e_x + e_y + e_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Comme nous pouvons l'écrire

$$U(e) = \frac{1}{2} \lambda (e_x + e_y + e_z)^2 + \mu (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{zx}^2)$$

$$U(e) = \frac{1}{2} \lambda e_{ij} e_{ij} - \mu e_{jj} e_{kk}$$

Le développement du concept de l'énergie de déformation peut produire de nouvelles informations utiles non trouvées par d'autres méthodes. Cette étude a aussi conduit à des nouvelles méthodes ou des principes qui permettent de nouvelles techniques pour résoudre les problèmes d'élasticité. Dans un certain sens, ces méthodes peuvent être considérées comme une alternative au champ d'équations dérivées. Pour les problèmes en mécanique des structures (barres, poutres, plaques, et coques) les méthodes de l'énergie sont révélées très utiles dans le développement des équations régissant le comportement et les conditions aux limites associées [6].

3.7.1. Théorèmes fondamentaux :

Théorème de Clapeyron :

Si l'on applique un effort aux points A_j du corps, supposé dans son état naturel, des forces F_j , les points A_j se déplacent en A'_j et u'_j désigne la projection de $A_j A'_j$ sur la direction de la force F_j . Le théorème des travaux virtuels donne la relation:

$$\sum_j F_j u_j = 2U$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'énergie de déformation en fonction des forces et des déplacements due à Clapeyron :

$$U = \frac{1}{2} \sum_j F_j u_j \quad (3-52)$$

Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti :

Considérons deux systèmes de forces F_j' et F_j'' appliquées aux points A_j du corps. Le premier donne lieu aux déplacements u_j' , aux contraintes σ_j' et aux déformations ε_j' . Le second donne lieu aux déplacements u_j'' , aux contraintes σ_j'' et aux déformations ε_j'' . Appliquons à chaque système le théorème des travaux virtuels en prenant pour déplacements et déformations virtuelles les déplacements et les déformations dus à l'autre système:

$$\sum_j F_j'' u_j' = \int \sigma_j'' \varepsilon_j' dv = \int \sigma_j'' E \varepsilon_j' dv$$

$$\sum_j F_j' u_j'' = \int \sigma_j' \varepsilon_j'' dv = \int \sigma_j' E \varepsilon_j'' dv$$

Le scalaire $\sigma_j'' E \varepsilon_j'$ est égal à son transposé $\sigma_j' E \varepsilon_j''$. Nous obtenons donc l'égalité suivante, qui exprime le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti:

$$\sum_j F_j' u_j'' = \sum_j F_j'' u_j' \quad (3-53)$$

Voici une importante conséquence du théorème de réciprocité [7]: la structure étant soumise aux forces F_j appliquées aux points A_j , proposons-nous de calculer le déplacement u d'un point A dans une direction δ . Pour cela, appliquons au point A une force unité suivant la direction δ ; les points A_j se déplacent de λ_j dans la direction des forces F_j . Le théorème de réciprocité donne la relation:

$$u = \sum_j \lambda_j F_j \quad (3-54)$$

Qui montre que le déplacement d'un point quelconque est une fonction linéaire et homogène des forces appliquées.

Théorèmes de Castiglione

La structure étant soumise aux forces F_j , nous venons de voir, d'après le théorème de réciprocité, que:

$$u_j = \sum_k \lambda_{jk} F_k \quad (\lambda_{jk} = \lambda_{kj})$$

En reportant cette valeur dans l'expression (3-52), l'énergie de déformation apparaît comme une forme quadratique des forces appliquées:

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \lambda_{jk} F_j F_k$$

et les déplacements u_j peuvent s'écrire sous la forme :

$$u_j = \frac{\partial U}{\partial F_j} \quad (3-55)$$

Qui exprime le théorème de Castiglione.

Si l'on donne des variations quelconques dF_j aux forces F_j , nous avons, d'après la définition même de l'énergie de déformation:

$$dU = \sum_j F_j du_j$$

Il résulte que, si l'on exprime U en fonction des déplacements, les forces F_j peuvent s'écrire sous la forme:

$$F_j = \frac{\partial U}{\partial u_j} \quad (3-56)$$

Qui exprime le théorème dual du théorème de Castiglione.[8]

Le théorème de Castiglione permet de calculer le déplacement Δ d'un point A de la structure dans une direction δ . Pour cela, appliquons au point A une force auxiliaire F suivant la direction δ . Si U est l'énergie de déformation exprimée en fonction des forces F_j et F , il suffit d'appliquer le théorème de Castiglione et de faire $F=0$ dans le résultat [10] :

$$u = \left(\frac{\partial U}{\partial F} \right)_{F=0}$$

***Chapitre 4 :
Solution analytique par la théorie
de l'élasticité d'une poutre
console en E-FGM***

Chapitre 4 : Solution analytique par la théorie de l'élasticité d'une poutre console en E-FGM

4.1. Introduction :

Les poutres sont l'un des éléments structurels importants utilisés dans de nombreuses applications d'ingénierie, telles que l'aérospatiale, l'automobile et l'ingénierie océanique. Les études de poutres peuvent être divisées en deux groupes : en termes de matériaux à partir desquels elles sont faites, et en termes de conditions aux limites et de méthode de résolution du problème de plaque analysé. Les poutres isotropes, composites et à gradation fonctionnelle sont des exemples de matériaux utilisés dans les poutres. Des attentions ont toujours été accordées aux solutions d'élasticité pour les poutres planes par les scientifiques et les ingénieurs. Des solutions d'élasticité exactes et analytiques pour des poutres isotropes homogènes peuvent être obtenues via la fonction de contrainte d'Airy, comme indiqué dans Timoshenko et Goodier [1]. Lekhnitskii [2], en utilisant la méthode de la fonction de contrainte, a en outre obtenu une série de solutions pour les poutres anisotropes planes, y compris celle pour les poutres soumises à une traction simple, un cisaillement pur et une flexion pure (Benatta et al. [17], celle pour les poutres en porte-à-faux actionnées par une force de cisaillement concentrée au la pointe, celle pour les poutres en porte-à-faux uniformément chargées et les poutres simplement soutenues, et celle pour les poutres en porte-à-faux chargées linéairement [15] et les poutres simplement soutenues Zheng et al. [18]. Silverman [3] a présenté une méthode générale pour obtenir une fonction de contrainte pour les poutres orthotropes ; les problèmes de flexion des poutres en porte-à-faux soumises à un effort de cisaillement terminal et des poutres en porte-à-faux soumises à une charge uniforme et à une charge distribuée linéairement ont été étudiés. Récemment, Ding et al. [4] ont dérivé une solution d'élasticité pour une poutre isotrope plan fixe-fixe soumise à une charge uniforme à l'aide de la fonction de contrainte d'Airy ; l'exactitude de la solution a été confirmée par comparaison avec la

solution numérique d'Ahmed et al. [5]. Cependant, la littérature sur la réponse des poutres fonctionnellement graduées (FGB) aux charges mécaniques et autres est limitée. Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMS) sont des matériaux composites dans lesquels les propriétés mécaniques varient en douceur et en continu dans des directions préférées. Macroscopiquement, les poutres FG sont supposées être isotropes. Par conséquent, les mêmes conditions aux limites existent pour les poutres FG et isotropes. Shi et ses collègues ont étudié la réponse des poutres FGPM [6-8]. Mais dans leur analyse, seuls un ou deux paramètres de matériau ont été supposés varier sous la forme de séries de puissances finies le long de la direction de l'épaisseur tandis que les autres paramètres sont restés constants. Sankar et ses collaborateurs [9-11] ont développé des méthodes analytiques pour l'analyse thermomécanique et de contact des poutres FGM ainsi que pour les poutres sandwich avec noyaux FGM. Dans leurs études, les propriétés thermomécaniques du FGM ont toutes été supposées varier à travers l'épaisseur de manière exponentielle. Zhu et Sankar [12] ont résolu les équations de plasticité bidimensionnelle pour une poutre FGM soumise à des charges transversales au moyen de la méthode combinée série de Fourier-Galerkin, dans laquelle la variation du module d'Young à travers l'épaisseur était donnée par un polynôme dans la coordonnée d'épaisseur et le coefficient de Poisson ont été supposés constants. Des solutions analytiques 2D pour les plaques et les poutres ont également été présentées par Ding et al [13] et Huang et al [14]. Dans cet article, l'approche de la fonction de contrainte est utilisée pour étudier le problème d'une poutre en porte-à-faux fonctionnellement graduée soumise à une charge distribuée linéairement. L'effet du paramètre d'inhomogénéité du matériau sur le champ de déplacement et de contrainte dans la poutre est présenté et des conclusions sont ensuite tirées.

4.2. Formulation théorique :

4.2.1. Propriétés des matériaux constitutifs du FGM :

Le matériau à grades fonctionnels (FGM) peut être produit en faisant varier en continu les constituants des matériaux multiphasiques dans un profil prédéterminé. Les

caractéristiques les plus distinctes d'un FGM sont les microstructures non uniformes avec des propriétés macro graduées en continu. Une FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance ou la fonction exponentielle pour décrire les fractions volumiques. Cependant, seules quelques études ont utilisé la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Par conséquent, les faisceaux FGM avec fonction sigmoïde seront examinés en détail dans cet article. Considérons une poutre FGM élastique en porte-à-faux d'épaisseur uniforme h , qui est constituée d'une céramique et d'un métal, est considérée dans cette étude. Les propriétés du matériau, le module de Young et le coefficient de Poisson, sur les surfaces supérieures et inférieure sont différents mais sont prédéfinis en fonction des exigences de performance. Cependant, le module d'Young et le coefficient de Poisson des poutres ne varient continuellement que dans la direction de l'épaisseur (axe z), c'est-à-dire $E = E(z), \nu = \nu(z)$. Delale et Erdogan (Delale et al. [19]) ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur la déformation est bien moindre que celui du module de Young. Le coefficient de Poisson des poutres est supposé constant. Cependant, les modules de Young dans la direction de l'épaisseur des faisceaux FGM varient avec des fonctions de loi de puissance (P-FGM) ou avec des fonctions exponentielles (E-FGM).

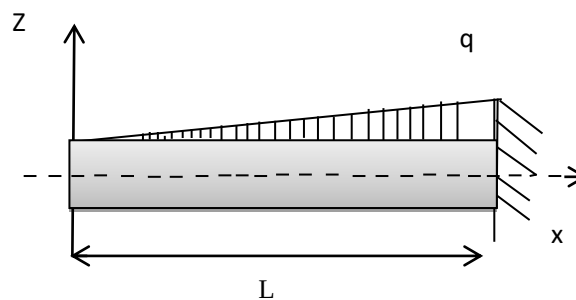


Figure4.1. Géométrie et chargement de la poutre console

4.2.1.1. Les propriétés matérielles des poutres E-FGM :

Généralement, la fonction exponentielle utilisée pour décrire les propriétés matérielles de l'E-FGM comme suit

$$E(z) = A. e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (4-1)$$

$$\text{Avec } A=E_2 \text{ et } B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (4-2)$$

4.2.2. Description du problème et équations de base :

Considérons une poutre FGM en porte-à-faux d'épaisseur uniforme h . Un système de coordonnées cartésiennes est introduit avec les surfaces supérieure et inférieure de la poutre se trouvant dans le plan $z = h/2$ et $z = -h/2$.

Les longueurs des bords de la poutre dans les directions x et y sont notées L et b , respectivement. La poutre est supposée être dans un état de contrainte plane normal au plan x - z , et est soumise à une charge distribuée linéairement $q(x)$ sur sa surface supérieure. Les propriétés du matériau varient dans le sens de l'épaisseur. Où $q(x) = \frac{q_0 x}{l}$ et q_0 : est l'amplitude de la charge.

En l'absence de forces corporelles, les équations d'équilibre sont données sous la forme

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (4-3)$$

Où $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ sont des composants de contrainte

Les relations entre les déformations et les déplacements sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4-4)$$

Où u, w sont des composantes de déplacement, $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}$ sont des composantes de déformation qui devraient satisfaire l'équation de compatibilité de déformation suivante

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0. \quad (4-5)$$

Les relations constitutives de la FGM orthotrope sont

$$\varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{13}\sigma_z, \quad \varepsilon_z = S_{13}\sigma_x + S_{33}\sigma_z, \quad \gamma_{xz} = S_{44}\tau_{xz}, \quad (4-6)$$

Chapitre4: solution analytique par la théorie de l'élasticité d'une poutre console en E-FGM

Ou S_{11} , S_{33} , S_{13} et S_{44} sont les paramètres de complaisance élastique :

$$S_{11} = S_{33} = \frac{1}{E(z)}, \quad S_{13} = -\frac{\nu}{E(z)}, \quad S_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E(z)} \quad (4-7)$$

Les conditions aux limites d'élasticité sur les surfaces supérieure et inférieure sont :

$$\varepsilon_x(x, -h/2) = -q, \quad \sigma_x(x, +h/2) = 0, \quad \tau_{xz}(x, \pm h/2) = 0 \quad (4-8)$$

Les condition aux limites a l'extrémité gauche (libre) de la poutre FGM sont :

$$N_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = 0, \quad (4-9)$$

Ou N_0 , M_0 et Q_0 désignent l'effort normal, le moment et l'effort tranchant à $x=0$. Les condition aux limites pour l'extrémité fixe à l'extrémité droit (fixe) de la poutre sont prises comme suit :

$$x = L, \quad z = 0: \quad u = w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (4-10)$$

4.3. SLOUTION GENERALE :

Afin d'obtenir un solution générale aux équation .(4-4)-(4-11), la fonction de contrainte d'Airy $\Phi(x, z)$ est introduite telle que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}. \quad (4-11)$$

Alors que l'Eq. (5) est satisfait automatiquement. On suppose alors que :

$$\Phi(x, z) = \Phi_0(z) + x\Phi_1(z) + x^2\Phi_2(z) + x^3\Phi_3(z) \quad (4-12)$$

[$\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$, $\Phi_4(z)$ Sont des fonctions inconnues à déterminer]. Substitution de par l' Eq (12) dans l'Eq.(11) donne :

$$\sigma_x = \Phi_0'' + x\Phi_1'' + x^2\Phi_2'' + x^3\Phi_3''; \quad (4-13a)$$

$$\sigma_z = 2\Phi_2 + 6x\Phi_3; \quad (4-13b)$$

$$\tau_{xz} = -(\Phi_1' + 2x\Phi_2' + 3x^2\Phi_3'); \quad (4.13c)$$

Chapitre4: solution analytique par la théorie de l'élasticité d'une poutre console en E-FGM

En substituant les Eqs .(4-13a,4-13b et 4-13c) dans les équation.(4.6), puis dans l'Eq (4-5),donne lieu à :

$$(S_{11}\Phi_3'')'' = 0; \quad (4-14a)$$

$$(S_{11}\Phi_2'')'' = 0; \quad (4-14b)$$

$$(S_{11}\Phi_1'' + 6S_{13}\Phi_3)' - (-6S_{13}\Phi_3')' + 6S_{13}\Phi_3'' = 0; \quad (4-14c)$$

$$(S_{11}\Phi_0'' + 2S_{13}\Phi_2)' + (2S_{44}\Phi_2')' + 2S_{13}\Phi_2'' = 0; \quad (4-14d)$$

I 'intégration de l'Eq.(4-14a) rendements :

$$\Phi_3'' = a_1A_1 + a_2A_2 \quad (4-15a)$$

$$\Phi_3' = a_1A_1^0 + a_2A_2^0 + a_3; \quad (4-15b)$$

$$\Phi_3 = a_1A_1^1 + a_2A_2^1 - q_0/6l \quad (4-15c)$$

Ou $a_i (i = 1, 2, \dots)$ sont des constantes d'intégration :

$$A_1 = \frac{z}{s_{11}}, \quad A_2 = \frac{1}{s_{11}}, \quad A_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n A_i d\xi, \quad i = 1, 2, n = 0, 1. \quad (4-16)$$

I 'intégration de l'Eq.(4-14b) rendements :

$$\Phi_2'' = a_3B_3 + a_4B_4; \quad (4-17a)$$

$$\Phi_2' = a_3B_3^0 + a_4B_4^0; \quad \Phi_2 = a_3B_3^1 + a_4B_4^1; \quad (4-17b)$$

Où

$$B_1 = B_2 = 0, B_3 = A_1, \quad B_4 = A_2, \quad B_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n B_i d\xi, (i = 3, 4; n = 0, 1) \quad (4-18)$$

Substituer les équations (4-15a,4-15b and 4-15c) dans l'équation. (4-14c) et en effectuant deux fois l'intégration, on obtient :

$$\Phi_1'' = \sum_{i=1}^3 a_i C_i + \frac{S_{13}q}{S_{11}l} \quad (4-19)$$

$$\Phi_1' = \sum_{i=1}^6 a_i C_i^0 + \int_{-h/2}^z \frac{S_{13}q}{S_{11}l} d\xi; \quad (4-20)$$

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^6 a_i C_i^1 + \int_{-h/2}^z (z - \xi) \frac{S_{13}q}{S_{11}l} d\xi; \quad (4-21)$$

Où

$$C_1 = -\frac{6S_{13}}{S_{11}}A_1^1 + \frac{1}{S_{11}} \int_{-h/2}^z [-6S_{44}A_1^0 - 6S_{13}A_1(z - \xi)] d\xi ; \quad (4-22a)$$

$$C_2 = -\frac{6S_{13}}{S_{11}}A_2^1 + \frac{1}{S_{11}} \int_{-h/2}^z [-6S_{44}A_2^0 - 6S_{13}A_2(z - \xi)] d\xi ; \quad (4-22b)$$

$$C_3 = C_4 = 0, \quad (4-22c)$$

$$C_5 = A_1 \quad C_6 = A_2, \quad (4-22d)$$

Et :

$$C_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n C_i d\xi, \quad (i = 1, 2, \dots, 10, \quad n = 0, 1)$$

$$\Phi_0'' = \sum_{i=1}^8 a_i D_i + D_9 \quad (4-23)$$

$$\Phi_0' = \sum_{i=1}^8 a_i D_i^0 + D_9^0 \quad (4-24)$$

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^8 a_i D_i^1 + D_9^1 \quad (4-25)$$

Où:

$$D_1 = D_2 = 0 \quad (4-26a)$$

En remplaçant les équations.(4-17a et 4-17b) dans l'équation. (4-14d), et en effectuant deux fois l'intégration ,on obtient

$$D_3 = -\frac{2S_{13}}{S_{11}}B_3^1 + \frac{1}{S_{11}} \int_{-h/2}^z [-2S_{44}B_3^0 - 2S_{13}B_3(z - \xi)] d\xi ; \quad (4-26b)$$

$$D_4 = -\frac{6S_{13}}{S_{11}}B_4^1 + \frac{1}{S_{11}} \int_{-h/2}^z [-2S_{44}B_4^0 - 2S_{13}B_4(z - \xi)] d\xi ; \quad (4-26c)$$

$$D_5 = D_6 = 0, D_9 = 0 \quad (4-26d)$$

$$D_7 = A_1, D_8 = A_2, D_9 = A_1 \quad (4-26e)$$

Et

$$D_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z - \xi)^n D_i d\xi, (i = 1, 2, \dots, 9, n = 0, 1) \quad (4-27)$$

L'effort normal N_0 , le moment fléchissant M_0 et l'effort tranchant Q_0 à l'extrémité gauche de la poutre peuvent être obtenus en intégrant les Eqs.(4-13a) et (4-13c) selon

$$N_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(0, z) dz = \Phi'_0\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi'_0\left(-\frac{h}{2}\right), \quad (4-28a)$$

$$M_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(0, z) z dz = \frac{h}{2} \left[\Phi'_0\left(\frac{h}{2}\right) + \Phi'_0\left(-\frac{h}{2}\right) \right] - \Phi_0\left(\frac{h}{2}\right) + \Phi_0\left(-\frac{h}{2}\right), \quad (4-28b)$$

$$Q_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}(0, z) dz = \Phi_1\left(-\frac{h}{2}\right) - \Phi_1\left(\frac{h}{2}\right), \quad (4-28c)$$

La substitution des Eqs (4.13a ,4.13b et 4.13c) en Eq (4.8) donne :

$$\Phi'_1\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad \Phi'_1\left(\frac{h}{2}\right) = 0, \quad (4-29a)$$

$$\Phi_2\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad \Phi'_2\left(\frac{h}{2}\right) = 0, \quad (4-29b)$$

$$\Phi_2\left(\frac{h}{2}\right) = 0, \quad \Phi'_2\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad (4-29c)$$

$$\Phi_3\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{q_0}{6l}, \quad \Phi'_3\left(\frac{h}{2}\right) = 0, \quad (4-29d)$$

$$\Phi_3\left(\frac{h}{2}\right) = 0, \quad \Phi'_3\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \quad (4-29e)$$

Enfin l'intégration de l'Eq.(4-4), nous pourrions obtenir les composantes de déplacement comme suit :

$$u = x(S_{11}\Phi''_0 + 2S_{13}\Phi_2) + \frac{x^2}{2} (S_{11}\Phi''_1 + 6S_{13}\Phi_3) + \frac{x^3}{3} (S_{11}\Phi''_2) + \frac{x^4}{4} (S_{11}\Phi''_3) - \int_{-h/2}^z F(\xi) d\xi + wz + u_0, \quad (4-30a)$$

$$w = \sum_{k=1}^3 x^k \int_{-h/2}^z (S_{13} \Phi_k'') d\xi - \frac{a_1}{20} x^5 - \frac{a_3}{12} x^4 - \frac{a_5}{6} x^3 - \frac{a_7}{2} x^2 \int_{-h/2}^z [S_{33} (2\Phi_2 + 6x\Phi_3)] d\xi - wx \quad (4-30b)$$

$$\text{Où} \quad F(z) = S_{44} \Phi_1' + \int_{-h/2}^z (S_{13} \Phi_1'' + 6S_{33} \Phi_3) d\xi, \quad (4-30c)$$

u_0, w_0 et w Sont des constantes intégrales.

Substitution des équations (4-13b),(4-13c) et (4-15b) dans les équations (4-27e) et (4-27c) respectivement, on a

$$\sum_{i=1}^3 a_i A_i^0(h/2) = 0, \quad (4-31a)$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i A_i^0(h/2) - \frac{q_0}{6l} = 0, \quad (4-31b)$$

$$a_3 B_3^0(h/2) + a_4 B_4^0(h/2) = 0 \quad (4-31c)$$

$$a_3 B_3^1(h/2) + a_4 B_4^1(h/2) = 0 \quad (4-31d)$$

A partir des équations (4-17) et (4-27a),(4-26c)et (4-18), et remarquant $\Phi_1(-h/2) = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^6 a_i C_i^0(h/2) + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_{13} q_0}{S_{11} l} d\xi = 0, \quad (4-32a)$$

$$\sum_{i=1}^6 a_i C_i^1(h/2) + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{S_{13} q_0}{S_{11} l} (h/2 - \xi) d\xi = 0, \quad (4-32b)$$

En remplaçant les équations.(4.26a) et (4-26b) dans l'équation.(4-9),en vertu de $\Phi_0'(-h/2) = 0$ et $\Phi_0(-h/2) = 0$. on a :

$$\sum_{i=1}^8 a_i D_i^0(h/2) + D_9^0 = 0, \quad (4-33a)$$

$$\sum_{i=1}^8 a_i D_i^1(h/2) + D_9^1 = 0, \quad (4-33b)$$

Les constants Inconnues a , peuvent être obtenues à partir des équation .

(4.32a,4.32b,4.32c,4.32d), (4.33a,4.33b) et (4.34a,4.34b).Ainsi toutes les constantes indéterminées sont fixes et la fonction de contrainte est complètement déterminée. Les composant de contrainte sont alors obtenues à partir de l'Eq.(4-13a,4-13b et 4-13c).

Substitution de l'équation (4-31a, 4-31b, et 4-31c) dans l'équation (4-12) donne trois équations, à partir desquelles u_0 , w_0 et w peuvent être obtenus. Ainsi, les composantes de déplacement u et w sont déterminées.

4.4. Résultats numériques et discussion :

Dans cette section, étude numérique d'une poutre en porte-à-faux FGM ($l=1$ m, hauteur $h=0,1$ m) soumise à une charge distribuée linéairement $q_0 = 10^6$ N/m. L'analyse est effectuée pour des matériaux purs et différentes valeurs du paramètre de matériau, p , pour l'aluminium-alumine FGM. Le module d'Young et le coefficient de Poisson (Sallai et al. [16]) pour l'aluminium sont : 70 GPa et 0,3 et pour l'alumine : 380 GPa et 0,3, respectivement sur la partie supérieure

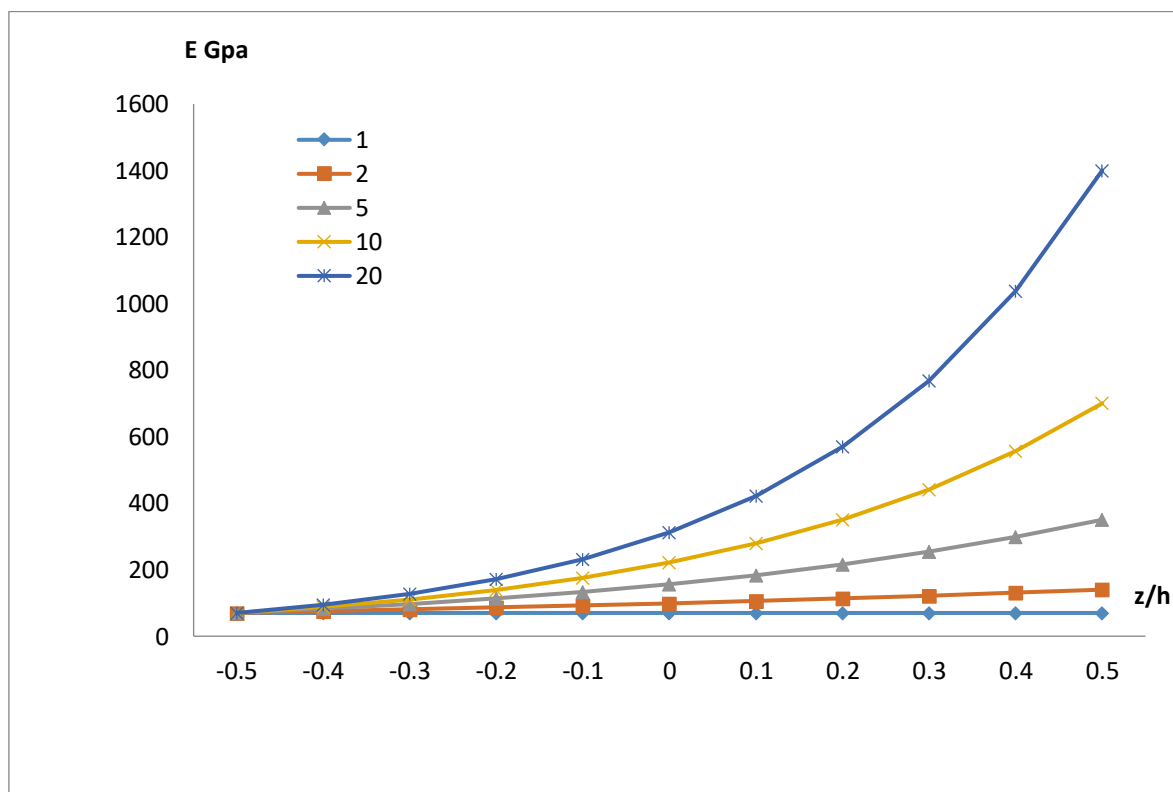


Figure 4.2. Distribution du module de Young sur l'épaisseur de la poutre E-FGM pour différents rapports $E_1/E_2=1,2,5,10$ et 20

Surface de la poutre sera faite sur la base de la solution ci-dessus. Nous supposons la fonction graduée comme dans les équations de la poutre E-FGM. Dans la présente étude, nous prenons l'indice gradué pour différents rapports de $\frac{E_1}{E_2}$ dans E-FGM. La figure 4.2 montre bien que lorsqu'on augmente le rapport des modules à travers l'épaisseur de la poutre le module de Young de la lois de mélange augmente (plus rigide)

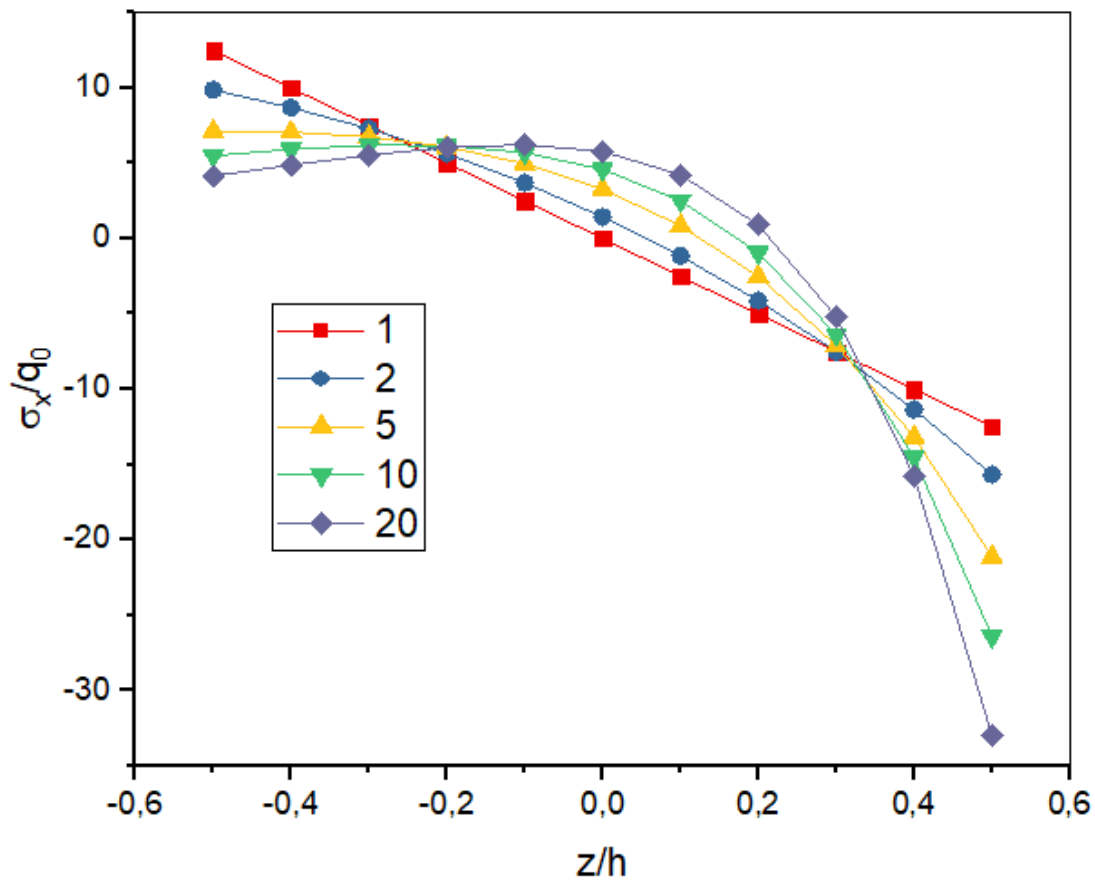


Figure 4.3. Contrainte normale (σ_x/q_0) adimensionnelle par différent rapport de la poutre en porte-à-faux E-FGM à $x=L/2$

Pour les matériaux fonctionnellement gradués ($\frac{E_1}{E_2} \neq 1$) les valeurs des contraintes σ_x sont différentes de la distribution linéaire pour un matériau homogène ($\frac{E_1}{E_2} = 1$).

Ces contraintes sont beaucoup plus grandes au niveau de la face $z = h/2$. Il est intéressant de noter que σ_x , varie de manière non linéaire de zéro à la face ($z=h/2$) et à la face ($z=-h/2$).

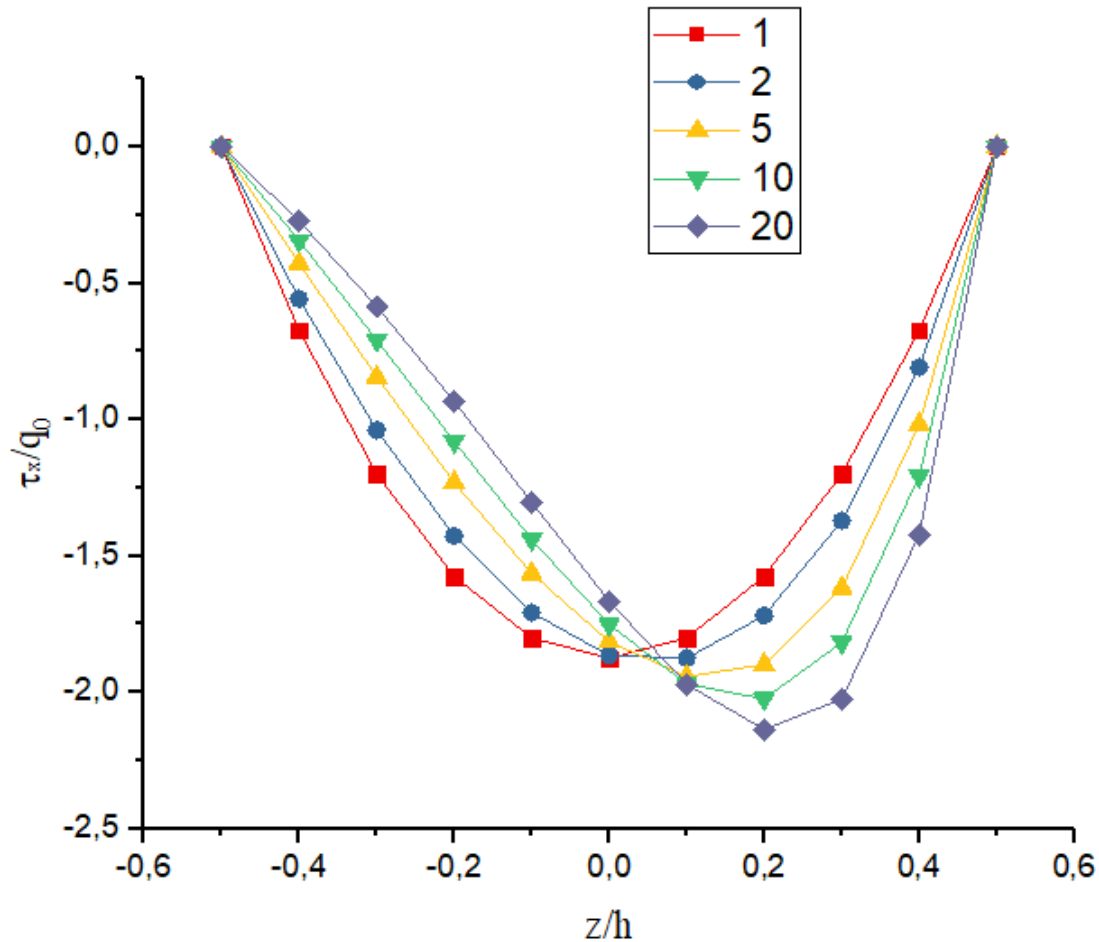


Figure 4.4. Contrainte tangentielle (τ_{xz}/q_0) adimensionnelle par différents rapports de la poutre en porte-à-faux E-FGM à $x=L/2$

La contrainte τ_{xz} disparaît à la fois sur les surfaces supérieure et inférieure, à partir desquelles les conditions aux limites données sont satisfaites et l'exactitude de la présente solution est validée. Le champ de contrainte de la poutre est fortement augmente avec l'augmentation des rapports dans la zone de $z=0$ à $z=0.2h$.

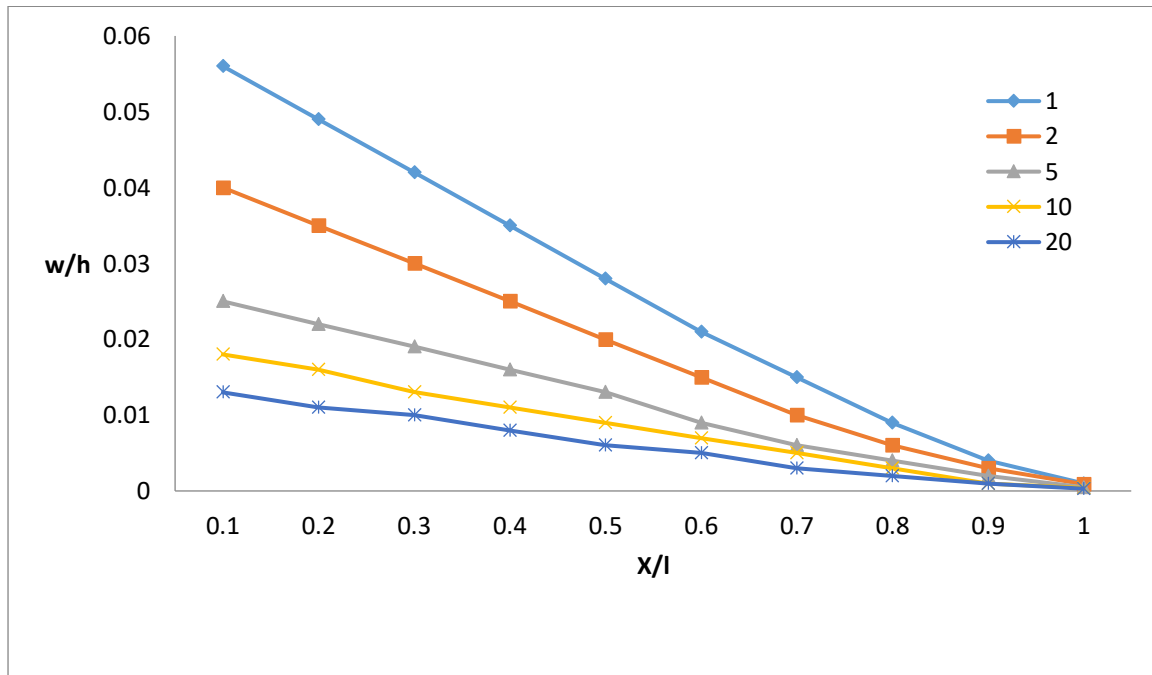


Figure 4.5. Courbes de déflexion adimensionnelle pour différents rapports de la poutre en porte à faux E-FGM à $z=0$

La figure 4.5 montre la flèche médiane pour différentes valeurs du rapport E_1/E_2 . La flèche maximale est observée pour une poutre homogène ($E_1/E_2 = 1$). avec une augmentation de E_1/E_2 , la flèche devient plus petite.

4.5. Conclusion :

Une solution d'élasticité plane est développée pour une poutre à gradation fonctionnelle au moyen de la méthode semi-inverse. Les propriétés mécaniques du matériau sont supposées avoir la même dépendance vis-à-vis de la coordonnée d'épaisseur et une solution générale bidimensionnelle est obtenue pour une poutre en porte-à-faux fonctionnellement graduée soumise à des tractions normales et de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure ainsi qu'à des charges concentrées appliquées. Forces et couple à l'extrémité libre.

La solution obtenue est valable pour des variations graduées arbitraires de la distribution matérielle, elle pourrait donc servir de base pour établir des théories simplifiées de la FGM ou de résultat de référence pour évaluer d'autres méthodologies approximatives.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE :

Une solution d'élasticité plane est développée pour une poutre à gradation fonctionnelle exponentielle au moyen de la méthode semi-inverse. Le module de Young de la poutre est supposé varier de manière exponentielle dans la direction de l'épaisseur. Les champs de contrainte et de déplacement de la poutre E-FGM sont fortement influencés par le rapport E_1/E_2 . La solution obtenue dans ce travail peut servir de base à l'établissement de théories simplifiées des FGM ou de résultat de référence pour évaluer d'autres méthodologies approximatives.

La solution obtenue est valable pour des variations graduées arbitraires de la distribution matérielle, elle pourrait donc servir de base pour établir des théories simplifiées de la MGF ou de résultat de référence pour évaluer d'autres méthodologies approximatives.

Références bibliographiques

Références bibliographique :

[1].B Boudierba, M. S. A. Houari, and A. Tounni, « Thermomechanical Bending Response of FGM Thick Plates Resting on Winkler

- [2]. A. Tounsi, M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, « A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thennoclastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates, » *Aerospace Sci. Technol.* 24, 209-220 (2013).
- [3]. M. Zidi, A. Tounsi, M. S. A. Houari, et al., « Bending Analysis of FGM Plates under Hygro-Thermo-Mechanical Loading using a Four Variable Refined Plate Theory, » *Aerospace Sci. Technol.* 34, 24-34 (2014) .
- [4]. M. A. A. Meziane, H. H. Abdelaziz, and A. Tounsi, « An Efficient and Simple Refined Theory for Buckling and Free Vibration of Exponentially Graded Sandwich Plates under Various Boundary Conditions, » *J. Sandwich Struct. Mater.* 16 (3) , 293-318 (2014).
- [5]. S. A. Yahia, H. A. Atmane, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, « Wave Propagation in Functionally Graded Plates. With Porosities using Various Higher-Order Shear Deformation Plate Theories, » *Struct. Eng. Mech.* 53 (6) , 1143-1165 (2015).
- [6]. Z. F. Shi, « General Solution of a Density Functionally Gradient Piezoelectric Cantilever and its Applications, » *Smart Mater. Struct.* 11, 122-129 (2002). Pasternak Elastic Foundations, » *Steel Compos. Struct.* 14 (1), 85-101 (2013)
- [7]. Z. F. Shi and Y. Chen, « Functionally Graded Piezoelectric Cantilever Beam under Load, » *Arch. Appl. Mech.* 74, 237-247 (2004).
- [8]. L. N. Zhang and Z. F. Shi, « Analytical Solution of a Simply Supported Piezoelectric Beam Subjected to a Uniformly Distributed Loading, » *Appl. Math. Mech.* 24. 1215-1223 (2003).
- [9]. B. V. Sankar, « An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams, » *Composites Sci. Technol.* 61, 689-696 (2001).
- [10]. B. V. Sankar and J. T. Taeng, « Thermal Stresses in Functionally Graded Beams, » *AIAA J.* 40, 1228-1232 (2002).
- [11].s. Verkataraman and BV Sankor, « Elasticity Solution for Stresses in a Sandwich Beam with Functionally Graded Core *AIAA J* 41, 2501-2505 (2003)
- [12]. H. Zhang and B. V. Sanka, « A Combined Fourier Series Galerkin Method for the Analysis of Functionally Graded Beams » *Trans ASME, J Appl Mech.* 71. 421-424 (2004)
- [13]. A. Chakraborty and S. Gopalakrishnan, « A Spectrally Formulated Finite Element for Wave Propagation Analysis in Functionally Graded Beams, *Int. J. Solids Struct.* 40, 2421-2448 (2003) [14]. A. Chakraborty, S. Gopalakrishnan, and J. N. Reddy, « A New Neam Finite Element for the Analysis of Functionally Graded Materials » *Int. J. Mech Sci.* 45, 519-539 (2003)
- [15]. H. J. Ding, D. J. Hung, and W. Q. Chen, « Elasticity Solutions for Plane Anisotropic Functionally Graded Beams, » *Int J. Solids Structures* 44 (1), 176-196 (2008).
- [16]. D. J. Huang, H. J. Ding, and W. Q. Chen, « Piezoelectricity Solutions for Functionally Graded Piezoelectric Beams, » *Smart Mater. Struct.* 16 (3), 357-395 (2007)-
- [17]. R. Kadoli, K. Aklonis, and N. Ganesan, « Static Analysis of Functionally Graded Beams using Higher Order Shear Deformation Theory, » *Appl. Math. Model* 32 (12), 2509-2525 (2008).
18. B.-O. Sallai, A. Tounsi, M. Bachir Bouiadjra, et al., « A Theoretical Analysis of Flexional Bending of Al/AlO₃ S-FGM Thick Beams, *Comput Mater Sci* 44, 134-1350 (2009).
- [19]. X. F. Li, B. L. Wang, and J. C. Han, « A Higher-Order Theory for Static and Dynamic Analyses of Functionally Graded Beams, *Arch. Appl. Mech* 80 (10), 1197-1212 (2010).

- [20]. N. Attanasakulpong, B. Gangadhara Prusty, and DW Kelly, Thermal Buckling and Elastic Vibration of Third-Order Shear Deformable Functionally Graded Beams *Int. J. Mech. Sci.* 53 (9), 734-743 (2011).
- [21]. H. Yaghoobi and M Torabi, « Post-Buckling and Nonlinear Free Vibration Analysis of Geometrically Imperfect Functionally Graded Beams Resting on Nonlinear Elastic Foundation, » *Appl Math Model* 37 (18/19),
- [22]. Q Li, VP Is, and KP Kou, Three-Dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Material Sandwich Plate. *J. Sound Vib* 311 (1/2), 98-515 (2008)
- [23]. X. Zhao, Y. Y Lee, and K M. Liew, « Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates using the Element-Free kp-Ritz Method, » *J. Sound Vib* 319 (3-5), 918-0 (2009).
- [24]. M Taha and B. N. Singh, « Static Response and Free Vibration Analysis of FGM Plates using Higher Order Shear Deformation Theory » *Appl Math. Modell.* 34 (12), 3991-4011 (2010).
- [25]. D We. Y Liu, and Z. Xiang, An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Edge Cracks, » *J. Sound Vib* 331 (7), 1686-1700 (2012)
- [26]. M. Boureanana, MSA Houari, A. Touansi, et al. « A New First Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Functionally Graded Beams Steel Compos. Struct. 15 (5), 57-479 (2013).
- [27]. A. Fekrar, M. S. A. Houari, A. Tounsi, and R. Mahmoud, « A New Five-Unknown Refined Theory Based on Neutral Surface Position for Bending Analysis of Exponential Graded Plates, » *Meccanica* 49, 795-810 (2014).
- [28]. L Ould Larbi, A. Kaci, MSA. Houari, and A. Tounsi, « An Efficient Shear Deformation Beam Theory Based on Neutral Surface Position for Bending and Free Vibration of Functionally Graded Beams, » *Mech. Based Design Struct. Anal* 41, 421-433 (2013)
- [29]. M. Bourads, A Kaci, M. S. A. Houari, and A. Tounsi, « A New Simple Shear and Normal Deformations Theory for Functionally Graded Beams, » *Steel Compos. Struct.* 18 (2), 409-423 (2015).
- [30]. Z. Belabel, MSA Houari, A Tounsi, et al, « An Efficient and Simple Higher Order Shear and Normal Deformation Theory for Functionally Graded Material (FGM) Plates, » *Compositen, B* 60, 274-283 (2014).
- [31]. H. Hebaali, A Tounsi, M SA Houari, et al « New Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for the Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Plates, » *J Eng Mech. (ASCE)* 140, 374-353 (2014).
- [32]. D. K Jha, T Kant, and RK Singh, « A Critical Review of Recent Research on Functionally Graded Plates, Composite Structures 96, 833-810 (2013)