République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de master

Domaine : Sciences et Technologie
Filière : Génie mécanique
Spécialité : Construction mécanique

Thème

Evaluation des contraintes mécanique dans un contact mécanique en utilisant la méthode des éléments aux frontières (BEM)

Préparé par :

MANSOURI Abdeldjabar

Soutenu publiquement le : 19 / 09 / 2021**,** devant le jury composé de :

SAAD Mohamed	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun)	Président
BALTACH Abdelghani	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examinateur
MOULGADA Abdelmadjid	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examinateur
GUEMMOUR Mohamed	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur

Année universitaire : 2020 - 2021

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à remercier chaleureusement Monsieur **GUEMMOUR Mohamed Boutkhil**, maître de conférences classe "B" à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret de m'avoir encadré et assuré le suivi de mon travail. En me faisant confiance depuis le début de mes travaux, il a su diriger ce travail tout en me laissant une complète autonomie. Je le remercie non seulement pour la qualité de son encadrement mais également pour l'inestimable qualité humaine dont il a toujours fait preuve.

Je remercie tout autant Monsieur **SAAD Mohamed** maître de conférences classe "B" à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs **BALTACH Abdelghani** maître de conférence classe "A" et **MOULGADA Abdelmadjid** maître de conférence classe "A" tous les deux enseignant-chercheurs à l'université Ibn-Khaldoun de Tiaret qui m'ont fait l'honneur d'être examinateur de mon travail, et qui ont consacré de leur précieux temps à l'examen et à l'évaluation le fond et la forme de mon mémoire.

Je les remercie vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail afin de l'expertiser avec une grande efficacité et une grande rapidité, ainsi que pour la patience et la pertinence dont ils ont fait preuve à la lecture de ce document.

CHAPITRE 01

CHAPITRE 02

CHAPITRE 03

S O M M A I R E

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le présent travail s'inscrit dans un contexte technologique lié au secteur de l'industrie mécanique et en particulier celui de la construction des machines industrielles. Notre mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude de l'une des fonctions mécaniques, à savoir le positionnement relatif de deux pièces fixes. C'est-à-dire un problème d'assemblage mécanique et en particulier l'assemblage entre un arbre et un moyeu à l'aide d'une liaison par clavette.

Il s'agit en principe d'identifier l'extension de la contrainte de Cauchy en chaque point, implicitement ou explicitement. Les forces externes peuvent être physiques (telles que la gravité ou le magnétisme), affectant tout le volume du matériau, ou des charges concentrées (telles que le frottement entre un essieu et un roulement, ou le poids d'une roue de train sur une tige), qui sont pensés affecter un espace à deux dimensions, le long d'une ligne ou sur un point. La même force externe nette à un effet différent sur la contrainte interne selon qu'elle est concentrée ou diffusé.

L'analyse des contraintes est également utilisée dans la maintenance de telles structures et dans l'étude des causes de défaillance structurelle. En ingénierie, l'analyse des contraintes est souvent un outil plutôt qu'une fin en soi ; L'objectif principal est de concevoir des structures et des fabrications capables de résister à une charge spécifique, en utilisant un minimum de matériaux ou qui répondent à un autre critère d'idéalisme.

Le problème porte sur l'étude du comportement mécanique de l'élément clavette en termes d'évaluation des contraintes de contact entre clavette-arbre-moyeu. L'objectif principal de l'analyse des contraintes est de déterminer la répartition des contraintes internes générées dans la clavette à la lumière de l'influence des forces externes qui l'affectent.

Pour ce faire, notre mémoire est structuré en trois chapitres. Le premier expose le problème du contact mécanique à travers l'aspect du frottement et l'usure. Le deuxième chapitre expose l'approche numérique du contact mécanique par l'exploitation de la méthode des éléments aux frontières. Le troisième chapitre est une étude de cas relative à l'analyse de la distribution des contraintes superficielles au niveau du contact clavette-arbre-poulie. Une simulation en éléments aux frontières avec code source FORTRAN a été exploité pour évaluer les contraintes en chaque point de la clavette. A la fin, une conclusion et des perspectives ont été présentées.

Chapitre 1

Le contact mécanique

1.1 INTRODUCTION

En conception-construction mécanique, les objets techniques sont vus dans leurs définitions comme un agencement d'éléments matériels. Aussi, à fin assurer la fonction de service pour laquelle il a été conçu, l'objet technique sera un assemblage de composants mécaniques connectés entres eux par des liaisons géométriques ayants des caractères à la fois technologiques, d'inter-efforts et cinématiques. Du point de vue caractère d'inter-efforts, quand deux composants mécaniques se mettent en contact direct c'est pour assurer le transfert d'un effort ou d'un couple statique ou dynamique à partir d'un organe effecteur à un organe récepteur. Les surfaces concernées par ce contact seront pratiquement sollicitées à un chargement surfacique qui provoquera la déformation du profil de chacune d'elles. Cette déformation peut avoir lieu en domaine élastique ou bien plastique et elle peut être observée à l'échelle macroscopique, mésoscopique ou microscopique. Le rendement mécanique caractérisant le transfert de chargement, dépend grandement de la nature, du type et du mode de contact entre les surfaces en contact. En mécanique de contact, que ce soit à l'échelle macroscopique, mésoscopique ou microscopique, l'hypothèse des matériaux isotropes et homogènes sera adoptée.

La mécanique de contact étant d'une grande importance pratique, elle n'est pas bien maîtrisée, à cause de sa complexité et la nature encore opaque du problème. Dans la pratique, la connaissance du contact est habituellement sue à travers l'expérience et l'observation. Cependant, l'observation ou la mesure directe est souvent impossible, à cause du caractère caché des surfaces de contact. Suite à cela, seuls les effets moyens et les comportements généraux peuvent être obtenus expérimentalement. A ce propos, le seul paramètre mesuré est le coefficient de frottement, à partir duquel on peut dégager une vue globale sur le fait que sous quelles conditions données, les surfaces en contact vont être relativement soit en état de frottement par d'adhérence ou de frottement par glissement ou de frottement par roulement. En plus, les difficultés du problème de contact sont amplifiées par le fait que le comportement du contact est influencé par les matériaux constituants les deux surfaces en contact, leurs textures, leurs états de surface, leurs topologies locales, le taux, l'intensité et la direction du chargement. Pour toutes ces raisons, le phénomène de frottement fait l'objet d'intenses recherches expérimentales, analytiques et numériques. Il revêt une importance dans les applications techniques tel que les roulements, les engrenages, les paliers, les réservoirs sous pression, etc......, et l'analyse des contraintes dans les problèmes de contact solide-solide représente le centre d'intérêt majeur. Pour la modélisation numérique des problèmes de contacts, elle requière une attention spéciale du fait que la zone de contact entre les solides en contact est habituellement inconnue d'avance, et si le phénomène de frottement est présent, le comportement peut dépendre de l'historique du chargement. Ainsi, la solution adéquate pour de tels problèmes doit être déterminée par une procédure itérative et/ou incrémentale. **[1]**

1.2 CONTACT MECANIQUE

1.2.1 Région de contact

Soit le solide **A** de frontière **Γ_A** et le solide **B** de frontière **Γ_B**. Généralement, quand les deux solides sont mis en contact, une partie de la frontière du solide **A** est mise en contact avec une partie de la frontière du solide **B** **(Figure 1.1)**. En supposant les deux solides en contact linéairement élastiques, la totalité de la frontière de chaque solide peut être divisé en région en contact **Γ_C** et région hors- en contact **Γ_{HC}**, tel que:

$$\Gamma_A = \Gamma_{A,C} + \Gamma_{A,HC}$$
$$\Gamma_B = \Gamma_{B,C} + \Gamma_{B,HC}$$

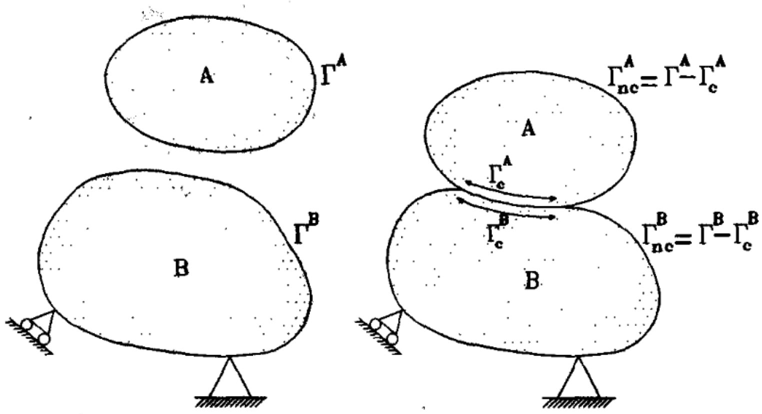


Figure 1.1 : Région en contact et région hors contact [3]

1.2.2 Systèmes de coordonnées

Les variables le long des frontières qui se trouvent hors région de contact sont décrites dans un repère cartésien global (X,Y,Z) associé à la base globale $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, tandis que les variables se trouvant dans la région de contact doivent être traités dans un repère local (N,T,B) associé à la base locale $\vec{n}, \vec{t}, \vec{b}$ **(Figure 1.2).**

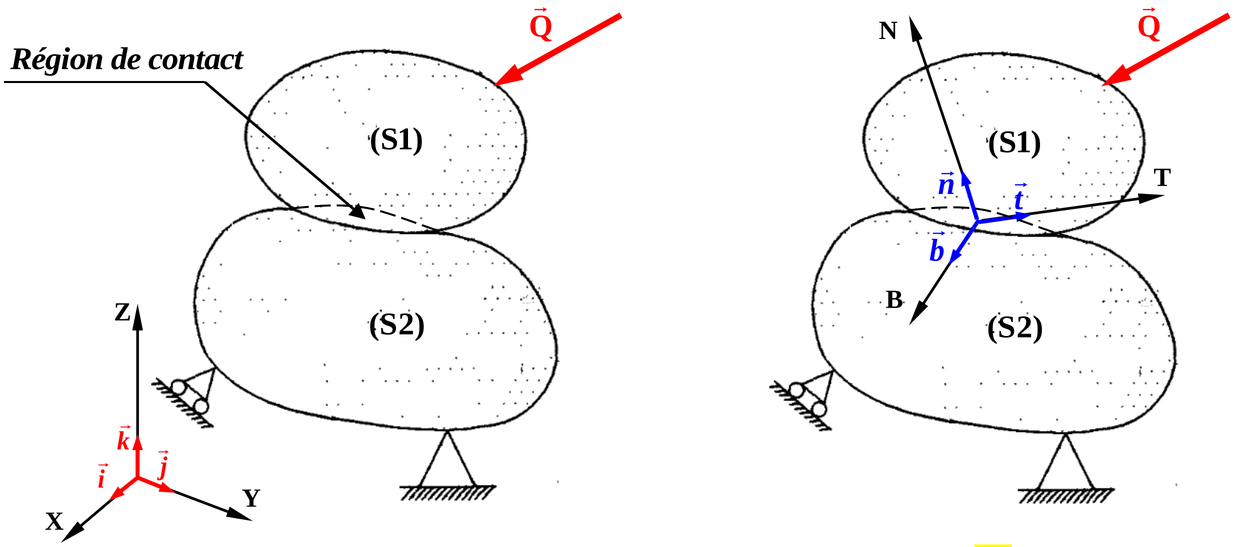


Figure 1.2 : Système de coordonnées globales et locales [3]

1.2.3 Ecart normal

A chaque paire de points appartenant à une surface pouvant être potentiellement de contact, le passage du repère global au repère local est exigé. Si on considère une paire de points, le point **A(x_A,y_A)** appartenant au solide (**S1**) et le point **B(x_B,y_B)** appartenant au solide (**S2**), situés sur deux frontières pouvant potentiellement être en contact **(Figure 1.3a)**, on peut définir ce qui suit

- les vecteurs unitaires de la normale $\vec{n}_A$ et $\vec{n}_B$
- les vecteurs unitaires de la normale $\vec{t}_A$ et $\vec{t}_B$
- Une normale moyenne $\bar{n}$ peut être définit par:

$$\bar{n}_A = \frac{n_A - n_B}{|n_A - n_B|} = -\bar{n}_B \qquad \textbf{(1.1)}$$

La distance entre une paire de points de contact est définit par un écart **E_0** perpendiculaire aux surfaces de contact **(Figure 1.3b)**. Cet écart est dénommé écart normal. Son expression est donné par:

$$\begin{aligned} E_0 &= |(y_B - y_A)|\cos\theta + |(x_B - x_A)|\sin\theta \\ &= |dy|\cos\theta + |dx|\sin\theta \\ &= |dy|\bar{n}_{A,y} + |dx|\bar{n}_{A,x} \end{aligned} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Durant la déformation élastique sous l'influence de la charge extérieure $\vec{Q}$, les paires de points de contact vont se déplacer relativement les uns aux autres et les surfaces amenée en contact vont fermer l'écart **E_0**. Sachant que l'interpénétration entre les solides n'est pas permise, physiquement **$E_0 \geq 0$**. Le contact se réalise à **$E_0 = 0$**. A l'intérieur de la zone de contact, les tensions $t_{n,A}$ et $t_{n,B}$ qui sont perpendiculaire à la surface de contact, doivent être maintenues en état de compression en vue de préserver les paires de points en contact, tel que:

$$t_{n,A} = t_{n,B} \leq 0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

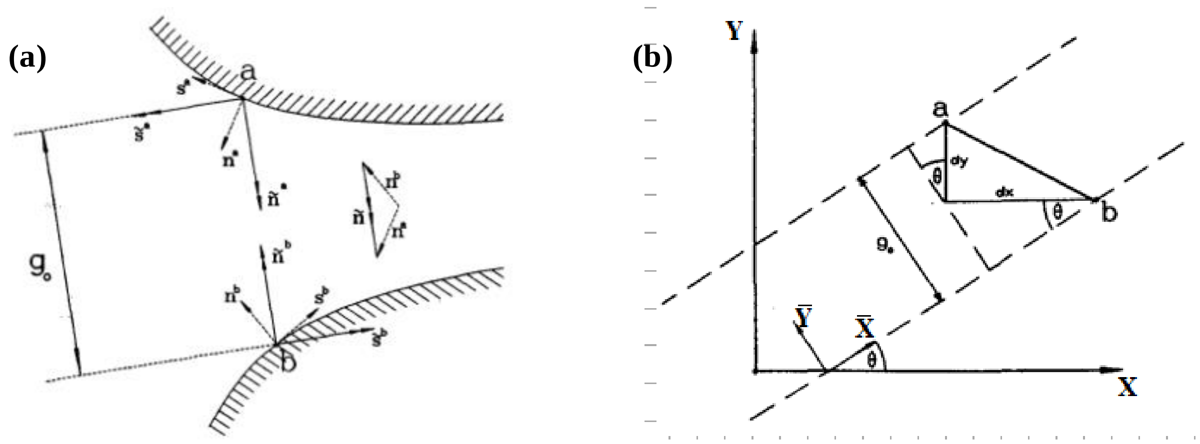


Figure 1.3 : Définition des vecteurs normal et tangentiel au niveau des régions de contact [3]

1.2.4 Le problème du contact mécanique

La mécanique des contacts traite les milieux élastiques, viscoélastiques ou plastiques lors de contacts statiques ou dynamiques. Le problème du contact est abordé par l'une des branches de la mécanique des milieux continus à savoir la **mécanique des solides déformables**. Cette dernière traite le comportement mécanique des matériaux solides, en particulier leurs mouvements et leurs déformations sous l'action de forces, de changements de température, de changements de phase ou d'autres actions externes ou internes. Pour résoudre ce type de problème, il convient de déterminer le champ de contrainte et le champ de déformation du solide. Ainsi, les outils mathématiques nécessaires sont : ***équations d'équilibre, lois de comportement et équation de compatibilité.***

Elle peut être appliquée dans différents domaines tel que le contact roue-rail, les embrayages, les freins, les pneumatiques, les paliers et roulements, les moteurs à combustion, les liaisons mécaniques, les joints, les machines de production, le soudage par ultrasons, les contacts électriques et bien d'autres. Les applications vont de l'analyse des efforts au sein d'éléments de contact et de liaison jusqu'à l'influence de la lubrification et de la géométrie sur l'usure et les frottements d'un système en passant par l'étude de systèmes nano- et microscopiques.**[2]**

1.2.5 Types des contacts

1.2.5.1 Contact sans frottement

Un contact sans frottement est un contact considéré comme parfait ou idéal. À titre d'exemple, le contact entre deux pièces mécaniques lisses et bien lubrifiées peut être généralement, modélisé comme étant un contact sans frottement. Dans une situation de contact sans frottement, les solides en contact peuvent glisser l'un sur l'autre sans aucune résistance tangentielle, c'est-à-dire sans aucune contrainte tangentielle développée parallèlement à l'interface ou au plan de contact). Ainsi, sous l'action d'un chargement extérieur , seule les contraintes normale de compression sont générées et se développent au niveau de l'interface de contact.

L'équilibre des solides en contact est maintenu par le transfert des contraintes normales de compression à travers l'interface de contact. En même temps, l'énergie de déformation est équilibrée par le processus de déformation qui se déroule partout dans les deux solides sans aucune incompatibilité géométrique (C'est-à-dire, les solides se séparent et ne s'interpénètrent pas). Les contraintes tangentielles étant nulles, la continuité du phénomène de traction est préservée dans la zone de contact. En élasticité linéaire, les problèmes du contact sans frottement sont linéaire est dépendent de l'historique du chargement. **[3]**

1.2.5.2 Contact avec frottement

Un contact avec frottement est un phénomène physique rencontré dans les problèmes de contact réels. Le frottement étant pris en considération, le problème de contact devient plus compliqué et les effets de friction sont caractérisés par le comportement du contact à l'intérieur de la zone de contact. La relation entre les composantes tangentielles et normales impose un comportement non linéaire entre le mouvement de glissement des faces en contact et le chargement extérieur. Dans le cas d'un contact avec frottement, le contact peut être soit un frottement à l'adhérence soit un frottement au glissement. **[3]**

1.2.5.3 Contact conforme

Un contact entre deux solides est dit conforme, si en état d'absence de tout chargement extérieur, les surfaces en contact s'ajustent exactement. L'une des caractéristiques d'un problème de contact conforme est que la taille des zones en contact est indépendante du chargement. Pour cette raison, l'historique du chargement n'est pas important dans cette catégorie de problème . **[3]**

1.2.5.4 Contact non conforme

Un contact entre deux solides est dit non-conforme si en état d'absence de tout chargement extérieur, les surfaces en contact ne s'ajustent pas exactement et se touchent seulement en un point (cas du contact sphère sur plan) ou une ligne (cas du contact cylindre sur plan). D'une manière générale, tout contact entre solides ayant des zones de contact de profils différents est considéré comme contact non-conforme. Ce type de contact est caractérisé essentiellement par le fait que la taille de la zone de contact initiale, change lorsque les solides en contact sont sollicités à un chargement externe. Le des zones de contact, dépend de plusieurs facteurs tel que leurs profils initiaux , propriétés des matériaux, l'intensité et la direction du chargement appliqué, etc...

Le problème peut se compliquer de telle manière que n'importe quel facteur parmi ceux mentionnés ci avant, peut avoir une profonde influence sur le comportement de l'interaction une fois le contact établi. A cet effet, pour pouvoir calculer la déformation globale des solides, une théorie est requise afin de prédire l'évolution de la zone de contact en fonction de ce qui suit: **[3]**

- *La variation de l'intensité et de la direction du chargement extérieur,*
- *L'amplitude et la distribution des surfaces qui se trouvent sous sollicitées aux contraintes*
- *Les contraintes tangentielles et normales transmises à travers l'interface de contact.*

1.2.5.5 Contact Hertzien

Les questions relatives à la distribution des pression de contact, zones de contact et les déformation entres deux solides de révolution parfaitement lisses mis en contact, avaient été complètement étudié par [4]. Sa théorie a été expliqué en considérant deux solides ayant comme rayons R_1 et R_2 et ramenés en contact non-conforme sur une zone de contact infinitésimale **(Figure 1.4).** Les modules d'élasticité et les coefficients de poisson sont respectivement E_1, ν_1 et E_2, ν_2.

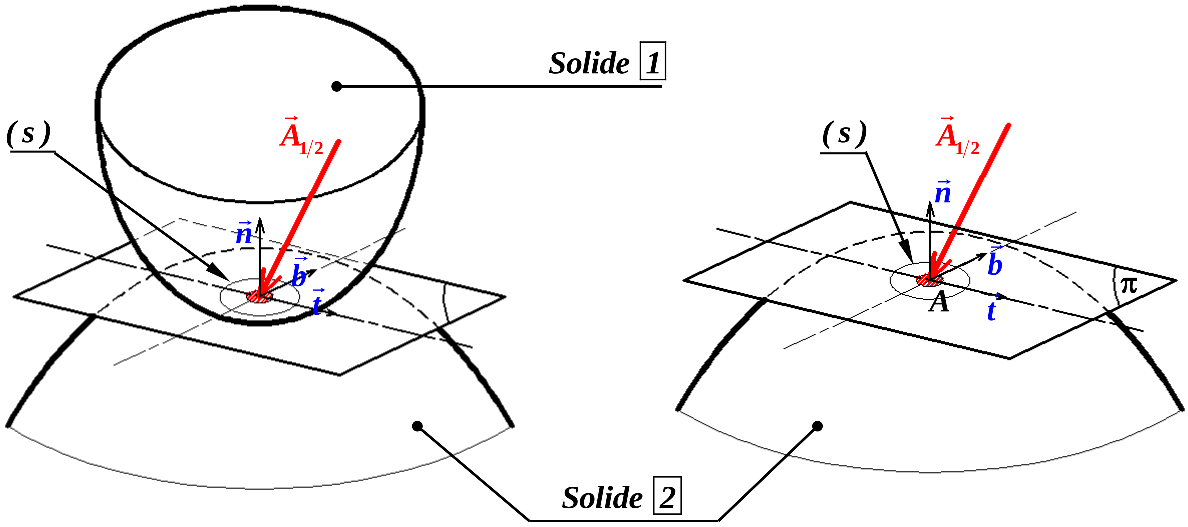


Figure 1.4: Principe du contact de Hertz

1.2.5.6 Contact Non-Hertzien

La théorie de Hertz est évidemment un modèle idéalisé qui ne couvre qu'un très petit nombre de problèmes de contact. Les problèmes pratiques violeront inévitablement tout ou partie des hypothèses énoncées dans la théorie de Hertz ; en tant que tels, ils sont appelés "contact non hertzien". À titre d'approximation, il existe des cas dans lesquels la théorie de Hertz peut être utilisée pour résoudre un problème non hertzien ; par exemple, des problèmes de contact élastique non conforme avec un très faible coefficient de frottement.

De nombreux problèmes de contact non hertziens ne permettent pas de solutions analytiques sous forme fermée. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de contacts conformes où la zone de contact potentielle initiale ne peut pas être décrite par une simple expression quadratique. Les problèmes de contact conforme ont tendance à avoir un profil discontinu au bord de la région de contact ; ainsi en général, une concentration de contraintes élevée (voire infinie) serait attendue au bord. Par exemple, un poinçon plat rigide sur une fondation élastique plate conduira à une violation de l'approximation du demi-espace. [3]

1.2.5.7 Contact avec retrait

La plupart des solides non conformes se touchent initialement en un point ou le long d'une ligne et la zone de contact augmente avec l'augmentation de la charge. D'autre part, des contacts presque conformes, qui se touchent initialement sur une zone appréciable lorsqu'ils sont chargés, peuvent se déformer de telle sorte que la zone de contact diminue. Par exemple, une goupille parfaitement ajustée dans un trou touchera initialement toute sa circonférence mais, lorsqu'elle est chargée perpendiculairement à son axe, un espace apparaîtra entre la goupille et le trou du côté non chargé. **[3]**

1.2.5.8 Contact avec roulement

Dans la pratique, le contact peut exister sous de nombreuses formes différentes en plus de celles mentionnées ci-dessus. Les solides qui sont en contact peuvent être accompagnés d'un mouvement de roulement tel le cas du mouvement du déplacement d'un chariot dont les roues métalliques roulent sur un rail. Le phénomène des caractéristiques de contact entre une roue et le rail détermine non seulement la qualité de conduite du chariot, mais affecte également le taux d'endommagement de la roue et du rail en raison du frottement et du glissement.

1.2.6 Modes de contact

La région dans laquelle les frontières de deux solides devraient entrer en contact est appelée « zone de contact potentiel ». La taille de cette zone dépend du problème concerné puisqu'elle est dictée par la géométrie des solides en contact et/ou l'amplitude du chargement appliqué.Les modes de contact peuvent être considérés comme des conditions aux frontières qui doivent être prescrites dans les régions où les surfaces sont en contact ou devant être potentiellement en contact. Pour un état de contact donné, les conditions de contact entre deux points de contact (A et B) peuvent être représentées par l'un des trois modes indiqués dans le **tableau 1.1**. Où t_t et t_n sont respectivement les contraintes superficielles tangentielles et normales, et u_t et u_n sont respectivement, les déplacements tangentiel et normal exprimés en coordonnées locales. Le comportement des solides en contact dans une situation de décollement (séparation) ou de contact est représenté par les modes de contact. **[3]**

Tab. 1.1: Modes de contact solide-solide **[3]**

Décollement	Glissement	Adhérence
$t_{t,A} - t_{t,B} = 0$ $t_{n,A} - t_{n,B} = 0$ $t_{t,A} = 0$ $t_{n,B} = 0$	$t_{t,A} - t_{t,B} = 0$ $t_{n,A} - t_{n,B} = 0$ $t_{t,A} \pm \mu . t_{n,A} = 0$ $u_{n,A} + u_{n,B} = Ecart(A,B)$	$t_{t,A} - t_{t,B} = 0$ $t_{n,A} - t_{n,B} = 0$ $u_{t,A} + u_{t,B} = 0$ $u_{n,A} + u_{n,B} = Ecart(A,B)$

1. **Mode décollement:** il est défini lorsque les points de contact A et B, restent séparés.
2. **Mode de glissement:** il est défini lorsque les points de contact A et B ne sont pas restreints dans la direction tangentielle mais libres de glisser les uns par rapport aux autres
3. **Mode adhérence:** il est défini lorsque les points de contact A et B sont restreints suivant les directions normale et tangentielle sans glissement relatif lors du chargement.
4. **Mode de glissement partiel:** les définitions précédentes de glissement et d'adhérence représentent les deux modes de contact extrêmes dans lesquels peuvent se trouver les lieux de contact sous l'action d'un chargement externe. Cependant, ces définitions ne sont pas suffisantes pour définir toutes les possibilités de contact avec frottement qui peuvent être impliquées dans le déplacement des régions de contact ; les lieux de contact qui sont restreints dans la direction tangentielle pour l'incrément de charge actuel peuvent subir un certain glissement lors des incréments de charge précédents. Dans une telle situation, le concept de glissement partiel est introduit.

1.3 LOIS DE FROTTEMENT

Quand il y a un mouvement relatif entre deux solides ou un solide et un fluide, l'apparition d'une force de frottement est inévitable. Quand le mouvement relatif se produit entre deux solides en contact par leur surfaces, on parle de frottement de glissement ou de roulement; quand c'est entre un solide et un fluide, on parle de frottement visqueux ou aérodynamique **(figure 1.5)**.

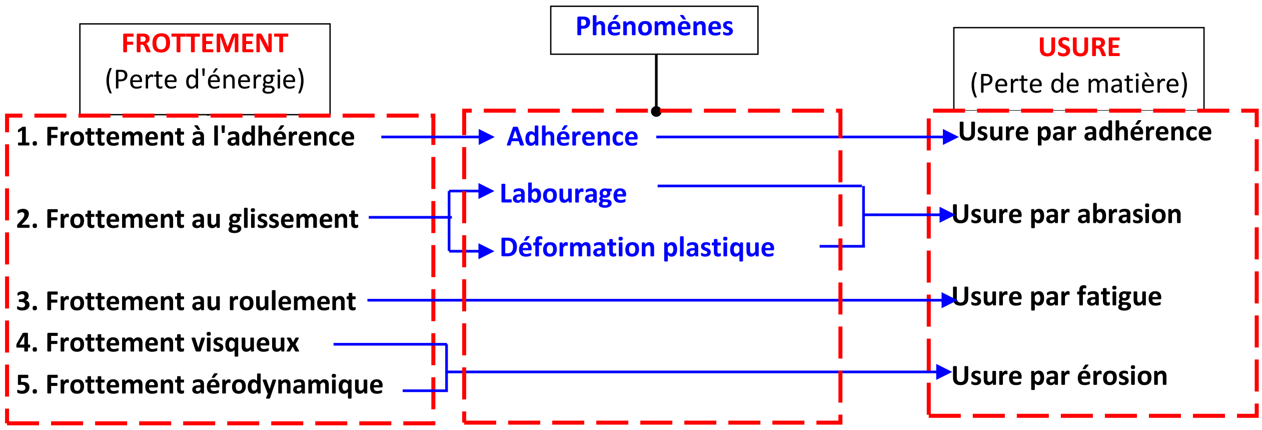


Figure 1.5: Phénomènes et conséquences du frottement

En général, le frottement est la relation qui existe entre les forces de frottement (efforts tangentiels) sur la zone de contact et le glissement (mouvement tangentiel relatif des deux corps). Les phénomènes physiques à faire apparaitre dans une loi de frottement sont [5] :

- *L'existence d'un seuil d'effort en dessous duquel aucun glissement n'est possible.*
- *Une dépendance de ce seuil à l'intensité des efforts normaux.*

Le déplacement de glissement étant irréversible, les lois de frottement concerneront des relations entre les forces de frottement $\vec{F}_t$ et la vitesse de glissement $\dot{\vec{u}}_t$. Ces lois ne doivent intervenir que lorsqu'il n'y a pas de décollement (Eloignement des solides en contact) sur la zone de contact. Pour définir les lois de frottement, on définit :

- le glissement :

$$\vec{u}_t = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - [(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\vec{n}]\vec{n} \quad \textbf{(1.4)}$$

- la vitesse de glissement :

$$\dot{\vec{u}}_t = \frac{\partial \vec{u}_t}{\partial t} \quad \textbf{(1.5)}$$

1.3.1 Loi de Tresca

La loi de frottement de Tresca est la plus simple. Elle est définie comme suit :

- Si $\|\vec{F}_t\| < \mathbf{g}$ alors $\dot{\vec{u}}_t = \mathbf{0}$ **(Phénomène d'adhérence)** **(1.6)**
- Si $\|\vec{F}_t\| = \mathbf{g}$, alors $\exists \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ tel que $\dot{\vec{u}}_t = \boldsymbol{\lambda}\vec{F}_t$ **(Phénomène de glissement)** **(1.7)**

L'évolution de cette loi est donnée sur la **figure 1.6**.

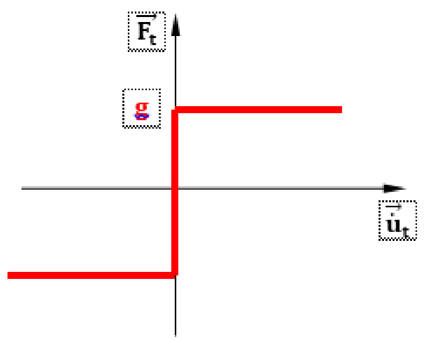


Figure 1.6 : Loi de Tresca [5]

1.3.2 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb (1785) décrit la dépendance entre le seuil de glissement $\mathbf{g}$ et l'intensité des efforts normaux $\vec{F}_n$ en utilisant la loi de Tresca tel que le seuil $\mathbf{g}$ est proportionnel à l'effort normal.

- Si $\mathbf{F_t} < \boldsymbol{\mu}\mathbf{F_n}$ alors $\dot{\vec{u}}_t = \mathbf{0}$ **(Phénomène d'adhérence)** **(1.8)**
- Si $\mathbf{F_t} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{F_n}$, alors $\exists \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ tel que $\dot{\vec{u}}_t = \boldsymbol{\lambda}\vec{F}_t$ **(Phénomène de glissement)** **(1.9)**

Ou **μ** est le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence et des états de surface. L'évolution de cette loi est donnée sur la **figure 1.7.**

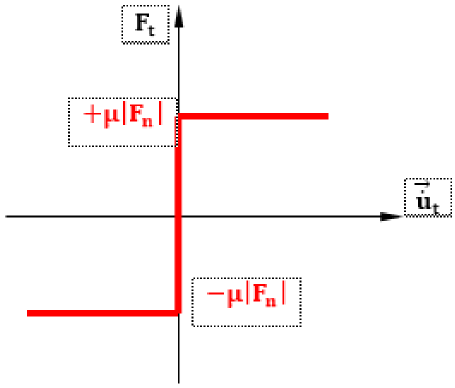


Figure 1.7: lois de Coulomb [5]

1.3.3 Lois de Coulomb régularisées

Pour pallier aux insuffisances de la loi de Coulomb, on utilise souvent des lois **régularisées** qui sont plus fines. La plus couramment rencontrées est celle dont la représentation graphique est donnée sur la **figure 1.8** Elle autorise un glissement élastique réversible paramétré par une raideur élastique $\mathbf{k_e}$. Cette dernière difficilement évaluable est justifiée par l'élasticité des aspérités de la zone de contact. Elle prend souvent une valeur très grande de manière à être proche de la loi de Coulomb. Mais, si $\mathbf{k_e}$ est trop grand, des problèmes numériques de conditionnement apparaissent. Cette loi de Coulomb régularisée garde une relation non biunivoque entre effort et vitesses lorsqu'il y a glissement irréversible.

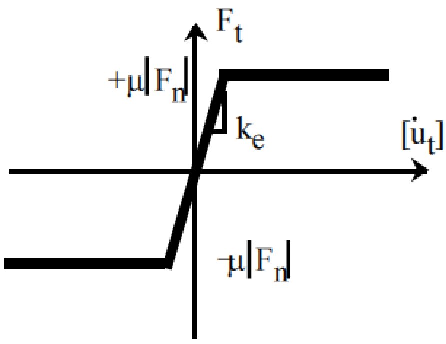


Figure 1.8: lois de Coulomb régularisée [5]

1.3.4 Loi de Norton-Hoff

Elle est couramment utilisée en ingénierie. Elle est donnée par la relation (2.29) et dont le graphe est donnée sur la **figure 1.9**.

$$\mathbf{F_t < \mu.F_N\left[\left\|\vec{\dot{u}}_t\right\|^{(\rho-1)}\right]\vec{\dot{u}}_t} \qquad \mathbf{(1.10)}$$

Dans le cas où $\boldsymbol{\rho = 0}$, on retrouve la loi de Coulomb. Lorsque $\mathbf{0 < \rho < 10}$, la loi donne une relation biunivoque entre les efforts tangentiels et la vitesse de glissement. Lorsque $\boldsymbol{\rho}$ est faible, elle reste proche de la loi de Coulomb.

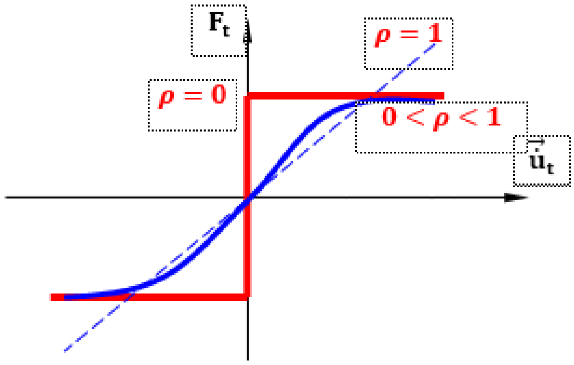


Figure 1.9 : Loi de Norton-Hoff **[5]**

1.4 CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, on a pu en premier lieu définir la notion de contact mécanique solide et la discipline scientifique qui le traite ainsi que les éléments qui lui sont associés. En deuxième lieu on a abordé l'un des aspects du contact mécanique à savoir le frottement solide-solide ainsi que les lois conventionnelles qui nous permettent de le modéliser. Ainsi, au terme de ce chapitre, on peut affirmer l'importance et la complexité du contact entre les pièces mécaniques dans le domaine de la technologie de construction mécanique ainsi que l'intérêt qui doit être porté à ce type de problème lors du dimensionnement des éléments de machines.

Chapitre 02

Méthodes des éléments aux frontières

2.1 INTRODUCTION

Dans le monde réel, les phénomènes et les systèmes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres non-linéaires qui interagissent entre eux. Vu la complexité de ces phénomènes ou systèmes réels, le scientifique ou l'ingénieur cherche toujours le moyen de les simplifier ou de les remplacer par un objet ou un opérateur simple qui reproduit les principaux aspects de leurs comportements réels

Parmi les solutions pour comprendre et résoudre les problèmes physiques ou d'ingénierie c'est la construction d'un modèle mathématique permettant la représentation du phénomène ou du système physique. Ces modèles mathématiques font généralement appel aux notions d'équations aux dérivées partielles dont on ne connaît pas la solution analytique **[6].**

A titre indicatif, le **tableau 2.1** expose les champs d'application des différentes classes d'équations aux dérivées partielles.

Tableau 2.1: Champs d'application des différentes EDP's [7]

Domaine d'analyse	Ordre des EDP	Type	Equation associée	Champ d'application
linéaire	Equation de $2^{ème}$ ordre	Elliptique	**Laplace**	*- Electrostatique - Ecoulement potentiel incompressible - Conduction de la chaleur (Régime stationnaire, pas de source de chaleur)*
			Poisson	*- Electrostatique - Electromagnétique - Conduction de la chaleur (Conductivité thermique uniforme, régime stationnaire, source de chaleur dans le solide)*
			Helmholtz	*- Acoustique (problème extérieur et intérieur) - Electromagnétique - Optique*
		Parabolique	**Diffusion / Chaleur**	*- Conduction de la chaleur (Conductivité thermique uniforme, pas de source de chaleur)*
			Schrodinger	*- Mécanique quantique*
		Hyperbolique	**Onde**	*- Acoustique - Electromagnétique - Dynamique des fluides*
	Equation de $4^{ème}$ ordre	Hyperbolique	**Biharmonique**	*- Problème des plaques minces - Problème d'écoulement des fluides*
	Système d'équations	Hyperbolique	**Navier**	*- Problème d'élasticité*
			Maxwell	*- Electromagnétique*
non-linéaire	Equation de $2^{ème}$ ordre	Hyperbolique	**Burgers**	*- Mécanique des fluides*
	Système d'équations	Hyperbolique	**Navier–Stokes**	*- Dynamique des fluides*
			Euler	*- Dynamique des fluides*

2.2 PROCEDURE NUMERIQUES EN INGENIERIE

La résolution des équations différentielles par quadrature (c'est-à-dire à l'aide des opérations élémentaires et des primitives) n'est possible que dans un nombre de cas très restreints. Il est donc indispensable de disposer de techniques de résolution approchée appelées méthodes numériques. Pour illustrer les différents aspects qui jouent un rôle lors de l'utilisation de techniques de simulation numérique pour la résolution de problèmes d'ingénierie, la procédure générale est donnée schématiquement par la **figure 2.1.**

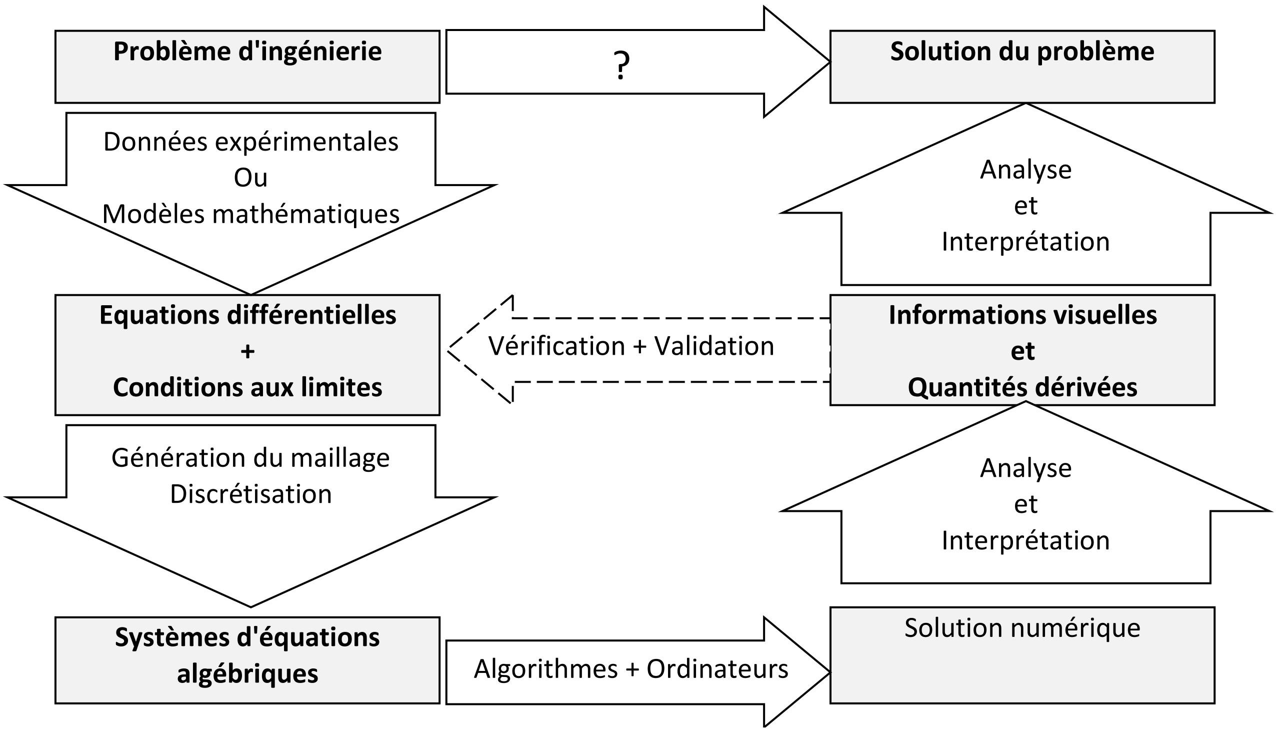


Figure 2.1: Procédure de simulation numérique pour la résolution de problèmes d'ingénierie [8]

La première étape consiste en la modélisation mathématique appropriée des processus à étudier ou, dans le cas où un progiciel existant est utilisé, dans le choix du modèle le mieux adapté au problème concret. Cet aspect doit être considéré comme crucial, car la simulation ne donnera généralement pas de résultats valables si elle n'est pas basée sur un modèle adéquat.

Le problème continu qui résulte de la modélisation, est généralement un ensemble de systèmes d'équations différentielles ou intégrales dérivés dans le cadre de la mécanique des milieux continus doit alors être convenablement approché par un problème discret, c'est-à-dire que les quantités inconnues à calculer doivent être représentées par un nombre fini. nombre de valeurs. Ce processus, appelé discrétisation, comporte principalement deux tâches :

- ***la discrétisation du domaine du problème,***
- ***la discrétisation des équations.***

La discrétisation du domaine du problème, approche le domaine continu (en espace et en temps) par un nombre fini de sous-domaines dans lesquels ensuite des valeurs numériques pour les quantités inconnues sont déterminées. L'ensemble des relations pour le calcul de ces valeurs est obtenu par la discrétisation des équations, qui rapproche les systèmes continus par des discrets. Contrairement à une solution analytique, la solution numérique donne donc un ensemble de valeurs liées au domaine du problème discrétisé à partir duquel l'approximation de la solution peut être construite. Il existe principalement trois approches différentes pour la procédure de discrétisation **[8]** :

- ***la méthode des différences finies (FDM),***
- ***la méthode des volumes finis (FVM),***
- ***la méthode des éléments finis (FEM).***
- ***L'élément de frontière fini (BEM)***

2.3 METHODE DES ELEMENTS AUX FRONTIERES

2.3.1 La BEM par rapport aux autres méthodes

La méthode des éléments de frontière est souvent plus efficace que d'autres méthodes, y compris les éléments finis, en termes de ressources de calcul pour les problèmes avec un petit rapport surface/volume. Conceptuellement, cela fonctionne en créant un "maillage" sur la surface du modèle. Cependant, pour de nombreux problèmes, les méthodes des éléments de frontière sont nettement moins efficaces que les méthodes d'estimation de volume (méthode des éléments finis, méthode des différences finies, méthode des volumes finis).

La méthode des éléments de frontière est l'une des méthodes les plus efficaces pour la simulation numérique de problèmes de contact. Pour être objectif, les caractéristiques de la méthode BE doivent être comparées à sa principale rivale, la méthode FE. Ses avantages et inconvénients peuvent être résumés comme suit **[1]**.

2.3.1.1 Avantages de la BEM

1. Moins de temps de préparation des données. Il s'agit d'un résultat direct de la modélisation « surface uniquement » (c'est-à-dire la réduction de la dimensionnalité par un). Ainsi, le temps de l'analyste requis pour la préparation des données (et la vérification des données) pour un problème donné devrait être considérablement réduit. De plus, les modifications ultérieures des maillages sont facilitées. Cet avantage est particulièrement important dans les problèmes nécessitant un remaillage, tels que les études de conception préliminaires, la propagation de fissures et les problèmes de contact frictionnel.

2. Haute résolution des contraintes. Les contraintes sont précises car aucune autre approximation n'est imposée sur la solution aux points intérieurs, c'est-à-dire que la solution est exacte (et entièrement continue) à l'intérieur du domaine. Cela rend la méthode BE très adaptée à la modélisation de problèmes de contraintes changeant rapidement, tels que les problèmes de concentration de contraintes, de contact et de rupture.
3. Moins de temps d'ordinateur et de stockage. Pour le même niveau de précision, la méthode BE utilise un nombre moindre de nœuds et d'éléments (mais une matrice entièrement remplie). Étant donné que le niveau d'approximation dans les solutions BE est confiné à la surface, les maillages BE ne doivent pas être comparés aux maillages EF avec les points internes supprimés. Pour obtenir une précision comparable dans les valeurs de contrainte, les maillages FE auraient besoin de plus de divisions limites que les maillages BE équivalents.
4. Moins d'informations indésirables. Dans la plupart des problèmes d'ingénierie, les « pires » situations (telles que la rupture, la concentration de contraintes et le choc thermique) se produisent généralement à la surface, dans de nombreux codes de conception et pratiques d'ingénierie, l'analyste ne se préoccupe généralement que de ce qui se passe dans la pire situation. Ainsi, la modélisation d'un corps complexe tridimensionnel entier avec des éléments finis et le calcul de la contrainte à chaque point nodal sont très inefficaces car seules quelques-unes de ces valeurs de contrainte seront incorporées dans l'analyse de conception.* Par conséquent, l'utilisation d'éléments de frontière est une utilisation beaucoup plus efficace de ressources informatiques. De plus, étant donné que les points internes dans les solutions BE sont facultatifs, l'utilisateur peut se concentrer sur une région intérieure particulière plutôt que sur l'ensemble de l'intérieur.
5. Facilement applicable aux matériaux incompressibles. La formulation FE de déformation plane basée sur le déplacement échoue lorsque le coefficient de Poisson est exactement égal à 0,5 (c'est-à-dire que le matériau est incompressible). La formulation BE, cependant, manipule ces matériaux sans aucune difficulté. Par conséquent, dans les problèmes impliquant des matériaux caoutchouteux, la méthode BE est beaucoup plus appropriée que la méthode FE.

2.3.1.2 Inconvenient de la BEM

1. Mathématiques inconnues. Les mathématiques utilisées dans les formulations BE peuvent sembler peu familières aux ingénieurs (mais pas difficiles à apprendre). Cependant, de nombreuses procédures numériques EF sont directement applicables aux solutions BE (telles que l'intégration numérique, le traitement des conditions aux limites). Au cours des premières étapes du développement de la technique BE, une connaissance considérable des

mathématiques avancées était nécessaire afin de prouver l'unicité et l'existence de chaque solution. Ce n'est plus nécessaire car la formulation BE est maintenant bien établie et le caractère unique des solutions BE est tenu pour acquis (l'exactitude des programmes informatiques BE parle d'elle-même).

2. L'intérieur doit être modélisé dans des problèmes non linéaires. La modélisation intérieure est inévitable dans les problèmes de matériaux non linéaires. Cependant, dans de nombreux cas non linéaires (tels que l'élasto-plasticité), la modélisation intérieure peut être limitée à des zones sélectionnées telles que la région autour d'un fond de fissure. Il faut souligner que les solutions BE restent très précises dans les problèmes non-linéaires, mais la méthode perd son principal avantage de la réduction de la dimensionnalité.

3. Mauvais pour l'analyse de coque mince. Cela est dû au grand rapport surface/volume et à la proximité des points nodaux de chaque côté de l'épaisseur de la coque (c'est-à-dire lorsque la distance entre les points nodaux devient très petite). Cela provoque des imprécisions dans les intégrations numériques. L'approche EF est plus adaptée aux problèmes de coque mince.

4. Matrice de solution entièrement remplie. La matrice de solution résultant des formulations BE est asymétrique et entièrement peuplée de coefficients non nuls, alors que les matrices de solution FE sont généralement beaucoup plus grandes mais peu peuplées. Cela signifie que l'intégralité de la matrice de solution BE doit être enregistrée dans la mémoire centrale de l'ordinateur. Cependant, ceci n'est pas un inconvénient sérieux car pour obtenir le même niveau de précision que les solutions EF, la méthode BE n'a besoin que d'un nombre relativement modeste de nœuds et d'éléments.

2.3.2 Choix entre BEM et FEM

Pour décider si les solutions en éléments aux frontières ou en éléments finis sont plus adaptées à un problème particulier, trois facteurs doivent être pris en considération **[1]**. :

1. Le type de problème (linéaire, non linéaire, analyse de coque, etc.)
2. Le degré de précision requis
3. Le temps à consacrer à la préparation et à l'interprétation des données

Les deux techniques devraient être mises à la disposition des ingénieurs, car dans certains types d'applications, l'une d'entre elles peut présenter un net avantage sur l'autre.

Compte tenu des avantages et des inconvénients de la BEM cités plus haut, les points suivants peuvent aider à décider quelle technique utiliser :

- La méthode BEM est très appropriée (et plus précise) pour les problèmes linéaires (en particulier pour les problèmes tridimensionnels avec des variables telles que les problèmes de rupture et de contact).

- En raison du temps très réduit nécessaire pour modéliser un problème particulier, la méthode BE est très appropriée pour les analyses de conception préliminaire où les géométries et les charges peuvent être modifiées par la suite avec un effort minimal. Cela donne aux concepteurs plus de liberté pour expérimenter de nouvelles formes et géométries.
- La méthode EF est plus établie et plus développée commercialement, en particulier pour les problèmes non linéaires complexes où des tests approfondis pour établir sa fiabilité ont été effectués. La tentation pour les ingénieurs est d'utiliser un programme informatique bien établi plutôt que de s'aventurer dans de nouvelles méthodes.
- Les mathématiques utilisées dans la formulation MEF sont plus familières aux ingénieurs. Cependant, la méthode BEM est de plus en plus incluse dans les cours d'ingénierie et de plus en plus de manuels BEM deviennent disponibles, ce qui devrait rendre les mathématiques utilisées dans les formulations BEM plus accessibles.
- Les générateurs de maillage et les routines de traçage développés pour les applications EF sont directement applicables aux problèmes BEM. Cela ne devrait pas être une tâche difficile d'écrire des programmes de « traducteur » pour s'interfacer avec des progiciels commerciaux MEF. De plus, de nombreuses routines d'incrémentation de charge et itératives développées pour les applications MEF dans les problèmes non linéaires sont également directement applicables dans les algorithmes BEM.

2.3.3 Variantes de la méthode des éléments aux frontières

Appliquée dans diverses disciplines de l'ingénierie et des sciences, la BEM peut être considérée comme une méthode numérique majeure à côté de la méthode des éléments finis (FEM) et de la méthode des différences finies (FDM) mieux connues, fournissant conjointement une solution informatique efficace pour une large classe de problèmes d'ingénierie et scientifiques.

Progressivement au cours des dernières décennies catalysé par les progrès rapides de la technologie informatique. Parmi un choix de près de 40 variantes de BEM, elles ont été sélectionnées en fonction de leurs contributions significatives à la recherche sur les éléments de frontière et possèdent en même temps des bases solides avec une durée d'établissement de plus de 15 ans. En pratique, ces variantes de BEM peuvent être divisées en deux groupes principaux : les intégrales de frontière et les intégrales de domaine. De nombreuses approches mathématiques présentées dans BEM sont associées aux travaux de mathématiciens et de scientifiques célèbres. Les contributions de mathématiciens comme Laplace, Green, Fredholm, Fourier, Kellogg et Betti ont pu être retracées dans les fondements théoriques et mathématiques de l'équation intégrale de frontière (BIE) au début du 20e siècle. La **figure 2.2** présente les variantes de la BEM **[6]**.

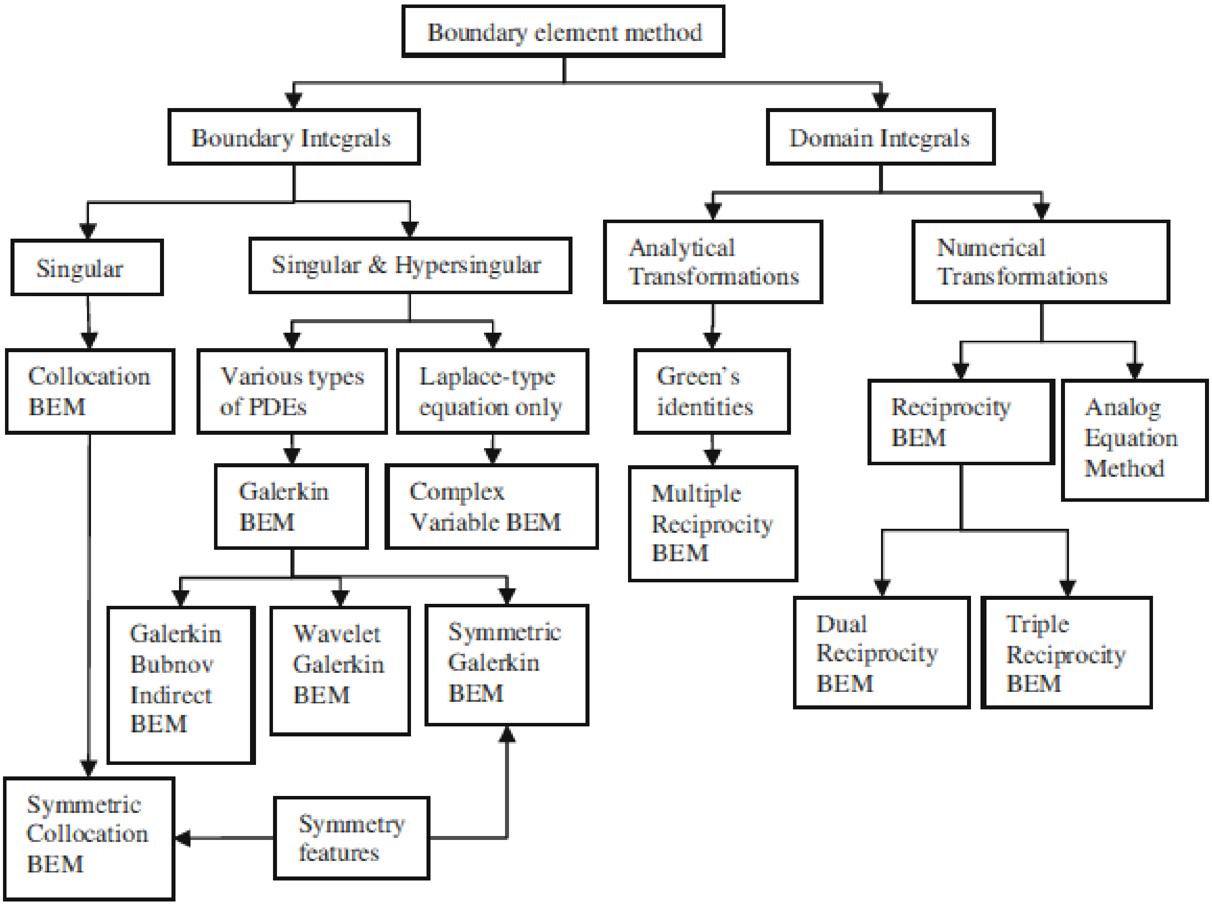


Figure 2.2 : Classification des variantes de la BEM [6]

2.3.4 Procédure d'implémentation de la BEM

Quel que soit la variante des éléments aux frontières, la structure adoptée pour la mise en œuvre et l'application d'une BEM, suit les étapes suivantes :

Ordre	Tâche	Outils	Résultat
1	Formulation en EDP	***Modélisation***	***Forme différentielle***
2	Formulation en équation intégrale		***Forme Intégrale***
3	Discrétisation géométrique de la frontière	***Eléments aux frontières***	
4	Approximation nodale par sous domaine	***Fonctions de forme***	
5	Intégration numérique des noyaux	***Quadrature de Gauss***	
6	Application des conditions aux frontières	***Dirichlet + Cauchy***	
7	Système d'équations linéaires	***Forme matricielle***	
8	Résolution des équations algébriques	***Elimination de Gauss***	
9	Calcul des variables		***Déplacements + Contraintes***
10	Interprétation des résultats	***Contrôle et validation***	

Dans la suite sera présentée la démarche de la méthode des éléments aux frontières appliquées à un problème d'élasticité dans un milieu physique solide.

2.3.4.1 Formulation mathématique en EDP

L'accès à des grandeurs difficiles à mesurer expérimentalement, tel que le **champ de contraintes** dans les zones confinées du contact pièce-foret-copeau est très complexe à modéliser. Le problème fondamental à résoudre c'est la détermination du champ des contraintes. Les méthodes qui permettent de déterminer le champ de contrainte sont :

1. La méthode des déplacements →Equation de **NAVIER.**

- **Elastostatique :** $(\lambda+2.\mu)\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right]-\mu.\overrightarrow{Rot}\left[\overrightarrow{Rot}(\vec{u})\right]+\vec{f}_V=\vec{0}$ $\quad(2.1)$
- **Elastodynamique** : $(\lambda+2.\mu)\overrightarrow{grad}\left[div(\vec{u})\right]-\mu.\overrightarrow{Rot}\left[\overrightarrow{Rot}(\vec{u})\right]+\vec{f}_V=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$ $\quad(2.2)$

Avec :

- $\vec{u}$: champ des vecteurs déplacements
- μ et λ : coefficients de Lamé

2. La méthode des forces→ Equation de **BELTRAMI.**

1° Méthode des déplacements

Pour résoudre un problème d'élasticité par la méthode des déplacements, les inconnues à chercher sont les composantes du vecteur déplacement $\vec{u}(M,t)$ ou bien $\vec{u}(x,y,z,t)$. La formulation du modèle mathématique de l'équation de Navier, se fait en trois étapes:

1. Formulation des EDP des équations d'équilibre (équilibre des contraintes).
2. Formulation des EDP déformations-contraintes (loi de Hooke généralisée).
3. Formulation des EDP déformations-déplacements.

On obtient les équations de Navier qui représentent le modèle mathématique en termes d'EDP pour les déplacements.

Sous une forme différentielle compacte :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}+\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}=-\left(\frac{f_i}{\mu}\right) \qquad (2.3)$$

Sous la forme vectorielle compacte :

$$\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla.\vec{u})=-\left(\frac{\vec{f}}{\mu}\right) \qquad (2.4)$$

2° Méthode des forces

Pour résoudre un problème d'élasticité par la méthode des forces, les inconnues à chercher sont les composantes du tenseur de contraintes $\sigma_{ij}(x,y,z,t)$. En considérant un champ de contrainte statiquement admissible qui vérifie :

- L'équation $f_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ dans le volume du domaine
- L'équation $\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}.n_j = F_i$ sur la frontière du domaine

Ce champ correspond au champ de contrainte réel si les équations de compatibilité sont vérifiées, à savoir l'équation de Beltrami :

$$\overrightarrow{grad}\left(div[\varepsilon]\right) + \overrightarrow{grad}^{t}\left(div[\sigma]\right) - \Delta\sigma - \frac{1}{1+\nu}\overrightarrow{grad}\left[\overrightarrow{grad}\left(I_G\right)\right] + \frac{\nu}{1+\nu}[1] = 0 \qquad (2.5)$$

En considérant la relation entre le champ des contraintes et celui des déplacements on a :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (2.6)$$

2.3.4.2 Formulation mathématique en équation intégrale

1°. Problème de Kelvin

Soit donné **(Figure 2.3)** un domaine physique Ω de volume V enveloppé par une frontière Γ de surface S .

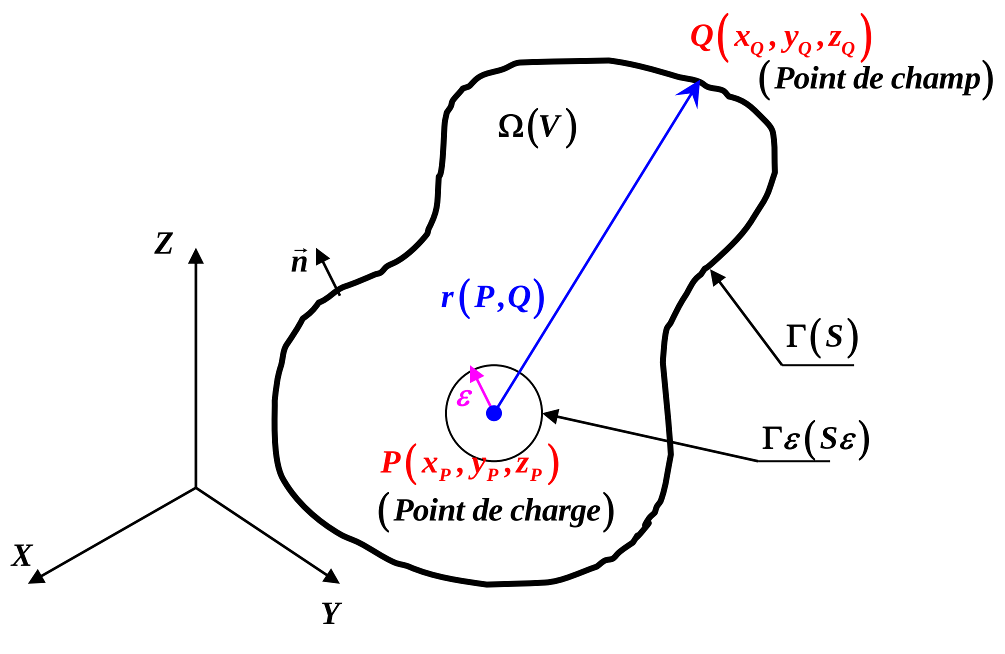


Figure 2.3: Problème de Kelvin [1]

Dans le domaine des solutions on définit :

- $\boldsymbol{P}$: point fixe situé à intérieur de $\boldsymbol{\Omega}$, appelé point de charge (load point)
- $\boldsymbol{Q}$: point courant sur la frontière $\boldsymbol{\Gamma}$, appelé point de champ (field point)
- X_p, Y_p, Z_p : coordonnées du point fixe $\boldsymbol{P}$
- x_Q, y_Q, z_Q : coordonnées du point variable $\boldsymbol{Q}$
- $r(P,Q)$: fonction qui représente la distance physique entre les points $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$.

$$r(P,Q)=\sqrt{\left(x_P-x_Q\right)^2+\left(y_P-y_Q\right)^2+\left(z_P-z_Q\right)^2}$$

- ε : rayon de la zone de voisinage au point $\boldsymbol{P}$

Le problème de KELVIN concerne le problème d'une force ponctuelle concentrée appliquée à l'intérieur d'un domaine infini. Il s'énonce comme suit : "***pour une force unitaire appliquée à l'intérieur d'un domaine Ω en un point P, on cherche l'effet de cette force sur un autre point quelconque Q de Ω".***

2° Équation intégrale pour les déplacements

Les équations de Navier forment la base de la formulation directe de la **B**oundary **I**ntégral **E**quation, mais telles qu'elles sont données par la relation (2.4), elles sont difficiles à résoudre analytiquement. Cependant pour être capable de résoudre une EDP on a besoin de trouver :

- Une fonction complémentaire.
- Une intégrale particulière.

Pour ce faire, on a les étapes suivantes:

1. Transformer les équations de Navier →vecteur $\vec{G}$ de **Galerkine**
2. Trouver la solution fondamentale→Solution de **Kelvin**
3. Formuler la B.I.E→Théorème de **Betti** + Identité de **Somigliana**

Ainsi pour les déplacements on a :

$$u_i(P)=\int_S U_{ij}(P,Q)t_i(Q)dS-\int_S T_{ij}(P,Q)u_i(Q)dS+\int_V U_{ij}(P,Q)\,f_i(q)dV \qquad (2.7)$$

En absence des forces de volumes, on a:

$$u_i(P)=\int_S U_{ij}(P,Q)t_i(Q)dS-\int_S T_{ij}(P,Q)u_i(Q)dS \qquad (2.8)$$

L'équation **(2.7)** est dénommée identité de Somigliana pour les déplacements et elle constitue l'équation intégrale aux frontières (ou **B**oundary **I**ntegral **E**quation). Elle donne les déplacements de n'importe quel point P situé à l'intérieur du domaine Ω de volume V, causé par les déplacements et les tractions de n'importe quel point Q situé sur la frontière Γ de surface S .

Au sens physique, la solution fondamentale (représentée par les noyaux U_{ij} et T_{ij}) calcule "l'influence" d'une force concentrée en un point P donnée à l'intérieur du domaine sur un autre point Q . Cette solution fondamentale est valide pour n'importe quel problème élastostatique.

3° Équation intégrale pour les contraintes

Une BIE similaire pour les contraintes peut être obtenu, et cela par dérivation de la relation **(2.6)** au point p et sa substitution dans la loi de Hooke généralisée. Ainsi on a :

$$\sigma_{ij}(P)+\int_S\left\{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial T_{mk}(P,Q)}{\partial x_m}+\mu\left[\frac{\partial T_{lk}(P,Q)}{\partial x_j}+\frac{\partial T_{lk}(P,Q)}{\partial x_i}\right]\right\}u_k(Q)dS(Q)= \tag{2.9}$$

$$=\int_S\left\{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\frac{\partial U_{mk}(P,Q)}{\partial x_m}+\mu\left[\frac{\partial U_{lk}(P,Q)}{\partial x_j}+\frac{\partial U_{lk}(P,Q)}{\partial x_i}\right]\right\}t_k(Q)dS(Q)+\int_V U_{ij}(P,Q)\,f_i(Q)dV$$

Qui peut être exprimée en termes de deux nouveaux noyaux d'ordre 3 S_{kij} et D_{kij} :

$$\sigma_{ij}(P)=\int_S D_{kij}(P,Q)t_k(Q)dS(Q)-\int_S S_{kij}(P,Q)u_k(Q)dS(Q) \tag{2.10}$$

Avec :

$$D_{kij}(P,Q)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{r^2}\right)\left[(1-2\nu)\left(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}+\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)+3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right] \tag{2.11}$$

Et

$$\begin{aligned}
S_{kij}(P,Q)=&\frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\left(\frac{1}{r^3}\right)\times\\
&\times\left\{n_i\left[3\nu\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}+(1-2\nu)\delta_{jk}\right]+n_j\left[3\nu\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}+(1-2\nu)\delta_{ik}\right]+\right.\\
&\left.+n_k\left[3(1-2\nu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}-(1-4\nu)\delta_{ij}\right]+3\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right\}\times\\
&\times\left[(1-2\nu)\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_k}+\nu\left(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial x_i}+\delta_{ik}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\right)-5\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.3.4.3 Discrétisation géométrique de la frontière

Pour résoudre numériquement les équations intégrales **(2.8)** et **(210)** , la frontière du domaine est divisée en éléments et chaque élément est défini par des points nodaux. Supposons que nous ayons des points nodaux sur la frontière ; chaque nœud a quatre variables u_x , u_y , t_x et t_y , ce qui donne un total de $4N$ variables. Tout problème avec une solution unique doit avoir seulement la moitié des variables décrites sur chaque point nodal. Par conséquent, un point nodal particulier doit avoir les deux déplacements ou les deux tractions ou une composante de traction et une composante de déplacement prescrit. Cette situation est exactement celle requise dans la pratique ; par exemple, si un point nodal n'a aucune valeur prescrite d'aucune sorte, il est automatiquement supposé que ses deux tractions sont mises à zéro (c'est-à-dire sans contrainte).

Par conséquent, comme nous avons 2N inconnues, nous avons besoin de 2N équations pour résoudre le problème. En le regardant d'une manière plus générale, nous avons besoin de N ensembles d'équations où chaque ensemble contient deux équations. Supposons maintenant un cas hypothétique : une force (ou traction) placée au nœud 1. En utilisant la solution fondamentale, nous pouvons calculer les déplacements et les tractions à chaque nœud de 1 à N. Cela donne notre premier ensemble d'équations linéaires (c'est-à-dire les lignes 1 et 2 de la matrice). Pour produire notre deuxième ensemble d'équations linéaires (c'est-à-dire les lignes 3 et 4 de la matrice), nous plaçons maintenant la force au nœud 2 et répétons l'utilisation de la solution fondamentale pour calculer toutes les variables aux autres nœuds. Cette opération est répétée jusqu'à ce que la force soit placée au dernier nœud N, ce qui nous donnera l'ensemble final d'équations (c'est-à-dire les lignes 2N — 1 et 2N de la matrice). Par conséquent, nous nous retrouvons avec 2N équations et 2N inconnues qui produisent une solution unique. **La figure 4.1** montre la procédure ci-dessus.

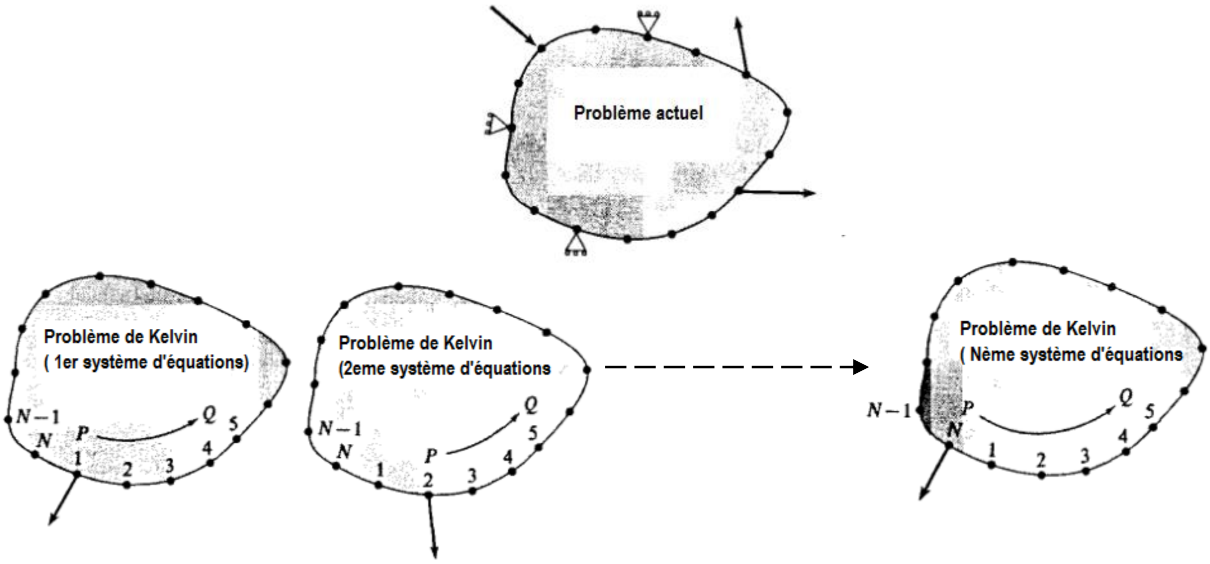


Figure 2.4: Procédure de résolution du problème de Kelvin sur les nœuds
De la frontière du domaine [1]

2.3.4.4 Approximation numérique

Si la frontière Γ qui enveloppe le domaine Ω était représentée par une équation simple (par exemple une équation de cercle), une solution analytique de l'équation intégrale pourra toujours être trouvée, mais d'une façon fastidieuse. Ainsi, pour couvrir n'importe quelle géométrie, il n'y a qu'une option, celle d'implémenter numériquement les équations intégrales **(2.8)** et **(2.10).**

La frontière ou la surface du domaine de solution est divisée en un nombre fini d'éléments interconnectés. Sur chaque élément, la variation de la géométrie et des variables (déplacement et contraintes à la surface) doivent être décrite. Cette variation peut être constante, linéaire, quadratique, cubique ou d'un ordre supérieur. Il est possible de permettre à la variation de la géométrie d'être indépendante de la variation des variables (par exemple, description linéaire de la géométrie avec variation quadratique des déplacements ou des contraintes).

Les expériences des utilisateurs de la méthode aux frontières et la méthode des éléments finis, ont établi que dans la plus part des analyses des contraintes en 2D et en 3D, les éléments iso-paramétriques quadratiques fournissent le meilleur compromis entre la précision et l'efficacité. Les éléments iso-paramétriques sont des éléments qui utilisent que ce soit pour la géométrie ou les variables inconnues le même ordre de variation. C'est ce type d'éléments qui sera utilisé dans ce qui suit.

Les fonctions de formes sont le moyen le plus adéquat pour décrire le comportement de n'importe quel élément car elles utilisent un nombre de points sur chaque élément (dénommés 'nœuds' ou 'points nodaux') où la valeur de la variable est donnée. Ainsi, pour un élément quadratique, on a besoin de trois nœuds sur chaque élément : un au milieu et les deux autres aux extrémités. Dans les problèmes bidimensionnels, on peut définir un nouveau système de coordonnées local lié à l'élément en utilisant la variable ξ. L'origine de ce nouveau système de coordonnées admet comme origine le milieu de l'élément et les valeurs -1 et $+1$ aux nœuds extrêmes **(Figure 2.5)**.

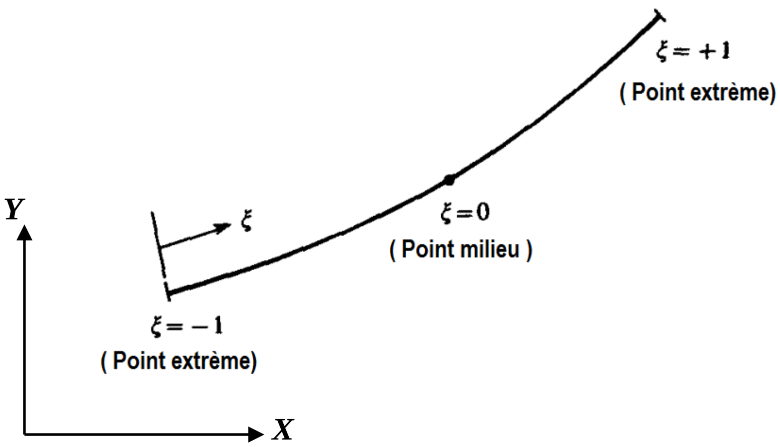


Figure 2.5 : *Elément isoparamétrique quadratique*

Ainsi, à travers les coordonnées de ses trois nœuds et la fonction de forme, la géométrie d'un élément peut être décrite comme suit

$$x(\xi)=\sum_{c=1}^{3}N_c(\xi)x_c=N_1(\xi)x_1+N_2(\xi)x_2+N_3(\xi)x_3 \tag{2.13}$$

$$y(\xi)=\sum_{c=1}^{3}N_c(\xi)y_c=N_1(\xi)y_1+N_2(\xi)y_2+N_3(\xi)y_3 \tag{2.14}$$

Où les fonctions de forme $N_c(\xi)$ sont des fonctions quadratiques qui doivent satisfaire deux conditions :

1. $N_c(\xi)=1$ au niveau du nœud c et
2. $N_c(\xi)=0$ au niveau des deux autres nœuds.

Pour obtenir une expression explicit pour les fonctions de formes, on suppose qu'elle a des coefficients inconnus tel que :

$$\begin{aligned} N_1(\xi)&=a_1\xi^2+a_2\xi+a_3 && (a)\\ N_2(\xi)&=a_4\xi^2+a_5\xi+a_6 && (b)\\ N_3(\xi)&=a_7\xi^2+a_8\xi+a_9 && (c)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Où les coefficients a_1 à a_9 sont constants pouvant être déterminés par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &N_1(-1)=1;\quad N_1(0)=0;\quad N_1(1)=0\\ &N_2(-1)=0;\quad N_2(0)=1;\quad N_2(1)=0\\ &N_3(-1)=0;\quad N_3(0)=0;\quad N_3(1)=1\end{aligned} \tag{2.16}$$

Etant donné que l'élément est isoparamétrique, les mêmes fonctions de forme sont employées pour les variables de la solution. Tel que :

$$\begin{aligned} u_x(\xi)&=\sum_{c=1}^{3}N_c(\xi)(u_x)_c=N_1(\xi)(u_x)_1+N_2(\xi)(u_x)_2+N_3(\xi)(u_x)_3\\ u_y(\xi)&=\sum_{c=1}^{3}N_c(\xi)(u_y)_c=N_1(\xi)(u_y)_1+N_2(\xi)(u_y)_2+N_3(\xi)(u_y)_3\end{aligned} \tag{2.17}$$

and

$$\begin{aligned} t_x(\xi)&=\sum_{c=1}^{3}N_c(\xi)(t_x)_c=N_1(\xi)(t_x)_1+N_2(\xi)(t_x)_2+N_3(\xi)(t_x)_3\\ t_y(\xi)&=\sum_{c=1}^{3}N_c(\xi)(t_y)_c=N_1(\xi)(t_y)_1+N_2(\xi)(t_y)_2+N_3(\xi)(t_y)_3\end{aligned} \tag{2.18}$$

En termes ξ les expressions explicit pour les fonctions formes sont :

$$\begin{aligned} N_1(\xi)&=-\frac{\xi}{2}(1-\xi) && (a)\\ N_2(\xi)&=(1+\xi)(1-\xi) && (b)\\ N_1(\xi)&=+\frac{\xi}{2}(1+\xi) && (c)\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.3.4.5 Schéma de d'intégration numérique

L'étape de l'intégration concerne l'intégration numérique des noyaux. Le choix du système de coordonnées local dans l'intervalle -1 à $+1$ pour les fonctions de forme a été fait pour qu'il soit dans les mêmes limites de la technique d'intégration par quadrature de Gauss. La **figure 2.6** résume le schéma de l'intégration des noyaux U_{ij} et T_{ij}.

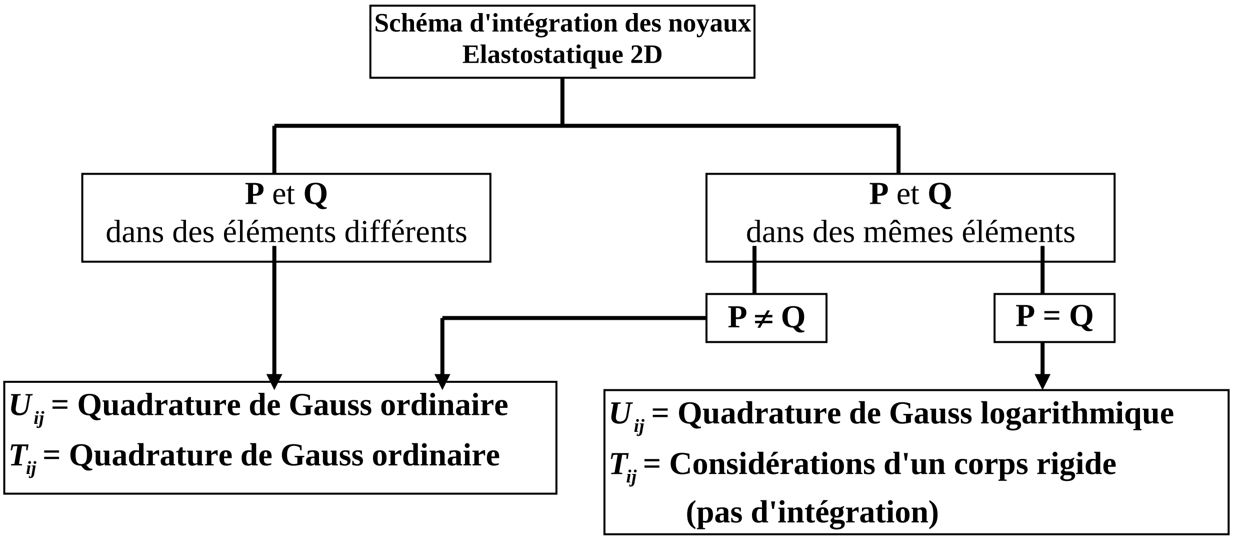


Fig 2.6: *Schéma d'intégration dans le problème de l'élastostatique en 2 D* **[1]**

2.4 CONCLUSION

Dans un problème qui implique un milieu physique continu solide pour lesquels on cherche à prédire les déplacements et les contraintes sur sa frontières Γ qui enveloppe son domaine Ω et soumis à des chargement externes avec des conditions aux limites et conditions initiales; la méthodes des éléments aux frontières basées sur les équations intégrales, représente par rapport à la méthode des éléments finis une solution optimale pour une résolution numérique adéquate avec tous les inconvénients qu'elle présente. La mise en œuvre de cette technique sera abordée dans le chapitre qui suit à travers une étude de cas relative au problème du phénomène de matage lors d'un clavetage d'un arbre avec l'alésage d'un moyeu.

Chapitre 03

Etude de cas

3.1 INTRODUCTION

Dans le présent chapitre, nous étudierons un cas technologique dans lequel il y a contact mécanique entre deux solides. L'analyse de ce contact sera menée à travers l'évaluation des contraintes en utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM: Boundary Element Method).

L'analyse des contraintes (ou analyse contrainte-déformation) est une discipline d'ingénierie qui utilise plusieurs méthodes pour déterminer les contraintes et les déformations dans les matériaux et les structures soumis à des forces. L'analyse des contraintes est une tâche essentielle pour les ingénieurs civils, mécaniques et aérospatiaux qui conçoivent des structures de différentes tailles, telles que des tunnels, des ponts, des barrages, des avions, des corps de missiles, des pièces mécaniques, voire des couverts et des pinces. L'analyse des contraintes est également utilisée dans la maintenance de telles structures et dans l'étude des causes de défaillance structurelle.

Une analyse des contraintes commence généralement par une description de l'ingénierie de la structure, des propriétés des matériaux utilisés dans ses pièces, de la manière dont les pièces sont assemblées et des forces maximales et habituelles devant être appliquées à la structure. Les données de sortie sont généralement une description quantitative de la façon dont les forces appliquées se propagent dans toute la structure, provoquant des contraintes, des déformations et des déflexions dans toute la structure et toutes ses parties. L'analyse porte sur des forces qui varient dans le temps, telles que les vibrations du moteur ou la charge des voitures en mouvement. Dans ce cas, les contraintes et les déformations sont des conjonctions spatio-temporelles **[9]**

En ingénierie, l'analyse des contraintes est souvent un outil plutôt qu'une fin en soi ; L'objectif principal est de concevoir des structures et des fabrications capables de résister à une charge spécifique, en utilisant un minimum de matériaux .L'analyse des contraintes peut être effectuée avec des techniques mathématiques traditionnelles, une modélisation mathématique analytique, une simulation informatique, des tests pilotes ou une combinaison de méthodes. Le terme analyse des contraintes est utilisé dans cet article à des fins de concision, en soulignant que les contraintes et les déformations sont d'égale importance. L'analyse structurelle commence par le calcul des déflexions ou des déformations et se termine par le calcul des contraintes.

Dans ce qui suit, nous allons en premier lieu décrire et présenter les données du problème et préciser le but en termes de détermination des efforts transmissibles, de vérification des conditions de résistance. En deuxième lieu il sera question d'une évaluation et d'une vérification des contraintes superficielles et internes par le biais d'une simulation afin de dégager les résultats concernant les contraintes et les déplacements pour vérifier la tenue de la structure.

3.2 DESCRIPTION DU PROBLEME

3.2.1 Présentation du centre d'intérêt

L'étude de cas concerne la transmission de puissance entre un moteur électrique et un ventilateur industriel centrifuge (organe récepteur) par système poulie-courroie **(Figure 3.1)**.

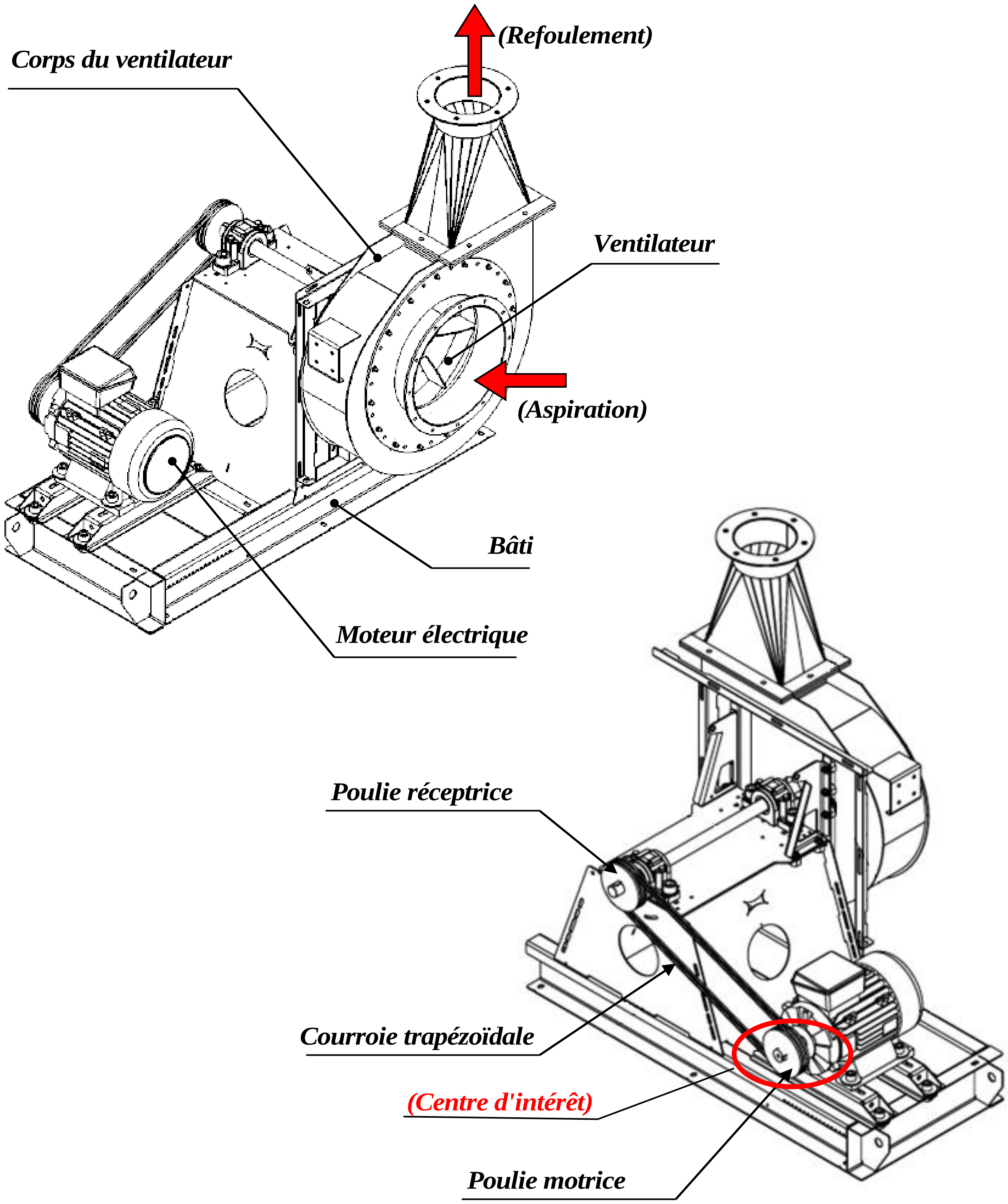


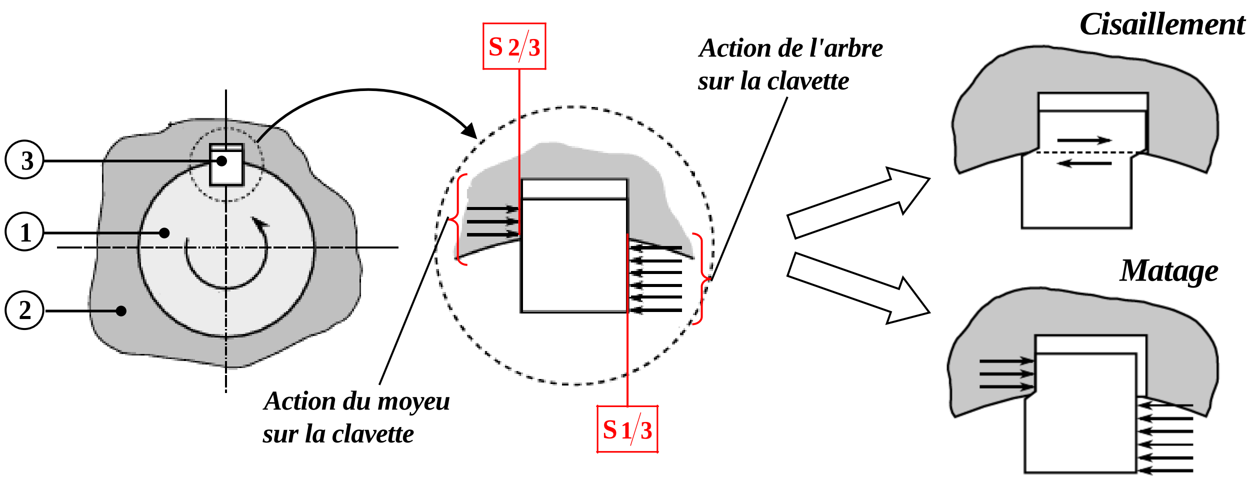
Figure 3.1: Vue en perspective de l'ensemble du ventilateur

3.2.2 Situation problème

En technologie de construction mécanique, pour créer une liaison en rotation entre un arbre de transmission et le moyeu de la poulie motrice, l'une des solutions constructives est l'utilisation de l'élément clavette. Cette dernière a pour fonction principale de transmettre un couple mécanique entre l'arbre et l'alésage du moyeu de la poulie. Lors de cette transmission de couple, des actions mécaniques exercées sur les surfaces de contact clavette-arbre et clavette-moyeu sollicitent la structure de clavette qui peut être déformée de deux manières **(Figure 3.2)**:

- **Par matage :** écrasement plastique local de la surface en contact.
- **Par cisaillement :** déformation par glissement des plans d'un milieu, tangentiellement aux efforts appliqués.

Si l'une de ces sollicitations est trop forte au regard de la résistance des matériaux, alors la clavette risque d'être déformée de manière permanente ou bien subir une rupture complète. Dans la grande majorité des cas, le matage est prépondérant sur le cisaillement.



S 1/3 :Surface de contact Arbre $\boxed{1}$ ***-Clavette*** $\boxed{3}$

S 2/3 :Surface de contact Moyeu $\boxed{2}$ ***-Clavette*** $\boxed{3}$

Figure 3.2: Phénomènes sollicitant une clavette lors de la transmission d'un couple

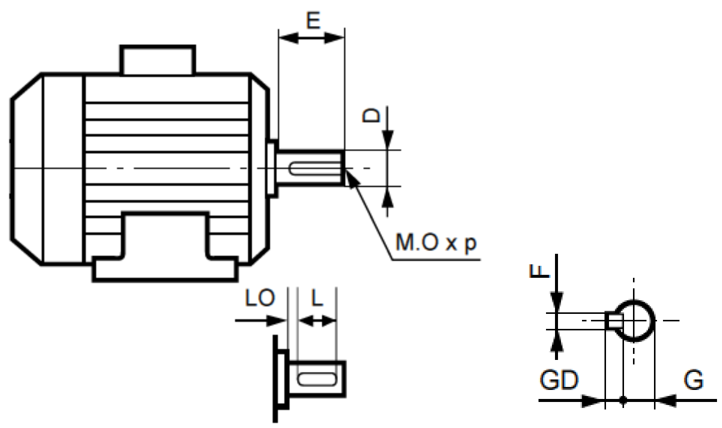
L'objectif principal de cette étude est l'analyse de la distribution des contraintes superficielles de contact et les contraintes internes de cohésion pour différentes conditions de fonctionnement. En premier lieu il sera question de déterminer les efforts transmissibles avec vérification de la tenue du matériau de la clavette à la rupture par cisaillement et à l'écrasement par matage et la déduction de la longueur utile de la clavette. En deuxième lieu il sera question d'une évaluation et d'une vérification des contraintes superficielles et internes par le biais d'une simulation afin de dégager les résultats concernant les contraintes et les déplacements leur comparaison aux seuils admissibles.

3.3 SIMULATION

3.3.1. Données techniques pour la simulation

3.3.1.1 Caractéristiques du moteur électrique

Le ventilateur est entrainé par un moteur électrique 380v/50Hz du fabricant **LEROY-SOMER** série **LS-90-L, 4 pôles** dont les caractéristiques sont données sur la **figure 3.3.**



Puissance Nominale	**1.5** KW
Vitesse de rotation	**1420** tr/min
F	**8**
GD	**7**
D	**24j6**
G	**20**
E	**50**
O	**M8**
Pas	**1.9**
L	**40**
LO	**6**

Figure 3.3: Caractéristiques du moteur électrique [10]

3.3.1.2 Caractéristiques de la clavette

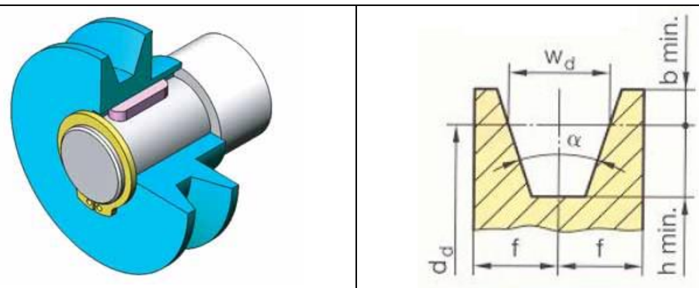
Suite aux données caractéristiques du moteur, la liaison en rotation arbre-poulie sera assurée par une clavette parallèle **forme A, 8×7×40, EN 10027-1: C45 (Figure 3.4).**

d	**24**
a	**8**
b	**7**
k	**27.3**
j	**20**
s	**0.25**

Figure 3.4: Caractéristiques de la clavette [11-12]

3.3.1.3 Caractéristiques de la poulie

La transmission de la puissance mécanique est assurée par deux poulies trapézoïdales profil SPA mono gorge NF ISO 4184, dont les caractéristiques techniques sont données sur la **figures 3.5.**



d_p	**200 mm**
α	**38°**
W_d	**11 mm**
b	**2.75 mm**
h	**11 mm**
e	**15 mm**
t	**± 0.3 mm**
f	**10 mm**

Figure 3.5: Caractéristiques de la poulie motrice et réceptrice [11]

3.3.2 Calcul préliminaire

Pour les besoin de la simulation et l'analyse des contraintes, un calcul préliminaire est nécessaire. Ce dernier portera sur deux quantités: L'effort appliqué à clavette et la longueur utile de la clavette.

3.3.2.1 Détermination des efforts sur la clavette

Pour une puissance nominale P_m à transmettre entre l'arbre du moteur électrique et le moyeu de la poulie motrice et dans l'hypothèse où les dimensions de la clavette sont petites devant le diamètre, l'effort $\vec{F}$ qui sera transmis et appliqué sur la clavette est donné par :

$$\|\vec{F}\| = \frac{60\,P_m}{\pi\, d\, N} \tag{3.1}$$

A partir des données des figures 3.2 et 3.3, l'application numérique de la relation **(3.1)** donne le résultat exposé dans le **tableau 3.1**

Tab 3.1: Effort exercé sur la clavette

Données			Résultat
$P_m\,(W)$	$d\,(m)$	$N\,(tr/min)$	$F\,(N)$
1 500	**24.10^{-3}**	**1 420**	**841.03**

Le point d'application de l'effort $\vec{F}$ est supposé situé sur le diamètre de l'arbre du moteur.

3.3.2.2 Détermination de la pression de matage

On dit qu'un solide est solicité au matage si la pression superficielle P exercée sur une surface de contact de ce solide, entraine une déformation permanente de ce dernier. On définit la pression de matage: On appelle pression de matage la pression exercée par chacune des pièces sur la portion de clavette qui est en contact. Cette pression est supposée uniforme sur toute la surface de contact.

Dans le cas d'un clavetage, la clavette est toujours plus « enfoncée » dans l'arbre que dans l'alésage du moyeu, de manière générale: **b** < **a**. Ainsi, c'est le contact clavette/moyeu qui est le plus contraignant. On va donc calculer la pression de matage sur ce contact **(figure 3.6)**.

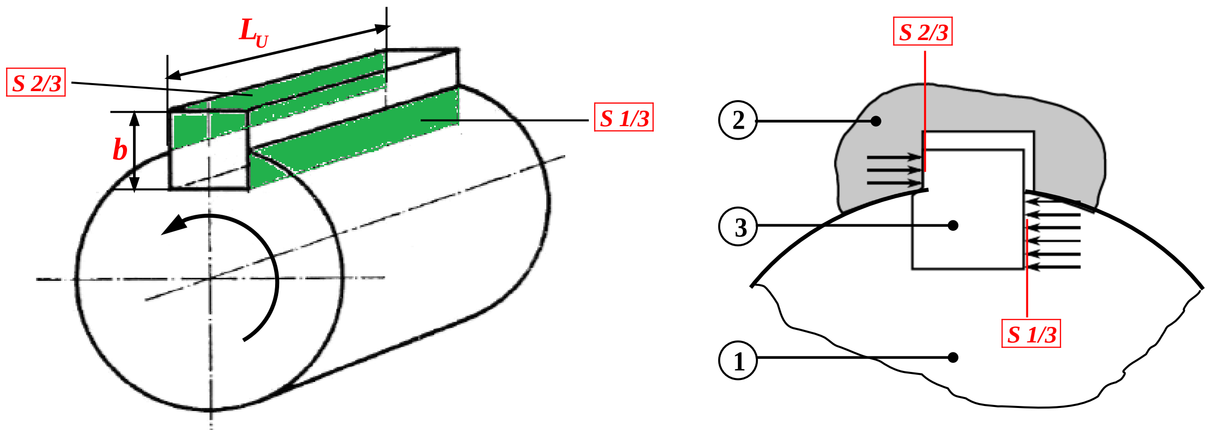


Figure 3.6: Surfaces latérales de la clavette sollicitées au matage

La tenu au matage du matériau de la clavette necessite une condition de résistance imposée sur la pression de matage P_{mat}, tel que:

$$P_{mat} = \frac{\left\|\vec{F}\right\|}{S_m} \leq P_{Adm} \tag{3.8}$$

Ou bien:

$$P_{mat} = \frac{2\left\|\vec{F}\right\|}{b.L} \leq P_{Adm} \tag{3.9}$$

Remarque: Pour un clavetage fixe (cas le plus fréquent) : **P_{Adm} = 40 à 150 MPa.**

L'application numérique de la relation **(3.9)** donne le résultat exposé dans le **tableau 3.2.**

Tab 3.2: Longueur utile selon le matage de la clavette

Données			**Résultat**
$F(N)$	$b(mm)$	$L(mm)$	$P_{mat}(N/mm^2)$
841.03	**7**	**40**	**6**

3.3.3 Modélisation et discrétisation par BEM

3.3.3.1 Modélisation de la clavette

Le problème étudié concerne le contact mécanique solide-solide définit entre les composants du système matériel composé des solides: clavette, arbre et poulie. Le centre d'intérêt de l'analyse des contraintes, est la clavette. La clavette ayant une section transversale constante elle est sollicitée à une pression de matage uniforme le long de sa longueur **(Figures 3.7a et 3.7b)**. la géométrie qui modélisera la clavette sera la frontière Γ de la section transversale prise au milieu de la clavette pour $\mathbf{L/2}$ constituée de quatre sous frontières: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ et Γ_4 **(Figure 3.7c)**.

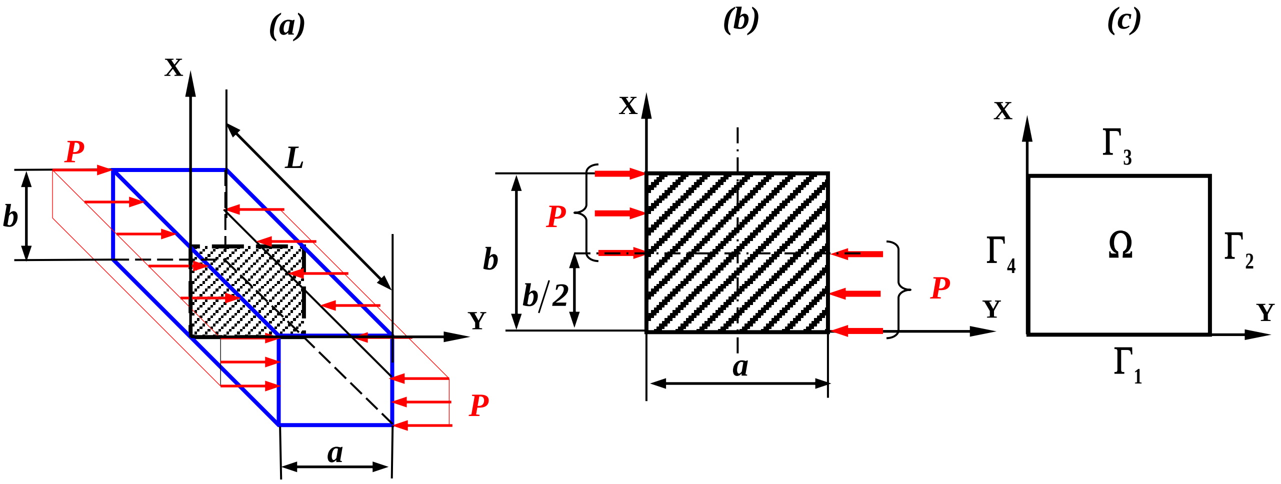
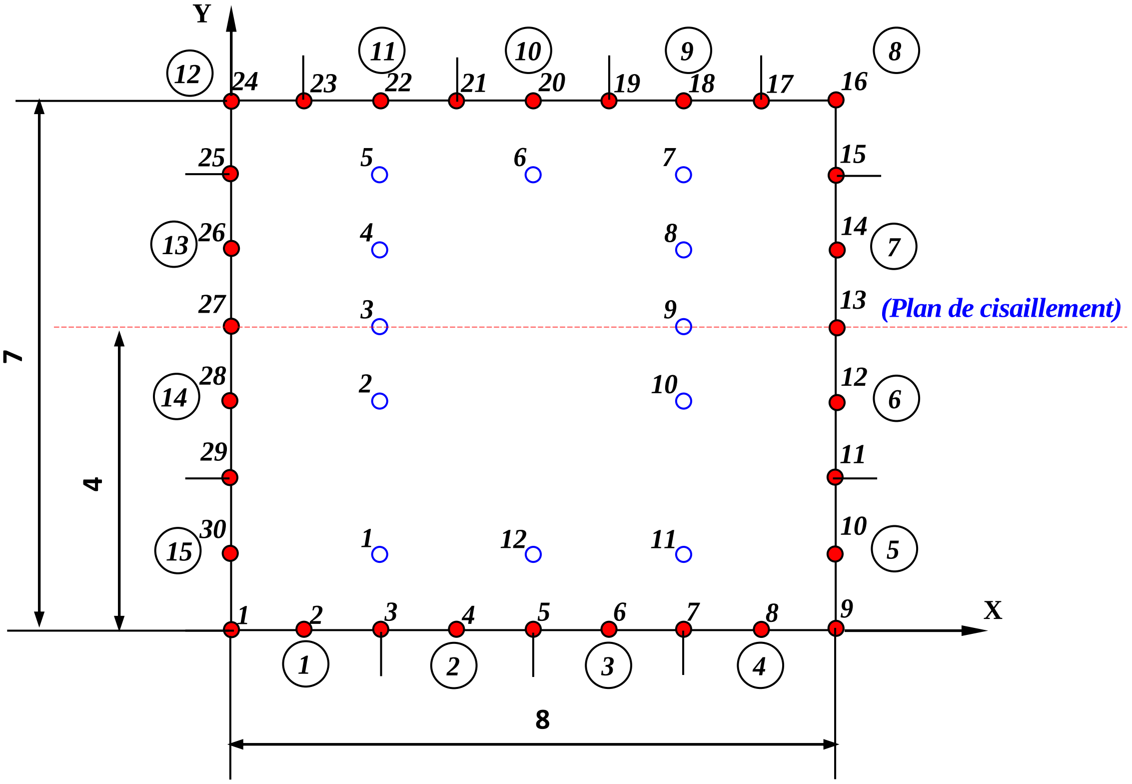


Figure 3.7: Chargement de la clavette par la pression de matage

3.3.3.2 Discrétisation de la clavette

Dans notre cas la section transversale de la clavette sera discrétisée selon la géométrie indiquée par la **(Figure 3.8).**



Nœuds sur la frontière de la clavette

Nœuds à l'intérieur de la clavette

Figure 3.8: Discrétisation de la géométrie

La désignation des éléments ainsi que les neouds associés est exposée sur le **tableau 3.3.**

Tab 3.3 : Eléments et nœuds associés

Frontière	N° Elément	N° Nœud		
Γ_1	1	1	2	3
	2	3	4	5
	3	5	6	7
	4	7	8	9
Γ_2	5	9	10	11
	6	11	12	13
	7	13	14	15
Γ_3	8	15	16	17
	9	17	18	19
	10	19	20	21
	11	21	22	23
Γ_4	12	23	24	25
	13	25	26	27
	14	27	28	29
	15	29	30	1

3.3.3.3 Déplacements imposés sur les frontières

La clavette étant enfoncée plus dans l'arbre que dans l'alésage du moyeu, selon [11] la frontière de la section transversale **(8 × 7 mm)** de la clavette sera encastrée au niveau des frontières en contact avec l'arbre jusqu'au plan de cisaillement de la clavette sur une profondeur de **4 mm** **(Figure 3.9)**.

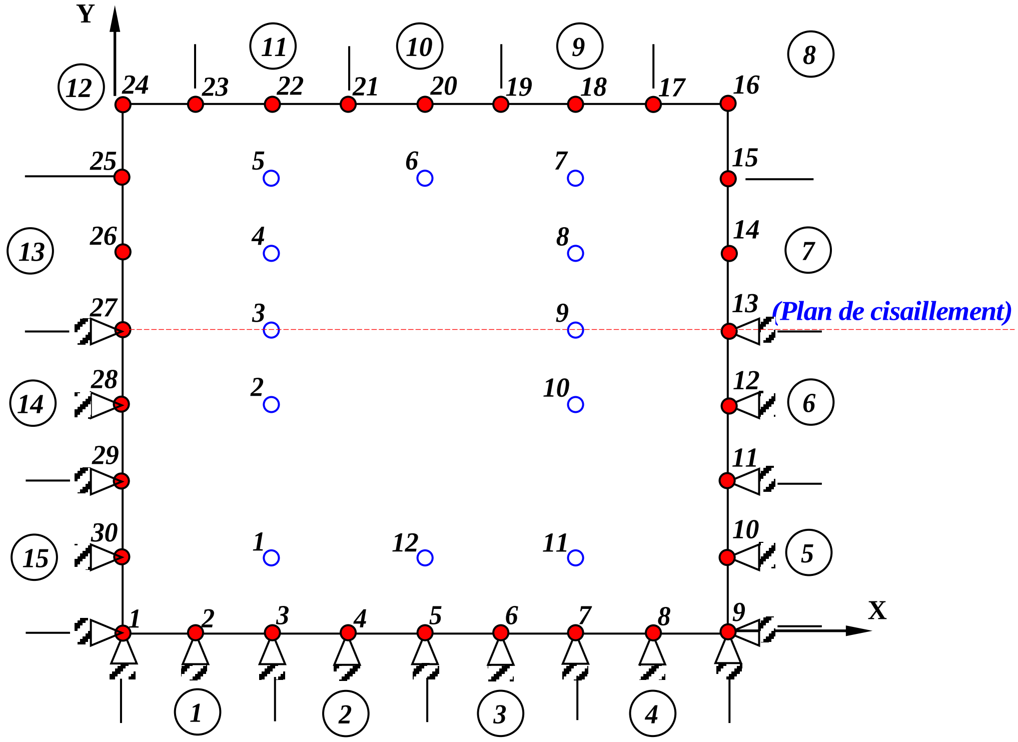


Figure 3.9: Eléments et nœuds à déplacement imposés nuls

Les éléments et les neouds associés concernés par des déplacements imposés nuls sont listés sur le **tableau 3.4.**

Tab 3.4: Déplacements imposés (Clavette encastrée coté arbre)					
Frontière	**Elément**	**N° Directions Direction X = 1 Direction Y = 2**	**Noeud 1**	**Noeud 2**	**Noeud 3**
Γ_1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
	2	**1**	**0**	**0**	**0**
	3	**1**	**0**	**0**	**0**
	4	**1**	**0**	**0**	**0**
Γ_2	**5**	**1**	**0**	**0**	**0**
	6	**1**	**0**	**0**	**0**
Γ_4	**14**	**1**	**0**	**0**	**0**
	15	**1**	**0**	**0**	**0**

3.3.3.4 Chargements imposés sur les frontières

L'ensemble des nœuds qui doivent potentiellement être chargés sont ceux qui appartiennent aux surfaces sollicitées à la pression de matage. Selon la discrétisation illustrée par la **figure 3.10**, la surface de matage e la clavette sera constituée d'un certain nombre de nœuds sollicités à la pression de matage P_{mat} . Tel que:

$$(Nb\ de\ noeuds\ chargés) = (Nb\ de\ noeuds\ sur\ pris\ suivant\ \ b/2) \times (Nb\ de\ noeuds\ sur\ pris\ suivant\ L)$$

$$(Nb\ de\ noeuds\ chargés) = 4 \times 41 = 164 \qquad (3.10)$$

La pression exercée sur chaque nœud de la surface de matage est donnée par:

$$p = \frac{P_{mat}}{(Nb\ de\ noeuds\ chargés)} = \frac{6}{164} = 0.03\left(N/mm^2\right) \qquad (3.11)$$

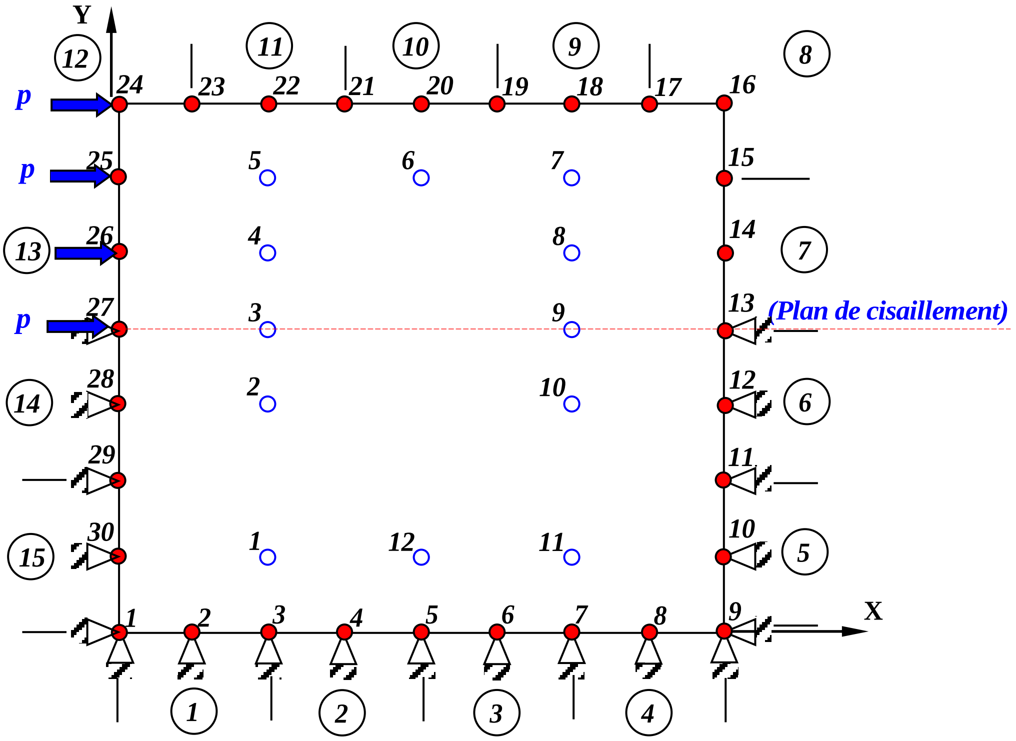


Figure 3.10: Localisation du chargement nodal

Les neouds associés concernés par les chargements imposés sont listés sur le **tableau 3.5**. Le chargement sous forme de pression nodale de compression, sa valeur sera accompagné du signe (-).

Tab 3.5: Chargement imposé (Pression de matage)

Frontière	Element	Noeud	p_x	p_y	p_z
Γ_4	12	23	0	0	0
		24	- 0.036	0	0
		25	- 0.036	0	0
	13	25	- 0.036	0	0
		26	- 0.036	0	0
		27	- 0.036	0	0

3.4 RÉSULTATS ET DISCUSSION

L'utilisation du code source du programme BEACON écrit en FORTRAN et trouvé dans la littérature [1] a fourni des résultats qui nous permettrons de faire une analyse concernant les déplacements et les contraintes aux frontières et à l'intérieur du domaine d'étude de la clavette.

3.4.1 Analyse des déplacements

3.4.1.1 Déplacements sur les frontières

1°.Résultats

Les résultats obtenus concernent les déplacements nodaux situés sur la frontière qui entoure la section transversale de la clavette suivants les directions principales associées au repère global (X,Y) et suivants les directions normale et tangentielle associées au repère local **(Tableau 3.6)**.

Tab 3.6 : Déplacements sur les frontières

Frontière	Noeud	Coord-X	Coord-Y	Dep-X	Dep-Y	Dep-Norm	Dep-Tang
Γ_1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	3	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	5	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	6	5.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	7	6.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	8	7.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	9	8.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Γ_2	10	8.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	11	8.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	12	8.0	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	13	8.0	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	14	8.0	5.0	0.0403	-0.0189	0.0403	-0.0189
	15	8.0	6.0	0.0607	-0.0187	0.0635	0.0014
	16	8.0	7.0	0.0726	-0.0183	0.0384	-0.0643
Γ_3	17	7.0	7.0	0.0724	-0.0074	-0.0074	-0.0724
	18	6.0	7.0	0.0735	-0.0016	-0.0016	-0.0735
	19	5.0	7.0	0.0800	-0.0004	-0.0004	-0.0800
	20	4.0	7.0	0.0945	-0.0007	-0.0007	-0.0945
	21	3.0	7.0	0.1182	0.0017	0.0017	-0.1182
	21	2.0	7.0	0.1540	0.0120	0.0120	-0.1540
	23	1.0	7.0	0.2049	0.0387	0.1015	-0.1822
	24	0.0	7.0	**0.2424**	**0.0876**	-0.1094	-0.2333
Γ_4	25	0.0	6.0	0.1863	0.0707	-0.1863	-0.0707
	26	0.0	5.0	0.1252	0.0557	-0.1252	-0.0557
	27	0.0	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	28	0.0	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	29	0.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	30	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0

2°. Interprétation

Le **tableau 3.6** présente la distribution des composantes du **vecteur déplacement** sur la frontière Γ du profil de la section transversale de la clavette étudiée. Ainsi:

- Le long de la sous-frontière Γ_1 associée aux éléments 1, 2,3 et 4, tous les nœuds sont supposés encastrés. Ainsi, ils n'admettent aucun déplacement suivant les directions X et Y, d'où des valeurs de déplacement nulles du nœud N°1 jusqu'au nœud N°9.
- Le long de la sous-frontière Γ_2 associées aux éléments 5,6,7 et 8 seuls les nœuds N°10,11,12 et 13 sont supposés encastrés, ainsi leurs déplacements sont nuls suivant les directions X et Y. Tandis que les autres nœuds restant (13, 14,15 et 16) et au vue de la déformation de la clavette seront assujetti à se déplacer d'une part positivement suivant la direction X avec un maximum de **+ 0.0726 mm** au nœud N°16 et un minimum **+ 0.0403 mm** au nœud 14 et d'autre part négativement suivant la direction Y avec un maximum de **- 0.0189 mm** au nœud N°14 et un minimum de **- 0.0183 mm** au nœud N°16 **(Figure 3.11)**.
- Le long de la sous-frontière Γ_3 associées aux éléments 8,9,10,11 et 12 , on assiste à une déformation de la frontière avec des déplacements positifs et négatifs suivant les deux direction Avec un déplacement positif maximal de **+ 0.2424 mm** suivant la direction X et un déplacement négatif maximal de **-0.0074 mm** suivant la direction Y.
- Le long de la sous-frontière Γ_4 associées aux éléments 12,13,14 et 15 seuls les nœuds N°27,28,29 et 30 sont supposés encastrés. Ainsi, leurs déplacements sont nuls suivant les directions X et Y. Tandis que les autres nœuds restant (26, 25, et 24) et au vue du matage de la clavette seront assujetti à se déplacer d'une part positivement suivant la direction X avec un maximum de **+ 0.1863 mm** au nœud N°25 et d'autre part positivement suivant la direction Y avec un maximum de **0.0557 mm** au nœud N°26.

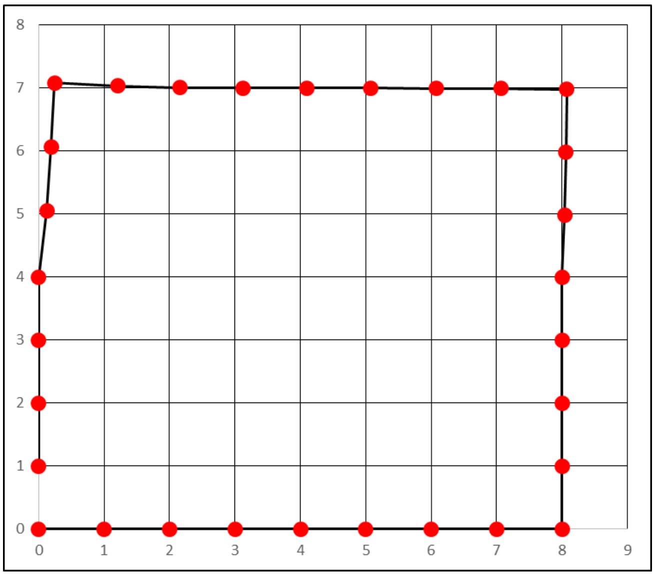


Figure 3.11: Déformation du profil transversal de la clavette

3.4.1.2 Déplacement internes

1°.Résultats

Les résultats obtenus concernent les déplacements nodaux situés à l'intérieur de la matière de la clavette suivants les directions principales associées au repère global (X,Y) et suivants les directions normale et tangentielle associées au repère local **(Tableau 3.7)**.

Tab 3.7 : Déplacement internes

Noeud	Coord-X	Coord-Y	Dep-X	Dep-Y
1	2	1	**0.0009**	**0.0002**
2	2	3	0.0144	-0.0033
3	2	4	0.0382	-0.0090
4	2	5	0.0801	**-0.0099**
5	2	6	**0.1239**	-0.0021
6	4	6	0.0845	-0.0077
7	6	6	0.0643	-0.0033
8	6	5	0.0463	-0.0048
9	6	4	0.0269	-0.0068
10	6	3	0.0140	-0.0080
11	6	1	0.0028	-0.0037
12	4	1	0.0026	-0.0028

2°. Interprétation

Le **tableau 3.7** présente la distribution des composantes du **vecteur déplacement** à l'intérieur de la section transversale de la clavette étudiée. Au vue de la déformation, on observe des déplacements positifs suivant la direction X avec un maximum de **+ 0.1239 mm** et des déplacements négatifs suivant la direction Y avec un maximum de **- 0.0099 mm**. La **figure 3.12** illustre la déformation des points situés à l'intérieur du domaine de la clavette.

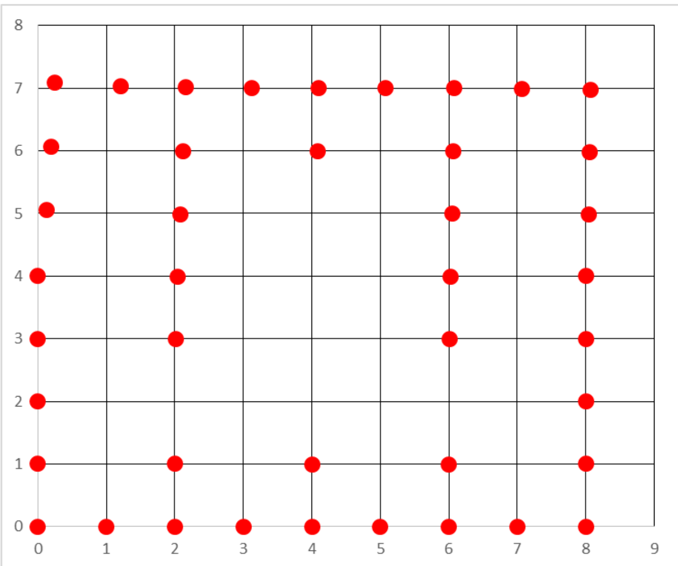


Figure 3.12: Déformation des points internes de la clavette

3.4.2 Analyse des contraintes

3.4.2.1 Tensions superficielles (t_j)

1°.Résultats

Les résultats obtenus concernent les tensions nodales situés sur la frontière qui entoure la section transversale de la clavette suivants les directions principales associées au repère global (X,Y) et suivants les directions normale et tangentielle associées au repère local **(Tableau 3.8)**.

Tab 3.8 : Répartition nodale des tensions superficielles

Frontière	Elément	Noeud	Tension-X	Tension-Y	Tension-Norm	Tension-Tang	Ang-Norm
Γ_1	1	1	-0.0009	-0.0007	0.0007	-0.0009	270
		2	-0.0001	-0.0015	0.0015	-0.0001	270
		3	0.0002	-0.0004	0.0004	0.0002	270
	2	3	0.0002	-0.0004	0.0004	0.0002	270
		4	0.0000	0.0016	-0.0016	0.0000	270
		5	-0.0004	0.0033	-0.0033	-0.0004	270
	3	5	-0.0004	0.0033	-0.0033	-0.0004	270
		6	-0.0008	0.0045	-0.0045	-0.0008	270
		7	-0.0010	0.0049	-0.0049	-0.0010	270
	4	7	-0.0010	0.0049	-0.0049	-0.0010	270
		8	-0.0012	0.0043	-0.0043	-0.0012	270
		9	0.0009	0.0009	-0.0009	-0.0009	270
Γ_2	5	9	-0.0009	0.0009	-0.0009	0.0009	0
		10	-0.0041	0.0017	-0.0041	0.0017	0
		11	-0.0094	0.0053	-0.0094	0.0053	0
	6	11	-0.0094	0.0053	-0.0094	0.0053	0
		12	-0.0080	0.0025	-0.0080	0.0025	0
		13	-0.0604	0.0375	-0.0604	0.0375	0
	7	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
		14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
		15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
Γ_3	8	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	341.57
		16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	45
		17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	108.43
	9	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
		18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
		19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
	10	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
		20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
		21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
	11	21	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
		22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90

		23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	90
Γ_4	12	23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	71.565
		24	0.0255	0.0000	-0.0180	-0.0180	135
		25	0.0342	0.0000	-0.0324	0.0108	198.43
	13	25	0.0360	0.0000	-0.0360	0.0000	180
		26	0.0360	0.0000	-0.0360	0.0000	180
		27	0.0360	0.0000	-0.0360	0.0000	180
	14	27	-0.1694	-0.0954	0.1694	0.0954	180
		28	-0.0022	-0.0002	0.0022	0.0002	180
		29	-0.0143	-0.0085	0.0143	0.0085	180
	15	29	-0.0143	-0.0085	0.0143	0.0085	180
		30	-0.0013	-0.0009	0.0013	0.0009	180
		1	-0.0009	-0.0007	0.0009	0.0007	180

2°. Interprétation

Le **tableau 3.8** présente la distribution des composantes du **tenseur des tensions superficielles** sur la frontière Γ du profil de la section transversale de la clavette étudiée. Ainsi:

- Le long de la sous-frontière Γ_1 associée aux éléments 1, 2,3 et 4, et vu que tous les nœuds sur cette sous-frontière sont supposés encastrés, on observe des tensions superficielles nulles suivant les directions X et Y.
- Le long de la sous-frontière Γ_2 associée aux éléments 3, 6,7 et 8, mis à part les nœuds N° 10,11,12 et 13 supposés encastrés, on observe suivant les directions X et Y des tensions superficielles presque nulles au niveau des nœuds 14,15 et 66 vu qu'il n'existe aucune sollicitation tangentielles sur cette partie libre de la frontière.
- Le long de la sous-frontière Γ_3 associée aux éléments 9, 10,11 et 12, on observe suivant les directions X et Y des tensions superficielles nulles. Cela est du au fait que cette frontière n'est sollicitée à aucun chargement tangentiel, donc elle se retrouve libre et dégagée de toutes entrave tangentielle.
- Le long de la sous-frontière Γ_4 associée aux éléments 12, 13,14 et 15, mis à part les nœuds N° 27,28,29 et 30 supposés encastrés, on observe suivant les directions X et Y des tensions superficielles presque nulles au niveau des nœuds 24,25 et 26 vu qu'il n'existe aucune sollicitation tangentielles sur cette partie libre de la frontière.

3.4.2.2 Contraintes superficielle (σ_{ij})

1°.Résultats

Les résultats obtenus concernent les contraintes nodales principales $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ ainsi que la contrainte équivalente σ_{eq} de Von-Mises au niveau de la frontière de la clavette **(Tableau 3.9)**.

Tab 3.9 : Contraintes superficielle

Frontière	Noeud	σ_{XX}	σ_{YY}	σ_{XY}	σ_{ZZ}	σ_{Eq} *(Von-Mises)*
Γ_1	1	0.0006	0.0005	0.0008	0.0003	0.0014
	2	0.0006	0.0015	0.0001	0.0006	0.0009
	3	0.0002	0.0004	-0.0002	0.0002	0.0005
	4	-0.0007	-0.0016	0.0000	-0.0007	0.0009
	5	-0.0014	-0.0033	0.0004	-0.0014	0.0020
	6	-0.0019	-0.0045	0.0008	-0.0019	0.0029
	7	-0.0021	-0.0049	0.0010	-0.0021	0.0033
	8	-0.0019	-0.0043	0.0012	-0.0019	0.0032
	9	-0.0007	-0.0007	0.0009	-0.0004	0.0016
Γ_2	10	-0.0041	-0.0017	0.0017	-0.0017	0.0038
	11	-0.0094	-0.0040	0.0053	-0.0040	0.0106
	12	-0.0080	-0.0034	0.0025	-0.0034	0.0063
	13	-0.0302	-0.0286	0.0188	-0.0176	0.0346
	14	0.0000	-0.0103	0.0000	-0.0031	0.0091
	15	0.0000	0.0057	0.0001	0.0017	0.0051
	16	-0.0001	-0.0001	0.0001	-0.0001	0.0002
Γ_3	17	0.0012	0.0000	0.0001	0.0004	0.0011
	18	-0.0041	0.0000	0.0000	-0.0012	0.0037
	19	-0.0106	0.0000	0.0000	-0.0032	0.0094
	20	-0.0210	0.0000	0.0000	-0.0063	0.0187
	21	-0.0310	0.0000	0.0000	-0.0093	0.0276
	22	-0.0477	0.0000	0.0000	-0.0143	0.0424
	23	-0.0490	-0.0019	0.0056	-0.0153	0.0432
	24	-0.0345	0.0015	0.0015	-0.0099	0.0320
Γ_4	25	-0.0360	-0.0106	0.0000	-0.0140	**0.0239**
	26	-0.0360	0.0234	0.0000	-0.0038	**0.0515**
	27	0.0667	0.0703	0.0477	0.0411	**0.0871**
	28	0.0022	0.0009	0.0002	0.0009	0.0013
	29	0.0143	0.0061	0.0085	0.0061	0.0168
	30	0.0013	0.0005	0.0009	0.0005	0.0016

2°.Interprétation

Le **tableau 3.9** présente la distribution des composantes du **tenseur des contraintes superficielles** sur la frontière Γ du profil de la section transversale de la clavette étudiée. Ainsi:

- Le long de la sous-frontière Γ_1 associée aux éléments 1, 2,3 et 4, et vu que tous les nœuds sur cette sous-frontière sont supposés encastrés, on observe des contraintes superficielles nulles suivant les directions X et Y.
- Le long de la sous-frontière Γ_2 associée aux éléments 3, 6,7 et 8, mis à part les nœuds N° 10,11,12 et 13 supposés encastrés, on observe suivant les directions X et Y des contraintes superficielles presque nulles au niveau des nœuds 14,15 et 66 vu qu'il n'existe aucune sollicitation tangentielles sur cette partie libre de la frontière.
- Le long de la sous-frontière Γ_3 associée aux éléments 9, 10,11 et 12, on observe suivant les directions X et Y des contraintes superficielles nulles. Cela est du au fait que cette frontière n'est sollicitée à aucun chargement tangentiel, donc elle se retrouve libre et dégagée de toutes entrave tangentielle.
- Le long de la sous-frontière Γ_4 associée aux éléments 12, 13,14 et 15, mis à part les nœuds N° 27,28,29 et 30 supposés encastrés, on observe suivant les directions X et Y des tensions superficielles presque nulles au niveau des nœuds 24,25 et 26 vu qu'il n'existe aucune sollicitation tangentielles sur cette partie libre de la frontière.

3.4.2.3 Contraintes internes

1°.Résultats

Les résultats obtenus concernent les contraintes nodales principales $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ ainsi que la contrainte équivalente σ_{eq} de Von-Mises situées à l'intérieur **(Tableau 3.10**.

Tab 3.10: Contraintes internes

Noeud	σ_{XX} (N/mm^2)	σ_{YY} (N/mm^2)	σ_{XY} (N/mm^2)	σ_{ZZ} (N/mm^2)	σ_{Eq} *(Von-Mises)*
1	0.0008	0.0003	0.0002	0.0003	0.0006
2	0.0063	-0.0025	0.0031	0.0011	0.0093
3	0.0044	-0.0037	0.0111	0.0002	**0.0205**
4	-0.0112	-0.0004	0.0148	-0.0035	**0.0274**
5	-0.0278	-0.0005	0.0108	-0.0085	**0.0307**
6	-0.0162	-0.0010	0.0084	-0.0051	0.0200
7	-0.0068	-0.0011	0.0058	-0.0024	0.0113
8	-0.0090	-0.0021	0.0086	-0.0034	0.0161
9	-0.0107	-0.0022	0.0073	-0.0039	0.0148
10	-0.0081	-0.0035	0.0039	-0.0035	0.0082
11	-0.0026	-0.0049	0.0013	-0.0023	0.0034
12	-0.0008	-0.0037	0.0013	-0.0014	0.0034

2°.Interprétation

Le **tableau 3.10** présente la distribution des composantes du **tenseur de contraintes** à l'intérieur de la section transversale de la clavette étudiée. Au vue de ces résultats, on observe des contraintes de compression (valeur de contraintes négatives) et des contraintes de traction (valeur de contraintes positives). On relève des contraintes équivalentes de Von-Mises maximales de **0.0205 (N/mm²)** au niveau du nœud intérieur N° 3, de **0.0274 (N/mm²)** au niveau du nœud intérieur N° 3 et de **0.0307 (N/mm²)** au niveau du nœud intérieur N° 5. Ces valeurs sont dues au fait que ces trois nouds intérieurs sont situés près de la zone de chargement de matage qui sollicité la clavette.

3.5 CONCLUSION

Au terme de ce chapitre qui traite le cas d'une transmission mécanique dans un ventilateur industriel, l'étude a concerné la liaison mécanique par clavette entre le moteur électrique et la poulie motrice. L'objectif était d'analyser le comportement mécanique de l'élément clavette et plus précisément le contact clavette-arbre-moyeu de poulie en terme de contrainte de matage.

Les résultats obtenus ont concerné une clavette parallèle, forme A, 8×7×40 EN 10027-1 faite en matériau acier nuance C45. Selon les données prises dans la description du problème. Ainsi, la simulation du matage de la clavette avec un état de déformations planes a fourni ce qui suit:

- En termes de déplacements nodaux, la clavette subira un déplacement nodal maximal localisé au niveau du nœud N°24 de **0.2424 mm** suivant la direction X et de **0.0876 mm** suivant la direction X.
- En terme de tensions superficielles et à la lecture des résultats, on peut dire que la clavette ne subira presque aucune tension superficielle sur sa frontière, étant donné qu'une partie de cette dernière est supposée encastrée et que l'autre partie est libre de toutes sollicitations tangentielles.
- En termes de contraintes superficielles et à la lecture des résultats, on peut dire que la clavette ne subira presque aucune contrainte superficielle sur sa frontière, étant donné qu'une partie de cette dernière est supposée encastrée et que l'autre partie est libre de toutes sollicitations tangentielles. Cependant, il, faut noter que les nœuds N°25,26 et 27 appartenant à la frontière sollicitée au matage admettent des contraintes équivalentes de Von-Mises maximales de **0.0239 (N/mm²)** au niveau du nœud intérieur N° 25, de **0.0515 (N/mm²)** au niveau du nœud intérieur N° 26 et de **0.0871 (N/mm²)** au niveau du nœud intérieur N° 27.

Conclusion Générale

Au terme de ce mémoire, qui synthétise le projet de fin d'études de mon cursus universitaire le fait de s'impliquer dans ce thème m'a permis de prendre conscience de l'importance des liaisons mécanique par clavette dans une transmission de puissance. Ainsi, à l'issue de ce mémoire, j'ai appris que pour concevoir et construire des clavettes fiables et durables, l'aspect contact entre les pièces mécaniques et les éléments d'assemblage est très important.

Dans ce contexte, et à partir de données initiales, notre travail a porté sur une étude de constatation à travers une simulation en analyse statique sous environnement MS POWER STATION de l'interaction entre clavette et le moyeu d'une poulie motrice. Des données pratiques prises dans la littérature ont été exploitées pour la création des modèles géométrique de la clavette afin de déterminer la distribution des déplacements et des contraintes, par la méthode des éléments de frontière (BEM) lors du phénomène de matage qui sollicite la clavette lors de la transmission de puissance.

On peut dire et juger que les objectifs fixés et tracés dans notre plan de travail ont été atteint étant donné qu' à partir d'un certaines hypothèses on n'a pu en premier lieu modéliser et mailler la structure de la clavette et en deuxième lieu obtenir la répartition des déplacements et des contraintes généré par le matage au niveau des frontières et l'intérieur de la clavette.

En ce qui concerne les résultats obtenus, notre analyse a concerné une clavette parallèle, forme A, 8×7×40 EN 10027-1 faite en matériau acier nuance C45. Selon les données prises dans la description du problème, la clavette subit un chargement latéral maximal de **841.03 N** localisé au niveau des surfaces de contact clavette-arbre et clavette moyeu provoquant ainsi le matage de la clavette avec un état de déformations planes. La simulation a fourni un déplacement maximal de **0.242 mm** suivant la direction X et de **0.0876 mm** suivant la direction Y. Tandis que pour les contraintes, la simulation a fourni une contrainte de Von-Mises maximale de **0.087 N/mm^2**, cette dernière se trouvant largement en dessous des seuils limites autorisés.

Les perspectives de ce travail sont d'une part, la reprise de la simulation en utilisant un code commercial dédié à l'analyse multiphasique. D'autre part nous souhaiterions élargir l'analyse du problème de contact à d'autres applications telles que les roulements, les rotules, les paliers, les cames, etc….

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **A. ADIB. BECKER,**"*The Boundary Element Method in Engineering A complete course*",Department of Mechanical engineering University of Nottingham, 1992

[2] **VALENTIN L. POPOV and MARKUS HEB** "*Method of Dimensionality Reduction in Contact Mechanics and Friction*" Springer-Verlag Berlin Heidelberg ,2015

[3] **K.W.Man**,"*Contact mechanics using boundary element* ", Computational Mechanincs Publication,UK,1994

[4] **HERTZ.H**,"On the contact of elastic solids", London,1986

[5] **L. CHAMPANEY** *"Contact unilatéral entre solides élastiques "* Notes de cours**,** UVSQ (Université de Versailles - Services centraux),2008

[6] **E. GOUCALVÈS,** "*Résolution numérique, discrétsation des EDO et EDP* ", Polycope de cours, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005

[7] **KOK HWA YU, A. HALIM KADARMAN, HARIJONO DJOJODIHARDJO**, " *Development and implementation of some BEM variants—A critical review*", Engineering Analysis with Boundary Elements,Elsevier,2010

[8] **MICHAEL SCHÄFER**, "*Computational Engineering –Introduction to Numerical Methods*", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006

[9] **Sylvie POMMIER "** *Mécanique des matériaux* **"** Saphire – Matériaux, Mécanique Des Matériaux, Université de Paris-saclay

[10] **LEROY-SOMER "** *Catalogue générale*", 2019

[11] **André . CHEVALIER**,"*Guide du dessinateur industriel*", Edition Hachette, 2004

[12] **EMILE-MAURIN**, "*Catalogue produits métallurgiques*", Edition CMG,2005

الملخص

يتعلق العمل الحالي بأحد جوانب ميكانيكا المواد الصلبة القابلة للتشوه ، وهي عملية التلامس الميكانيكي بين جسميـنِ صـلبيـينِ . كحالة ، اعتبرنا خابورا متوازيًا مثبتًا في نهاية العمود مع تقييم الاجهادات والتشوهات أثناء نقل الطاقة الحركية بواسطة نظام بكرة الحزام. ركزت الدراسة على التلامس الميكانيكي بين كل من "الخبور و العمود" و "الخابورو البكرة "، بدون احتكاك وبدون التصاق بين الأسطح الملساء بطريقة العناصر الحدودية. يعرض التلامس بين العمود الرئيسي والبكرة الرئيسية الصيغ التقليدية المستخدمة لوصف ظروف التلامس أحادي الجانب مع الاحتكاك أو بدونه. يقتصر على حالات التلامس بين المواد الصلبة المرنة ، ويتم تقديم أكثر طرق التحليل شيوعًا. النتائج التي تم الحصول عليها تتفق مع نظريات الاتصال وتظهر إمكانات هذه الطريقة العددية لهذا المجال من الدراسة.

Résumé

Le présent travail concerne l'un des aspects de la mécanique des solides déformables à savoir le contact mécanique solide-solide. Comme cas, on a considéré une clavette parallèle montée en bout d'arbre avec évaluation des contraintes et des déplacements lors de la transmission de puissance par système poulie courroie. L'étude a portée sur le contact normal clavette-arbre et clavette poulie, sans frottement et sans adhésion entre surfaces lisses par la méthode des éléments aux frontières. le contact clavette-arbre et clavette-poulie, présente les formulations classiques employées pour la description des conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement. Il se restreint aux cas du contact entre solides élastiques Les méthodes de résolution les plus courantes sont présentées. Les résultats obtenus sont en accord avec les théories du contact et montre le potentiel de cette méthode numérique pour ce domaine d'étude.

Abstract

The present work concerns one of the aspects of the mechanics of deformable solids, namely the solid-solid mechanical contact. As a case, we considered a parallel key mounted at the end of the shaft with evaluation of the stresses and displacements during the power transmission by pulley belt system. The study focused on normal key-shaft and pulley key contact, without friction and without adhesion between smooth surfaces by the boundary element method. the key-shaft and key-pulley contact presents the classic formulations used for the description of the conditions of unilateral contact with or without friction. It is restricted to the cases of contact between elastic solids. The most common methods of resolution are presented. The results obtained are in agreement with contact theories and show the potential of this numerical method for this field of study.