

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Ibn Khaldoun de Tiaret

Faculté des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique



MÉMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Génie Mécanique

Parcours : Master

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Analyse du flambement thermique des
plaques poreuses en matériau FGM

Préparé par :

HEDJADJ Brahim
SAIDI Riadh Abdelbaki

Soutenu publiquement le : .. / 07 / 2021, devant le jury composé de :

M. MECHEKOUR Elhadi	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun)	Président
M. MOULGADA Abdelmajid	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. ZAGANE Mohamed El Salleh	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Examineur
M. SAAD Mohamed	Maître de Conférences "B" (Univ. Ibn Khaldoun)	Encadreur
M. HADJI Lazreg	Maître de Conférences "A" (Univ. Ibn Khaldoun)	Co-Encadreur

Année universitaire : 2020 - 2021

Remerciements

Tout d'abord nous remercions avant tous, dieu le tout puissant qui nous a donné le courage, et la volonté pour atteindre notre objectif, et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation durant tous les cycles.

Il est difficile d'exprimer en quelques mots nos profondes reconnaissances vers notre promoteurs **M. SAAD Mohamed et M. Hadji Lazeg** qui an assuré la direction scientifique de ce travail et pris le temps de nous faire profiter avec patience de ses expérience, ses connaissances et ses disponibilité constante à la réalisation de ce travail, veuillez accepter monsieur les expressions de nos sincères remerciements.

Nos remerciements vont aux membres du jury d'avoir honoré notre soutenance et tout l'effort fourni afin de juger ce modeste travail.

Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département de Génie Mécanique qui ont contribué à notre formation du master en Génie Mécanique.

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du personnel technique et administratif du département de Génie Mécanique de Tiaret ainsi que tous nos collègues.

A tous ceux ou celles qui nous apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de nos vive et sincère reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie le travail :

A mes chers parents.

A ma famille..., mes frères et sœurs.

A tous mes amis et collègues.

A la mémoire de ceux qu'on aime et qui sont partis...

Sommaire

<u>Résumé</u>	I
<u>Abstract</u>	II
<u>ملخص</u>	III
<u>Liste des figures</u>	IV
<u>Liste des tableaux</u>	VI
Introduction générale.....	1
I.1. Introduction.....	3
I.2.Aperçu historique sur les matériaux à gradient de propriétés.....	3
I.3. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés	4
I.4. L'intérêt d'utilisation des FGM.....	6
I.5. Méthodes d'élaboration des FGM:	6
I.5.1.Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	7
I.5.2.Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	9
I.5.3.Compaction Sèche des Poudres	9
I.5.4.Dépôt par Electrophorèse.....	9
I.5.5.Projection Plasma.....	10
I.5.6.C. V. D. et P. V. D.	10
I.5.7.Frittage et Infiltration.....	10
I.5.8.Frittage Laser Différentiel.....	11
I.5.9 Implantation Ionique (Sputtering).....	11
I.5.10. Dépôt par Centrifugation	11
I.6. Propriétés physiques et mécaniques des FGM	12
I.6.1.Propriétés physiques de l'aluminum	12
I.6.2. Propriétés physiques de la céramique	13
I.7. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels... ..	14
I.8. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM... ..	15
I.9. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM... ..	16
I.10. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM... ..	17
I.10.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	17
I.10.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	18
I.10.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	19
I.11. Conclusion	20
II.1. Introduction	22
II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles .	22
II.2.1..Approche monocouche équivalente.....	22
II.2.1.1..Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaque stratifiées CLPT)	23
II.2.1.2..Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT).....	24
II.2.1.3.Les modèles d'ordre élevé	26

II.2.2. Approche par couche	31
II.3. Conclusion	33
III.1. Introduction	35
III.2. Formulation du problème	35
III.2.1. Concepts préliminaires et définitions	35
III.2.2. Matériaux fonctionnellement gradués dépendant de la porosité	36
III.2.2.1. Matériau à gradient fonctionnel imparfait avec des porosités uniformes.....	36
III.2.2.2. Matériau à gradient fonctionnel imparfait avec des porosités non uniformes.....	37
III.2.2.3. Matériau à gradient fonctionnel imparfait avec des porosités logarithmiques non uniformes.....	37
III.2.3. Hypothèses de base.....	38
III.2.4. Champ de déplacement et déformations.....	39
III.2.5. Relations constitutives.....	41
III.2.6. Équations de stabilité.....	41
III.2.7. Solution de Navier pour le flambement thermique des plaques poreuses en FGM.....	47
III.2.8. Flambement des plaques FGM sous élévation de température uniforme.....	47
III.2.9. Flambement des plaques FG sous élévation de température linéaire.....	47
III.2.10. Flambement des plaques FGM soumise à un changement de température graduée à travers l'épaisseur	47
III.3. Conclusion	49
IV.1. Introduction.....	51
IV.2. Validation des résultats de la présente théorie de cisaillement.....	51
IV.3. Analyse de l'effet de la porosité sur le flambement thermique des plaques FGM poreuses	59
IV.4. Conclusion.....	61
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....	65

Résumé

L'intérêt de cette étude est l'analyse du problème de flambement thermique des plaques rectangulaires épaisses poreuses en matériau FGM en utilisant la théorie de cisaillement d'ordre élevé. Les propriétés des matériaux comme le module de Young et le coefficient de dilatation thermique de la plaque sont supposées varier continuellement dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle modifiée du mélange comprenant la fraction volumique de porosité avec trois types différents de distribution de porosité.

Les équations d'équilibre et de stabilité sont obtenues en basant sur la présente théorie. Les équations gouvernantes non linéaires sont résolues pour les plaques simplement appuyées. Les charges thermiques sont supposées à une distribution uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Une étude paramétrique sera menée afin de souligner les effets des différents paramètres gouvernants la réponse des plaques épaisses en FGM sur la température critique de flambement.

Mots clés : Plaques fonctionnellement graduées ; Flambement thermique; Porosité; Fraction volumique.

Abstract

The interest of this study is the analysis of the thermal buckling problem of porous thick rectangular plates made of FGM material using high order shear theory. Material properties like Young's modulus and coefficient of thermal expansion of the plate are assumed to vary continuously in the thickness direction as a function of the volume fraction of the constituents defined with the modified mixture rule including the volume fraction of porosity with three different types of porosity distribution.

The equilibrium and stability equations are obtained based on the present theory. The nonlinear governing equations are solved for simply supported plates. The thermal loads are assumed to be uniform, linear and non-linear distribution across the thickness. A parametric study will be carried out in order to underline the effects of the various parameters governing the response of thick FGM plates on the critical buckling temperature.

Keywords: Functionally graded plates ; Thermal buckling ; Porosity; Volume fraction.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحليل مشكل التواء صفيحة حرارية مستطيلة سميكة مسامية في مادة متدرجة الوظيفة نستعمل نظرية القص ذات درجة عليا. خصائص المادة مثل معامل يونغ ومعامل التمدد الحراري للصفحة يتغيرون بطريقة مستقرة في اتجاه السمك بدلالة جزيئات حجمية للمكونات والمعرفة بواسطة قاعدة متغيرة للخليط الذي يحتوي على جزيئات حجمية مقعرة بثلاثة أنواع مختلفة لتوزيع الثقوب.

يتم حل معادلات التوازن والاستقرار المأخوذة بالتركيز على النظريات المسبقة.

يتم حل المعادلات المنظمة غير الخطية للصفائح الملحقة من المفترض ان يتم توزيع الاحمال الحرارية بشكل موحد خطي وغير خطي من خلال السماكة سيتم اجراء دراسة بارامترية من اجل التأكيد على تأثيرات العوامل المختلفة التي تحكم استجابة الصفائح السميكة للمواد المتدرجة الوظيفة للحرارة الحرجة لالتواء.

الكلمات المفتاحية : لوحات متدرجة وظيفيا , التواء حراري , مسامية , حجم الكسر.

Liste des figures

Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal. Microstructure [Nguyen 2008]

Figure. I.2 : Schéma présente Les deux phases de FGM [Shen 2011]

Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [T. Chartier2007]

Figure I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel

Figure I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh H.1997].

Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux.

Figure. I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM [Houari. 2011]

Figure I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM

Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [HAJI 2012].

Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [HAJI 2012].

Figure. II. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

Figure.II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Figure. II.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

Figure. II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

Figure. II.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche. Cinématique [Nguyen.2004].

Figure II. 8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [Nguyen.2004]

Figure III.1 : Coordonnée et géométrie d'une plaque rectangulaire en FGM en coordonnées cartésiennes.

Figure III.2 : Modèles de porosité [Davood Shahsavari 2018]

Figure IV.1 : Variation des températures critiques de flambement t_{cr} en fonction du rapport (a/b) de la plaque FGM pour différentes valeurs d'indice de gradient du matériau p sous chargement thermique uniforme, linéaires et non linéaires

Figure IV.2 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/b) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

Figure IV.3 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/h) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

Figure IV.4 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/h) suivant l'épaisseur de la plaque FGM parfaite et imparfaite sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire ($k=1$, $\xi = 0.2$).

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques.

Tableau IV.2 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température uniforme pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance k et du rapport (a/b) avec $a/h = 100$.

Tableau IV.3 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque carrée en FGM sous chargement de température uniforme pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance k et du rapport (a/h) .

Tableau IV.4 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température linéaire pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a/b) avec $a/h = 100$.

Tableau IV.5 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM carrée sous chargement de température linéaire pour différents valeurs d'indice de puissance p et le rapport (a/h) .

Tableau IV.6 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température non linéaire pour différents valeurs d'indice de loi de puissance k et du rapport (a/b) et l'indice de température γ avec $a/h = 10$.

Liste des notations

$[]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
E	Module de Young
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de métal
E_1	Module de Young de la face supérieure
E_2	Module de Young de la face inférieure
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
ν	Coefficient de Poisson
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
p	Paramètre de matériau
b	la largeur de la plaque
h	L'épaisseur total de la plaque
L	La longueur de la plaque
u, v, w	Les déplacements suivant les directions x, y et z
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z	Les rotations autour des axes x, y et z
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
g	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
ρ	La densité massique
σ_x, σ_y	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformations dans les directions x et y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformations de distorsion
δ	Opérateur de variation
$\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s$	Variation virtuel de déplacement

δU	Variation de l'énergie de déformation interne de la plaque.
δV	Variation de l'énergie de déformation externe de la plaque.
δT	Variation de l'énergie de déformation cinétique de la plaque.
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
N	Efforts normaux de membrane
M^b	Moments de flexion pure
M^s	Moments de flexion supplémentaire due au cisaillement transverse
S	Effort de cisaillement pur
m, n	Nombres de mode
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque
D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
H_{ij}^s	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$	constante d'inertie
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
∂	Dérivée partielle
a_{ij}	Valeurs propres
i, j	Nombres naturels
$[K]$	Matrice de rigidité
$[M]$	Matrice de masse
$\{\Delta\}$	Le vecteur de colonne
$\bar{\omega}$	Les fréquences adimensionnelles
ω	Fréquence naturelle de la plaque FGM
ϕ_α	Rotation de la normale au plan moyen autour des axes $x \alpha$
γ_α^0	Déformation de cisaillement mesurée sur le plan

ϕ_i	Rotations des sections déformées autour des axes 1 x et 2 x (termes du premier ordre)
k_x^b	Courbure suivant X due à la flexion.
k_x^s	Courbure suivant X due au cisaillement.
$U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn},$ et W_{smn}	Paramètres arbitraires.
q	Charge transversale.

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont une nouvelle gamme des structures composites qui ont un grand intérêt pour la conception et la fabrication d'ingénierie. Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, le biomécanique, l'électronique, la chimie, la mécanique, la construction navale et autres ouvrages de génie civil, soumise à des concentrations des contraintes et des contraintes thermiques et résiduelles élevées. Généralement, les FGMs sont des composites avancés, macroscopiquement et microscopiquement hétérogènes qui sont réalisés par exemple à partir d'un mélange de céramique et de métal avec une gradation continue de composition à travers l'épaisseur. Ceci est réalisé par une variation graduelle de la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Suite à l'importance de ces matériaux ainsi que leur large application, des analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures en FGM ont été exposé par de nombreux chercheurs.

De plus, l'apparition des micro-vides et de porosités au cours des procédés de fabrication de ces matériaux est inévitable. L'existence de la porosité dans le matériau peut affecter les propriétés mécaniques ainsi que les performances de la structure. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les effets de ces défauts de fabrication sur le comportement mécanique de la structure.

Le présent travail s'intéresse à l'étude du flambement thermique des plaques rectangulaires poreuses en matériaux à gradient évaluée. Pour ce fait, notre mémoire est composée de **IV** chapitres,

Dans le chapitre **I**, on a essayé de définir d'une manière générale les matériaux fonctionnellement gradués "FGM" et de donner un aperçu dans le chapitre **II** sur les théories des plaques. Le chapitre **III**, consiste à mettre en œuvre une méthode analytique pour l'analyse du flambement thermique des plaques rectangulaires poreuses en matériaux à gradient évaluée.

Le chapitre **IV** s'intéresse à l'étude de la réponse des plaques poreuses en **FGM** au flambement thermique. En s'appuyant sur des études précédentes dont le but est de déterminer la température critique de flambement sous chargement thermique dépendante des paramètres géométriques de la plaque. Afin de valider notre développement, des études comparatives détaillées sont présentés en comparaison avec des études précédentes. Certaines courbes ont été présentées pour permettre d'étudier le comportement au flambement thermique des plaques des FGM.

CHAPITRE I

**GENERALITES SUR LES MATERIAUX A
GRADIENTS DE PROPRIETES.**

I.1.Introduction

Depuis le début du 20ème siècle, l'usage des matériaux composites sous la forme de plaques et de poutres s'est considérablement développé. Que ce soit dans l'industrie automobile, la construction, et plus récemment en aéronautique. Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de forme et durée de vie prolongée. Mais l'inconvénient c'est l'existence de concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

Pour surmonter ces difficultés une équipe de chercheurs japonais (1980) a proposé de nouveaux matériaux dits matériau à gradient de propriété FGM, ces matériaux sont des composites de pointe, dont la microstructure est hétérogène et qui règle le problème des contraintes d'interface entre les couches.

Généralement ces matériaux sont fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique, et trouvent leur application dans divers domaines tels que les avions, les secteurs biomédicaux et les constructions civiles et industrielles.

I.2.Aperçu Historique Sur Les matériaux à gradient de propriétés

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à rechercher, au lieu d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce.

L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface. Par exemple, une couche d'un matériau céramique peut coller à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température, la transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peuvent entraîner une grande contrainte inter laminaire ou de fortes concentrations de contraintes conduire à la déformation plastique ou de fissuration.

Une façon pour surmonter ces effets nuisibles on doit employer un matériau à gradient de propriété (en anglais : FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS « FGM »).

Ces dernières années, les matériaux à gradients de propriétés ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques. Ces matériaux ont de grandes performances et sont capables de résister aux températures ultras hautes.

Les FGMs sont au microscope des matériaux Composites non homogènes. Un groupe de scientifiques, à Sendai (japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique).

Au début, les FGMs ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGMs ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédical, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures.

I.3. La Définition et le concept d'un matériau à gradient de propriétés

Un matériau à gradient de propriétés c'est un type de matériaux composites composé de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructure qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables [Koizumi, 1993]. Un FGM est produit en changeant sans interruption la fraction de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. La plupart des chercheurs emploient trois fonctions pour décrire la variation de la fraction volumique qui sont :

- La fonction de puissance (P-FGM),
- La fonction sigmoïde (S-FGM),
- La fonction exponentielle (E-FGM),

Ces matériaux FGMs sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique (figure. I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le côté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté, le besoin d'être élevés. En revanche, la céramique riche, ce qui a la conductivité faible et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions de grands gradients de la température. [Croce, 2004].

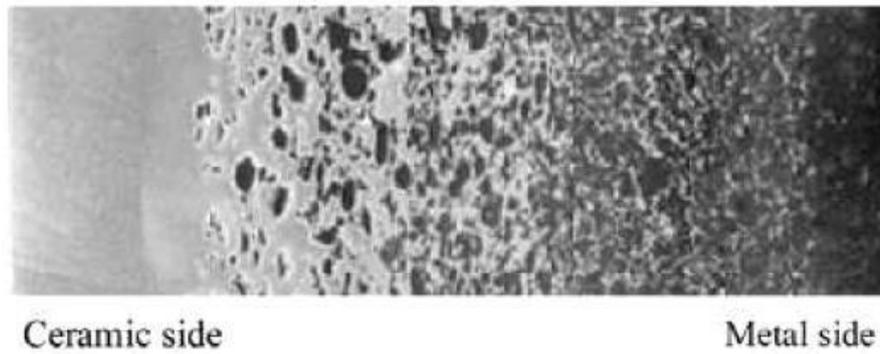


Figure. I.1 : un type d'un matériau FGM en céramique et métal. Microstructure [Nguyen 2008]

Le concept de "matériaux à gradient de propriétés " a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi.1992]. Les FGMs peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques,

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Constitues de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs la figure (I.2). des matériaux composites conventionnels .dans certain cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais microstructure différente.

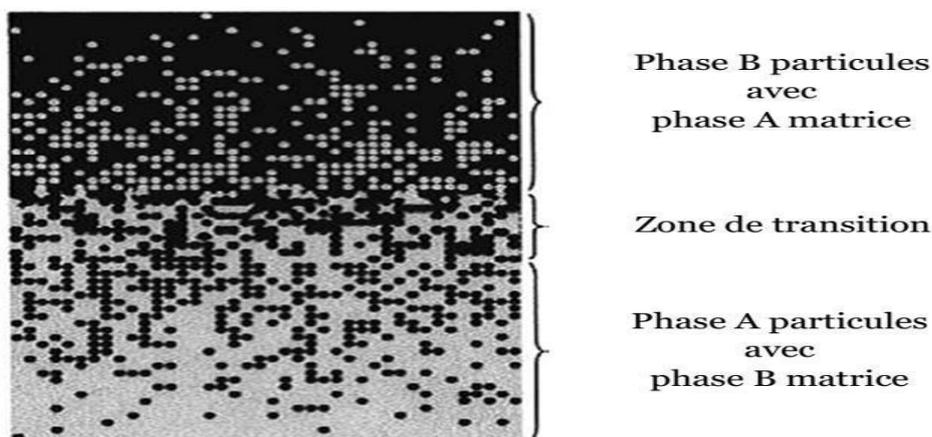


Figure. I.2 : Schéma présente Les deux phases de FGM [Shen 2011]

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'un gradient de température de l'ordre 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques [Koizumi.1992].

I.4. L'intérêt d'utilisation des FGM

Il y a beaucoup d'intérêt pour la mise sur pied des structures ainsi les conditions fonctionnelles peuvent varier avec l'endroit. Dans la plupart des cas, ceci impliquera de varier les matériaux qui sont employés aux endroits spécifiques dans la structure ayant pour résultat les interfaces discrètes dans tout. A nombre de proposé des technologies manufacturières pour le traitement de FGM.

I.5. Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.

Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradient de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

I.5.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. I.3). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

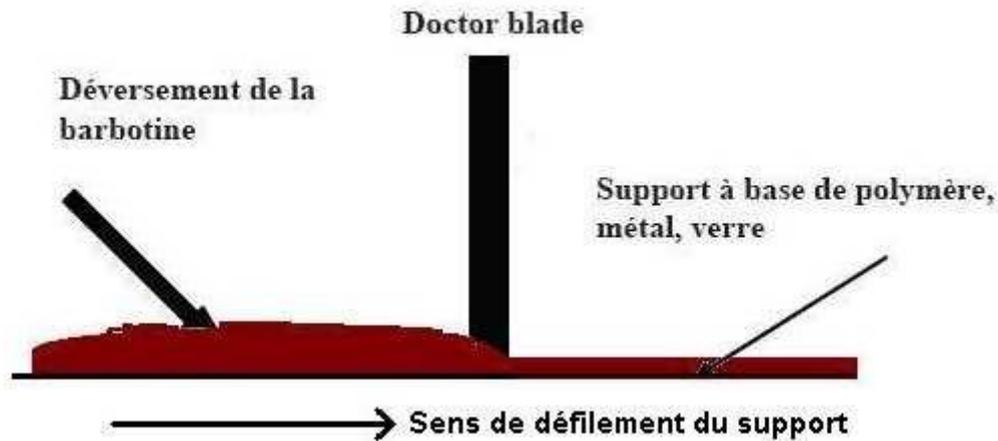


Figure. I.3 : Principe de la méthode coulage en bande [T. Chartier2007]

Schéma du principe du coulage en bande (méthode du Doctor Blade) Après séchage, la bande crue a une épaisseur de 180 μm pour l'électrolyte et 80 μm pour la cathode. La bande est ensuite poinçonnée en pastilles de 30 mm de diamètre. Dans un premier temps, des pastilles provenant de la même bande sont thermocompressées à 30 MPa et à 85°C pour les comportements au frittage (dilatométries) et les caractérisations microstructurales. Puis, une pastille d'électrolyte et une pastille de cathode sont thermocompressées pour le cofrittages. Le déliantage est effectué sous air à 550°C avec une vitesse de montée en température de 0,2°C/mn (pas de palier). Les matériaux sont frittés sous air à 1400°C pendant 2h. 2.3 Caractérisations Des analyses chimiques par ICP-AES ont été effectuées sur la poudre apatite synthétisée de manière à évaluer sa pollution par les billes de zircone lors des deux broyages par attrition. Les phases obtenues ont été vérifiées par diffraction des RX sur des échantillons pulvérulents.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes :

Réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples c'est le cas des tri-couches élaborées par (Mistler 1973).

Empilement des couches élaborées séparément dont la cohésion est ensuite assuré par une étape de thermo-compression (Reddy 1984).

I.5.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en Barbotine (Slip Casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru. Donc le coulage se effectuée en deux étapes essentielles :

Formation du tesson ou « prise ».

Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique) ; ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.5.3. Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.5.4. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux (Abdizadeh H 1997).

I.5.5. Projection Plasma

Le principe de base de la projection plasma est relativement simple. Une torche est constituée de deux électrodes : une cathode conique à l'intérieur d'une anode cylindrique constituant une buse.

Un gaz inerte (habituellement de l'Argon, éventuellement mélangé avec de l'hydrogène ou de l'hélium) circule entre les deux électrodes où il est ionisé pour former un plasma. Un tube introduit, dans le jet de plasma précédemment créé, le matériau à projeter sous forme de poudre, porté lui-même par un gaz neutre. Un réfrigérateur, généralement de l'eau sous pression, refroidit les électrodes pour éviter leur échauffement et leur destruction.

La température du jet de plasma généré, nettement supérieure à celles des autres procédés, permet de projeter une large variété de matériaux, à la seule condition qu'il existe un écart d'au moins 300° C entre la température de fusion et celle d'évaporation ou de dissociation du matériau.

I.5.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour façonner un F.G.M sur des substrats de formes compliquées.

I.5.7. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes :

La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité.

La seconde étape est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration.

Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique.

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.5.8. Frittage Laser Différentielle

Le frittage laser (SLS) est l'un des procédés de la fabrication additive utilisant le laser comme source d'énergie pour fusionner et agglomérer des poudres de matériaux et réaliser des pièces en polymère. Bien que cette technique a suscité beaucoup l'intérêt des industriels et des académiques, il reste encore de nombreux phénomènes physiques nécessitant des investigations et analyses pour mieux les comprendre, les décrire correctement par des modèles mathématiques et de proposer des améliorations du procédé. Cette technique a été utilisée pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La figure. I.4 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

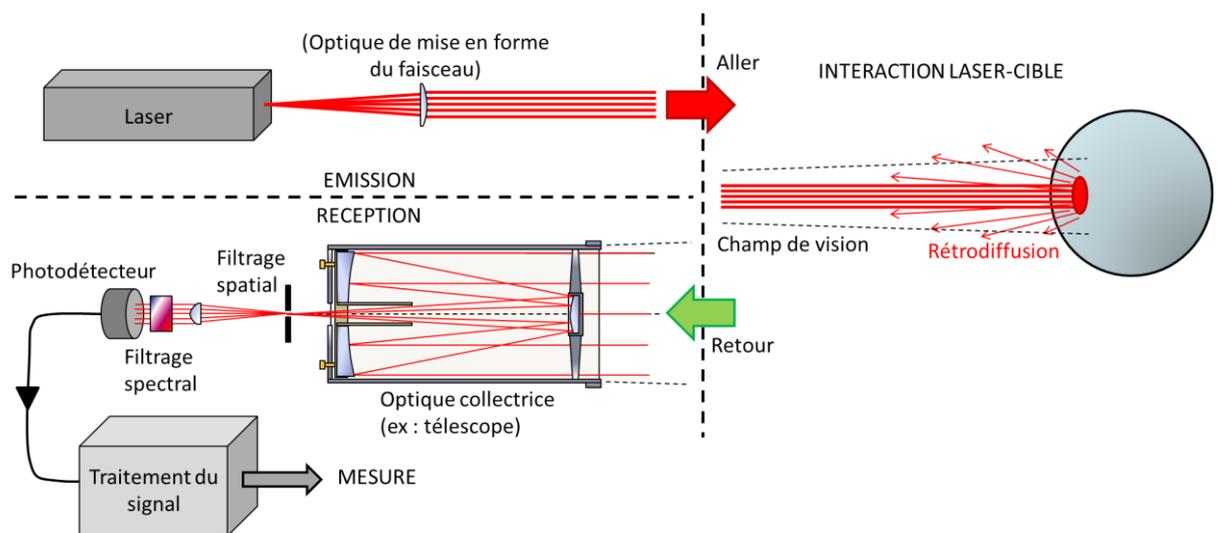


Figure I.4 : Disposition du procédé frittage laser différentiel

I.5.9. Implantation Ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé (Abdizadeh H.1997).

I.5.10. Dépôt par Centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (figure. I.5) (Abdizadeh H.1997).

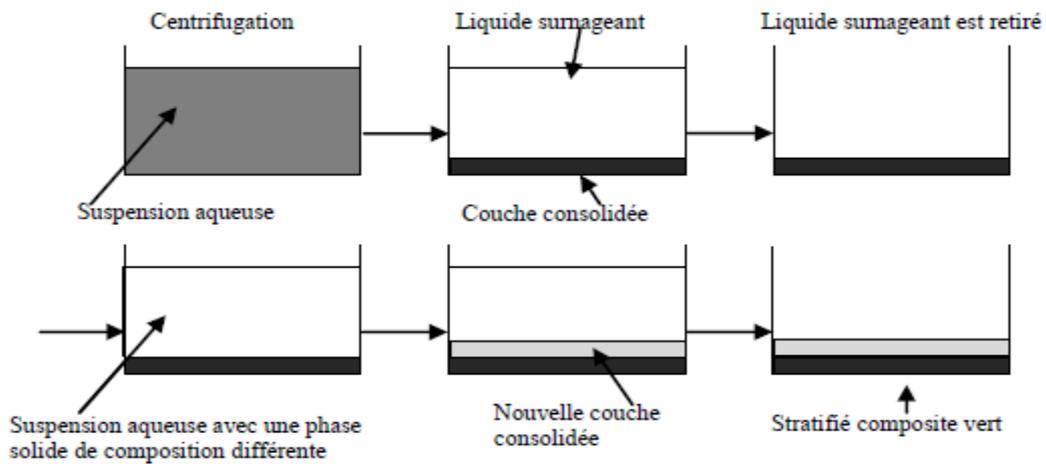


Figure I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [Abdizadeh H.1997].

I.6. Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Pour ce travail le matériau FGM choisi est (Aluminium-Céramique).

I.6.1. Propriétés physiques de l'aluminium

Définition : L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant.

Propriétés physiques : L'Aluminium a une température de fusion relativement basse d'environ 660° . Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. L'Aluminium est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique de l'Aluminium est de 2700 kg/m^3 . L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :

Résistance à la traction.

Résistance à la pénétration (dureté).

- Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :

La malléabilité (mise en feuilles).

La ductilité (mise en fils).

Propriétés des alliages d'aluminium : L'Aluminium a pour propriétés une :

Température de travail élevée.

Très bonne résistance à la corrosion.

Légèreté.

Très bonnes solidités, dureté et rigidité.

Bon rapport force/poids.

Bonnes propriétés de protection contre les interférences électromagnétiques.

Bonne conductivité thermique.

Conductivité électrique élevée.

- Bonnes caractéristiques de finition.
- Entièrement recyclable.

Résistance à la corrosion : Grâce à la couche d'oxyde qui se forme en surface, les alliages d'Aluminium résistent à la corrosion. On peut rendre cette couche protectrice d'oxyde plus épaisse par galvanisation. L'Aluminium et ses alliages peuvent être utilisés sans protection supplémentaire comme revêtement extérieur de bâtiments. Par contre dans les milieux corrosifs, les alliages d'Aluminium peuvent subir les effets de la corrosion. Des piqûres, de la corrosion sous contrainte, de la fatigue corrosion, voire de la corrosion généralisée peuvent se développer. Pour des conditions données, la sévérité de l'attaque dépend de l'alliage utilisé et de son état.

I.6.2. Propriétés physiques de la céramique

Définition : La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

Propriétés physiques : La céramique a une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m³. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design,

l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements.

Propriétés mécaniques : Les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

Matières première employées.

Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence.

Propriétés des céramiques : Les propriétés de la céramique sont :

Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques).

Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne tenue à chaud, rigidité élevée).

Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

I.7. Différence entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la (figure I.6) : (a) un matériau plans composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié a une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels. Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption.

Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

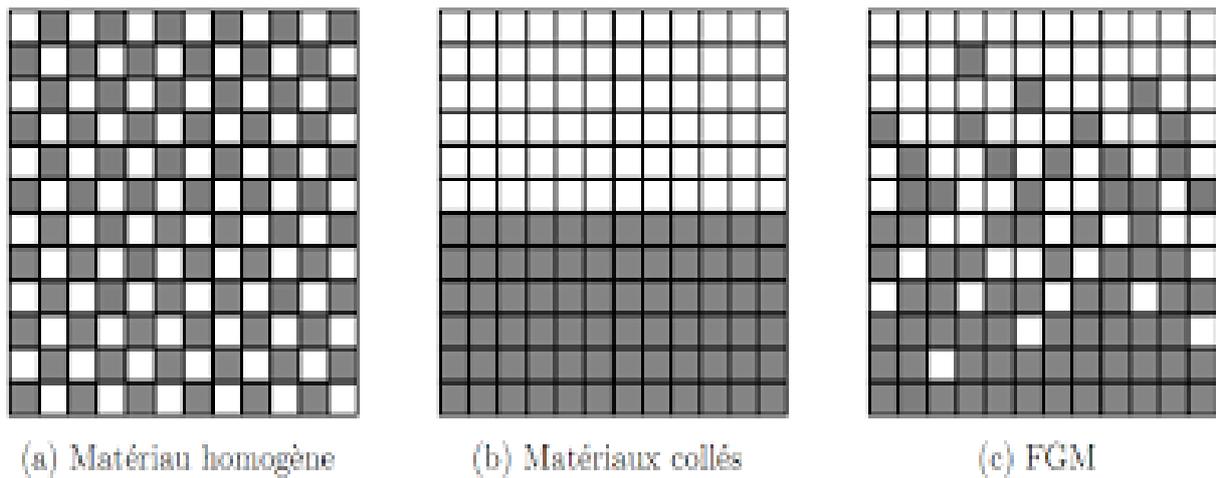


Figure. I.6 : La distribution composante des matériaux

I.8. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement fabriqués par deux phases matérielles avec des propriétés différentes. Une description détaillée des microstructures graduée réelles n'est pas disponible, excepté peut-être pour l'information sur la distribution de fraction volumique. Puisque la fraction de volume de chaque phase varie graduellement dans la direction de la graduation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour modéliser un FGM.

La première approche : une variation par tranche de fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction de volume dans chaque région, c.-à-d., couches quasi homogènes de céramique-métal (figure. I.7a).

La deuxième approche : une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée (figure. I.7b), et la fraction de volume en métal peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z (épaisseur).

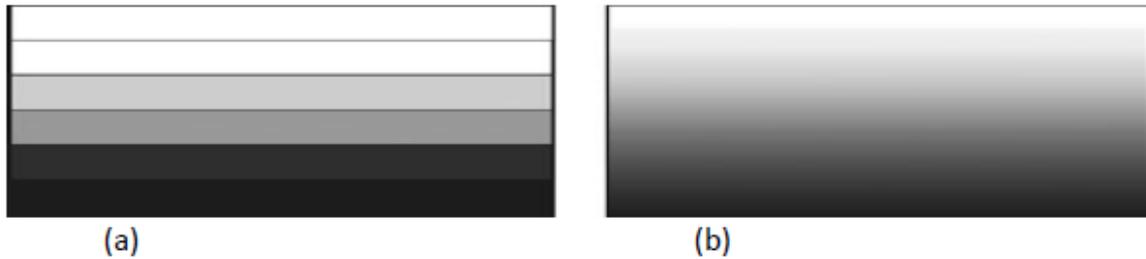


Figure. I.7 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

La plupart des chercheurs emploient la fonction de loi de puissance ; la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Par conséquent, on considère dans notre travail des plaques FGM avec des variations de la fraction de volume qui suit des fonctions de la loi de puissance.

I.9. Domaines d'application des matériaux à gradients évalués FGM

Le concept des matériaux à gradient évalués FGM est applicable dans des nombreux et larges intervalles de domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, aéronautique, aérospatiale, nucléaire et semi-conducteurs. Ainsi, ces matériaux ont deux propriétés contradictoires : la conductivité thermique et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, résistants et durables.

Les principaux domaines d'application des FGM sont :

- **Génie civil** : ponts à poutre en caisson, les cheminées, les fondations élastiques (ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types d'applications industrielles telles que radiers), réservoirs de stockage, les piscines.
- **Aéronautique** : composants de moteur-fusée, corps des avions spatiaux.
- **Chimique** : l'échangeur de chaleur, tube de chaleur, récipient de réaction.
- **Ingénierie** : outils de coupe, éléments de moteur.
- **L'énergie nucléaire** : composante des réacteurs nucléaires, pastilles de combustible.
- **Électronique** : semi-conducteur à bande graduée, capteurs.

- **Optique** : fibres optiques, lentilles.
- **Conversion d'énergie** : générateur thermoélectrique, convertisseur thermoïonique, pile à combustible.
 - **Matières biologiques** : implants, peau artificielle,
 - **Produits en générale** : matériaux de constructions, corps de voiture, verres de fenêtre.

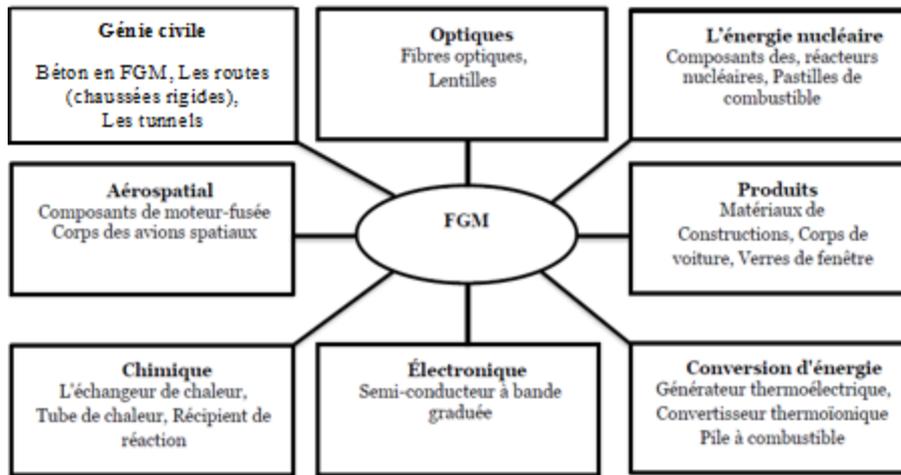


Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM [Houari. 2011]

I.10. Les différentes lois qui régissent la variation des propriétés matérielles suivant l'épaisseur d'une plaque FGM

I.10.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.1)$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = V(z).E_1 + [1 - V(z)].E_2 \quad (I.2)$$

Où E_2 et E_1 sont respectivement les propriétés matérielles (modules de Young ou densité) de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = h/2$) de la plaque FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée dans (Figure I.9), il apparaît clairement que le module de Young par exemple change rapidement près de la surface inférieure pour $p > 1$, et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $p < 1$.

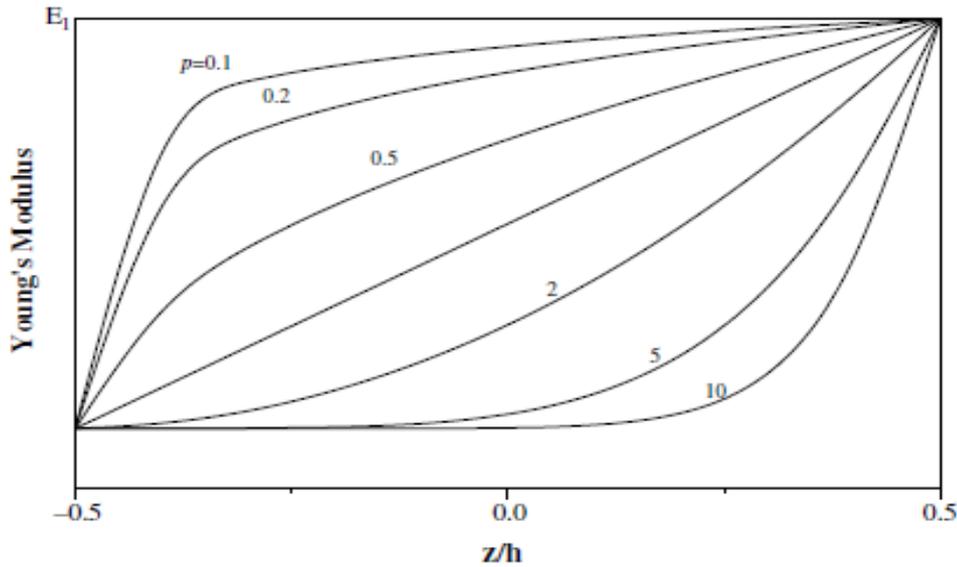


Figure I.9 : La variation du module de Young dans une plaque P-FGM.

I.10.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et chi ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$\begin{aligned}
 V_1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p && \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \\
 V_2(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p && \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0
 \end{aligned} \tag{I.3}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4})$$

La figure I.9 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3) et (I.4) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

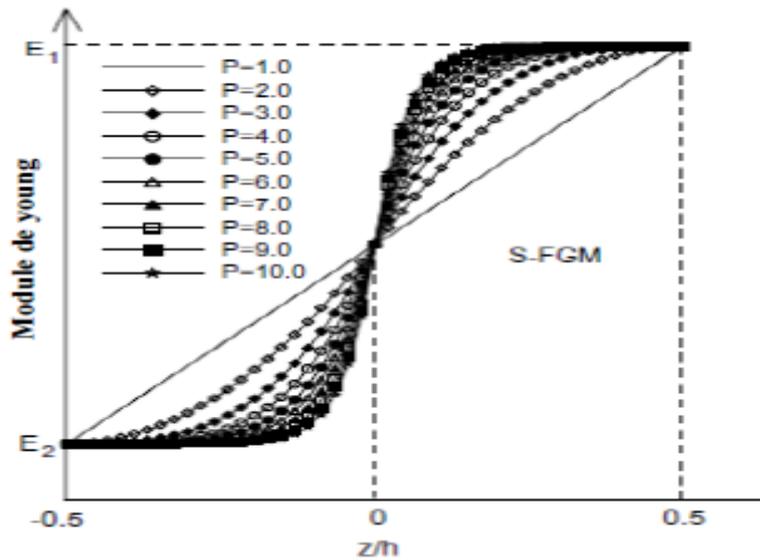


Figure I.10 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM [HAJI 2012].

I.10.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = A.e^{B(z+h/2)} \quad (\text{I.5})$$

Avec,

$$A = E_2 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \quad (\text{I.6})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans (Figure I.10).

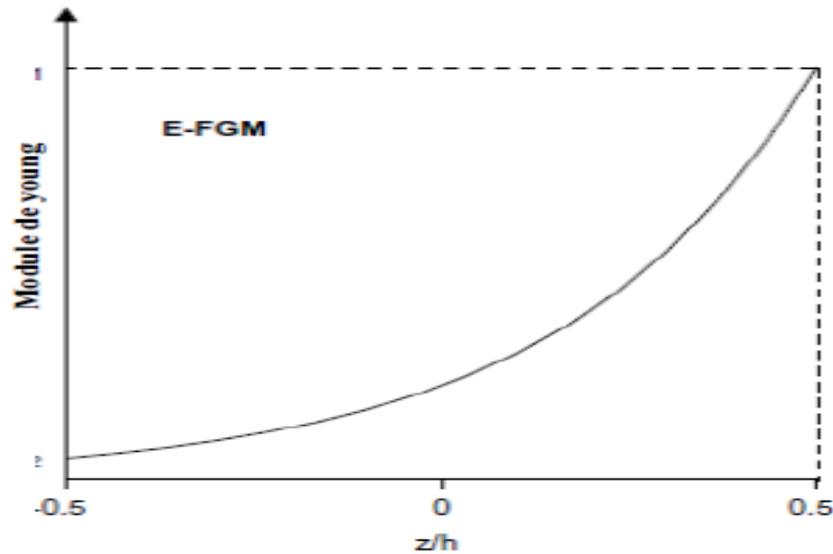


Figure I.11 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM [HAJI 2012].

I.11. Conclusion

Les domaines d'application des matériaux fonctionnellement gradués s'est élargi (Aéronautique, le génie civil, et les énergies), les recherches les concernant ont augmenté aussi, et le point le plus important dans ces recherches c'est bien, la variation des propriétés matérielles (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) et leurs différentes lois qui sont soit de puissance, exponentielles ou sigmoïdes, qui ont également été abordées dans ce chapitre.

CHAPITRE II

LES THEORIES DES PLAQUES FGM.

II.1. Introduction

Une structure FGM peut être considérée comme un corps hétérogène. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures FGM modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan x,y) et par une petite épaisseur (notée $h(x,y)$), par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence CT.

La plaque peut être constituée d'un matériau homogène.

Durant ces dernières années, plusieurs modèles bidimensionnels ont été développés pour

La modélisation des structures multicouches tenant compte des cisaillements transverses.

Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- Approche monocouche équivalente
- Approche par couche

Approche développement asymptotique

II.2. Les Différents Modèles des structures composites dans l'élasticité bidimensionnelles

II.2.1. Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, la variation des caractéristiques physicomécaniques selon l'épaisseur n'est pas un facteur déterminant du nombre d'équations, la plaque FGM est homogénéisée et considérée donc comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.2.1.1. Les modèles classiques Love-Kirchhoff (théorie classique des plaques stratifiées CLPT)

Plusieurs éléments finis de plaques ont été proposés à partir de 1968, permettant d'obtenir des solutions numériques des problèmes de plaques minces en accord avec les hypothèses de Kirchhoff.

Les éléments de plaque de type Kirchhoff discret ont été formulés par Dhatt et Batoz et al. L'énergie de cisaillement transversal est négligée et l'hypothèse de Kirchhoff est introduite de façon discrète (en certain point, sur les côtes d'un élément ou sur l'aire d'un élément). Beaucoup d'autres chercheurs ont également apporté leurs contributions à ce type d'éléments. Un grand nombre d'élément de plaque triangulaire à 9 degrés de liberté (ddl) a été formulé, tels HCT (Hsieh Clough-Toucher), DKT (Discrète Kirchhoff Triangle).

L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff (Kirchhoff. 1850) des contraintes planes, les déformations dues au cisaillement transverse sont négligées. La normale à la surface moyenne de la plaque reste perpendiculaire et droite à celle-ci après déformation (Figure. II.1).

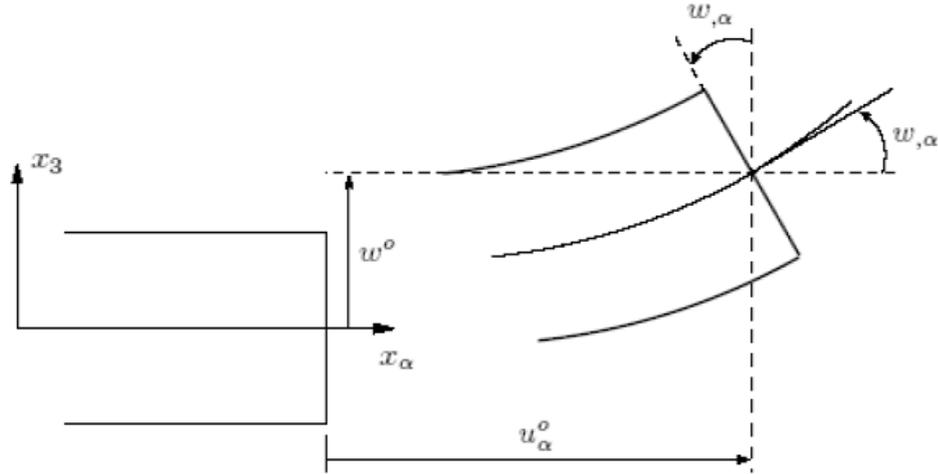


Figure. II. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

Le champ de déplacements de Love-Kirchhoff s'écrit alors,

$$\begin{cases} u_{\alpha}(x_1, x_2, x_3 = z) = u_{\alpha}^0(x_1, x_2) - z w_{,\alpha}(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}, \alpha = 1, 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec,

u_{α}^0 : Le déplacement de membrane dans la direction α ,

w : La flèche de la plaque,

$w_{,\alpha}$: La rotation due a la flexion (sans cisaillement).

II.2.1.2. Les modèles Reissner-Mindlin (théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT)

Les éléments de plaque basés sur la théorie de Reissner/Mindlin sont présentés Par, et, et. Dans le cas des éléments avec cisaillement transversal (DST, DS et Q4G), pour éviter le blocage des éléments en cisaillement transverse (Surestimation de la rigidité pour des épaisseurs très faibles), une méthode consiste à construire des champs de cisaillement et de substitution constants sur les bords de l'élément, les éléments de plaque avec du cisaillement transverse utilisent cette méthode de façon a ne pas bloquer en cisaillement transverse. Ce blocage en cisaillement vient du fait que l'énergie élastique de cisaillement est un terme proportionnel à h (h étant l'épaisseur de la plaque), bien plus grand que le terme d'énergie élastique de flexion qui est proportionnel en h^3 . Quand l'épaisseur devient faible devant la longueur caractéristique (le rapport h / L est inférieur a $1/20$), pour certaines fonctions de

forme, la minimisation du terme prépondérant en h conduit à une mauvaise représentation des modes de flexion pure, pour lesquels la flèche n'est plus calculée correctement.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1998 Nouveau hexaèdre simple « SBH8 » pour l'étude des plaques minces et épaisses.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1999 développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses. Le nouvel élément hexaédrique simple a huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (U , V et W) basé sur le modèle en déformation, cet élément est numériquement plus performant que le modèle de déplacement. Sa précision est

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z\phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Avec,

ϕ_α : La rotation de la normale au plan moyen autour des axes x_α ,

$\gamma_\alpha^0 = (w_{,\alpha} + \phi_\alpha)$: La déformation de cisaillement transverse mesurée sur le plan moyen.

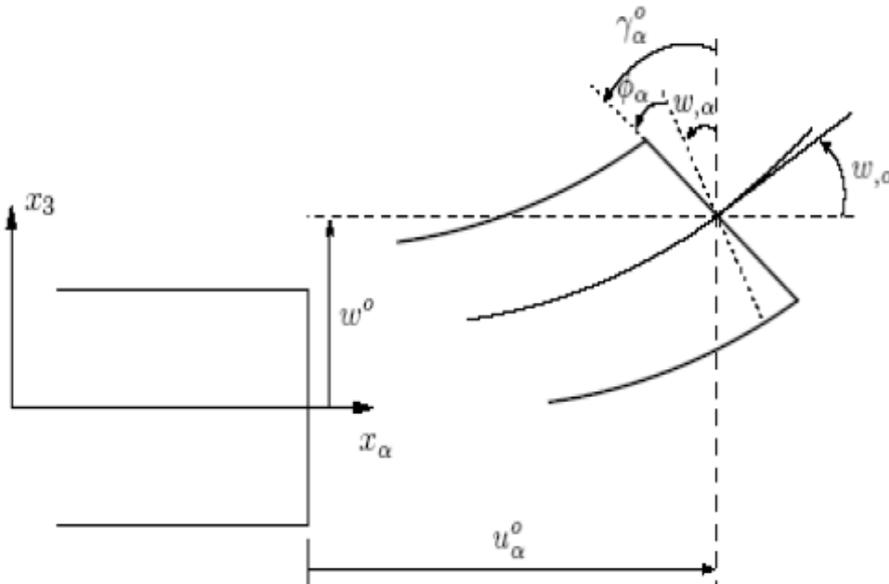


Figure. II.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales γ_α^0 sont constantes en z . Les contraintes quel point suivant l'épaisseur et ça évitent la discontinuité entre les couches dans les composites conventionnels.

Cette mauvaise description d'uniformité de distribution des contraintes oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets du cisaillement transversal (Whitney 1973). Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des plaques épaisses reste aléatoire par ce type d'approche cinématique.

La Figure. II.3 montre la variation de la fonction de forme ainsi que sa dérivée par rapport à l'épaisseur de la plaque. Cette variation est plus authentique pour le cas des plaques stratifiées ou au niveau de l'interface il y a une discontinuité de distribution des propriétés alors que pour les FGM ce problème est résolu.

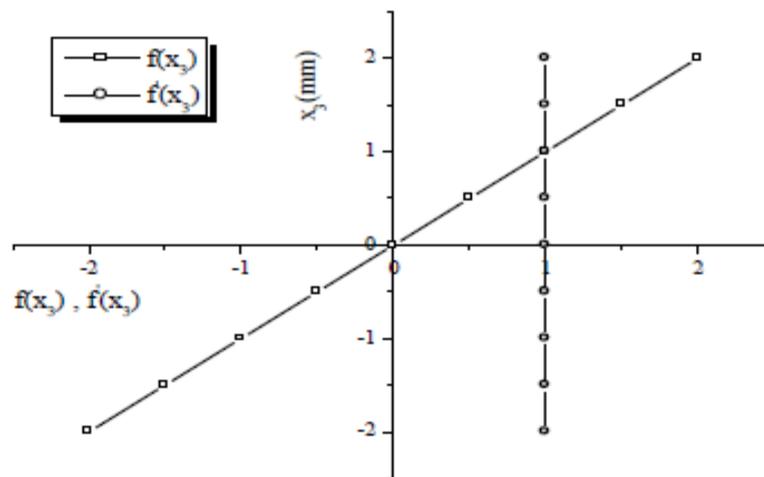


Figure. II.3 : Variation de la fonction de gauchissement $f(x_3) = x_3$ et $f'(x_3)$ suivant l'épaisseur.

II.2.1.3. Les modèles d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.4), (Liberscu 1967). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent de la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.3})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2,3,4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0, \phi_i^{o(3)}, \alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - z w_{,\alpha} + f(z) \gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

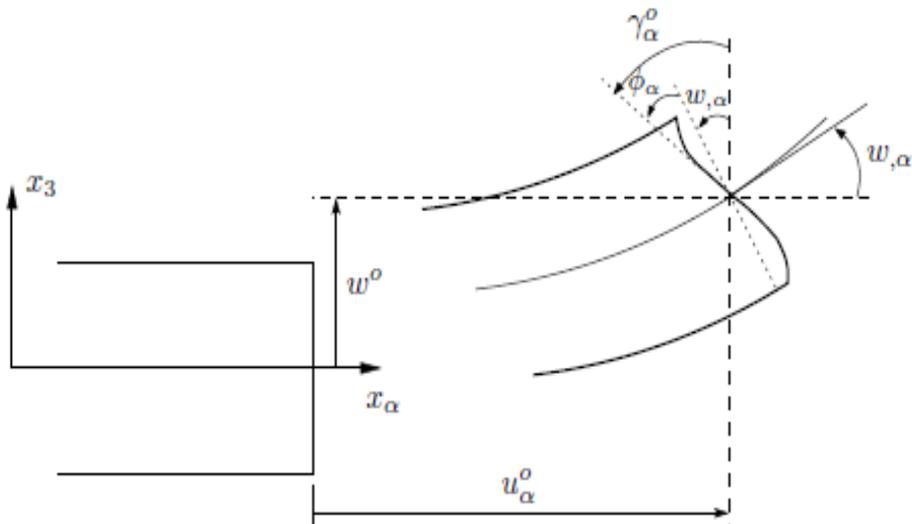


Figure.II.4: Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

L'approche d'Ambartsumyan (Ambartsumyan 1969) avec :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'approche de Reissner (Reissner 1945) :

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

L'approche de Reddy (Reddy 1987) avec :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Dans le modèle de (Reddy 1987), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

L'approche de Touratier (Touratier 1991) avec :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{2n+1} \\ &= z \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près).

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle "sinus" prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de (Reddy 1984).

Récemment, Afaq et al. (Afaq 2003) propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.10})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" [Touratier] ne permet qu'un développement en puissances impaires.

L'approche de Aydogdu (Aydogdu 2005) avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad \alpha > 0 \quad (\text{II.11})$$

h : étant l'épaisseur de la plaque FGM.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche paraît très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

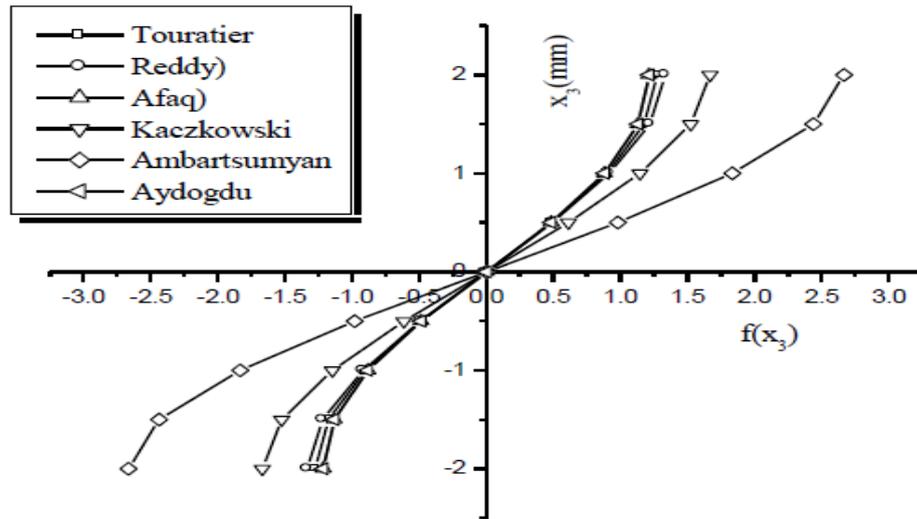


Figure. II.5 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

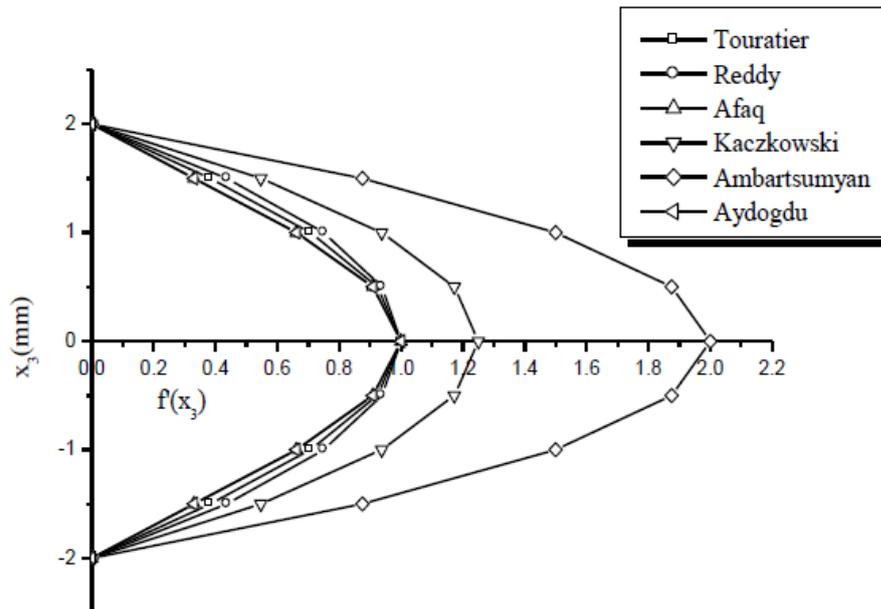


Figure. II.6 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles suivant l'épaisseur.

En fonction des Figures. II.5 et II.6 on remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczowski sont un sensiblement loin des autres fonctions de forme ; Elles sont servies comme bases pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D.

Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).mais pour le cas des matériaux FGM cette approche parait très appropriée, du fait que la variation des propriétés se fait continuellement selon l'épaisseur.

II. 2. 2. Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels.

Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés (Afaq. 2003) ; (Reddy 1984). Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches.

Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes : les modèles couches discrètes ou chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces et les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches. (Figures II.7 et II. 8).

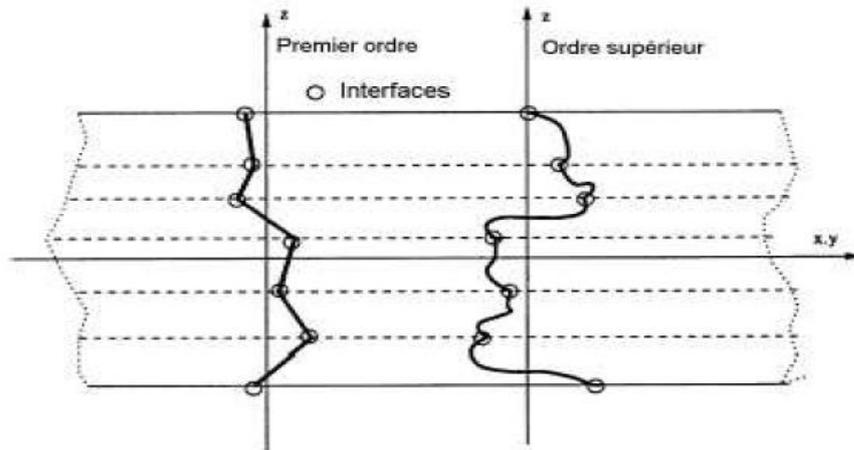


Figure II.7 : Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [Nguyen.2004].

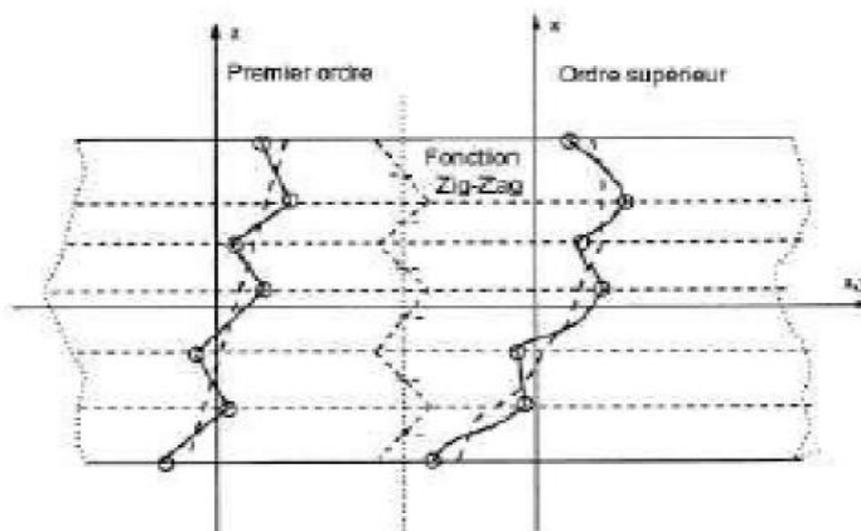


Figure II. 8 : Champ de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique [Nguyen.2004]

II.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, et l'approche par couche.

Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels où le délaminage est un problème à ne pas écarter.

Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques épaisses pour différentes théories d'ordre élevé où la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte.

CHAPITRE III

Etude et analyse du flambement thermique des plaques poreuses en matériaux à gradients de propriétés FGM .

III.1. Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement gradués (FGM) sont de plus en plus utilisés dans de nombreux candidats d'ingénierie tels que l'aérospatiale, l'énergie éolienne, les turbomachines, les réacteurs nucléaires. Les matériaux (FGM) sont fabriqués à partir d'une combinaison de métaux et de céramiques pour résister aux quantités de charges mécaniques et thermiques. L'application de FGM peut être particulièrement avantageuse dans des environnements à haute température lorsque la structure est soumise à des charges thermiques. Cependant, le flambement thermique des structures fabriquées à partir de FGM est un problème qui pourrait limiter leur application et nécessite une enquête approfondie.

De plus, l'apparition des micro-vides et de porosités au cours des procédés de fabrication de ces matériaux est inévitable. L'existence de la porosité dans le matériau peut affecter les propriétés mécaniques ainsi que les performances de la structure. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les effets de ces défauts de fabrication sur le comportement mécanique de la structure.

Dans ce chapitre, le comportement de flambement thermique des plaques imparfaites en matériau FGM avec des porosités est considéré. Les effets de flexion et de cisaillement pris en compte par l'utilisation d'une théorie de cisaillement trigonométrique dans le champ de déplacement. Trois différentes modèles de distributions de porosité (y compris les modèles de distribution uniforme et non uniforme, et le modèle logarithmique non uniforme) sont considérées. En se basant sur la théorie de la plaque trigonométrique présentée, les équations d'équilibre et de stabilité seront dérivées. Une étude paramétrique complète sera réalisée pour montrer les effets de l'indice de fraction volumique, l'indice de fraction de porosité et de la géométrie sur la différence de température de flambement des plaques FGM imparfaites. Enfin, les conclusions notables peuvent être observées dans le chapitre 4.

III.2. Formulation du problème

III.2.1. Concepts préliminaires et définitions

Considérons une plaque FGM rectangulaire d'épaisseur h , de longueur a et de largeur b réalisée en mélangeant deux matériaux distincts (métal et céramique) rapportée à un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) comme montré en figure III.1. Comme on peut remarquer sur la figure III.2 (a–c), la plaque FGM devient une plaque FGM imparfaite en

raison de l'effet de porosités uniformes, non uniformes et logarithmiques- non uniformes dans la distribution des propriétés des matériaux.

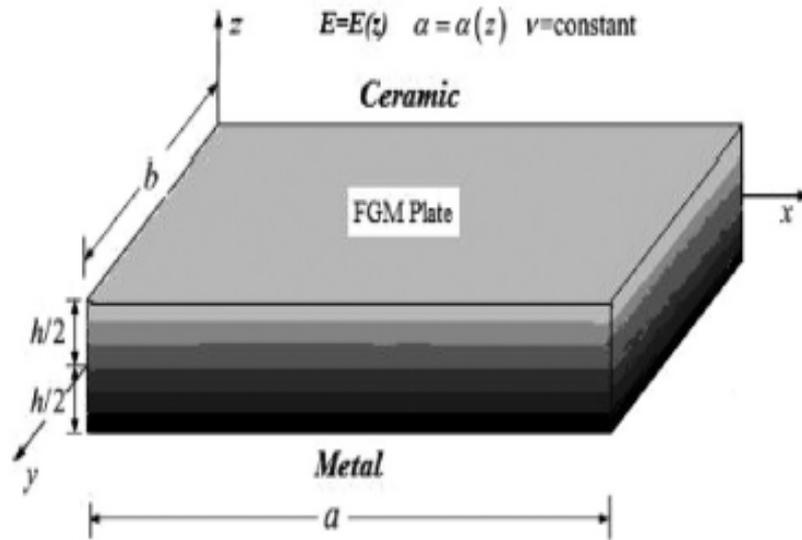


Figure III.1 : Coordonnée et géométrie d'une plaque rectangulaire en FGM en coordonnées cartésiennes.

III.2.2. Matériaux fonctionnellement gradués dépendant de la porosité

III.2.2.1. Matériau à gradient fonctionnel imparfait avec des porosités uniformes

Supposons que la plaque FGM soit constituée d'un mélange de métal et de céramique. Il est clair que les propriétés matérielles de la plaque FGM (c'est-à-dire le module de Young E , le coefficient de Poisson ν et la densité de masse ρ) varient continuellement sans interruption dans la direction de l'épaisseur de la plaque. La surface inférieure de la plaque rectangulaire est supposée être en métal et la surface supérieure est en céramique. De plus, l'influence de la porosité, qui peuvent exister à l'intérieur des matériaux de la plaque FGM pendant la fabrication, est incluse. La règle de mélange modifiée pour la plaque FGM avec des porosités homogènes peut être exprimée comme (Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014)

$$P(z) = P_c \left(\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k - \frac{\zeta}{2} \right) + P_m \left(1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k - \frac{\zeta}{2} \right) \quad (\text{III.1})$$

Ou les indices c et m représentent la céramique et le métal respectivement. k indique l'indice de de la fraction volumique (indice de loi de puissance) qui définit la variation du matériau à travers l'épaisseur de la plaque, et ζ ($\zeta < 1$) présente la fraction volumique de la porosité. P_c et P_m sont les propriétés matérielles de la céramique et du métal, respectivement. En développant l'équation. (III.1), les propriétés matérielles de la plaque FGM imparfaite avec des porosités homogènes (le plan de ce modèle est montré dans la Figure III.2(a)) peuvent être réécrites comme suit (Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014)

$$\begin{aligned}
 E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\zeta}{2} (E_c + E_m) \\
 \alpha(z) &= (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\zeta}{2} (\alpha_c + \alpha_m) \\
 \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\zeta}{2} (\rho_c + \rho_m)
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

III.2.2.2. Matériau à gradient fonctionnel imparfait avec des porosités non uniformes

Pour le deuxième modèle de distribution, les porosités peuvent s'étendre fonctionnellement dans la direction de l'épaisseur (appelée distribution non uniformes) de la plaque FGM (le plan de ce modèle est montré dans la Figure.III.2(b)) comme suit (Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014)

$$\begin{aligned}
 E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\zeta}{2} (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\
 \alpha(z) &= (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\zeta}{2} (\alpha_c + \alpha_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\
 \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \frac{\zeta}{2} (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

III.2.2.3. Matériau à gradient fonctionnel imparfait avec des porosités logarithmiques non uniformes

Dans ce travail, pour la première fois, le modèle non uniforme développé avec une fonction logarithmique est développé pour la distribution des porosités (le plan de ce modèle est montré sur la figure III.2(c)) comme suit :

$$\begin{aligned}
 E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \log \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) (E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\
 \alpha(z) &= (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \log \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) (\alpha_c + \alpha_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \\
 \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_m - \log \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) (\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)
 \end{aligned} \quad (III.4)$$

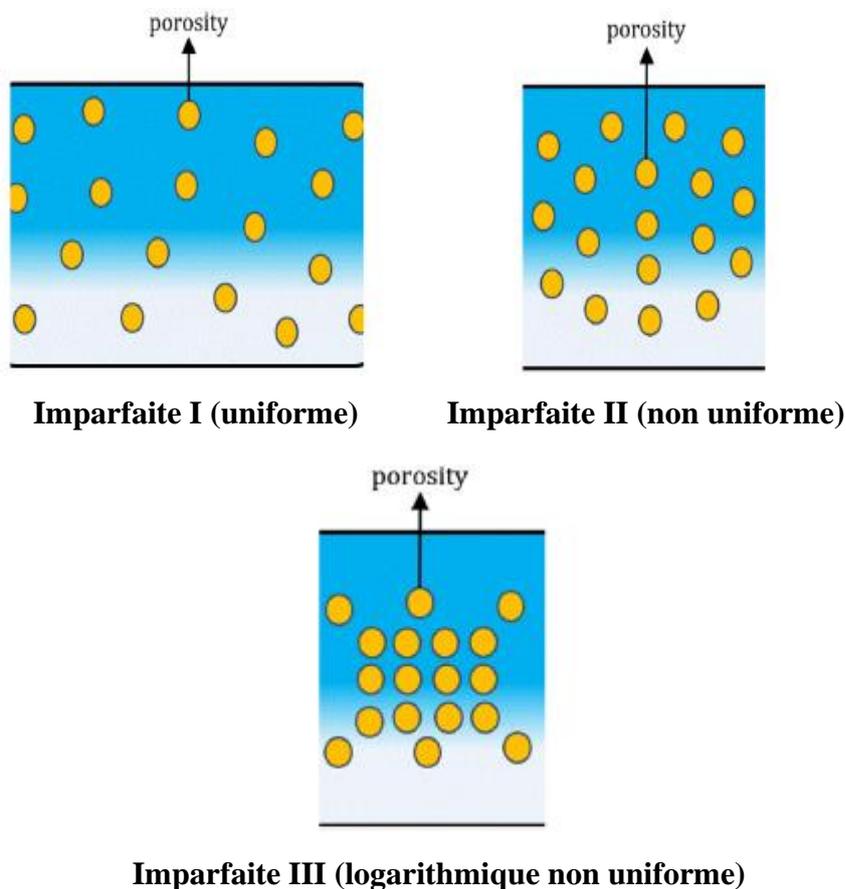


Figure III.2 : Modèles de porosité [Davood Shahsavari 2018]

III.2.3. Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie raffinée des plaques sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la plaque et, en conséquence les déformations sont infinitésimales.
- Le déplacement transverse w contient deux composantes de flexion w_b et de cisaillement w_s . Ces composantes sont en fonction des coordonnées x et y .

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{III.5})$$

- La contrainte normale transversale σ_z est négligeable devant les
- autres contraintes planes σ_x et σ_y .
- Les déplacements u dans la direction x et v dans la direction y sont définis par superposition des déplacements dus aux effets d'extension, de flexion et de cisaillement.

$$u = u_0 + u_b + u_s, v = v_0 + v_b + v_s \quad (\text{III.6})$$

Les composantes de flexion u_b et v_b sont supposées les mêmes déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Donc, les expressions pour u_b et v_b peuvent être données comme :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (\text{III.7.a})$$

À partir de l'état de déplacement de composantes u_s et v_s se dérivent les composantes de déformation γ_{xz}, γ_{yz} qui varient paraboliquement à travers l'épaisseur de la plaque, tout en assurant la condition de nullité des contraintes de cisaillement τ_{xz}, τ_{yz} aux surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Par conséquent, les expressions pour u_s et v_s peuvent être données comme :

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (\text{III.7b})$$

Où

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{III.8})$$

III.2.4. Champ de déplacement et déformations

En se basant, sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu utilisant Eqs. (III.5) – (III.8) comme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{III.9}$$

Ou u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque dans la direction x et y , respectivement; w_b et w_s sont les composantes de déplacement de flexion et de cisaillement transversal, respectivement. La non linéarité des équations déformation-déplacement de Von Karman sont les suivantes:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz}^s \end{Bmatrix}, \tag{III.10}$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}, \tag{III.11a}$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11b})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.11c})$$

Et

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.11d})$$

III.2.5. Relations constitutives

La plaque est soumise à une charge thermique $T(x, y, z)$. Les relations constitutives linéaires sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Ou $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$ sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. Les coefficients de rigidité Q_{ij} sont exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, \quad (\text{III.13a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}, \quad (\text{III.13b})$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III.13c})$$

III.2.6. Équations de stabilité

L'énergie potentielle totale de la plaque FGM peut être écrite comme:

$$U = \iiint [\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha T) + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}] dx dy dz \quad (\text{III.14})$$

Le principe du travaux virtuels pour notre problème peut être exprimé comme suit:

$$\iint \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \right. \\ \left. + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s \right] dx dy = 0 \quad (\text{III.15})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz,$$

(III.16a)

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.16b})$$

Utilisant l'équation. (III.12) dans l'équation. (III.16), les forces résultants de la plaque FGM peuvent être liées aux déformations totales par:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma$$

(III.17)

Ou

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t, \quad (III.18a)$$

$$N^T = \{N_x^T, N_y^T, 0\}^t, M^{bT} = \{M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0\}^t, M^{sT} = \{M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0\}^t, \quad (III.18b)$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}, \quad (III.18c)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (III.18d)$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix}, \quad (III.18e)$$

$$S = \{S_{yz}^s, S_{xz}^s\}^t, \gamma = \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^t, A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}, \quad (III.18f)$$

Ou les composants de rigidité de la plaque, A_{ij} , B_{ij} , etc , etc sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \left(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (III.19a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s)$$

(III.19b)

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz, \quad (\text{III.19c})$$

Les forces et les moments résultants, $N_x^T = N_y^T$, $M_x^{bT} = M_y^{bT}$, et $M_x^{sT} = M_y^{sT}$ due à la charge thermique sont définies par:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{(1-\nu)} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.20})$$

Les équations de stabilité de la plaque peuvent être dérivées par critère d'équilibre adjacent. Supposons que l'état d'équilibre de la plaque FGM sous des charges thermiques est défini en termes des composantes de déplacement $(u_0^0, v_0^0, w_b^0, w_s^0)$. Les composantes de déplacement d'un Etat stable voisin différencié par $(u_0^1, v_0^1, w_b^1, w_s^1)$ par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, les déplacements totaux d'un Etat voisin sont:

$$u_0 = u_0^0 + u_0^1, \quad v_0 = v_0^0 + v_0^1, \quad w_b = w_b^0 + w_b^1, \quad w_s = w_s^0 + w_s^1 \quad (\text{III.21})$$

Ou le chiffre 1 se réfère à l'état de stabilité et le chiffre 0 se réfère à l'état des conditions d'équilibre. Substituant les équations. (III.10) et (III.21) dans l'équation (III.15) et en integrant par partie et ensuite en fait égale les coefficients de $\delta u_0^1, \delta v_0^1, \delta w_b^1, \delta w_s^1$ à zéro, séparément, les équations de stabilité gouvernantes sont obtenus pour la présente théorie de cisaillement des plaques comme:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x^1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial y} &= 0 \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial N_y^1}{\partial y} &= 0 \\
 \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^{b1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{b1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{b1}}{\partial y^2} + \bar{N} &= 0 \\
 \delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^{s1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{s1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{s1}}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^{s1}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^{s1}}{\partial y} + \bar{N} &= 0
 \end{aligned}$$

(III.22)

Avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b^1 + w_s^1)}{\partial y^2} \right] \quad (III.23)$$

Ou les termes N_x^0 et N_y^0 sont les forces de pré-flambement résultantes obtenue comme:

$$N_x^0 = N_y^0 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha(z)E(z)T}{(1-\nu)} dz \quad (III.24)$$

Pour la théorie classique des plaques CPT, les équations de stabilité sont réduites aux trois premières équations de l'équation (III.22).

Les équations de stabilité en termes de composantes de déplacement peuvent être obtenues en substituant l'Eq. (III.17) dans l'éq. (III.22). Les équations résultantes sont quatre équations de stabilité basées sur la présente théorie de déformation de cisaillement pour les plaques FGM.

$$\begin{aligned}
 A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\
 - B_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0
 \end{aligned} \quad (III.25a)$$

$$\begin{aligned} & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.25b})$$

$$\begin{aligned} & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.25c})$$

$$\begin{aligned} & B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \\ & - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} \\ & - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.25c})$$

III.2.7. Solution de Navier pour le flambement thermique des plaques poreuses en FGM

Les plaques rectangulaires sont généralement classés en fonction du type d'appuis utilisés. Nous sommes concernés ici par la solution exacte des équations (III.25) pour une plaque FGM poreuse simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées pour la présente théorie de cisaillement des plaques de quatre variables sur les quatre cotés:

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \quad \text{à } x = 0, a \quad (\text{III.26a})$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_x^{s1} = 0 \quad \text{à } y = 0, b \quad (\text{III.26b})$$

La solution approximative suivante qui satisfait les équations différentielles et les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Ou U_{mn}^1 ; V_{mn}^1 ; W_{bmn}^1 ; et W_{smn}^1 sont des paramètres arbitraires à déterminer, $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$ et m et n sont les nombres de mode. En substituant l'équation. (III.27) dans l'équation. (III.25), on obtient :

$$[K]\{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.28})$$

Ou $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus:

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}^1, V_{mn}^1, W_{bmn}^1, W_{smn}^1\} \quad (\text{III.29})$$

Et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par:

$$[K] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Dans laquelle

$$\begin{aligned} S_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ S_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ S_{13} &= -\lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\ S_{14} &= \lambda [B_{11}^s \lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) & (III.31) \\
 S_{23} &= \mu[(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\
 S_{24} &= \mu[(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
 S_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \\
 S_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2) \\
 S_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2 + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2)
 \end{aligned}$$

III.2.8. Flambement des plaques FGM sous élévation de température uniforme

La température initiale de la plaque est supposée T_i . La température augmente uniformément à une valeur finale T_f dans lequel la plaque flambe. La variation de température est $\Delta T = T_f - T_i$. La force thermique résultante est évaluée comme:

$$N_{cr} = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\alpha(z)E(z)(T_f - T_i)}{(1-\nu)} dz \quad (III.32)$$

III.2.9. Flambement des plaques FG sous élévation de température linéaire

Pour la plaque FGM, la variation de température n'est pas uniforme. La température est supposée varier linéairement à travers l'épaisseur comme suit:

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + T_m \quad (III.33)$$

Ou la différence de température de flambement $\Delta T = T_C - T_M$ et T_C et T_M sont la température de la surface supérieure, qui est riche en céramique, et de la surface inférieure, qui est riche en métal, respectivement. Semblable au cas de chargement précédent, l'expression de la force thermique résultante est obtenue en substituant l'Eq. (III.33) dans l'Eq. (III.32).

III.2.10. Flambement des plaques FGM soumise à un changement de température graduée à travers l'épaisseur

Nous supposons que la température de la surface supérieure est T_t et la température varie de T_t , selon une variation en loi de puissance suivant l'épaisseur, à une température de

la surface inférieure T_b dans laquelle la plaque flambe. Dans ce cas, la température à travers l'épaisseur est donnée par:

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_m \quad (\text{III.34})$$

Ou la variation de température de flambement $\Delta T = T_b - T_t$ et γ est l'indice de la température ($0 < \gamma < \infty$). Notez que la valeur de γ égal à 1 représente une variation linéaire de température à travers l'épaisseur, tandis que la valeur de γ supérieure à 1 représente une variation non linéaire de température à travers l'épaisseur. Comme dans le cas de la charge uniforme, la résultante de la force thermique N_{cr} est obtenue en substituant l'Eq. (III.34) dans l'Eq. (III.30).

III.3. Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse de flambement thermique des plaques poreuses simplement appuyées en FGM sont examinées par une théorie de cisaillement trigonométrique à quatre

variables. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque FGM sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Les propriétés des matériaux de la plaque FGM poreuse sont supposées varier en continu dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle modifiée du mélange comprenant la fraction volumique de porosité avec trois différents forme de distribution de porosité sur la section transversale. Les équations de stabilité pour la plaque FGM ont été obtenues par le principe d'énergie des travaux virtuelle. Les solutions sont sous forme des charges critiques de flambement pour le cas d'une charge thermique uniforme, linéaire et non linéaire sont obtenues par la résolution du système de l'équation (III.30).

Chapitre IV

Validation et comparaison des résultats

IV.1. Introduction

Après le développement dans le chapitre III pour objet est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, des solutions des équations de stabilité sont présentées en résolvant les équations aux valeurs propres (III.28).

Dans ce présent chapitre plusieurs exemples numériques sont décrits et discutés pour vérifier la validité de la présente théorie de cisaillement dans la prévision des comportements thermiques des plaques FGM poreuses simplement appuyée à base des différentes formes de fonction de gauchissement qui permet d'une part de prendre en compte le cisaillement transverse, et d'autre part d'en approcher la forme de distribution suivant l'épaisseur.

De plus, l'apparition des micro-vides et de porosités au cours des procédés de fabrication de ces matériaux est inévitable. L'existence de la porosité dans le matériau peut affecter les propriétés mécaniques ainsi que les performances de la structure. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier les effets de ces défauts de fabrication sur le comportement mécanique de la structure.

Pour la plaque en FGM les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont:

- Céramique (Alumine, Al_2O_3) $E_c = 380\text{GPa}$, $\nu_c = 0.3$, $\alpha_c = 7.4 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$.

- Métal (Aluminium, Al) $E_m = 70\text{GPa}$, $\nu_m = 0.3$, $\alpha_m = 23 \cdot 10^{-6} / ^\circ C$.

-

IV.2. Validation des résultats de la présente théorie de cisaillement

Dans cette partie, différents exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude et l'efficacité de la présente théorie pour prédire la variation de température critique de flambement des plaques FGM simplement appuyées sous chargement de température uniforme, linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur. Pour la vérification, les résultats obtenus par la présente théorie de plaque raffinée de quatre variables sont comparés avec les résultats existants dans la littérature.

On suppose que la plaque FGM est constituée d'un mélange d'alumine et d'aluminium et Le module d'Young, coefficient de dilatation thermique sont suit une simple loi de puissance P-FGM. Dans le cas de température linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur, la température s'élève dans la surface riche en métal de la plaque (c'est à dire, $T_m = 5^\circ C$).

Afin de prouver la validité de la présente théorie, les résultats ont été obtenus pour les plaques FGM et comparés avec ceux déjà existants dans la littérature tels que la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de déformation de cisaillement parabolique (PSDPT), la théorie de déformation de cisaillement sinusoidale SSDPT comme indiqué dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Hypothèses cinématiques pour différentes théories de plaques.

Théories	Hypothèses de déplacements tridimensionnels
CPT	$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x},$ $V(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y},$ $w(x, y, z) = w_0(x, y).$
SSDPT	$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_x(x, y),$ $v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \phi_y(x, y),$ $w(x, y, z) = w_0(x, y).$
PSDPT	$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right),$ $v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right),$ $w(x, y, z) = w_0(x, y).$
Présente	$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \left[z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \frac{\partial w_s}{\partial x}$ $v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \left[z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right] \frac{\partial w_s}{\partial y}$ $W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$

Les Tableaux IV. 2 et IV.3, présentent les résultats d'analyse du flambement de la plaque sous chargement de température uniforme. Ces tableaux montrent les comparaisons de la variation des températures critiques de flambement obtenu par la présente théorie avec ceux données par les théories d'ordre élevé PSDPT et SSDPT et la théorie classique des plaques (CPT). Les résultats de la présente théorie montrent un très bon accord avec les théories PSDPT et SSDPT pour les plaques FGM minces et épaisses.

Le tableau IV.2 montre que de la température de flambement augmente par l'augmentation du rapport a/b et diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance p à partir de 0 à 10.

Le tableau IV.3 montre que la température de flambement diminue par l'augmentation du rapport de dimensionnement a/h et l'indice de loi de puissance p de 0 à 10. On constate que les températures de flambement pour les plaques homogènes ($p=0$) sont considérablement plus élevés que ceux de la plaques FGM ($p > 0$), en particulier pour les plaques plus long et épaisse. Les températures critiques de flambement obtenu basée sur la théorie classiques des plaques CPT sont supérieures aux valeurs obtenues en basant sur la théorie d'ordre élevé. Les différences sont considérables pour les plaques longues et les plaques épaisses.

Tableau IV.2 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température uniforme pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a/b) avec $a/h = 100$.

p	Théories	a/b=1	a/b=2	a/b=3	a/b=4	a/b=5
0	CPT (Javaheri 2002)	17.09	42.75	85.49	145.34	222.29
	PSDPT (Javaheri 2002)	17.08	42.68	85.25	144.64	220.66
	SSDPT (Zenkour 2010)	17.08	42.68	85.25	144.65	220.67
	Présente	17.08	42.68	85.25	144.65	220.67
1	CPT (Javaheri 2002)	7.94	19.86	39.72	67.52	103.27
	PSDPT (Javaheri 2002)	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	SSDPT (Zenkour 2010)	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
	Présente	7.94	19.83	39.62	67.25	102.63
5	CPT (Javaheri 2002)	7.27	18.16	36.33	61.76	94.45
	PSDPT (Javaheri 2002)	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	SSDPT (Zenkour 2010)	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60
	Présente	7.26	18.13	36.20	61.39	93.60

10	CPT (Javaheri 2002)	7.47	18.67	37.35	63.49	97.10
	PSDPT (Javaheri 2002)	7.46	18.63	37.20	63.06	96.12
	SSDPT (Zenkour 2010)	7.46	18.63	37.20	63.06	96.11
	Présente	7.46	18.63	37.20	63.06	96.11

Tableau IV.3 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque carrée en FGM sous chargement de température uniforme pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a/h).

p	Théories	a/h=10	a/h=20	a/h=40	a/h=60	a/h=80	a/h=100
0	CPT (Javaheri 2002)	1709.91	427.48	106.87	47.50	26.72	17.10
	PSDPT (Javaheri 2002)	1617.48	421.52	106.49	47.42	26.69	17.08
	Présente	1617.48	421.52	106.49	47.42	26.69	17.08
1	CPT (Javaheri 2002)	794.38	198.59	49.65	22.07	12.41	7.94
	PSDPT (Javaheri 2002)	757.89	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
	Présente	757.89	196.26	49.50	22.03	12.40	7.94
5	CPT (Javaheri 2002)	726.57	181.64	45.41	20.18	11.35	7.27
	PSDPT (Javaheri 2002)	678.92	178.53	45.21	20.14	11.34	7.26
	Présente	678.92	178.53	45.21	20.14	11.34	7.26
10	CPT (Javaheri 2002)	746.93	186.73	46.68	20.75	11.67	7.47
	PSDPT (Javaheri 2002)	692.52	183.14	46.45	20.70	11.65	7.46
	Présente	692.52	183.14	46.45	20.70	11.65	7.46

Dans les tableaux IV.4 et IV.5, les résultats d'analyse du flambement pour la plaque sous température linéaire à travers l'épaisseur sont présentés. Les résultats d'analyse du flambement pour la plaque sous température linéaire à travers l'épaisseur sont présentés. On remarque que les résultats de la présente théorie sont presque identiques à ceux donnés par les théories PSDPT et SSDPT. Il est conclu que la température de flambement augmente par l'augmentation du rapport a/b , et diminue par l'augmentation de l'indice de la loi de puissance p , et diminué par l'augmentation du rapport de dimensionnement a/h . De plus, les températures de flambement pour les plaques homogènes sont considérablement plus élevées aux valeurs obtenues en basant sur la présente théorie. Les différences sont considérables pour les plaques longues et les plaques épaisses.

Par conséquent, afin d'obtenir des résultats précis pour les plaques FGM épaisses, il est nécessaire de tenir compte des effets de cisaillement transverse de déformation en utilisant les théories déformation de cisaillement. Il est à noter que le nombre d'inconnue dans la présente théorie est uniquement quatre, tandis que le nombre d'inconnue dans les deux PSDPT et SSDPT est cinq. On peut conclure que la présente théorie n'est pas seulement précis, mais également simple pour prédire la température critique de flambement des plaques FGM.

Tableau IV.4 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température linéaire pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a/b) avec $a/h = 100$.

p	Théories	$a/b=1$	$a/b=2$	$a/b=3$	$a/b=4$	$a/b=5$
0	CPT (Javaheri 2002)	24.20	75.50	160.99	280.68	434.58
	PSDPT (Javaheri 2002)	24.17	75.37	160.50	279.29	431.33
	SSDPT (Zenkour 2010)	24.17	75.37	160.51	279.30	431.34
	Présente	24.17	75.37	160.51	279.30	431.34
1	CPT (Javaheri 2002)	5.52	27.87	65.11	117.26	184.30
	PSDPT (Javaheri 2002)	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	SSDPT (Zenkour 2010)	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
	Présente	5.51	27.82	64.93	116.74	183.11
5	CPT (Javaheri 2002)	3.90	22.66	53.93	97.70	153.98
	PSDPT (Javaheri 2002)	3.89	22.60	53.71	97.07	152.51
	SSDPT (Zenkour 2010)	3.89	22.60	53.70	97.06	152.50
	Présente	3.89	22.60	53.70	97.06	152.50
10	CPT (Javaheri 2002)	4.38	24.23	57.32	103.65	163.21
	PSDPT (Javaheri 2002)	4.36	24.16	57.06	102.90	161.47
	SSDPT (Zenkour 2010)	4.36	24.16	57.06	102.89	161.46
	Présente	4.36	24.16	57.06	102.89	161.46

Tableau IV.5 : Variation des températures critiques de flambement de la place FGM carré sous chargement de température linéaire pour différents valeurs d'indice de puissance p et le rapport (a/h) .

p	Théories	$a/h=10$	$a/h=20$	$a/h=40$	$a/h=60$	$a/h=80$	$a/h=100$
0	CPT (Javaheri 2002)	3409.82	844.96	203.74	84.99	43.43	24.20
	PSDPT (Javaheri 2002)	3224.96	833.03	202.98	84.84	43.38	24.17
	Présente	3224.96	833.03	202.98	84.84	43.38	24.17
1	CPT (Javaheri 2002)	1480.45	363.08	83.77	32.01	13.90	5.52
	PSDPT (Javaheri 2002)	1412.02	358.69	83.46	31.95	13.88	5.51

	Présente	1412.02	358.69	83.46	31.95	13.88	5.51
5	CPT (Javaheri 2002)	1242.04	304.05	69.56	26.13	10.93	3.90
	PSDPT (Javaheri 2002)	1160.02	298.69	69.21	26.06	10.91	3.89
	Présente	1160.02	298.69	69.21	26.06	10.91	3.89
10	CPT (Javaheri 2002)	1314.74	322.04	73.86	27.91	11.82	4.38
	PSDPT (Javaheri 2002)	1218.32	315.67	73.46	27.82	11.79	4.36
	Présente	1218.32	315.67	73.46	27.82	11.79	4.36

Le tableau IV.6 présente la différence de température critique $t_{cr} = 10^{-3}T_{cr}$ pour différentes valeurs de rapport a/b , indice de température γ et l'indice de puissance p sous chargement de température non linéaire à $a/h = 10$ respectivement. L'indice de température non linéaire γ est prise ici égale 2, 5 et 10. On peut conclure à partir des résultats présentés que la présente théorie de cisaillement utilisée donne des résultats plus précis de la température critique de flambement par rapport aux théories de cisaillement d'ordre élevé.

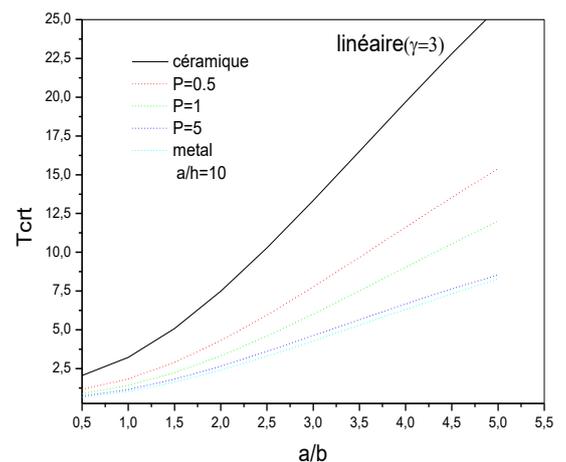
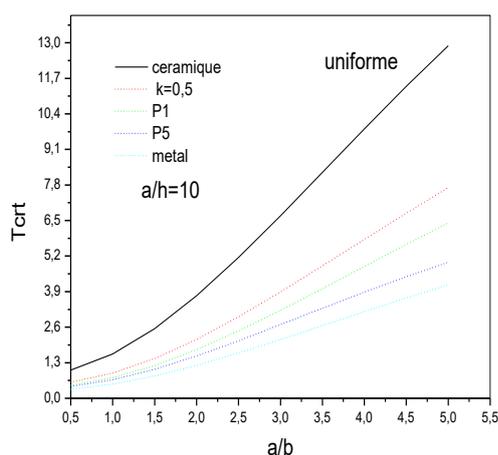
Tableau IV.6 : Variation des températures critiques de flambement de la plaque FGM sous chargement de température non linéaire pour différents valeurs d'indice de loi de puissance p et du rapport (a/b) et l'indice de température γ avec $a/h = 10$.

P	Théories	$a/b = 1$			$a/b = 2$			$a/b = 3$		
		$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$	$\gamma = 2$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
0	CPT (Zenkour 2010)	5.11	10.23	18.75	12.81	25.62	46.97	25.63	51.27	93.99
	PSDPT (Zenkour 2010)	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.16	20.00	40.01	73.35
	SSDPT (Zenkour 2010)	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.17	20.01	40.03	73.39
	Présente	4.84	9.68	17.75	11.22	22.45	41.17	20.01	40.03	73.39
1	CPT (Zenkour 2010)	2.21	4.52	8.58	5.54	11.35	21.53	11.09	22.74	43.12
	PSDPT (Zenkour 2010)	2.11	4.31	8.19	4.95	10.14	19.24	8.96	18.38	34.86
	SSDPT (Zenkour 2010)	2.11	4.31	8.19	4.95	10.14	19.25	8.96	18.38	34.86
	Présente	2.11	4.31	8.19	4.95	10.14	19.25	8.96	18.38	34.86
5	CPT (Zenkour 2010)	1.71	3.05	5.35	4.29	7.66	13.44	8.59	15.33	26.91
	PSDPT (Zenkour 2010)	1.59	2.85	5.00	3.65	6.52	11.44	6.37	11.38	19.97
	SSDPT (Zenkour 2010)	1.59	2.85	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93
	Présente	1.59	2.85	4.99	3.64	6.51	11.43	6.36	11.36	19.93

10	CPT (Zenkour 2010)	1.81	3.11	5.15	4.54	7.81	12.93	9.10	15.65	25.88
	PSDPT (Zenkour 2010)	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.54	11.25	18.61
	SSDPT (Zenkour 2010)	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60
	Présente	1.67	2.88	4.77	3.79	6.53	10.80	6.53	11.24	18.60

La figure IV.1 montre la variation de la température critique t_{cr} en fonction du rapport (a/b) de la plaque FGM pour différentes valeurs d'indice de gradient du matériau p sous chargement thermiques uniforme, linéaires et non linéaires. D'après cette figure on remarque que lorsque le rapport de la plaque (a/b) augmente, la température critique de flambement augmente de façon constante, quel que soit l'indice de gradient du matériau p . On constate aussi que les températures critiques de flambement de la plaque en céramique est supérieure à celle de la plaque en métal qui est due à la bonne résistance du matériau céramique à la température par rapport au matériau métal. Pour la plaque FGM, t_{cr} diminue lorsque le pourcentage du constituant de métal augmente dans la plaque FGM.

La variation de la température critique de flambement t_{cr} en fonction du rapport (a/h) et le rapport (a/b) de la plaque FGM sous différents types de chargement thermique sont exposées dans les figures IV.2 et IV.3. On constate à partir de ces figures que, quel que soit le type de chargement et l'indice de la loi de puissance k , la température critique de flambement diminue lorsque le rapport (a/h) de la plaque augmente et elle est diminuée avec la diminution du rapport (a/b) de la plaque. Les températures critiques de flambement pour les plaques céramique sont supérieures à celle des plaques en FGM à cause de la propriété du matériau céramique à la bonne résistance à la température. On remarque aussi que la différence entre les types de chargement thermique diminue avec l'augmentation du rapport (a/h) qui rendre la plaque FGM très mince.



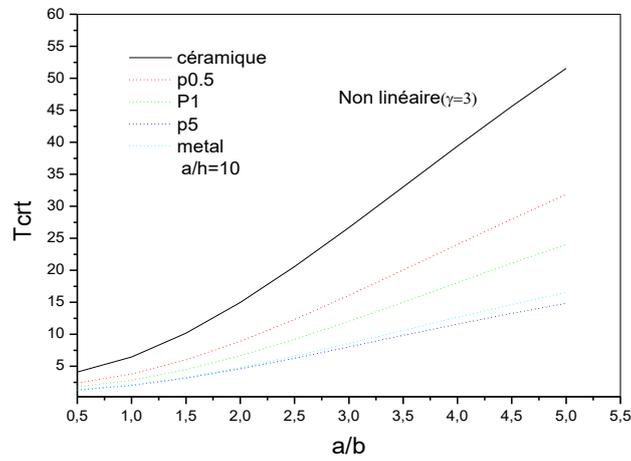


Figure IV.1 : Variation des températures critiques de flambement t_{cr} en fonction du rapport (a/b) de la plaque FGM pour différentes valeurs d'indice de gradient du matériau p sous chargement thermiques uniforme, linéaires et non linéaires.

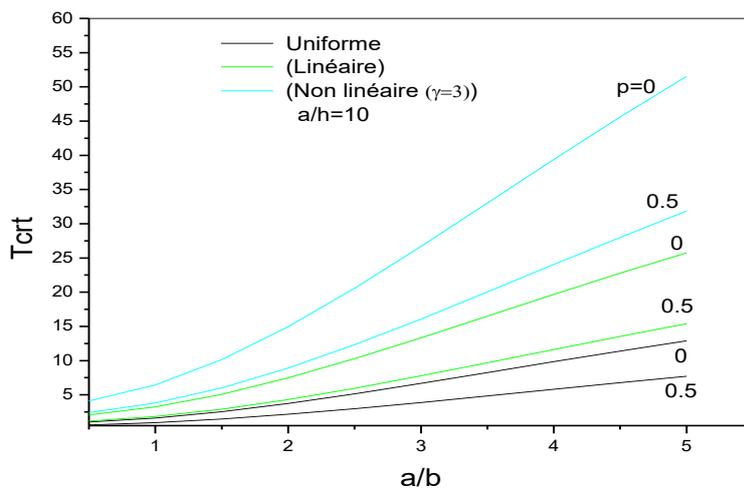


Figure IV.2 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/b) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

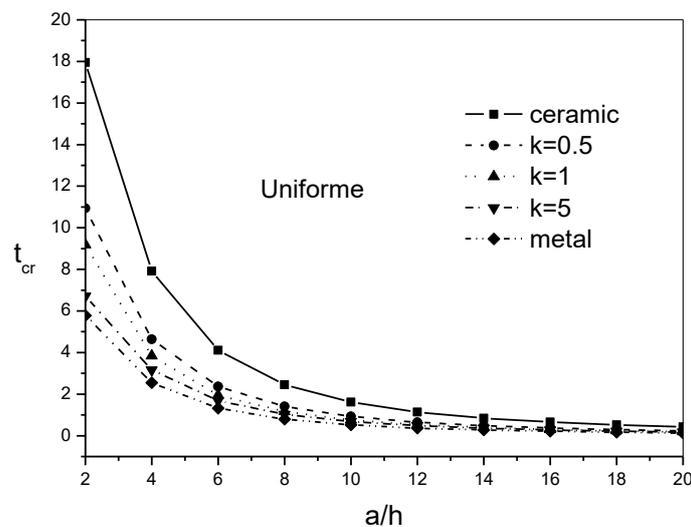
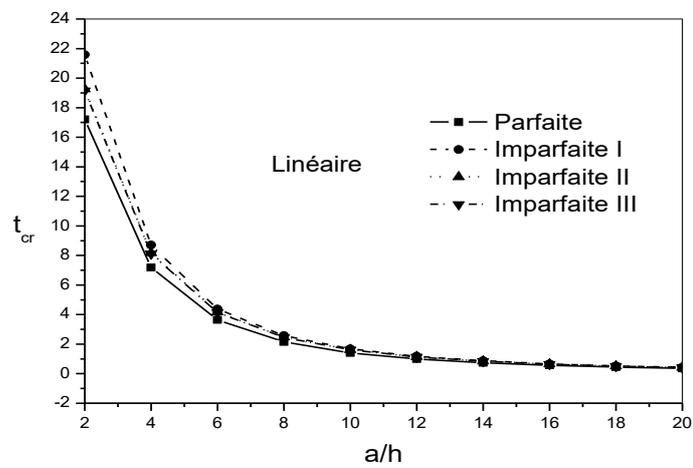
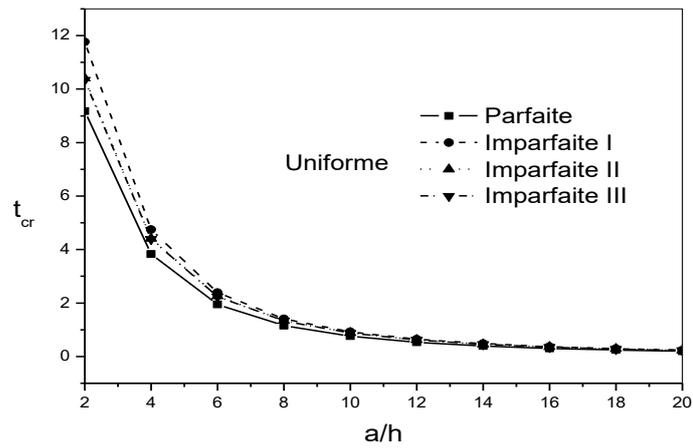


Figure IV.3 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/h) suivant l'épaisseur de la plaque FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire.

IV.3. Analyse de l'effet de la porosité sur le flambement thermique des plaques FGM poreuses

L'effet de la distribution de la porosité et du rapport (a/h) de la plaque sur la différence de température de flambement sous chargement uniforme, linéaire et non linéaire de la température sont montrés dans la figure IV.4. Trois modèles de porosité sont utilisés imparfaite I, II et III. L'indice matériel et de la fraction de porosité sont fixé à 1 et 0.2 respectivement. D'après ces figures, on remarque que la différence diminue fortement puis reste inchangée. Il est à noter que le taux de changement dépend du modèle d'élévation de température et de la distribution de la porosité. De plus, dans tous les cas, le premier modèle

de distribution de la porosité (Imparfait I) donne la charge de flambement critique la plus élevée et donc plus bénéfique pour augmenter la limite de stabilité de la plaque.



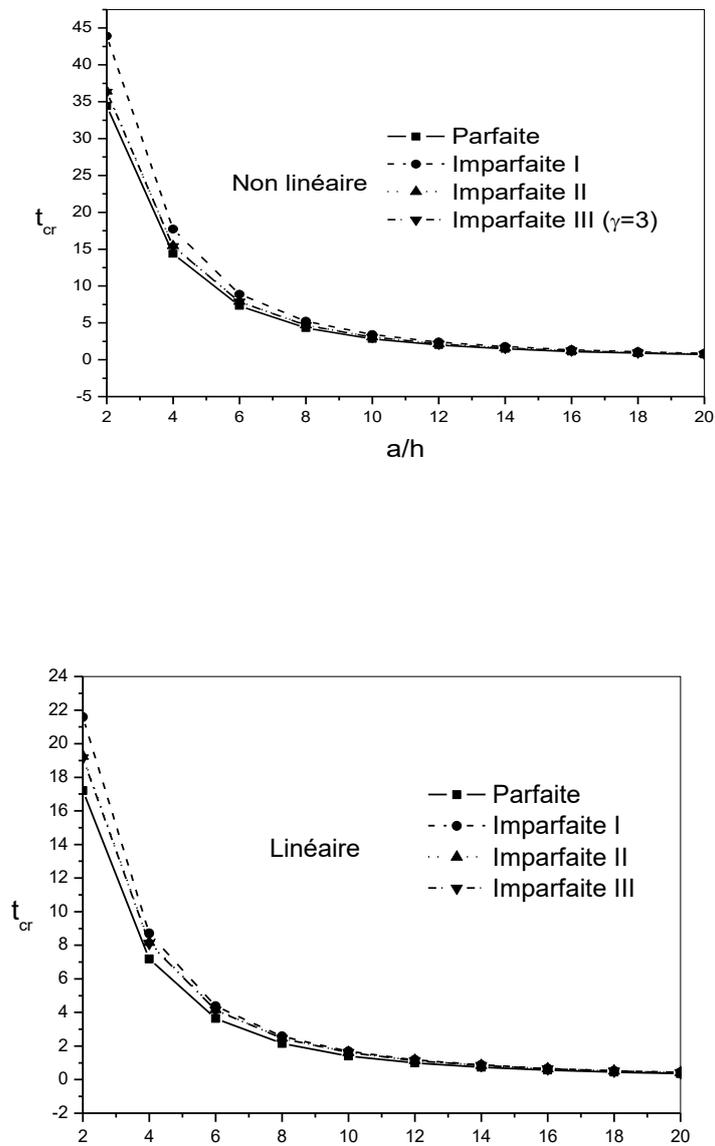


Figure IV.4 : Variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport (a/h) suivant l'épaisseur de la plaque FGM parfaite et imparfaite sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire ($p=1$, $\xi = 0.2$).

IV.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse de flambement thermique des plaques FGM sous chargement thermique uniforme, linéaire et non linéaire en utilisant la théorie de cisaillement d'ordre élevé à quatre variables. Le nombre de variables dans cette théorie est encore inférieur à celles des théories de déformation de cisaillement des plaques du premier ordre et d'ordre élevé. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transverse et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales suivant l'épaisseur de la plaque. La précision et l'efficacité de la présente théorie ont été démontrées par la comparaison des présents résultats avec celle de la théorie classique, et les théories d'ordre élevées existantes dans la littérature PSDPT et SSDPT.

L'effet de modèle de distribution de la porosité est aussi montré avec quelques exemples illustratifs. En conclusion et d'après les résultats trouvés on peut dire que la présente théorie de cisaillement proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement de flambement des plaques FGM poreuses sous différents types de chargement thermique.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Conclusion générale et perspectives

L'utilisation des matériaux composites fonctionnellement gradués apparaît comme une voie prometteuse dans le domaine des nouveaux matériaux composites grâce à leurs propriétés structurales très particulières. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'analyse de flambement thermique des plaques poreuses fonctionnellement graduées type FGM en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Pour ce faire, nous avons développé notre travail comme suit:

Nous avons proposé un nouveau modèle analytique performant basé sur la théorie de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse du problème de flambement thermique des plaques en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication.

Les propriétés des matériaux de la plaque FGM poreuse sont supposées varier en continu dans la direction de l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants définie avec la règle modifiée du mélange comprenant la fraction volumique de porosité avec trois différents forme de distribution de porosité sur la section transversale.

Toutes les études comparatives effectuées dans cette étude ont montrées que les résultats obtenus pour l'analyse du problème de flambement thermique sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement. L'effet de plusieurs paramètres de la structure est aussi présenté dans cette investigation sous forme numérique et graphique dans plusieurs combinaisons de matériaux FGM.

Pour les plaques FGM poreuses, les conclusions suivantes ont été observées à partir des résultats typiques obtenus :

- La différence de température critique de flambement pour les plaques FGM augmente par l'augmentation du rapport a/b .
- La différence de température critique de flambement des plaques FGM diminue lorsque le rapport coté sur épaisseur a/h augmente.
- La température critique de flambement des plaques FGM sont plus faibles que les valeurs des températures des plaques céramiques homogènes.

- La température critique de flambement de la plaque sous température non linéaire à travers l'épaisseur augmente comme l'indice de température augmente.
- La théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé donne des charges de flambement inférieur par rapport à la théorie des plaques classique.
- le premier modèle de distribution de la porosité (Imparfait I) donne la charge de flambement critique la plus élevée et donc plus bénéfique pour augmenter la limite de stabilité de la plaque.

En conclusion, on peut dire que la théorie de cisaillement à quatre variables proposé est exacte et simple pour la résolution du problème de flambement thermique des plaques FGM poreuses.

Afin de compléter les résultats obtenus et de mieux cerner le comportement mécanique des plaques poreuses en FGM, nous envisageons les perspectives suivantes pour la suite de notre recherche :

- Utilisation de cette théorie pour étudier le flambement thermique des plaques sandwichs poreuses.
- Utilisation de cette théorie pour d'autres types d'appuis.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

- [Afaq 2003] Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches, In Comptes-rendus des 13^{èmes} Journées Nationales sur les Composites, 289-292. Strasbourg, March 2003.
- [Ait Atmane 2015] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F., Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations, *Int. J. Mech. Mater.*, 1-14, 2015.
- [Abdizadeh H 1997] Elaboration et caractérisation de composites « composites lumineuses tri-couches à base d'alumine, thèse de doctorat INSA de Lyon, 212 p, 1997.
- [Akbaş 2017] Akbaş, Ş.D., Vibration and static analysis of functionally graded porous plates, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 3(3), 199-207, 2017.
- [Ambartsumyan 1969] Theory of anisotropic plate. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Avcar 2019] Avcar, M., Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams, *Steel and Composite Structures*, 30(6), 603-615, 2019.
- [Aydogdu 2005] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 1740–1755, 2005.
- [Bishop 1993] Bishop, A., Lin, C.Y., Navaratnam, M., Rawlings, R.D., Mc Shane, H.B., A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*, 12 (19), 1516-18, 1993.
- [Bourada 2019] Bourada, F., Bousahla, A.A., Bourada, M., Azzaz, A., Zinata, A., and Tounsi, A., Dynamic investigation of porous functionally graded beam using a sinusoidal shear deformation theory, *Wind and Structures*, 28(1), 19-30, 2019.
- [Davood Shahsavari 2018] Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B. (2018), A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation, *Aero. Sci. Technol.*, 72, 134–149.
- [Demirhan 2019] Demirhan, P.A. and Taskin, V., Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach, *Compos. B Eng.*, 160, 661-676, 2019.

- [Dharan 2010]** Dharan, S., Syam Prakash, V. and Savithri, S., A higher order shear deformation model for functionally graded plates, International Conference on Technological Trends (ICTT-2010), Trivandrum, India, November.
- [Hadji 2012]** Hadji, L. and Adda Bedia, E.A., Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams, *Wind Struct.*, 21(3), 273-287, 2015.
- [Hassaine Daouadji 2016]** Hassaine Daouadji, T., Benferhat, R. and Belkacem, A. (2016), Bending analysis of an imperfect advanced composite plates resting on the elastic foundations, *Coupled Syst. Mech.*, 5(3), 269-285, 2016.
- [Javaheri 2002]** Javaheri, R., and Eslami, M. R. (2002), Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory, *J. Therm. Stress.*, vol. 25(1), 603–625.
- [Koizumi 1992]** The concept of FGM, ceramic transaction, functionally graded materials. *Functionally Graded Materials*, 34, 3-10, 1992.
- [Liberscu 1967]** On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, 3, 53, 68, 1967.
- [Mistler 1973]** High strength substrates produced by multiple layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*, 52(11), 850-54, 1973.
- [Noor 1989]** Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates, *Appl Mech Rev*, 42(1), 1, 12, 1989.
- [Kirchhoff 1950]** Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, 40, 51, 88, 1850.
- [Ramteke 2019]** Ramteke, P.M., Panda, S.K. and Sharma, N., Effect of grading pattern and porosity on the eigen characteristics of porous functionally graded structure, *Steel and Composite Structures*, 33(6), 865, 2019.
- [Reddy 1984]** A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, 51, 745-752, 1984.
- [Reddy 1987]** A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plate. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 3, 173,180, 1987.
- [Reddy 2000]** Reddy, J.N., Analysis of functionally graded plates, *Int. J. Numer. Method. Eng.*, 47(1-3), 663-684, 2000.
- [Reissner 1945]** The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 12, 69, 77, 1945.

- [Reissner 1961]** Reissner, E., & Stavsky, Y., Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. appl.mech.*, 28, 402,408, 1961.
- [Steffes H D 1990]** Dvorak M. Wewel. Plasma sprayed functionally graded materials-processing and application, in proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials-Sedai Japan, 1990.
- [Trung 2008]** Trung, K..N., Karam, S., Guy, B., (2008), First order shear deformation plate models for Functionally graded materials, *Composite Structures*, 83, 25-36, 2008.
- [Tauratier 1991]** An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29(8), 901-916, 1991.
- [Wattanasakulponga 2014]** Wattanasakulponga, N. and Ungbhakornb, V. (2014), Linear and non linear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aero. Sci. Technol.*, 32(1), 111-120, 2014.
- [Whitney 1973]** Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads *J. Applied Mechanics*, 40, 302-304, 1973.
- [Zenkour 2010]** Zenkour, A. M., and Mashat, D. S. (2010), Thermal Buckling Analysis of Ceramic-Metal Functionally Graded Plates. *Nat. Sci.*, 2, 968–978.