

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : structures.....

Présenté par :

Derrer Adda.....

Tedjini Mokhtaria.....

*Sujet du mémoire*

**ANALYSE STATIQUE DU COMPORTEMENT DES POUTRES COMPOSITES**

**BASÉE SUR LA MÉTHODE DES CONTRAINTES**

*Soutenu publiquement le .....devant le jury composé de :*

M. TLIDJI	Youcef	Président
M. ABDELAZIZ	Hadj Henni	Rapporteur
M. DRAICHE	Kada	Examineur
Mme. KHELIFA	Zoubida	Examineur

PROMOTION : 2019/2020

# Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions le dieu le tous puissant qui nous a donnée la force d'accomplir ce premier fruit de notre étude.*

*Nous tenues à dresser tous nos remercient à tout les enseignant De l'institut de génie civil qui ont contribue à notre formation et aux président et membres de jury pour l'effort qu'ils auront à fournir pour examiner notre travail et de le juger sa qualité.*

*Et nous remercions notre encadreur Dr. H.heni Abdelaziz pour ces conseils et son aide précieux afin que nous achevions notre mémoire.*

*Nous remercions les plus chaleureux vents à ceux qui nos ont aidé et orient.*

# SOMMAIRE

RÉSUMÉ .....	i
ABSTRACT.....	ii
ملخص.....	iii
INTRODUCTION GÉNÉRALE	
CHAPITRE I: RAPPELS SUR LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ	
<b>I.1) Introduction :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2) Contraintes :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2.1) Etat des contraintes en un point :</b> .....	<b>1</b>
<b>I.2.2) Vecteur contrainte en un point pour une direction <math>\vec{n}</math>:</b> .....	<b>2</b>
<b>I.2.3) Contrainte normale et tangentielle :</b> .....	<b>2</b>
<b>I.2.4) Contraintes principales et directions principales:</b> .....	<b>3</b>
<b>I.2.5) Etats de contraintes particuliers:</b> .....	<b>5</b>
a) Etat de contrainte uniaxial: .....	<b>5</b>
b) Etat de cisaillement simple: .....	<b>6</b>
c) Etat de contraintes planes: .....	<b>6</b>
d) Etat de contrainte dans une section droite de poutre: .....	<b>7</b>
<b>I.2.6) Cercles de Mohr:</b> .....	<b>8</b>
<b>I.2.6.1) Cercles de Mohr des contraintes:</b> .....	<b>8</b>
<b>I.2.6.2) Construction de Mohr :</b> .....	<b>11</b>
<b>I.2.7) Etat des contraintes autour d'un point sur la surface d'un solide:</b> .....	<b>11</b>
<b>I.3) Déplacements – Déformations :</b> .....	<b>13</b>
<b>I.3.1) Champ des déplacements :</b> .....	<b>13</b>
<b>I.3.2) Etat des déformations au voisinage d'un point:</b> .....	<b>13</b>
<b>I.3.3) Allongement unitaire en A et pour une direction <math>\vec{q}</math> :</b> .....	<b>14</b>
<b>I.3.4) Glissement. Distorsion:</b> .....	<b>15</b>
<b>I.3.5) Déformations principales et directions principales:</b> .....	<b>15</b>
<b>I.3.6) Etat de déformations planes:</b> .....	<b>15</b>
<b>I.4) Loi de comportement :</b> .....	<b>16</b>

## CHAPITRE II : RÉSOLUTION DES PROBLÈMES D'ÉLASTICITÉ

<b>II.1) Introduction:</b> .....	<b>18</b>
<b>II.2) Les deux états plans d'élasticité:</b> .....	<b>18</b>
<b>II.2.1) Etat plan de contrainte :</b> .....	<b>18</b>
<b>II.2.2) Etat plan de déformation:</b> .....	<b>18</b>
<b>II.3) Les équations fondamentales de l'élasticité plane:</b> .....	<b>21</b>
<b>II.3.1) Les équations d'équilibre :</b> .....	<b>21</b>
<b>II.3.1.1) Les équations différentielles d'équilibre:</b> .....	<b>21</b>
<b>II.3.1.2) Les conditions de contour:</b> .....	<b>21</b>
<b>II.3.1.3) Changement d'axe:</b> .....	<b>22</b>
<b>II.3.2) L'équation de compatibilité et le potentiel des contraintes:</b> .....	<b>22</b>
<b>II.4) LA FONCTION D'AIRY:</b> .....	<b>23</b>
<b>II.4.1) Forces de volume nulles:</b> .....	<b>23</b>
<b>II.4.2) Forces de volume dérivant d'un potentiel:</b> .....	<b>24</b>
<b>II.5) Application A La Theorie Des Poutres:</b> .....	<b>25</b>
<b>II.5.1) Solution de l'équation biharmonique par des polynômes:</b> .....	<b>25</b>
<b>II.5.2) Problèmes dans les coordonnées rectangulaires:</b> .....	<b>25</b>
<b>II.5.3) Détermination des déplacements:</b> .....	<b>28</b>

## CHAPITRE III: : SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES

Introduction....	.....
.....	30
Présentation Générale des Matériaux Composites .....	31
III-2.1 Définition d'un Composite .....	31
III-2.2 Conception des Matériaux Composites .....	33
III-2.3 Caractéristiques des matériaux composites .....	34
III-2.4 Mise en œuvre des matériaux composites .....	35
III-2.5 Architecture des matériaux composites.....	37

Définition d'une poutre composite .....	39
Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés .....	40
Domaines d'Application des Matériaux composites .....	41
III-5.1 Les composites dans l'industrie automobile .....	41
III-5.2 Les composites dans l'aérospatiale .....	42
III-5.3 Les composites dans la construction navale .....	43

**CHAPITRE IV: SOLUTION D'ÉLASTICITÉ DES POUTRES COMPOSITES BASÉE SUR L'UTILISATION DE LA FONCTION D'AIRY**

IV.1 Introduction .....	44
IV.2 Solution d'élasticité.....	44
IV.2.1. Description du problème et équations de base .....	44
IV.2.2. Solution générale .....	46
IV 3 Traitement et présentation des résultats.....	49
IV 3. 1 position du problème.....	49
IV 3. 2 Présentation des résultats et discussion.....	50
IV.4 Conclusion.....	53

# LISTE DES FIGURES

<b>Figure (I.1) :</b> Contraintes autour du point <b>A</b> . :.....	<b>01</b>
<b>Figure (1.2) :</b> Contrainte normale $\sigma$ et tangentielle $\tau$ en un point <b>A</b> . :.....	<b>03</b>
<b>Figure (1.3):</b> Contraintes principales autour du point <b>A</b> . :.....	<b>04</b>
<b>Figure (1.4a) :</b> Tri-cercle de Mohr. :.....	<b>09</b>
<b>Figure (1.4b) :</b> Tri-cercle de Mohr en contraintes planes:.....	<b>09</b>
<b>Figure (1.5) :</b> Construction de Mohr. :.....	<b>10</b>
<b>Figure (1.6) :</b> Point A sur la surface d'un solide. :.....	<b>11</b>
<b>Figure (1.7) :</b> Déformation au voisinage d'un point <b>A</b> . :.....	<b>14</b>
<b>Figure (II.1) :</b> Exemples de structures en déformation plane : puits de mine (a) et tôle en laminage (b). :.....	<b>20</b>
<b>Figure (II.2):</b> Conditions de contour en contraintes planes. :.....	<b>22</b>
<b>Figure (II.3):</b> Contraintes sur deux facettes orthogonales :.....	<b>23</b>
<b>Figure (II.4):</b> Etat de contrainte généré par une fonction d'aire biquadratique:.....	<b>29</b>
<b>Figure (III.1) :</b> Ruban unidirectionnel carbone / verre sur lequel sont mis en évidence la chaîne et la trame:.....	<b>34</b>
<b>Figure (III.2) :</b> Différents étapes de formage par moulage d'un matériau composite:.....	<b>36</b>
<b>Figure (III.3):</b> Pli à Renforcement unidirectionnel:.....	<b>37</b>
<b>Figure (III.4):</b> Constitution d'un stratifié: .....	<b>38</b>
<b>Figure (III.5):</b> Constitution d'un sandwich: .....	<b>39</b>
<b>Figure (III.6):</b> Exemple d'une Poutre composite en I.....	<b>40</b>
<b>Figure (IV.1) :</b> géométrie et chargement de la poutre:.....	<b>44</b>
<b>Figure (IV.2):</b> Distribution des contraintes normales à travers la hauteur de la poutre pour les deux matériaux avec $a/h=10$ :.....	<b>51</b>
<b>Figure (IV.3):</b> Distribution des contraintes tangentielles à travers la hauteur de la poutre pour les deux matériaux et avec $a/h=10$ .....	<b>52</b>
<b>Figure (IV.4):</b> Distribution de la déformée le long de la poutre pour les deux matériaux avec $a/h=10$ .....	<b>52</b>

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau (IV .1) contraintes et déplacements pour les deux types de matériaux avec $a/h = 10$ .....	<b>50</b>
Tableau (IV .2) contraintes et déplacements pour les deux types de matériaux et pour différents élancements $a/h = 10, 20, 50$ .....	<b>50</b>
Tableau (IV.3) contraintes et déformées maximales dans la poutre pour différents rapports $E1/E2$ avec $a/h=40$ .....	<b>54</b>

# Notation et Symbole

$\sigma$  : Contrainte normale.

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  : Contrainte principale

$\tau$  : Contrainte tangentielle.

$\tau_{\max}$  : Contrainte tangentielle max.

$\vec{T}$  : Vecteur contrainte.

$\vec{t}$  : Vecteur unitaire.

$\theta$  : L'angle de rotation.

$\vec{U}(M)$  : Vecteur déplacement.

$[\epsilon]$  : Tenseur de déformation.

$\epsilon$  : Déformation.

$\delta_{ij}$  : le tenseur de Kronecker.

$E$  : Le module de Young.

$\nu$  : Le coefficient de Poisson.

$\lambda$  Et  $G$  : Sont les coefficients de Lamé.

$\Phi$  : Fonction D' AIRY.

$U$  Et  $V$  : Composantes de déplacements

$Ne$ : effort normal

$Me$ : moment de flexion

$Qe$ : force tangentielle

# Résumé

Ce travail consiste à traiter le problème de contraintes plane d'une poutre simplement appuyée en matériau composite à renforcement unidirectionnel soumise à une charge uniformément répartie . La résolution de ce type de problème on est intéressé d'utiliser une fonction appelée d'Airy qui prend la forme polynomiale en coordonnées cartésienne du plan de la poutre.

Le choix du degré du polynôme dépend des conditions de chargement imposées sur le contour de la poutre. A cet effet, Une solution analytique est développée sur la base de la proposition de la fonction d'Airy relative à cette réponse et par la suite l'état des contraintes se détermine par une simple dérivation de la fonction considérée.

Dans notre analyse nous avons considéré deux types de matériaux de caractéristiques mécaniques différentes et de voir en place et en lieu les effets de ces caractéristiques et l'élanement de la poutre en vue de prédire la distribution d'une part des contraintes à travers de la hauteur et d'autre part des déplacements le long de la poutre .

Mots-clés : Fonction d'Airy, Contraintes, Déplacements, Elasticité plane, Poutre , Matériau composite, Renfort.

# **Abstract**

This work consists in dealing with the problem of plane stresses of a beam simply supported in composite material with unidirectional reinforcement subjected to a uniformly distributed load. Solving this type of problem we are interested in using a function called Airy which takes the polynomial form in Cartesian coordinates of the plane of the beam.

The choice of the degree of the polynomial depends on the loading conditions imposed on the contour of the beam. To this end, an analytical solution is developed on the basis of the proposition of the Airy function relating to this response and subsequently the state of the constraints is determined by a simple derivation of the function considered.

In our analysis we have considered two types of materials with different mechanical characteristics and to see in place the effects of these characteristics and the ratio length-height of the beam in order to predict the distribution of a part of the stresses through the height and on the other displacement along the beam.

Keywords: Airy function, Stresses, Displacements, Plane elasticity, Beam, Material composite, Reinforcement.

# ملخص

يتكون هذا العمل من التعامل مع مشكلة الضغوط المستوية لحزمة مدعومة ببساطة في مادة مركبة مع تعزيز أحادي الاتجاه يخضع لحمل موزع بشكل موحد. لحل هذا النوع من المشكلات ، نحن مهتمون والتي تأخذ شكل متعدد الحدود في الإحداثيات الديكارتية لمستوى الحزمة باستخدام وظيفة تسمى

يعتمد اختيار درجة كثير الحدود على شروط التحميل المفروضة على محيط الحزمة. تحقيقاً لهذه الغاية ، إيري المتعلقة بهذه الاستجابة ، وبالتالي يتم تحديد حالة يتم تطوير حل تحليلي على أساس اقتراح وظيفة القيود من خلال اشتقاق بسيط للوظيفة قيد النظر

لقد درسنا في تحليلنا نوعين من المواد بخصائص ميكانيكية مختلفة ولرؤية تأثيرات هذه الخصائص في مكانها ومكانها ونحافة الحزمة من أجل التنبؤ بتوزيع جزء من الضغوط من خلال الارتفاع ومن ناحية أخرى الحركات على طول الرافدة

الكلمات المفتاحية : دالة إيري ، الإجهاد ، الإزاحة ، مرونة المستوي ، الرافدة ، المادة

المركبة ، تقوية

## ***Introduction générale:***

La résolution des équations générales de l'élasticité tridimensionnelles avec vérification des conditions aux limites est l'opération la plus importante en théorie de l'élasticité afin de déterminer la distribution des contraintes ou déplacement dans un corps quelconque. Mais dans la plus part des cas cette résolution est très complexe ou des fois impossible.

Heureusement, pour beaucoup de problèmes qu'on recentre en pratique, quelques hypothèses simplificatrices peuvent être prises en regardant uniquement le type de distribution de contraintes ou de déformations. Dans ce cas la résolution est beaucoup plus simplifiée et la solution peut être obtenue facilement.

C'est le cas par exemple où les contraintes dans un corps, sont toutes parallèles à un plan ou bien lorsque les déplacements de tous les points d'un corps déformé se trouvent dans des plans de chargement à la longueur de ce corps.

Dans ce cas, l'influence de la troisième dimension sur la distribution des contraintes et déformations peut être négligée. On a donc un problème bidimensionnel. On dit qu'il s'agit de l'élasticité plane. Cependant selon la distribution des contraintes ou bien des déformations on parle de contrainte plane [1].

Notre travail est composé de quatre chapitres :

A titre de rappel nous présentons en premier chapitre les équations de base de la théorie d'élasticité.

Dans le deuxième chapitre on a l'intérêt de savoir la méthode analytique de résolution des problèmes d'élasticité appliquée aux poutres par utilisation de la fonction d'Airy.

Une synthèse bibliographique sur les matériaux composites est présentée dans le chapitre trois avec leurs domaine d'application [6].

Le dernier chapitre est consacré au développement de la solution d'élasticité des poutres simplement appuyées en matériaux composites à renforcement unidirectionnel en utilisant la fonction d'Airy suivi par traitement et présentation des résultats avec discussions.

# Chapitre I

**Rappels sur la théorie d'élasticité**

### I.1) Introduction

A titre rappel nous présentons dans ce chapitre les équations de base de la théorie d'élasticité. Deux théories essentielles sont exposées à savoir la théorie des contraintes ainsi celle des déformations, par la suite ces théories sont regroupées en une seule discipline celle d'élasticité qui se traduit par la liaison linéaire entre les composantes des contraintes et des déformations ou plutôt lois de comportement des corps élastiques [2].

### I.2) Contraintes

#### I.2.1) Etat des contraintes en un point

On démontre dans le cours d'élasticité que, compte tenu des hypothèses physiques, l'état de contrainte en un point A (figure I. 1) est caractérisé par le tenseur des contraintes. C'est un tenseur du second ordre symétrique. Dans une base orthonormée il est représenté par la matrice des contraintes qui s'écrit :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ Sym & & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (I.1)$$

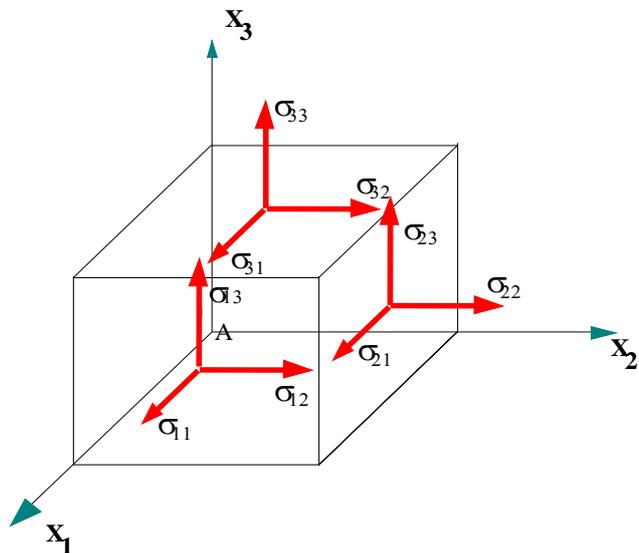


Figure I. 1 : Contraintes autour du point A

Dans cette notation du tenseur des contraintes, le premier indice indique la direction de la normale à la facette, le deuxième : la direction de la contrainte

**I.2.2) Vecteur contrainte en un point pour une direction  $\vec{n}$**

Soit un point A d'un solide, et une direction repérée par un vecteur  $\vec{n}$  (normale extérieure à la matière) .Soit une facette infiniment petite d'aire  $dS$  de normale  $\vec{n}$ . Le vecteur contrainte au point A pour la direction  $\vec{n}$  s'écrit :

$$\vec{T}_{(A,\vec{n})} = [\sigma]_A \vec{n} \tag{I.2}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{bmatrix} \tag{I.3}$$

**I.2.3) Contrainte normale et tangentielle**

Le vecteur contrainte en un point A et pour la direction  $\vec{n}$  (figure I. 2) peut être projeté :

- sur la normale, on obtient la contrainte normale :

$$\sigma = \vec{T}_{(A,\vec{n})} \vec{n} = \vec{n}^t [\sigma]_A \vec{n} \tag{I.4}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 (\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) \\ n_2 (\sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3) \\ n_3 (\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3) \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

- sur le plan tangent, on obtient la **contrainte tangentielle**  $\tau$  telle que:

$$\tau^2 = \left| \vec{T}_{(A,n)} \right|^2 - \sigma^2 \quad (I.6)$$

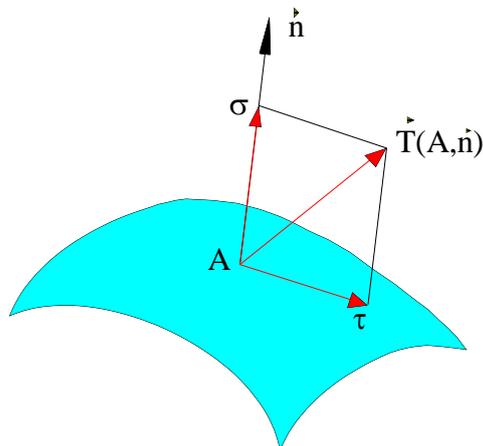


Figure 1. 2 : Contrainte normale  $\sigma$  et tangentielle  $\tau$  en un point A

#### I.2.4) Contraintes principales et directions principales

**Mathématiquement on démontre :** le tenseur des contraintes étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel  $\sigma_i$  et une direction  $\vec{X}_i$  telle que:

$$[\sigma]_A \vec{X}_i = \sigma_i \vec{X}_i \quad (I.7)$$

- les trois valeurs propres  $\sigma_i$  sont réelles (distinctes ou confondues) ;
- si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres correspondants  $\vec{X}_i$  sont orthogonaux.

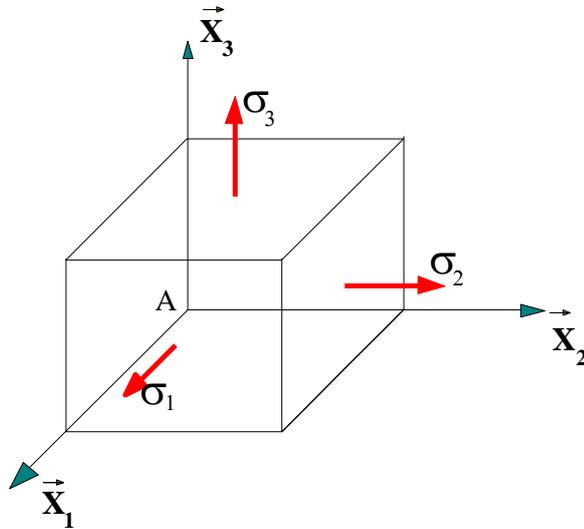


Figure 1. 3: Contraintes principales autour du point A

**Traduction mécanique :** si les trois **contraintes principales**  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont distinctes, il existe trois **directions principales** orthogonales correspondantes  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$  et  $\vec{X}_3$ .

Ainsi pour une telle direction  $\vec{X}_i$  le vecteur contrainte :

$$\vec{T}(A, \vec{X}_i) = \sigma_i \vec{X}_i \quad \text{Est colinéaire à la direction } \vec{X}_i$$

En d'autres termes, la contrainte tangentielle pour cette direction est nulle. Dans cette direction on a donc affaire, soit à une sollicitation de traction ( $\sigma_i > 0$ ), soit à une sollicitation de compression ( $\sigma_i < 0$ ).

Dans le repère principal la matrice des contraintes s'écrit alors :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)} \quad (I.8)$$

**Détermination des contraintes principales et des directions principales** (figure 1. 3)

- Les contraintes principales sont déterminées en écrivant que le déterminant suivant est nul :

$$\det \begin{vmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.9})$$

On aboutit à l'équation caractéristique :  $-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$  (I.10)

Dans cette équation  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  sont les trois invariants du tenseur des contraintes (quantités indépendantes de la base dans laquelle est exprimé le tenseur). Dans une base quelconque ils ont pour expression :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{trace de } [\sigma]_A \\ I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) + (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2) + (\sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{13}^2) \\ I_3 = \det[\sigma]_A \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Et, dans la base principale :

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace de } [\sigma]_A \\ I_2 = (\sigma_1\sigma_2) + (\sigma_2\sigma_3) + (\sigma_1\sigma_3) \\ I_3 = \det[\sigma]_A \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

La **direction principale**  $\vec{X}$  correspondant à la contrainte principale  $\sigma$  est déterminée en écrivant

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Le déterminant de la matrice  $[\sigma]_A - \sigma \delta_{ij}$  étant nul, on ne dispose plus que de deux équations indépendantes (par exemple les deux premières). On ne peut donc déterminer qu'une direction et non un vecteur (l'une des composantes est arbitraire), c'est pourquoi l'on parle de direction principale.

### I.2.5) Etats de contraintes particuliers

#### a) Etat de contrainte uniaxial

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (I.14)$$

Traction simple si  $\sigma_1 > 0$ , compression simple si  $\sigma_1 < 0$

**b) Etat de cisaillement simple**

Soit un repère orthonormé  $(A ; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , l'état de contraintes en A est un état de cisaillement simple par rapport aux directions  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (I.15)$$

Les contraintes principales sont égales à :

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0$$

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes admet la forme suivante :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (I.16)$$

**c) Etat de contraintes planes**

On a affaire à un état plan de contraintes parallèlement au plan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  si :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1, x_2)$$

C'est le cas des plaques planes chargées dans leur plan.

Le tenseur des contraintes s'écrit alors dans une base quelconque :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (\text{I.17})$$

L'axe  $\bar{x}_3$  est donc direction principale et la contrainte principale correspondante est nulle.

Dans la base principale :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.18})$$

**d) Etat de contrainte dans une section droite de poutre**

En tout point A d'une section droite, l'état de contrainte peut se représenter dans la base locale classique de la théorie des poutres (  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  ) :

- $\bar{x}_1$  tangent à la ligne moyenne ;
- $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$  dans le plan de section droite et axes principaux de la section.

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} \quad (\text{I.19})$$

Traction (compression) simple :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.20})$$

Flexion pure :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.21})$$

Flexion simple :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.22})$$

Torsion avec sections circulaires :

$$[\sigma]_A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (\text{I.23})$$

### ***1.2.6) Cercles de Mohr***

#### ***1.2.6.1) Cercles de Mohr des contraintes***

Supposons connues les trois contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  au point M. On peut montrer que, dans le plan  $(\sigma, \tau)$  (appelé **plan de Mohr**), l'extrémité des vecteurs contraintes  $\vec{\mathbf{T}}$  (M,  $\vec{\mathbf{n}}$ ) admissibles,  $\vec{\mathbf{n}}$  tournant autour du point M, est la surface ombrée de la figure 1. 4.

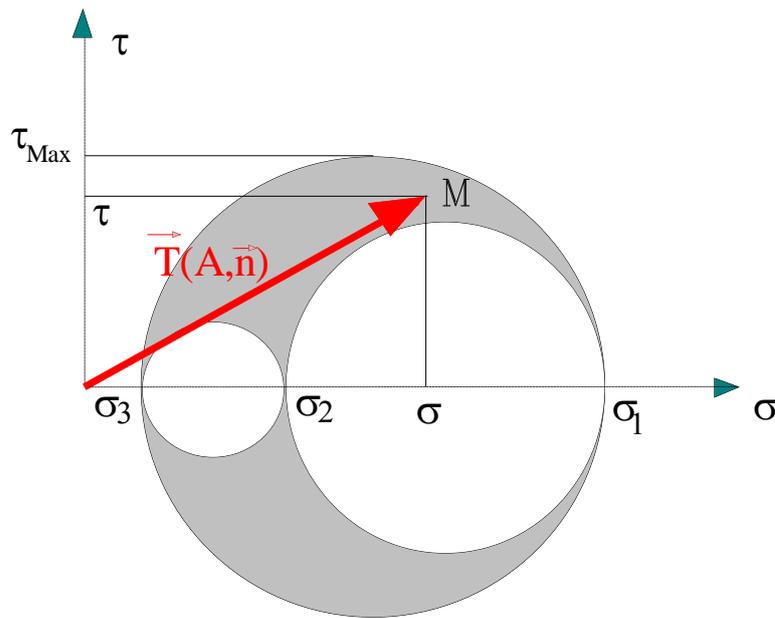


Figure 1. 4a : Tricercler de Mohr

**Cas particulier important :** Dans le cas où le vecteur  $\vec{n}$  décrit un plan principal, par exemple  $(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ , l'extrémité du vecteur  $\vec{T}(M, \vec{n})$  décrit, dans le plan  $(\sigma, \tau)$ , un cercle centré sur l'axe  $O\sigma$  et ayant pour diamètre le segment  $\sigma_1, \sigma_2$ . C'est notamment le cas en contraintes planes.

Cercles de Mohr en contraintes planes

En contraintes plane  $\sigma_3 = 0$  ainsi la figure ci-dessus devient :

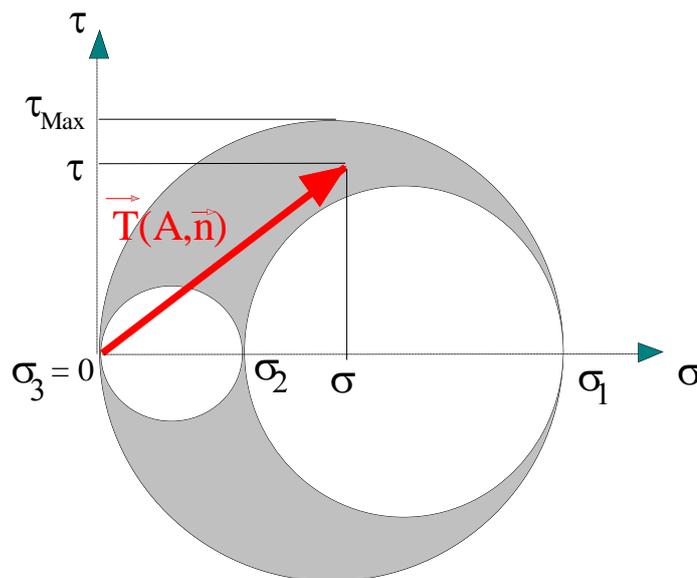


Figure 1. 4b : Tricercler de Mohr en contraintes planes

Plaçons nous dans le **plan principal** (A ;  $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ )

Considérons une facette dont la normale  $\vec{n}$  fait un angle de  $\theta$  par rapport à l'axe principal  $\vec{X}_1$ .

Soit un vecteur unitaire  $\vec{t}$  tangent à la facette, obtenu par rotation de  $-\pi/2$  de  $\vec{n}$ .

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \cos\theta \vec{X}_1 + \sin\theta \vec{X}_2 \\ \vec{t} &= \sin\theta \vec{X}_1 - \cos\theta \vec{X}_2 \end{aligned} \tag{I.24}$$

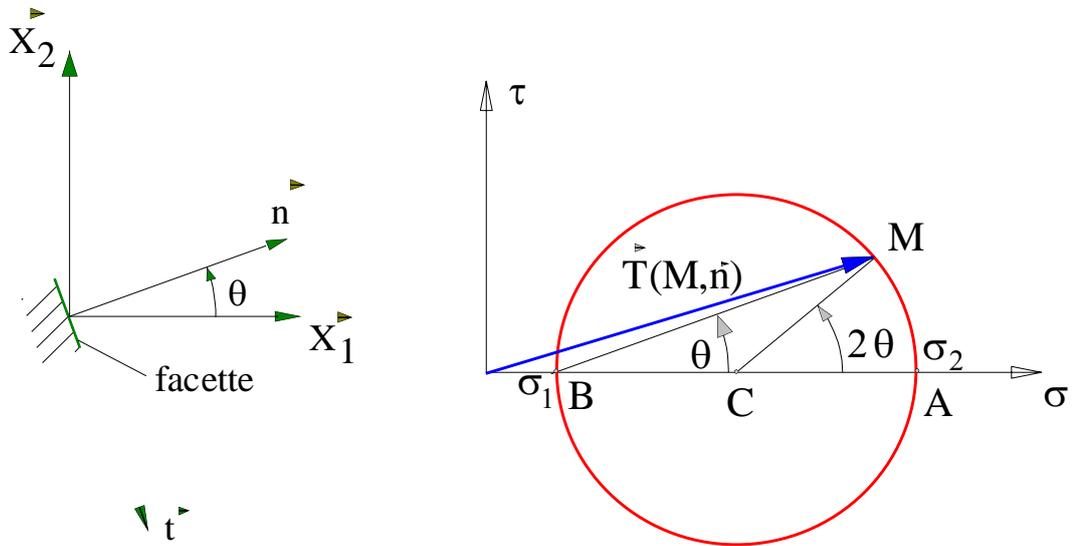


Figure 1.5 : Construction de Mohr

Le vecteur contraint admet pour expression :

$$\vec{T}(A, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \sigma_1 \cos\theta \vec{X}_1 + \sigma_2 \sin\theta \vec{X}_2 \tag{I.25}$$

La contrainte normale est :  $\sigma = \vec{T}(A, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta$  et la contrainte tangentielle définie ici par :

$$\tau = \vec{T}(A, \vec{n}) \cdot \vec{t} = \sigma_1 \cos\theta \sin\theta - \sigma_2 \sin\theta \cos\theta$$

En passant en arc double, il vient :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\theta) \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\theta) \end{cases} \tag{I.26}$$

Lorsque la facette orientée par la normale extérieure  $\vec{n}$  tourne, l'angle  $\theta$  varie. Il lui correspond le point figuratif M (figure 1. 5)

Dans le plan de Mohr, le lieu de M lorsque  $\theta$  varie est un cercle de centre :

$$C \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ \tau = 0 \end{array} \right. \text{ et de rayon } \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (I.27)$$

**I.2.6.2) Construction de Mohr**

Convenons de classer les contraintes principales dans l'ordre suivant :

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

Dans le plan de Mohr (Figure 1. 5) l'axe horizontal est gradué en contrainte normale  $\sigma$  et l'axe vertical en contrainte tangentielle  $\tau$ .

$$\text{Le point A} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \sigma = \sigma_1 \\ \tau = 0 \end{array} \right. \text{ et le point B} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = \pi / 2 \\ \sigma = \sigma_2 \\ \tau = 0 \end{array} \right.$$

Le point M est le point courant. Il correspond à une facette qui a tourné de  $\theta$  par rapport à l'axe  $\vec{X}_1$ . L'angle au centre (  $\vec{CA}$  ,  $\vec{CM}$  ) est alors de  $2\theta$ .

**Remarque :** Ne pas oublier que  $\sigma_3 = 0$ . Il y a donc trois cercles de Mohr.

**I.2.7) Etat des contraintes autour d'un point sur la surface d'un solide**

Considérons un point A sur la surface d'un solide. Soit un repère (A;  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ) tel que :

- $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  soient situés dans le plan tangent ;
- $\vec{x}_3$  est dirigé suivant la normale

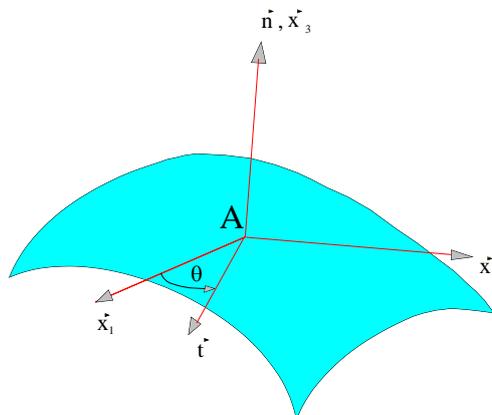


Figure 1. 6 : Point A sur la surface d'un solide

Supposons qu'en A il n'y a pas de chargement. C'est donc que le vecteur chargement extérieur est nul :  
 $\vec{Q}(A) = \vec{0}$

Les conditions aux limites sur le chargement imposent :  $\vec{T}(A, \vec{x}_3) = \vec{Q}(A)$

alors :  $\vec{T}(A, \vec{x}_3) = \vec{0}$  (I.28)

Projetons la relation (I.28) sur la tangente  $\vec{t}$  définie par  $\theta$  et sur la normale.

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{t} = 0 \quad (I.29)$$

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_3 = 0 \quad (I.30)$$

**Signification de la relation (I.29) :**

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I.31)$$

$$\vec{t} = \cos \theta \vec{x}_1 + \sin \theta \vec{x}_2$$

Alors  $\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{t} = \sigma_{13} \cos \theta + \sigma_{23} \sin \theta = 0$

et ceci quel que soit  $\theta$ , c'est donc que:  $\sigma_{13} = 0$  et  $\sigma_{23} = 0$

Ainsi le tenseur des contraintes s'écrit en A:  $[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$  (I.32)

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas de chargement tangentiel à la surface au point A, la normale à la surface est une direction principale car:  $[\sigma]_A \vec{n} = \sigma_{33} \vec{n}$  (I.33)

Le plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  est alors plan principal.

**Signification de la relation (I.30) :**

$$\vec{T}(A, \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_3 = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = 0 \quad (I.34)$$

En définitive, le tenseur des contraintes s'écrit en A:  $[\sigma]_A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (I.35)

**Conclusion** : Lorsque en un point A de la surface d'un solide il n'y a pas de charge extérieure, l'état de contrainte est un état de contrainte plane dans le plan tangent à la surface.

Cette propriété est mise en œuvre en extensomètre.

### I.3) Déplacements - Déformations

#### I.3.1) Champ des déplacements

Sous l'effet des efforts, la structure se déforme. Un point M de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  appartenant à la structure se déplace sous le chargement. Son déplacement est caractérisé par le vecteur déplacement :

$$\vec{U}(M) = u_1(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_3$$

Comme on est en théorie des petites perturbations, les composantes  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont "petites" .

#### I.3.2) Etat des déformations au voisinage d'un point

On se place ici dans le cas des petites déformations.

On démontre que **l'état de déformation** au voisinage d'un point A est caractérisé par le tenseur des déformations.

C'est un tenseur du second ordre symétrique qui se déduit du champ des déplacements par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (I.36)$$

Dans une base orthonormée il s'écrit en A :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ Sym & & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (I.37)$$

**I.3.3) Allongement unitaire en A et pour une direction  $\vec{q}_1$**

Après déformation, la longueur  $ds_1$  du vecteur  $\vec{AA}_1$  de direction  $\vec{q}_1$  est devenue  $ds'_1$ . On peut alors définir l'allongement relatif en A et pour la direction  $\vec{q}_1$  (Figure 1. 7) :

C'est la quantité : 
$$e(A, \vec{q}_1) = \frac{ds'_1 - ds_1}{ds_1}$$

$ds'_1$  et  $ds_1$  sont des longueurs infiniment petites.

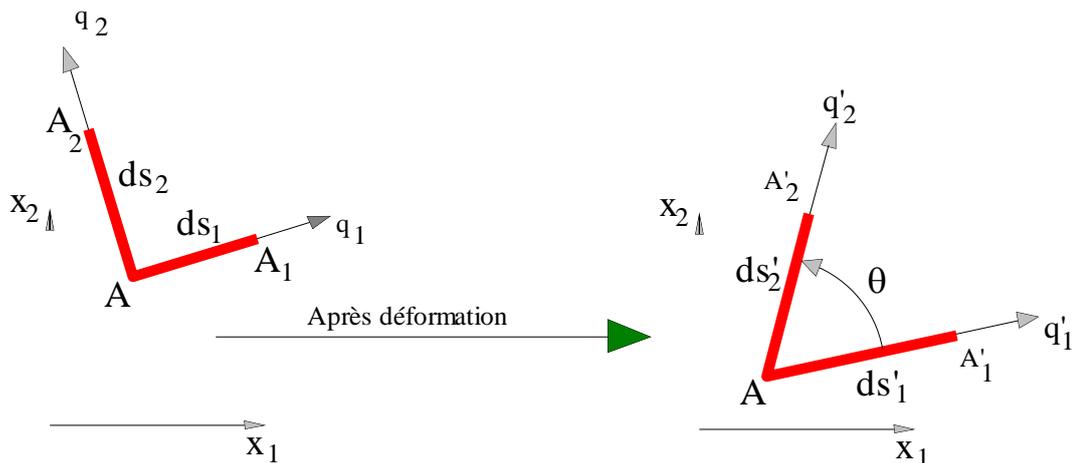
On peut montrer que cette quantité s'exprime à partir du tenseur des déformations par :

$$e_{(A, \vec{q}_1)} = \vec{q}_1^t [\boldsymbol{\varepsilon}]_A \vec{q}_1 \tag{I.38}$$

**Exemple:** Calculons l'allongement unitaire dans la direction  $\vec{x}_1(1,0,0)$

$$e(A, \vec{x}_1) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11} \tag{I.39}$$

On interprète ainsi les termes diagonaux du tenseur des déformations qui représentent les allongements unitaires dans les trois directions orthonormées.



**Figure 1. 7 : Déformation au voisinage d'un point A**

**I.3.4) Glissement. Distorsion**

Après déformation, l'angle droit  $A_1AA_2$  est devenu  $A'_1A'A'_2$ . Cette variation d'angle droit s'appelle le **glissement** ou la **distorsion**. On peut montrer que le glissement  $g(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2)$  se calcule par :

$$g_{(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2)} = -2\vec{q}_1^t [\boldsymbol{\varepsilon}] \vec{q}_2$$

**Exemple :** Calculons la distorsion de l'angle droit  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$

$$g(A, \vec{x}_1, \vec{x}_3) = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \varepsilon_{13} \tag{I.40}$$

On interprète ainsi les termes non diagonaux du tenseur des déformations qui représentent à un facteur près les distorsions des trois angles droits d'un trièdre.

**I.3.5) Déformations principales et directions principales**

De même que pour le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel  $\varepsilon_i$  et une direction  $\vec{X}_i$  telle que :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_A \vec{X}_i = \varepsilon_i \vec{X}_i \tag{I.41}$$

Ainsi dans une telle direction  $\vec{X}_i$  il n'y a pas de glissement mais seulement un allongement. Dans le repère principal en A, la matrice des déformations s'écrit alors :

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}_{(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)} \tag{I.42}$$

**I.3.6) Etat de déformations planes**

On a affaire à un état plan de déformations parallèlement au plan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  si le champ des déplacements  $\vec{U}$  de tout point M peut se mettre sous la forme :

$$\vec{U}(M) = u_1(x_1, x_2) \bar{x}_1 + u_2(x_1, x_2) \bar{x}_2 + C x_3 \bar{x}_3 \quad (I.43)$$

Les composantes  $u_1$  et  $u_2$  ne sont fonctions que des deux seules variables  $x_1$  et  $x_2$ ,  $C$  est une constante : la composante suivant  $\bar{x}_3$  est une fonction affine en  $x_3$

Cette hypothèse est généralement admise lorsque l'on étudie des pièces cylindriques de génératrice parallèle à l'axe  $\bar{x}_3$ , suffisamment longues pour que l'on puisse négliger les effets aux extrémités, et chargées dans le plan  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ .

C'est le cas des canalisations de transport de fluide par exemple.

Dans ces conditions, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.44)$$

Comme  $u_1$  et  $u_2$  ne dépendent pas de  $x_3$ ,  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$

Et  $\varepsilon_{33} = C$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (I.45)$$

Dans la suite on supposera  $C = 0$ .

Le tenseur des déformations s'écrit alors dans une base quelconque :

$$[\varepsilon]_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)} \quad (I.46)$$

L'axe  $\bar{x}_3$  est donc direction principale et l'allongement unitaire correspondant est nul.

#### I.4) Loi de comportement

La linéarité de la loi de comportement de l'élasticité se traduit par la linéarité de la loi qui relie tenseur des contraintes et tenseur des déformations.

Soit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 G \varepsilon_{ij} \quad (I.47)$$

Dans cette relation :  $\delta_{ij}$  est le tenseur de Kronecker

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \quad (\text{I.48})$$

Dans certains manuels on note  $G : \mu$

$\lambda$  et  $G$  sont les coefficients de Lamé, constants pour un matériau donné.

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  est le premier invariant du tenseur des déformations

Inversement, on peut exprimer le tenseur des déformations à partir de celui des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{I.49})$$

Dans cette relation :

- $E$  est le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson, constants pour un matériau donné.
- $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  est le premier invariant du tenseur des contraintes

Les relations entre les différents coefficients d'élasticité sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{I.50})$$

$G$  est le module de Coulomb.

Si  $\nu = 0,25$  alors  $G = E / 2.5$ , c'est le cas pour les matériaux ductiles.

Pour l'acier "doux" ( S235 par exemple) :  $E \approx 200\,000$  MPa et  $G \approx 80\,000$  MPa

En décomposant sur les axes on obtient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{33} + \sigma_{11}) \quad (\text{I.51})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{11}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \quad (\text{I.52})$$

# Chapitre II

**Résolution des problèmes d'élasticité**

**II .1) Introduction**

Dans ce chapitre nous étudierons plus en détail le comportement des matériaux dans le régime élastique. Ce régime concerne l'utilisation des structures dans la vie courante sans déformations permanentes (ponts, voitures, avions, trains, structures du génie civil, ...).

**II.2) Les deux états plans d'élasticité**

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présentant aucun avantage dans les problèmes particuliers, nous emploierons la notation des ingénieurs.[2]

**II.2.1) Etat plan de contrainte**

Considérons un disque mince d'épaisseur constante, sollicité par des forces appliquées sur son contour. Les contraintes  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$  sont nulles sur les deux faces du disque. Par raison de continuité, elles ne peuvent prendre à l'intérieure du disque que des valeurs très faibles par rapport à  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  l'on ne commet pas une erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles sur tout plan intérieur parallèle aux faces.

Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  ne dépendent pratiquement pas de z, c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Le tenseur des contraintes n'a que 3 composantes non nulles. La loi de Hooke d'un matériau élastique isotrope montre que la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est non nulle :

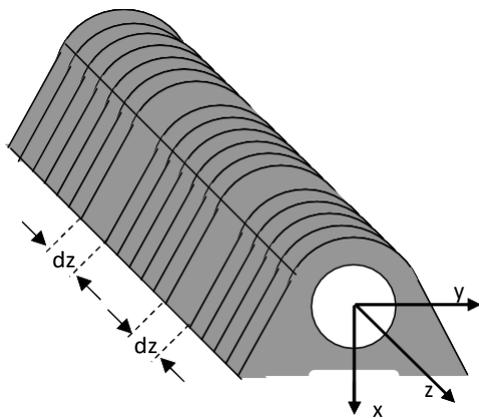
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{pmatrix} \quad (II.1)$$

En inversant les expressions de  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{yy}$  dans l'équation (II, 1) on obtient :

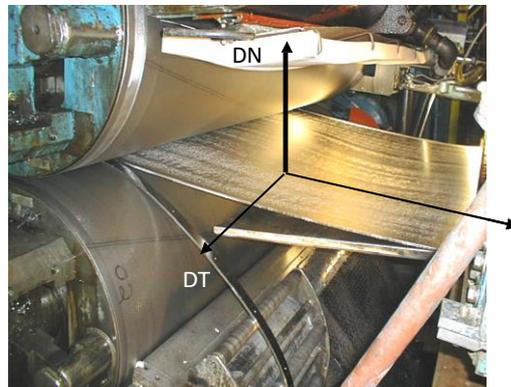
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

**II.2.2. Etat plan de déformation**

Considérons un tunnel ou un puits de mine (figure (II.1) a) de très grande étendue selon la direction z. Si les sections perpendiculaires à l'axe z sont toutes identiques, deux sections distantes de dz se déforment de façon identique. Sur la figure (II.1) b est représentée une tôle en sortie de laminoir. Dans la direction transversale (DT), il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre les cylindres du laminoir et la tôle. Les deux exemples de la figure 1 rentrent dans le cadre des déformations planes.



-a-



-b-

Figure (II.1) Exemples de structures en déformation plane : puits de mine (a) et tôle en laminage (b).

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

La composante non nulle  $\sigma_{zz}$  du tenseur des contraintes ne s'obtient par la loi de Hooke. Dans un matériau isotrope élastique  $\sigma_{zz}$  vaut :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{II.4})$$

Les autres composantes non nulles du tenseur des contraintes s'écrivent

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{yy} = 2G \left[ \varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Soit en réarrangeant les différents termes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} \right] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy} \right] \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[ (1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} \right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} \left[ -\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy} \right] \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Ayant résolu un problème de contraintes planes, il est souvent utile de connaître la solution du problème correspondant de déformation plane. C'est le cas par exemple si l'on veut résoudre expérimentalement un problème de déformation plane. Le moyen le plus simple

consiste à effectuer les mesures sur un disque mince représentant le problème de contraintes planes correspondant, puis à repasser au problème initial. Pour ce faire, point n'est besoin de recommencer tous les calculs. Il suffit de faire les substitutions suivantes

Pour passer de contraintes planes en déformations planes

$$\begin{cases} E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1-\nu)} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Et pour passer de déformations planes aux contraintes planes

$$\begin{cases} E \rightarrow \frac{E(1+2\nu)}{(1-\nu)^2} \\ \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1+\nu)} \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Les deux transformations précédentes laissent inchangée l'expression du module de cisaillement ou de Coulomb G, en fonction de E et  $\nu$ .

### II.3) Les équations fondamentales de l'élasticité plane

#### II.3.1) Les équations d'équilibre

##### II.3.1.1) Les équations différentielles d'équilibre

En annulant  $\sigma_{zz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$  et en adoptant X et Y pour les composantes forces volumiques dans la direction X et dans la direction Y respectivement, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

##### II.3.1.2) Les conditions de contour

Soient  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$  les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour du disque en chargement plan. Soient  $T_x$  et  $T_y$  les tractions superficielles imposées sur le contour. La définition du tenseur contrainte permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha = T_x \\ \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha = T_y \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

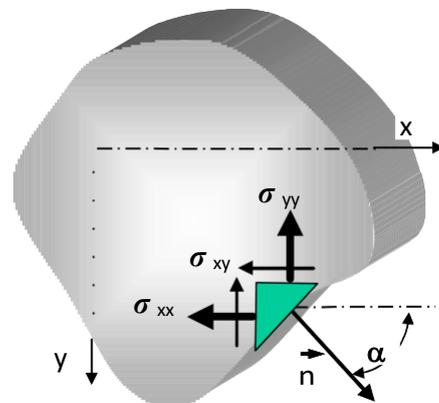


Figure (II.2) : Conditions de contour en contraintes planes.

Ces conditions expriment l'équilibre de translation selon les deux axes coordonnée du prisme élémentaire sur la figure (II.2).

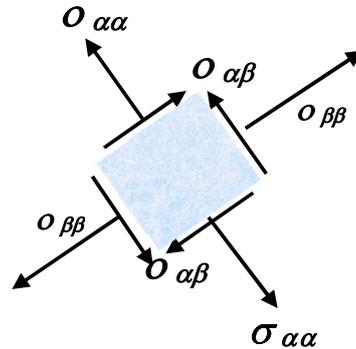


Figure (II.3) Contraintes sur deux facettes orthogonales

### II.3.1.3) Changement d'axe

Soient 1 et 2 les directions principales des contraintes ( $\sigma_{12}=0$ ) et  $\sum_1, \sum_2$  (figure (II.3)) les contraintes principales. Dans ce cas on montre que 1 et 2 sont aussi les directions principales des déformations. Les formules de changement d'axes établies pour le tenseur des contraintes en 3 dimensions prennent des expressions particulièrement simples en contraintes planes ou en déformations planes :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\alpha} = \sum_1 \cos^2 \alpha + \sum_2 \sin^2 \alpha \\ \sigma_{\alpha\beta} = \left( \frac{\sum_2 - \sum_1}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right) \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (II.11)$$

### II.3.2) L'équation de compatibilité et le potentiel des contraintes

Dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité s'écrivent.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{kk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{jk} = 0 \quad (II.13)$$

Si les déformations  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  sont nulles et que toutes les autres déformations sont

indépendantes de z, les équations de compatibilité se réduisent à l'unique équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial x} = 0 \quad (II.14)$$

Comme dans le cas tridimensionnel, les équations de compatibilité peuvent être exprimées en fonction des contraintes. En contraintes planes ou déformations planes, on part cependant plus souvent de la fonction d'Airy.

**II.4) Fonction d'Airy**

**II.4.1) Forces de volume nulles**

Considérons les équations d'équilibres dans le cas où les forces de volume sont nulles

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Ces équations sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy  $\Phi$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

En combinant, la définition (12) des contraintes, la loi de Hooke et les équations de compatibilité (11), on montre que la fonction potentielle des contraintes doit être biharmonique

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{II.17})$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. Or nous avons démontré que la solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites perturbations. Donc la fonction  $\Phi$  qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

**II.4.2) Forces de volume dérivant d'un potentiel**

Nous allons à présent considérer un cas plus général et admettre qu'il existe

des forces de volume  $F$  dérivant d'un potentiel  $V$  sous la forme

$$\vec{F} = \text{grad}V = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Les équations d'équilibre en translation s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{xx} + V)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy} + V)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Ces équations ont la même forme que les équations d'équilibre sans forces de volume et sont satisfaites d'office pour des contraintes dérivant d'une fonction d'Airy  $\Phi$  :

$$\sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \quad (\text{II.20})$$

En combinant, la définition (15) des contraintes, la loi de Hooke et les équations de compatibilité (11), on montre que la fonction potentielle des contraintes doit être biharmonique

En état de déformations planes:

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta V \quad (\text{II.21})$$

En état de contraintes planes:

$$\Delta\Delta\Phi = (1-\nu)\Delta V \quad (\text{II.22})$$

Toute fonction biharmonique permet donc de satisfaire, les équations d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité. Or nous avons démontré que la solution d'un problème d'élasticité est unique sous l'hypothèse des petites perturbations. Donc la fonction  $\Phi$  qui permet de satisfaire les conditions aux limites donne la solution unique du problème.

**II.5) Application à la théorie des poutres**

**II.5.1) Solution de l'équation bi harmonique par des polynômes**

On a montré que la solution des problèmes d'élasticité plane, dans le cas particulier où les forces de volumes sont nulles ou constantes se réduit à l'intégration de l'équation biharmonique.[4]

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (II.23)$$

Et il s'ensuit que tout polynôme de x, y de degré inférieur à quatre sera biharmonique et est donc approprié en tant que fonction de contrainte cependant pour plus termes polynomiaux d'ordre, l'équation (II.23) n'est pas identiquement satisfaite. Supposer, par exemple, que nous considérons uniquement ces termes dans un polynôme général dont degré combiné (la somme des puissances de x et y) est N. Nous pouvons écrire ces termes sous la forme

$$P_N(x, y) = A_0 x^N + A_1 x^{N-1} y + A_2 x^{N-2} y^2 + \dots + A_N y^N \quad (II.24)$$

$$= \sum_{i=0}^N A_i x^{N-1} y^i \quad (II.25)$$

Où on note qu'il y a (N + 1) coefficients indépendants,  $A_i$  (i = 0, N). Si nous en remplaçant maintenant  $P_N(x, y)$  par l'équation (II.23), nous obtiendrons un nouveau polynôme de degré (N-4), puisque chaque terme est différencié quatre fois. On peut noter ce nouveau polynôme de  $Q_{N-4}(x, y)$

**II.5.2) Problèmes dans les coordonnées rectangulaires**

$$Q_{N-4}(x, y) = \nabla^4 P_N(x, y) \quad (II.26)$$

$$= \sum B_i x^{(N-4-i)} y^i \quad (II.27)$$

Les (N -3) coefficients  $B_0, \dots, B_{N-4}$  s'obtiennent facilement en développant à droite de l'équation (II.26) et des coefficients d'équation. Par exemple,

$$B_0 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_0 + 4 \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_2 + 24 A_4 \quad (II.28)$$

Maintenant, la fonction originale  $P_{N-4}(x, y)$  sera biharmonique si et seulement si  $Q_{N-4}(x, y)$  est zéro pour tous les  $x, y$  et ceci n'est possible que si chaque terme de la série (II.27) est *identique à zéro*, puisque les termes polynomiaux sont tous linéairement indépendants les uns des autres. En d'autres termes

$$B_i = 0; i = 0 \text{ à } (N-4) \quad (\text{II.29})$$

Ces conditions peuvent être converties en un ensemble correspondant de  $(N-3)$  équations pour les coefficients  $A_i$ . Par exemple, l'équation  $B_0 = 0$  donne

$$B_0 = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_0 + 4 \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot A_2 + 24A_4 = 0 \quad (\text{II.30})$$

À partir de (II.28). Nous appellerons les  $(N-3)$  équations de cette forme des contraintes sur les coefficients  $A_i$ , puisque les coefficients sont contraints de les satisfaire si le polynôme d'origine doit être biharmonique.

Une approche consisterait à utiliser les équations de contrainte pour éliminer  $(N-3)$  des coefficients inconnus dans le polynôme d'origine - par exemple, nous pourrions traiter les quatre premiers coefficients,  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , comme des constantes inconnues et les utiliser les équations de contrainte pour définir tous les coefficients restants en termes de ces inconnues. L'équation (II.30) serait alors traitée comme une équation pour  $A_4$  et les équations de contrainte suivantes définiraient chacune une nouvelle constante dans les séries.

Il peut être utile de considérer un exemple particulier à ce stade. Supposons nous considérons le polynôme du cinquième degré

$$P_5(x, y) = A_0 x^5 + A_1 x^4 y + A_2 x^3 y^2 + A_3 x^2 y^3 + A_4 x y^4 + A_5 y^5 \quad (\text{II.31})$$

Qui a six coefficients indépendants. En substituant dans l'équation (II.26), nous obtenons le polynôme du premier degré

$$Q_1(x, y) = (120A_0 + 24A_2 + 24A_4) \cdot x + (24A_1 + 24A_3 + 120A_5) \cdot y \quad (\text{II.32})$$

Les coefficients de  $x$  et  $y$  dans  $Q_1$  doivent tous deux être égaux à zéro si  $P_5$  doit être biharmonique et nous pouvons écrire les deux équations de contrainte résultantes sous la forme

$$A_4 = -5A_0 - A_2 \quad (\text{II.33})$$

$$A_5 = -\frac{A_1}{5} - \frac{A_3}{5} \quad (\text{II.34})$$

Enfin, nous utilisons (II.33, II.34) pour éliminer  $A_4, A_5$  dans la définition originale de  $P_5$  obtenant la définition du cinquième degré biharmonique le plus général polynôme

$$P_5(x, y) = A_0(x^5 - 5x \cdot y^4) + A_1(x^4 y - \frac{y^5}{5}) + A_2(x^3 y^2 - x \cdot y^4) + A_3(x^2 y^3 - \frac{y^5}{5}) \quad (\text{II.35})$$

Cette fonction sera biharmonique pour toutes les valeurs des quatre valeurs indépendantes.

Constantes  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , Nous pouvons exprimer cela en déclarant que le biharmonique le polynôme  $P_5$  a quatre degrés de liberté.

En général, le polynôme Q est de degré 4 inférieur à P car le biharmonique équation est de degré 4. Il en résulte qu'il y a toujours quatre moins équations de contrainte qu'il n'y a de coefficients dans le polynôme d'origine P et par conséquent, ils peuvent être satisfaits en laissant un polynôme à 4 degrés de liberté.

Cependant, le processus dégénère si  $N < 3$ .

Compte tenu de la discussion qui précède, il pourrait sembler approprié d'écrire une expression pour le polynôme général de degré N sous forme d'équation (II.35) comme préalable à la solution de problèmes polynomiaux en rectangles coordonnées. Cependant, comme le montre l'équation (II.35), les expressions résultantes sont algébriquement désordonnées et cette approche devient ingérable pour des problèmes de toute complexité. Au lieu de cela, il s'avère être plus simple algébriquement pour définir les problèmes en termes de plus simple sans contrainte polynômes comme l'équation (II.24) et d'imposer les équations de contrainte à un stade ultérieur de la solution.

Moyennant les conditions à la surface. Dans le cas des poutres ayant une section rectangulaire de faible épaisseur, on peut trouver des solutions pratiquement intéressantes en adoptant comme expression de  $\Phi$  des polynômes de divers degrés et en ajustant leurs coefficients de façon adéquate. Il est facile de voir que le polynôme quadratique

$$\varphi_2(x, y) = a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \quad (\text{II.36})$$

Est toujours biharmoniques. Ils y correspondent des états de traction pure et de cisaillement pur (figure (II.4)).

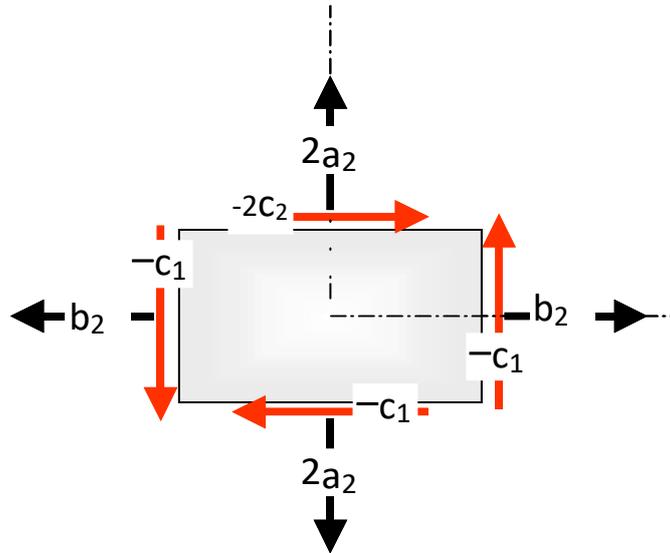


Figure (II.4) : Etat de contrainte généré par une fonction d'aire biquadratique.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 & -b_2 \\ -b_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.37})$$

La fonction cubique  $\varphi_3(x, y) = a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3$  est aussi toujours biharmonique. Cette fonction permet de générer des contraintes de tractions constantes, des contraintes de cisaillement constantes et des contraintes de traction simulant de la flexion :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 x + 6d_3 y & 2b_3 x - 2c_3 y \\ 2b_3 x - 2c_3 y & 6a_3 x + 2b_3 y \end{pmatrix} \quad (\text{II.38})$$

### II.5.3) Détermination des déplacements

Connaissant les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  on peut en déduire les déformations par la loi de Hooke . une fois les déformations calculées, il faut en déduire les déplacements  $u$  et  $v$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

En intégrant les deux premières équations on obtient :

$$\begin{cases} u(x, y) = \int \varepsilon_{xx} dx + f_1(y) \\ v(x, y) = \int \varepsilon_{yy} dy + f_2(x) \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

On dérive en suite ces expressions par rapport à y et x respectivement et on introduit ces dérivées dans les définitions de la déformation de cisaillement. Au total on constate que l'intégration introduit certaines constantes d'intégration, et que les expressions de u et v contiennent de ce fait les fonctions linéaires arbitraires

$$\begin{cases} u_1 = a + by \\ v_1 = c - bx \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

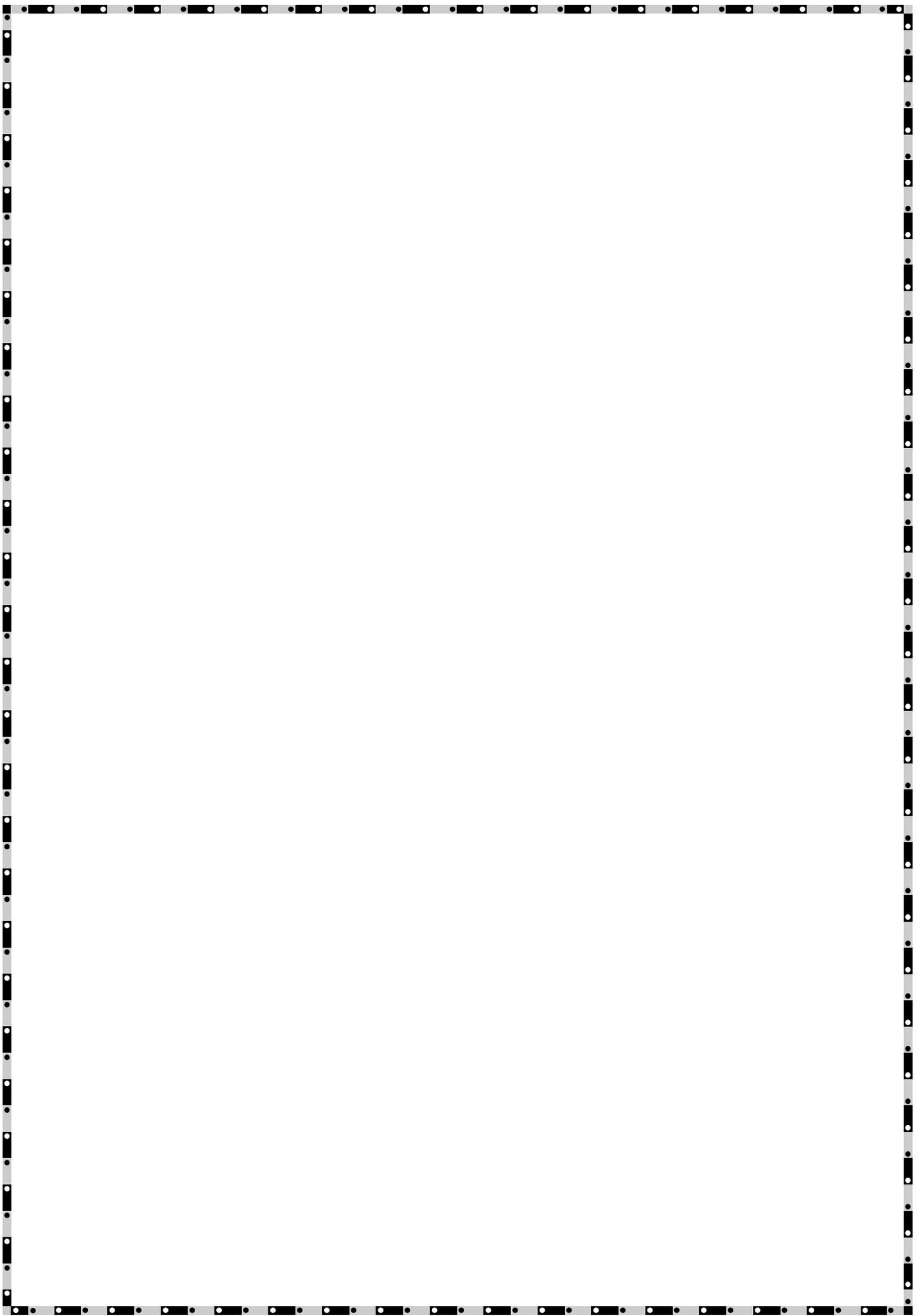
Où a, b et c sont des constants arbitraires. Les déplacements  $u_1$  et  $v_1$  conduisent à

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0 \quad (\text{II.42})$$

C'est-à-dire que ces déplacements ne donnent pas lieu à une déformation, mais seulement un mouvement d'ensemble. Les constantes d'intégration a et c représentent un mouvement de translation du corps et la constante b un petit angle de rotation autour de l'axe des z. Il faut, dans chaque problème particulier déterminer les valeurs de ces constantes par les conditions de fixation.

# Chapitre III

*synthèse bibliographique sur les  
matériaux composites*



### ***III .1) Introduction***

La résistance des matériaux a toujours été un critère d'importance majeure dans la conception des pièces des structures développées par les industries de construction. C'est la première qualité attendue pour le plancher d'une automobile, pour le tablier d'un pont ou pour le fuselage d'un avion. Avec l'augmentation du coût des hydrocarbures liée à leur raréfaction, un autre critère a pris une grande importance : celui de la légèreté des matériaux qui permet de dépenser moins d'énergie pour déplacer les objets qu'ils constituent. Les propriétés mécaniques d'un objet dépendent bien sûr de sa forme et de la nature de ses constituants mais également de la façon dont ces derniers sont structurés et assemblés. Les progrès des matériaux de construction proviennent aussi bien des recherches relatives à leurs compositions chimiques que celles qui concernent les procédés de fabrication. À titre d'exemple, l'aluminium est de plus en plus utilisé car c'est un métal léger. Comme il est peu résistant aux contraintes mécaniques, il faut souvent l'associer à des pièces d'acier mais il s'avère difficile de faire adhérer solidement ces deux métaux l'un à l'autre.

L'emploi de matériaux plus légers sans perte de solidité et sans augmentation importante des coûts de production est devenu le principal enjeu de la compétition actuelle entre Boeing et Airbus. Cet objectif est en bonne partie à l'origine de la création récente des ensembles métalliques et composites complexes, à cette fin, les chercheurs et les ingénieurs tendent à remplacer progressivement les pièces métalliques par des pièces hétérogènes dans lesquelles des fibres de carbone sont noyées dans une matrice en polymère. La présence des fibres renforce la résistance mécanique du matériau le long de son axe principal ; la présence de polymère assure à la fois la cohésion de l'ensemble et la résistance du matériau à des sollicitations transverses [6].

### ***III.2) Présentation Générale des Matériaux Composites :***

Contrairement aux matières premières classiques dont on connaît à l'avance les caractéristiques mécaniques, celles des composites ne sont réellement connues qu'après fabrication, car on réalise, en même temps, le matériau et le produit. Actuellement, les composites à matrice organique représentent la majorité des matériaux composites; toutefois, il existe également des composites à matrice inorganique (métallique ou céramique) dont la diffusion reste encore marginale.

L'analyse du comportement des matériaux composites et la prévision de leurs propriétés vont faire intervenir les caractéristiques de la matrice, celles des fibres, des problèmes d'interface et des conditions de fabrication. En effet, les propriétés mécaniques des composites sont très dépendantes des fibres employées : nature, répartition, taux, longueurs, diamètres, ensimages... Toutefois, les propriétés mécaniques, électriques, chimiques, photochimiques, thermiques sont largement affectées par celles de la matrice (en particulier par les températures de transition et de fusion pour les thermoplastiques) et cela d'autant plus que la fibre est plus courte et en plus faible proportion. Une bonne connaissance des plastiques renforcés doit donc être fondée sur celle des renforts et des matrices.

#### ***III.2.1 Définition d'un composite***

Un composite est un matériau artificiel moderne dont la structure est composée de deux constituants ou plus, combinés à une échelle microscopique, et qui ne sont pas solubles entre eux. L'un des constituants est appelé « Renfort » noyé dans l'autre constituant appelé « Matrice ». La phase de renforcement du matériau doit être sous la forme de fibres, particules, ou paillettes. La phase matrice du matériau est généralement continue.

##### **- La matrice :**

Pour des raisons de facilité de mise en œuvre sans pression, ce sont les polymères transformés à l'état liquide qui ont été initialement choisis pour servir de matrices et qui continuent à être le plus souvent employés. Aussi on trouve des matrices en métaux, céramique ou carbone selon le domaine d'utilisation. Les objectifs de l'utilisation de la matrice sont multiples, les plus importants sont :

- Support et protection chimique des fibres ou particules ;
- Répartition et transfert de charges.

- donner la forme désirée au produit final.

#### **- Le renfort :**

Ce sont des particules d'environ 50 microns de diamètre. Il existe des renforts fibre courte (de l'ordre du mm), des renforts fibre moyenne ou mi-longue (de l'ordre du cm) et des renforts fibre longue (où les fibres font environ la taille de l'échantillon). Il représente l'armature, squelette, il assure la tenue mécanique (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.). Souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques), les fibres les plus utilisées dans l'industrie.

**Fibre de verre** obtenue à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1500°C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues de 3 à 20mm. Suivant l'application auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

**Fibre E** pour les composites grandes diffusions (GD) ;

**Fibre D** pour les applications dans la construction électrique ;

**Fibre R** pour les composites hautes performances (HP).

Les fibres de verre constituent le principal renfort, utilisé dans plus de 90% des matériaux composites, et plus particulièrement pour les produits de grande diffusion (GD). Elles offrent, pour un prix raisonnable:

- une bonne adhérence entre fibres et résines (matrices) ;
- de bonnes propriétés mécaniques, mais inférieures à celles de la fibre de carbone;
- des propriétés d'isolation électrique acceptables pour la plupart des applications.

En Europe, les fibres de verre sont utilisées principalement dans :

- la plupart des composites « GD » (automobile, construction.....)
- certains composites « HP » avec des fibres de verre « R »

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par une rigidité insuffisante pour certaines applications comme les pièces de structure primaire en aéronautique ; et un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de températures élevées.

Les fibres de verre utilisées dans les composites ont un diamètre de l'ordre de 10 micromètres, nettement supérieur au diamètre critique (de l'ordre de 3 micromètres) pour que la fibre ne présente pas de risque respiratoire et ne puisse engendrer des cancers.

**Fibre de Carbone :** les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (spécialement une excellente tenue en température), une faible masse volumique, et une bonne conductibilité.

L'utilisation de la fibre de carbone reste limitée aux secteurs de l'aéronautique et des sports et loisirs, à cause du prix.

Cependant, les fibres de carbone souffrent aussi de certains handicaps techniques qui limitent également leur utilisation pour des structures composites tels que:

l'allongement à la rupture est insuffisant (inférieur à 2%) comparé à celui des fibres de verre et d'aramide (3 à 4%) ; et aussi une caractérisation encore insuffisante pour permettre une conception fiable à Prix modéré.

**Fibre Aramide 'Kevlar' :** ces fibres sont des Polyamides aromatiques, ces fibres ont une mauvaise tenue en compression, mais une bonne résistance au choc et à la fatigue. La fibre d'aramide (on la nomme souvent « **Kevlar** », qui est la marque de son créateur, (Dupont de Nemours.) utilisée dans les protections balistiques gilets pare-balles.

En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Bonne adhérence en couche fine. Des produits chimiques (charges et additifs) entrent aussi dans la composition du composite, l'interphase etc. ... qui peuvent jouer sur le comportement mécanique, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de la structure composite.

### **III.2.2 Conception des matériaux composites :**

On conçoit un composite en fonction du type d'application, de chargement ; ce qui est différent des matériaux classiques où on adapte la conception d'une structure en fonction du matériau constitutif.

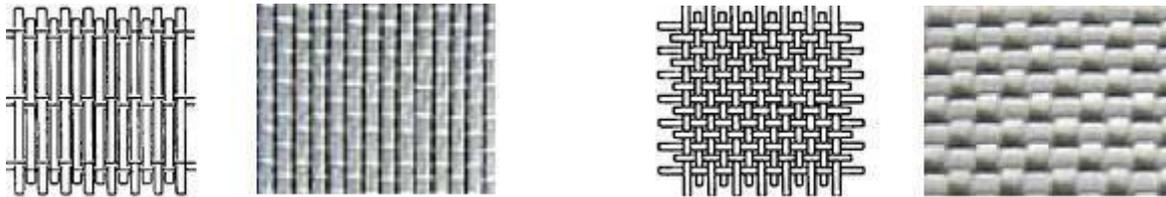
Pour un composite, on construit sa structure à la demande :

- la nature, la texture, la forme du renfort et son orientation (Figure 1.1)
- le taux de renforcement
- la nature de la résine et des charges ou additifs

## Chapitre III : synthèse bibliographique sur les matériaux composites

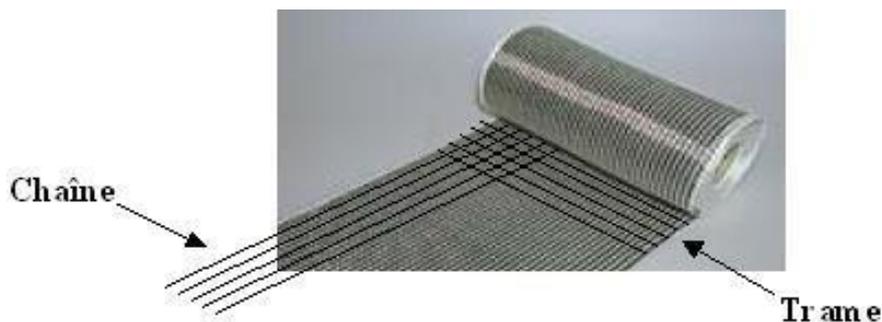
- la qualité de l'interface renfort-matrice
- la géométrie de la pièce à réaliser
- le procédé de mise en œuvre utilisé

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise pour optimiser le comportement mécanique dans une direction déterminée.



Armure unidirectionnelle

Armure toile ou taffetas



**Figure III.1** Ruban unidirectionnel carbone / verre sur lequel sont mis en évidence la chaîne et la trame

### III-2.3 Caractéristiques des matériaux composites :

Les matériaux composites se caractérisent des matériaux classiques par un module élevé, une masse volumique faibles, une bonne tenue en fatigue, une absence de corrosion, et ne se plastifient pas. De plus, les formes complexes sont aisément réalisables par moulage, ils vieillissent sous l'action de l'humidité et la chaleur, ils sont insensibles aux produits chimiques courant de la mécanique comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants, pétrole (sauf les décapants de peinture attaquent les résines époxydes), mais ils ont une tenue aux impacts et aux chocs très moyenne/matériaux métalliques.

### ***III-2.4 Mise en œuvre des matériaux composites :***

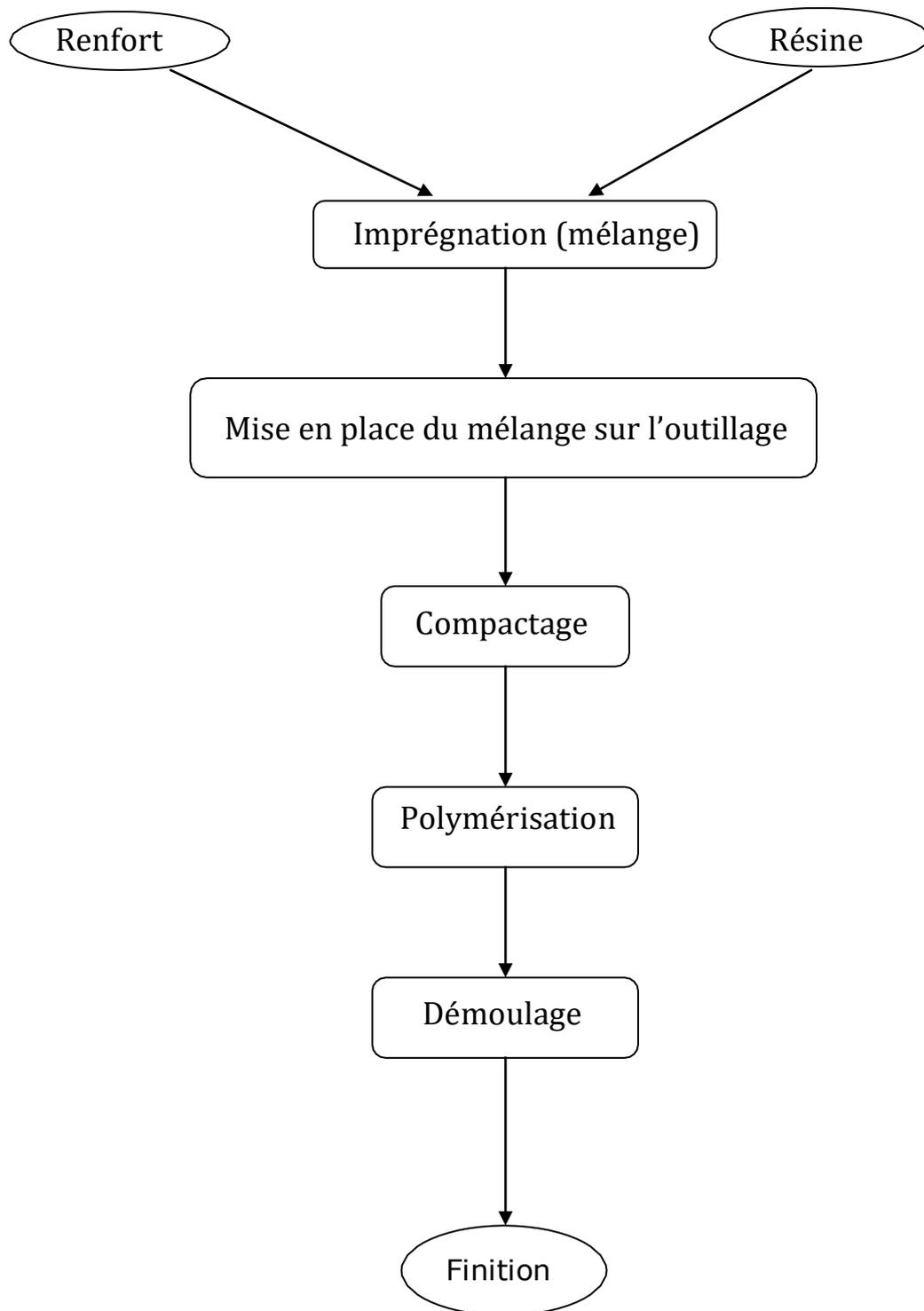
Les méthodes de mise en œuvre spécifiques aux matières plastiques renforcées ont contribué à l'évolution des termes utilisés pour désigner ces matériaux depuis leur origine, c'est-à-dire depuis une cinquantaine d'années.

Des techniques originales ont été élaborées pour la mise en œuvre de composites à fibres longues. La description de ces méthodes spécifiques occupe évidemment une place importante dans la rubrique « Composites ».

Trois opérations sont indispensables (Figure III.2) :

- 1- Imprégnation du renfort par le système résineux.
- 2- Mise en forme à la géométrie de la pièce.
- 3- Durcissement du système.

Soit par polycondensation et réticulation (ou polymérisation) pour les matrices thermodurcissables, Soit par simple refroidissement pour les matières thermoplastiques. Il existe différentes techniques mais la plus utilisée est par moulage :



*Figure III.2* Différentes étapes de formage par moulage d'un matériau composite

Les procédés les plus importants sont :

Les procédés d'obtention de pièces composites les plus répandues sont :

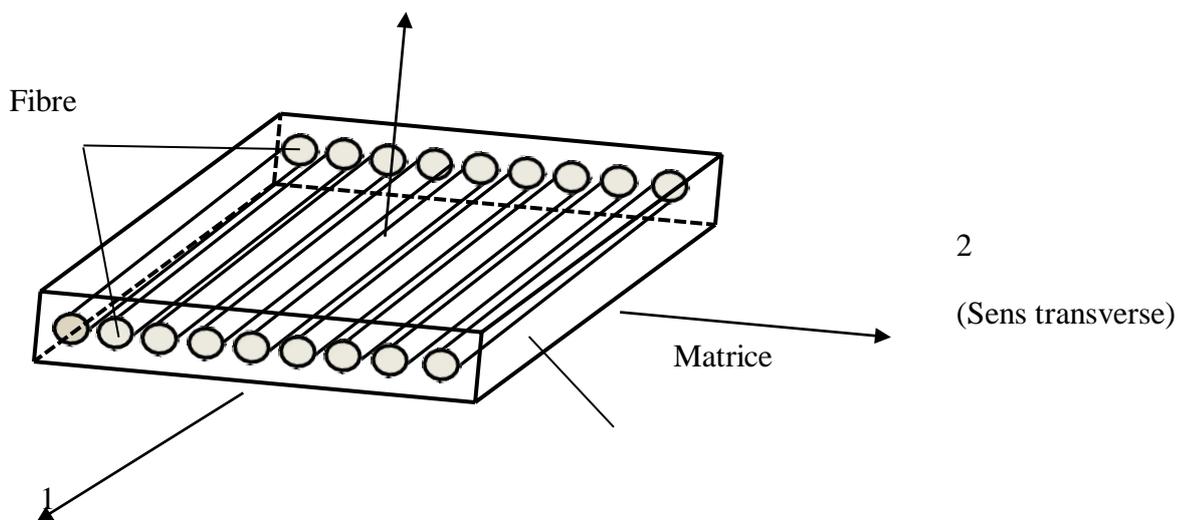
1. Fabrication par Moulage
2. Pultrusion
3. Pultrusion Thermoplastique
4. Injection des Thermoplastiques Renforcés
5. Enroulement Filamentaire
6. Enroulement Filamentaire Thermoplastique
7. Centrifugation
8. Moulage des TRE

### III.2.5 Architecture des matériaux composites :

#### a- Monocouches :

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

3(ou z)



(Sens long)

2  
(Sens transverse)

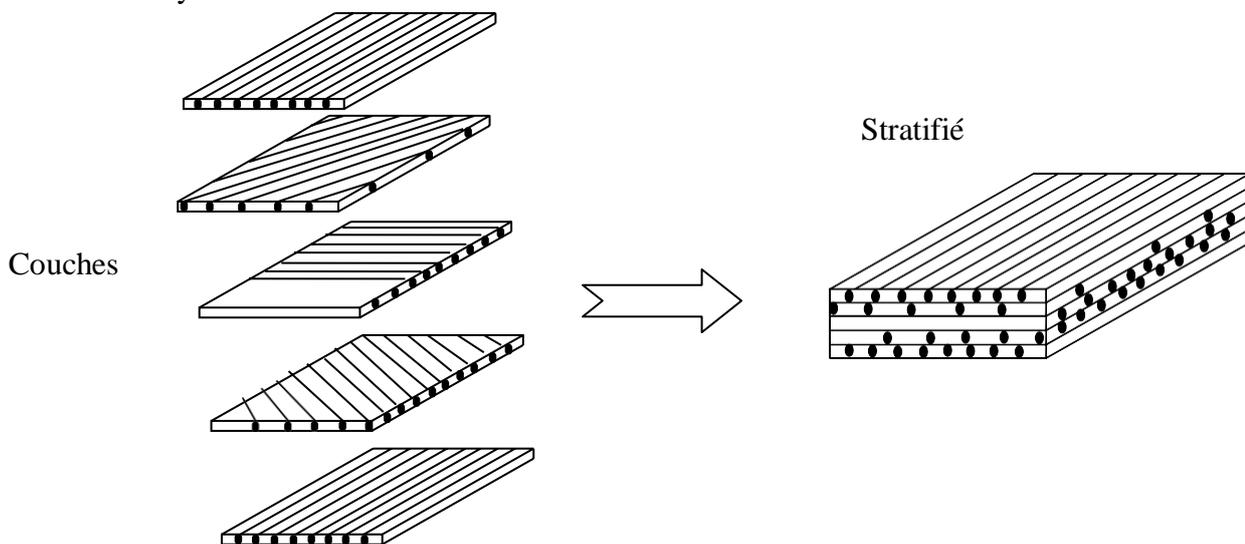
Figure III.3 : Pli à Renforcement unidirectionnel

**b- Stratifiés :**

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure III.4).

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$ .
2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .
5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.



**Figure III.4** : Constitution d'un stratifié

### c- Sandwich :

Les matériaux sandwichs résultent généralement de l'association de deux semelles ou peaux de faible épaisseur, constituées de matériaux à haute résistance et haut module et d'une âme beaucoup plus épaisse et de faible densité (Fig III.5). Ils ont pour avantages: une grande rigidité, une résistance à la rupture élevée associées à un faible poids par unité de surface. Malgré une activité de recherche et de développement sur ces matériaux, le comportement au cours de l'endommagement reste peu connu. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

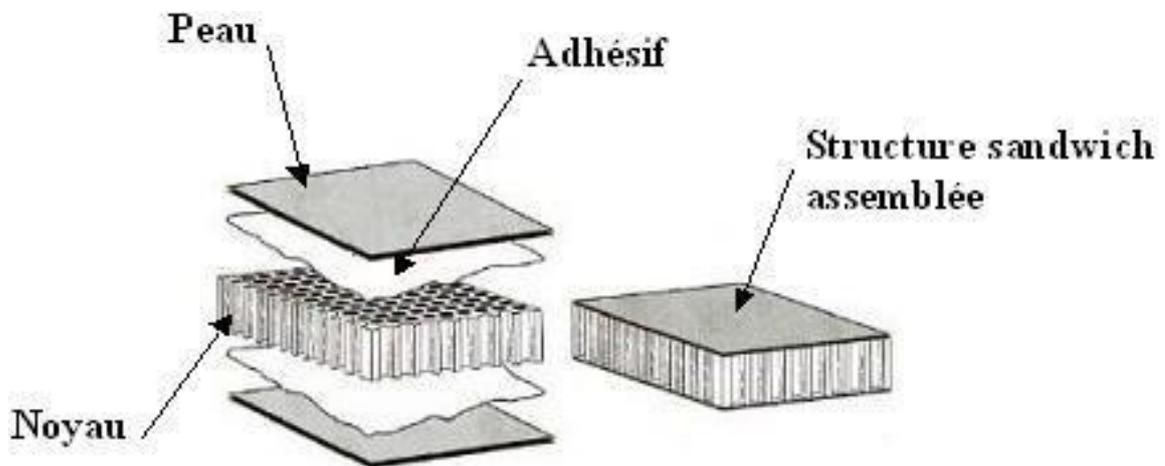


Figure III.5 : Constitution d'un sandwich

### III.2.6 Définition d'une poutre composite :

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, les rails de chemin de fer, les ponts d'aérospatiale, la robotique et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions (Figure III.6). En

ingénierie moderne, une poutre classique est remplacée par une poutre composite pour sa légèreté et sa résistance.



**Figure III.6 :** Exemple d'une Poutre composite en I

### **III.2.7 Techniques d'assemblage des matériaux stratifiés :**

Le collage est une technique d'assemblage courante consiste en l'adhésion par attraction moléculaire entre deux parties à coller et un adhésif interposé qui doit assurer la transmission des efforts.

On peut citer pour principaux avantages de ce mode d'assemblage des couches d'un stratifié :

- La répartition des contraintes de liaison sur une surface importante
- La possibilité d'optimiser la géométrie et les dimensions du collage
- La légèreté de l'assemblage
- Les propriétés d'isolation et d'étanchéité de l'adhésif.

### **III.2.8 Domaines d'Application des Poutres composites :**

Les poutres composites entrent aujourd'hui dans pratiquement tous les domaines d'applications possibles : Piscines, bassins, bâtiments... Les transports aériens, maritime, routier, ferroviaire... Sports et loisirs, ....etc.

Pour beaucoup d'applications structurales, comme sur les plates-formes pétrolières offshore, les composites à matrice polymère apparaissent comme de sérieux concurrents des métaux, du fait principalement de leur légèreté. Pourtant, l'industrialisation de solutions composites est délicate, car les avantages compétitifs sont amoindris par les surcoûts induits, et surtout, par la difficulté à prévoir l'évolution des propriétés d'usage de ce type de matériaux, notamment sous sollicitations environnementales et mécaniques couplées.

### **Les composites dans l'industrie automobile :**

Les matériaux organiques composites à matrices thermoplastiques ou thermodurcissables renforcées par des fibres, généralement de verre, courtes ou longues ont fait leur apparition dans l'automobile durant les années 60-70. Même s'ils sont aujourd'hui utilisés presque exclusivement pour satisfaire certaines fonctions, leur taux d'utilisation ne dépasse pas 10 à 15 % selon les véhicules. Généralement, l'habitacle (habillage intérieur) d'un véhicule est essentiellement constitué de matériaux polymères et de composites, qui à eux seuls représentent environ 50 % de la quantité utilisée sur un véhicule tant en Europe qu'aux États-Unis :

- 48 % pour les véhicules nord-américains en 1994
  - 50 à 60 % (y compris les insonorisant) pour l'ensemble de la gamme actuelle Renault.
- Les principales applications concernent : la planche de bord et le poste de conduite, les ébénisteries et les habillages de portes, les garnitures de toit, les sièges, la tablette arrière, les tapis de sol et les textiles.

Les principales applications concernent aussi les accessoires tels que: les peaux de boucliers, les calandres, les grilles d'auvent, les enjoliveurs de roues, les rétroviseurs, les feux de signalisation, les bras d'essuie-vitre, les baguettes, les becquets, les ailerons, les poignées de porte, etc.

### **Les composites dans l'aérospatiale :**

Les constructeurs aéronautiques font de plus en plus appel aux matériaux composites du type matrice polymère/fibres de carbone continues pour réduire la masse des aéronefs. La pénétration de ces matériaux est passée de 20 % pour l'Airbus A340 à plus de 50 % pour le futur Boeing B787. La réduction des coûts de fabrication à qualité mécanique constante passe par une intégration forte des phases de conception et de fabrication : sélection concomitante des constituants, semi-produits et modes d'assemblage. La prévision des performances doit

être souple pour une gamme de solutions données. Un essai représentatif du mode de sollicitation considéré comme le plus pénalisant permet une approche quantitative réaliste dans un contexte industriel.

L'essai peut lui-même être en phase de développement lorsqu'il s'agit d'un système original. Les poutres composites à base de fibres occupent une place de plus en plus importante dans la construction d'avions, d'hélicoptères, de missiles, de lanceurs et de satellites, avec, en tête, les composites renforcés par des fibres de carbone (CFRP), dont la masse est composée à 60 % de fibres et à 40 % de résine. Mais il existe également des structures sandwichs et alvéolaires, les stratifiés fibres-métal, les composites à fibres de verre, sans oublier les fibres céramiques destinés notamment aux environnements à température très élevées tels que les moteurs de fusées. Le GLARE composé principalement d'aluminium et de fibre de verre est utilisé en aéronautique. Les composites ont fait leur entrée chez Airbus en 1972 lorsque l'avionneur décide de les utiliser pour les bords d'attaque de la dérive de l'A300B. En 1982, très en avance sur le reste de l'industrie, l'avionneur européen étend leur présence aux déporteurs de sol et aux gouvernes de profondeur et de direction de l'A310-200. Les premières structures primaires, notamment de la dérive de l'A310-300 et de l'empennage horizontal et des volets de l'A320 suivent en 1987. Puis, c'est le tour de la gamme long-courrier avec l'empennage horizontal et vertical –

qui servent également de réservoirs de carburant, les gouvernes de profondeur et de direction, les volets, les ailerons, les déporteurs, les trappes d'atterrisseur ainsi que divers éléments de carénage de l'A340. Et la série des innovations révolutionnaires continue ensuite, par exemple avec le développement d'un support de quille en CFRP pour l'A340-500/-600, et surtout avec le bouclier de pressurisation pour ce même modèle, première pièce composite destinée à la partie pressurisée d'un fuselage.

#### **Les composites dans la construction navale:**

D'après la littérature, la première apparition des matériaux composites en construction navale se situerait en 1946. L'US NAVY réalise à cette époque des embarcations de 28 pieds, destinées au transport de personnels, suivant deux techniques : le moulage sous pression et l'injection sous vide avec des taux de fibres modestes (de l'ordre de 25 %). Progressivement la technique de stratification au contact en voie humide s'impose pour les applications

navales. A partir de 1955, l'apparition des tissés de roving ainsi que de nouvelles techniques de moulage entraîne une croissance rapide des applications des matériaux composites, toujours limitées à de petites unités (jusqu'à 57 pieds) : vedettes de patrouilles Côtières, transports de personnels, navires de débarquement... .

Afin de remplacer le bois, putrescible, par des matériaux insensibles à la corrosion marine et à l'eau de mer, tout en assurant une excellente flottabilité, en permettant de réaliser des volumes creux importants et solides à bas prix. Pour les bateaux de taille moyenne (bateaux de plaisance, de pêche, grands catamarans de compétition et aussi les petits navires commerciaux ou les chasseurs de mines qui ne doivent pas avoir de coques métalliques) on construit donc des coques volumineuses en stratifiés polyester-verre, sur lesquelles on assemble les membrures, poutres et renforts longitudinaux et couples, qui sont aussi réalisés en matériaux composites, qui peuvent être collés ou assemblés par stratification.

# Chapitre IV

*Solution d'élasticité des poutres composites  
basée sur l'utilisation de la fonction d'Airy*

## IV.1 Introduction

Ce chapitre est consacré en premier lieu à la proposition de la fonction d'Airy relative au problème d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge uniformément répartie en flexion et caractérisée par un matériau composite à renforcement unidirectionnel par la suite on déterminera les paramètres inconnus de cette fonction correspondants tout en vérifiant les équations de conditions de chargement au contour de la poutre. En second lieu, nous avons présenté deux types de matériaux composites en effectuant une analyse statique du comportement afin de prédire la répartition des contraintes et des déplacements suivant la hauteur et le long de la poutre respectivement.

## IV.2 Solution d'élasticité

Pour la résolution des problèmes des poutres, Il est souvent plus facile de choisir une fonction des contraintes appelée fonction d'Airy comme un polynôme. Le degré de ce polynôme importe peu puisqu'il suffit juste que la fonction choisie vérifie l'équation biharmonique [5].

### IV.2.1. Description du problème et équations de base

Considérons une poutre composite d'épaisseur uniforme  $h$  (Fig. IV.1). Un repère cartésien est introduit avec les surfaces supérieure et inférieure de la poutre situées dans les plans  $z = h/2$  et  $z = -h/2$ . Les longueurs des bords de poutre dans les directions  $x$  et  $y$  sont respectivement désignés par  $L$  et  $b$ . La poutre est supposée être dans un état de contrainte plane et soumise à une charge  $q$  uniformément répartie sur sa face supérieure. En l'absence des forces volumiques, les équations d'équilibre sont données comme

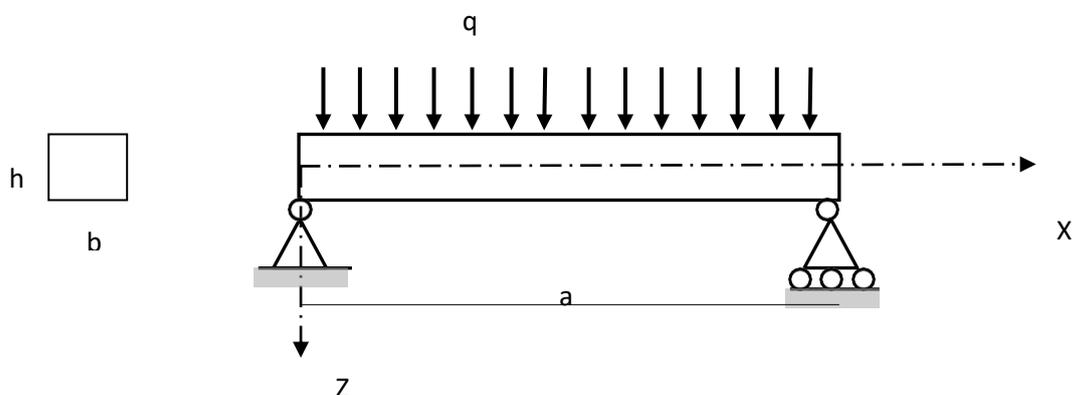


Figure (IV.1) géométrie et chargement de la poutre

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{IV.1}$$

où  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  et  $\tau_{xz}$  sont les composantes de contrainte. Les relations entre les déformations et les déplacements sont

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

où  $u$  et  $w$  sont les composantes de déplacement, et  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  et  $\tau_{xz}$  sont les composantes de déformation qui devraient satisfaire la équation de compatibilité de déformation

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} = 0\tag{IV.2}$$

Les relations constitutives s'écrit

$$\varepsilon_x = S_{11} \sigma_x + S_{13} \sigma_z, \quad \varepsilon_z = S_{13} \sigma_x + S_{33} \sigma_z, \quad \tau_{xz} = S_{44} \tau_{xz},\tag{IV.3}$$

Où  $S_{11}$ ,  $S_{33}$ ,  $S_{13}$  et  $S_{44}$  sont les constantes de souplesse:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{13}}, \quad \nu_{31} = \frac{\nu_{13} \cdot E_3}{E_1}$$

Les conditions aux limites aux surfaces supérieure et inférieure sont

$$\sigma_z(x, \pm \frac{h}{2}) = -q, \quad \sigma_z(x, \frac{h}{2}) = 0, \quad \tau_{xz}(x, \pm \frac{h}{2}) = 0\tag{IV.4}$$

Les conditions aux limites à l'extrémité gauche  $x = 0$

$$N_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = -q \frac{a}{2}\tag{IV.5}$$

où  $N_0$ ,  $M_0$  et  $Q_0$  désignent respectivement la force axiale, le moment de flexion et la force de cisaillement. Les conditions aux limites pour l'extrémité  $x=0$ ,  $z=0$ ,  $w=0$  et au milieu de la poutre

$$x = \frac{L}{2}, \quad z = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad . \quad (IV.6)$$

### IV.2.2. Solution générale

Nous introduisons la fonction de contrainte Airy  $\Phi(x, z)$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \quad (IV.7)$$

Dans ce cas, Eq. (IV.1) est satisfait de manière identique. Nous supposons alors que

$$\Phi(x, z) = \Phi_0(z) + x\Phi_1(z) + x^2\Phi_2(z) \quad (IV.8)$$

[ $\Phi_0(z)$ ,  $\Phi_1(z)$  et  $\Phi_2(z)$  sont des fonctions inconnues à déterminer]. Substitution de l'Eq. (IV.8) dans l'Eq. (IV.7) donne

$$\sigma_x = \Phi_0'' + x\Phi_1'' + x^2\Phi_2'' \quad (IV.9)$$

$$\sigma_z = 2\Phi_2 \quad (IV.10)$$

$$\tau_{xz} = -(\Phi_1' + 2x\Phi_2') \quad (IV.11)$$

En remplaçant Eqs. (IV.9) - (IV.11) dans les équations. (IV.3) et l'expression dans l'équation de compatibilité (IV.2), puis en assimilant les coefficients à des puissances identiques de  $x$ , on obtient

$$(S_{11}\Phi_2'')'' = 0 \quad (IV.12)$$

$$(S_{11}\Phi_1'')'' = 0 \quad (IV.13)$$

$$(S_{11}\Phi_0'' + 2S_{13}\Phi_2'')'' + (2S_{44}\Phi_2')' + 2S_{13}\Phi_2'' = 0 \quad (IV.14)$$

Intégration de Eq. (IV.12) donne

$$\Phi_2'' = a_1A_1 + a_2A_2 \quad (IV.15)$$

$$\Phi_2' = a_1A_1^0 + a_2A_2^0 + a_3, \quad \Phi_2 = a_1A_1^1 + a_2A_2^1 + a_3z + a_9, \quad (IV.16)$$

Où  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) sont des constantes d'intégration,

$$A_1 = \frac{z}{S_{11}}, \quad A_2 = \frac{1}{S_{11}}, \quad A_i^n(z) = \int_{-h/2}^z (z-\xi)^n A_i d\xi, i=1,2 \quad n=0,1$$

Intégration de Eq. (IV.13) donne

$$\Phi_1'' = a_4 B_4 + a_5 B_5 \quad (IV.17)$$

$$\Phi_1' = a_4 B_4^0 + a_5 B_5^0 + a_6 \quad (IV.18)$$

$$\Phi_1 = a_4 B_4^1 + a_5 B_5^1 + a_6 z + a_7 \quad (IV.19)$$

Où

Remplacer les équations. (IV.15) - (IV.19) dans l'Eq. (IV.14) et en effectuant l'intégration deux fois, nous obtenons

$$\Phi_0'' = \sum_{i=1}^9 a_i C_i \quad (IV.20)$$

Où

$$C_1 = -\frac{2}{S_{11}} \left( \int_{-h/2}^z (z-\xi) S_{13} A_1 d\xi + \int_{-h/2}^z S_{44} A_1^0 d\xi + S_{13} A_1^1 \right)$$

$$C_2 = -\frac{2}{S_{11}} \left( \int_{-h/2}^z (z-\xi) S_{13} A_2 d\xi + \int_{-h/2}^z S_{44} A_2^0 d\xi + S_{13} A_2^1 \right)$$

$$C_3 = -\frac{2}{S_{11}} \left( S_{13} z + \int_{-h/2}^z S_{44} d\xi \right)$$

$$C_4 = C_5 = C_6 = 0$$

$$C_7 = A_1, C_8 = A_2$$

$$C_9 = -\frac{2S_{13}}{S_{11}}$$

$$C_i^n(z) = \frac{1}{n!} \int_{-h/2}^z (z-\xi)^n C_i d\xi \quad i=1,2,3,\dots,9, n=0,1$$

La force axiale N0, le moment de flexion M0 et la force de cisaillement Q0 à l'extrémité gauche de la poutre peuvent être obtenus par intégration des équations. (IV.9) et (IV.11):

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma x(0, z) dz = \sum_{i=1}^9 a_i C_i^1(h/2) \\
 M_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma x(0, z) z dz = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^9 a_i C_i^0(h/2) - \sum_{i=1}^9 a_i C_i^1(h/2) \\
 Q_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau xz(0, z) dz = -(a_4 B_4^1(h/2) + a_5 B_5^1(h/2)) - a_6 h \quad (IV.21)
 \end{aligned}$$

Remplacer les équations. (IV.15) - (IV.20) dans les équations. (IV.9) - (IV.11), puis en remplaçant les expressions résultantes dans les équations. (IV.3), et enfin exécuter intégration, on obtient les composants de déplacement

$$\begin{aligned}
 u &= x(S_{11}\Phi_0'' + 2S_{13}\Phi_2) + \frac{x^2}{2} S_{11}\Phi_1'' + \frac{x^3}{3} S_{11}\Phi_2'' - \int_{-h/2}^z S_{44}\Phi_1' d\xi - \int_{-h/2}^z (z-\xi) S_{13}\Phi_1'' d\xi - \omega z + u_0 \\
 w &= \int_{-h/2}^z (S_{13}\Phi_0'' + 2S_{33}\Phi_2) d\xi - \frac{a_1}{12} x^4 - \frac{a_4}{6} x^3 + \left( \int_{-h/2}^z S_{13}\Phi_2'' d\xi - \frac{a_7}{2} \right) x^2 + \left( \int_{-h/2}^z S_{13}\Phi_1'' d\xi + \omega \right) x + \omega_0 \quad (IV.22)
 \end{aligned}$$

où  $u_0$ ,  $\omega_0$  et  $\omega$  sont des constantes d'intégration. Remplacer les équations. (IV.16) et (IV.18) dans les équations. (IV.10) et (IV.11) avec la substitution des expressions résultantes en équations. (IV.4), on obtient

$$\begin{cases}
 a_3 = 0 \\
 a_6 = 0 \\
 a_9 = \frac{q}{2} \\
 \sum_{i=1}^2 a_i A_i^0(h/2) = 0 \\
 2 \sum_{i=1}^2 a_i A_i^1(h/2) - q = 0 \\
 a_4 B_4^0(h/2) + a_5 B_5^0(h/2) = 0
 \end{cases} \quad (IV.23)$$

Substitution des équations. (IV.21) dans les équations. (IV.5) donne

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^9 a_i C_i^0(h/2) = 0 \\
 \sum_{i=1}^9 a_i C_i^1(h/2) = 0 \\
 a_4 B_4^1(h/2) + a_5 B_5^1(h/2) = -qa/2
 \end{cases} \quad (IV.24)$$

Les constantes inconnues peuvent être obtenues à partir des équations. (IV.23) et (IV.24). Ainsi, toutes les constantes indéterminées sont fixes, et la fonction de contrainte  $\Phi$  est déterminée complètement. Les composantes de contrainte sont ensuite obtenues à partir des équations. (IV.9) - (IV.11). Substitution des équations. (IV.22) dans les équations. (IV.6) donne trois équations, à partir desquelles  $u_0, w_0$  peuvent être obtenu. Ainsi, les composantes de déplacement  $u$  et  $w$  sont déterminées.

### **IV 3 Traitement et présentation des résultats**

#### **IV 3. 1 position du problème**

Dans cette section on propose deux types de matériaux composites dont ces caractéristiques mécaniques sont [6 ]

matériau 1 :  $E_1= 172.4 \text{ GPa}$  ,  $E_2= 6.89 \text{ GPa}$   $G_{13}=3.45 \text{ GPa}$   $\nu_{13}=0.25$

matériau 2 :  $E_1= 131 \text{ GPa}$  ,  $E_2=10.3 \text{ GPa}$   $G_{13}=7.17 \text{ GPa}$   $\nu_{13}=0.25$

Après avoir développé les équations d'intégrale avec l'exécution d'un programme de calcul numérique, on veut déterminer pour les deux types de matériaux la distribution des contraintes normale et de cisaillement à travers de la hauteur ainsi que les déformées le long de la poutre . par la suite on représente l'effet de l'élanement sur le comportement de la poutre.

Les paramètres de calcul :

$$\frac{\sigma_x}{q} = \frac{\sigma_x}{q} ; \frac{\tau_{xz}}{q} = \frac{\tau_{xz}}{q} ; \frac{w}{h} = \frac{w}{h}$$

#### **IV 3. 2 Présentation des résultats et discussion**

**Tableau (IV .1) contraintes et déplacements pour les deux types de matériaux avec  $a/h =10$**

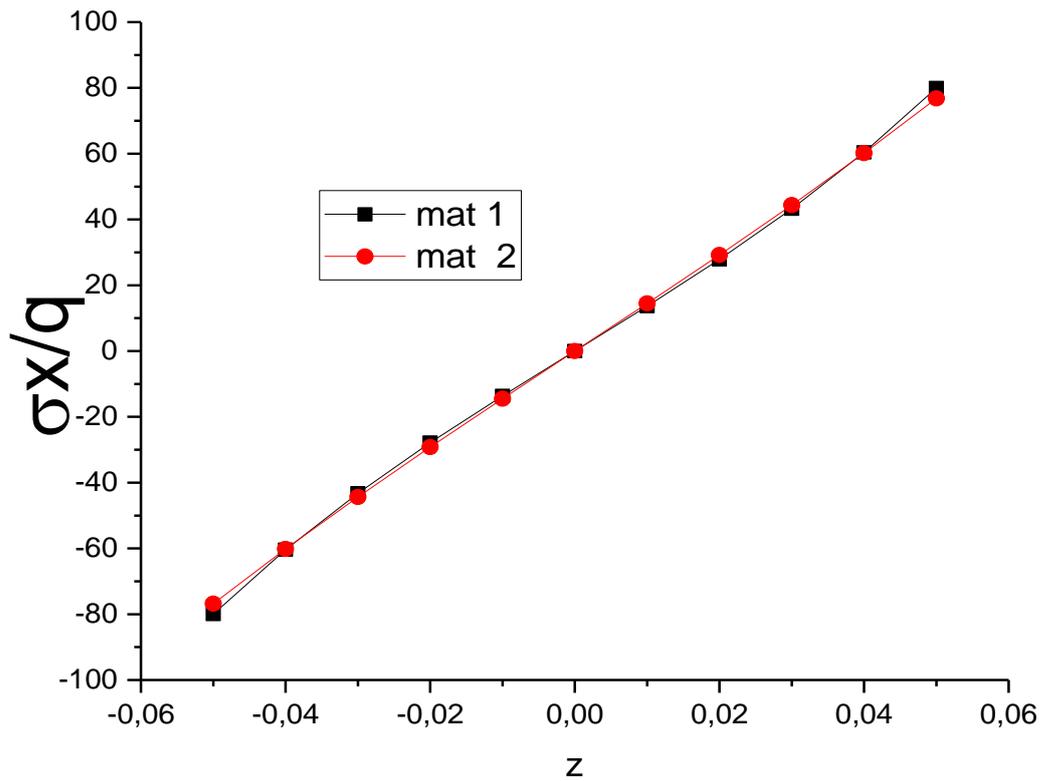
		<b>Matériau 1</b>	<b>Matériau 2</b>
$\frac{\sigma_x}{q}$	$z= - h /2$	<b>-79,947</b>	<b>-76,777</b>
	$z= h /2$	<b>79,947</b>	<b>76,777</b>
$\frac{\tau_{xz}}{q}$	$z= \pm h /2$	<b>0</b>	<b>0</b>
	$z= 0$	<b>7,5</b>	<b>7,5</b>
$\frac{w}{h}$	$z= 0$	<b>13,394</b>	<b>13,998</b>

Le tableau (IV.1) montre les valeurs des contraintes normales ( faces supérieure et inferieure) et tangentielle (faces supérieure et inferieure, fibre moyenne) ainsi des déformées au niveau de la fibre moyenne de la poutre , ces paramètres de calcul sont relatifs aux deux types de matériaux composites. On remarque bien que les contraintes normales possèdent une différence un peu remarquable avec un écart de 3.9 pour cent de même pour les déformées de 4.5 pour cent, par contre pour les contraintes tangentielles sont identiques.

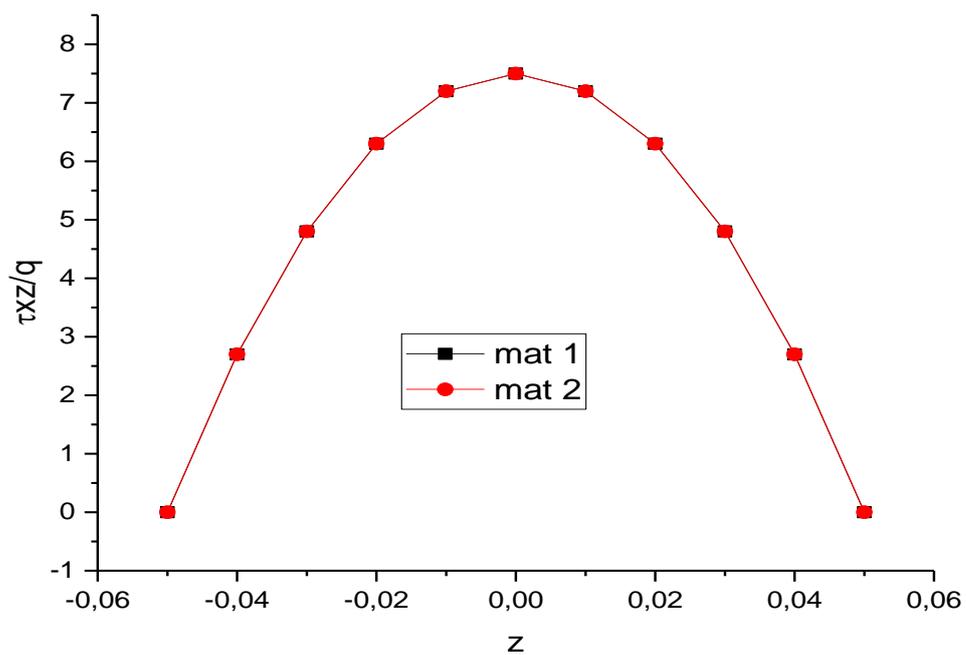
**Tableau (IV .2) contraintes et déplacements pour les deux types de matériaux et pour différents élancements  $a/h =10, 20, 50$**

<b><math>a/h</math></b>	<b>Matériau 1</b>			<b>Matériau 2</b>		
	$\frac{\sigma_x}{100 q}$	$\frac{\tau_{xz}}{100 q}$	$\frac{w}{100 h}$	$\frac{\sigma_x}{100 q}$	$\frac{\tau_{xz}}{100 q}$	$\frac{w}{100 h}$
<b>10</b>	<b>0,799</b>	<b>0,075</b>	<b>0,133</b>	<b>0,767</b>	<b>0,075</b>	<b>0,139</b>
<b>20</b>	<b>3,049</b>	<b>0,15</b>	<b>1,623</b>	<b>3,017</b>	<b>0,15</b>	<b>1,991</b>
<b>50</b>	<b>18,799</b>	<b>0,375</b>	<b>57,728</b>	<b>18,76</b>	<b>0,375</b>	<b>75,064</b>

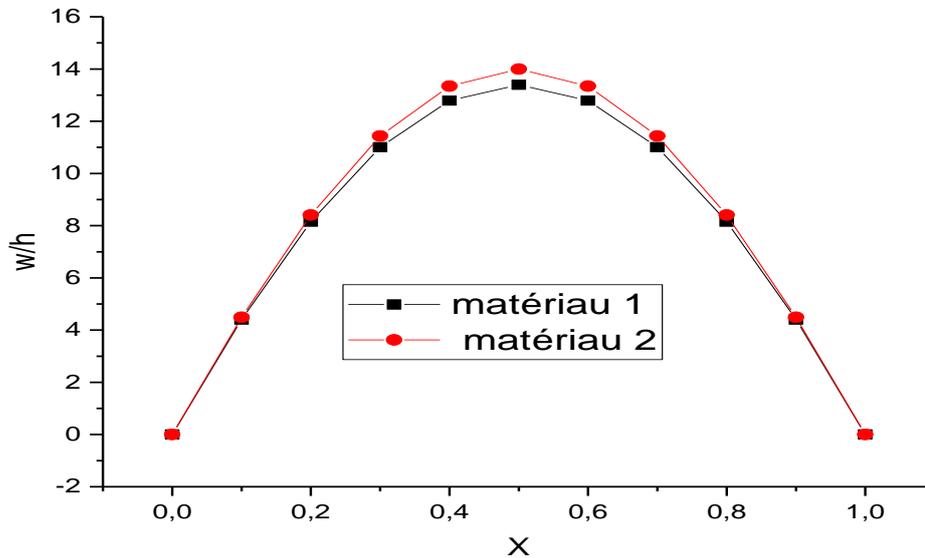
Le tableau (IV.2) les valeurs des contraintes et de la déformée en fonction de la variation croissante de l'élancement de la poutre . On observe que les contraintes ainsi les déformées augmentent avec l'augmentation des rapports  $a/h$  et avec des valeurs supérieures des contraintes et des déformées inferieures pour le matériau 1 .



Figure(IV.2) Distribution des contraintes normales à travers la hauteur de la poutre pour les deux matériaux avec  $a/h=10$



**Figure(IV . 3) Distribution des contraintes tangentielles à travers la hauteur de la poutre pour les deux matériaux et avec  $a/h=10$**



**Figure(IV . 4) Distribution de la déformée le long de la poutre pour les deux matériaux avec  $a/h=10$**

Les figures (IV.2) et (IV.3) représentent les variations des contraintes normale et tangentielle à travers la hauteur de la poutre . Les contraintes normales suivent une variation cubique avec des valeurs maximales de compression sur la face supérieure et de traction sur la face inférieure. Par conséquent les contraintes tangentielles varient paraboliquement avec des valeurs maximales au niveau de la fibre moyenne et nulles aux faces extrêmes. A partir de ces allures , pour les contraintes normales dépendent de la variation des caractéristiques matérielles (composite), par contre pour contraintes de cisaillement sont indépendantes (constantes).

La variation cubique des contraintes normales confirme le choix du degré élevé de polynôme de la fonction d'Airy en tenant compte de la contrainte normale suivant la direction des axes z. Et la nullité des contraintes tangentielles produisent à partir des conditions aux limites imposées aux faces supérieure et inférieure.

En ce qui concerne les variations de la déformée le long de la poutre montrés en figures (IV.4) avec des valeurs maximales à la mi- portée de la poutre . Il est important de tirer que les déformées pour le matériau 1 (plus rigide) sont inférieures pour le matériau 2. Ce qui implique plus qu' on augmente le module d'élasticité relatif à la longueur de la poutre plus que les déformées diminuent.

De même il est remarquable que les contraintes ou les déformées sont importantes au niveau des zones où la fonction des contraintes est optimale.

Puisque on a observé que l'évolution des contraintes et des déformées dépendent de la variation du module d'élasticité longitudinale. A cet effet on peut introduire le rapport  $E1/E2$  pour différentes valeurs afin de voir l'effet de ce paramètre sur le comportement d'une poutre élancée comme il est représenté au tableau ( IV.3).

Pour cela, on garde les mêmes caractéristiques ( module de cisaillement, le coefficient de poisson) du matériau 1 et on varions le rapport  $E1/ E2 = 20, 30, 40$  et  $50$  afin de déterminer les contraintes normales et les déformées maximales en  $x=a/2$  à la face supérieure( ou inférieure) et à la mi- portée respectivement .

**Tableau (IV.3) contraintes et déformées maximales dans la poutre pour différents rapports  $E1/E2$  avec  $a/h=40$**

<b>E1/E2</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>40</b>	<b>50</b>
<b><math>\sigma_x/ q</math></b>	1203.94	1205.94	1207.93	1209.93
<b><math>w/(100.h)</math></b>	29.72	20.04	15.02	12.30

D' après le tableau (IV.3), on constate que lorsque on augmente l'élancement de la poutre, les contraintes augmentent d'une manière lente cependant pour les déformées diminuent rapidement qui reflète à l'augmentation de la rigidité de la poutre.

#### **IV.4 Conclusion**

Dans ce chapitre une solution d'élasticité est développée pour le problème d'une poutre simplement appuyée uniformément chargée en matériau composite à renforcement unidirectionnel en état de contrainte plane, tout en utilisant la fonction d'Airy correspondante pour ce problème de flexion. En tenant compte du type du matériau composite choisi ainsi que la variation de l'élancement de la poutre effectués aux tableaux (IV.1) et (IV.1) , par la suite on a représenté la prédiction des contraintes normales et tangentielles ainsi les déplacements verticaux. A la fin on a présenté l'influence du rapport des modules d'élasticité sur l'évolution des contraintes et des déformées.

## *Conclusion générale*

Au cours de ce travail, une analyse statique en sollicitation de flexion a été effectuée sur des poutres simplement appuyées en matériaux composites à renforcement unidirectionnel. Nous avons développé au chapitre quatre la solution analytique pour la résolution du problème de la poutre soumise à une charge uniformément répartie. Cette solution est basée sur l'introduction de la fonction d'Airy qui a été déterminée complètement afin de prédire les contraintes et par suite les déplacements dans cette poutre.

L'utilisation de la fonction d'Airy est nécessaire pour la résolution des problèmes de poutres en contraintes planes soumises à des charges réparties, on peut également noter que la variation des conditions de chargement influe directement sur le degré de la fonction d'Airy.

Les résultats obtenus présentés au chapitre quatre montrent que l'évolution des contraintes suivant la hauteur de la poutre est caractérisée par une forme cubique pour les contraintes normales relatives à la longueur et par une forme parabolique pour les contraintes de cisaillement. Les valeurs des déformées obtenues pour la poutre sont importantes en diminuant la hauteur. A partir de ces constatations, on peut dire que les résultats obtenus pour la poutre mettent clairement en évidence l'influence du dimensionnement sur la distribution des contraintes et des déplacements.

À partir de cette étude réalisée, il est important de tirer les conclusions suivantes :

- La méthode de contrainte d'Airy est très utile et pratique pour résoudre des problèmes de poutres soumises à des charges spécifiques ou plutôt réparties selon un polynôme d'ordre supérieur.
- Les poutres en matériau composite possédant des constantes de rigidité importantes relatives à la direction longitudinale ( renforcement unidirectionnel) donnent des déformées minimales ( plus rigide) .

Et à la fin, nous nous recommandons les futurs masters d'utiliser cette fonction d'Airy pour l'analyse statique des poutres composites stratifiés ou sandwichs .

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] DJAFOUR Mustapha : Cours génie civil « Elasticité Générale». 09/1994

[2] Helmut Hlöcker: Mécanique de milieu contenu « Elasticité Plan».

[3] Yves DEBARD (IUT Le Mans): RDM 5 Module Elasticité Plan.

[4] Exact Elasticity Solution for the Density Functionally Gradient Beam by Using

Airy Stress Function [10.4028/www.scientific.net/AMM.110-116.4669](http://www.scientific.net/AMM.110-116.4669)

[5] Benguediab . Elasticity solution for a cantilever beam with exponentially varying properties

, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol. 58, No. 2, pp. 354–361

[6] KASKAS S. Etude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique des

poutres composites - mémoire de magistère 2010 .