



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN-KHALDOUN DE TIARET
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Parcours : Master Académique

Domaine : Sciences & Technologie

Filière : électromécanique

Spécialité: Maintenance Industrielle

THÈME

**L'effet de différentes formes de défaut latéral
Sur le comportement mécanique dans une plaque en alliage d'aluminium
par la méthode des éléments finis étendus (XFEM)**

Préparé par : TAYEB NADJET & MECHTA AMINA

Devant le jury :

Nom & prénom (s)	Grade	Qualité	Structure de rattachement
MOULGADA Abdelmadjid	MCA	PRÉSIDENT	UNIVERSITÉ DE TIARET
BALTACH Abdelghani	MCB	EXAMINATEUR	UNIVERSITÉ DE TIARET
ZAGANE MOHAMMED EL SALLAH	MCB	ENCADREUR	UNIVERSITÉ DE TIARET

PROMOTION 2018 /2019

Dédicaces

Grâce à Dieu, ce mémoire à été réalisé.

C'est avec une très grande joie que je dédie ce travail à :

Nos très chers parents qui m'ont donné la vie, l'espoir et m'ont soutenu durant mes études.

Que dieu m'aide à leur rendre un peu de tout ce qu'ils ont fait pour nos.

- *A tous ceux qui m'ont encouragé pendant les moments les plus difficiles.*
- *A nos très chers frères et sœurs pour leur soutien moral.*
- *A mes meilleurs amis : Sebkhawou fatima, Bochentouf djawher, Seraadj Abdelkader. Et surtout à mon binôme et ma chère ami «MECHTA AMINA » qui j'ai passé les meilleurs jours et les souvenirs les plus mémorables et tout le groupe Maintenance Industriel.*

A Tous ceux que j'aime et je respecte

TAYEB NADJET

MECHTA AMINA

Remerciement

NOUS tiens tout d'abord à remercier en premier lieu Allah, le tout puissant, d'être nous donné autant de courage, de patience et de volonté pour atteindre ce but.

Notre premiers remerciements vont naturellement à mon Directeur de mémoire, Monsieur ZAGANE MOHAMED EL SALLAH pour ses conseils et le partage de ses compétences scientifiques . J'ai également apprécié la grande liberté qu'il m'a accordée pour finaliser ce mémoire ainsi que sa passion pour la recherche et sa bonne humeur toujours présente.

Pour son soutien constant et son aide qui nous apporté tout le long de cette étude je remercie aussi mon oncle : BELAID ABDEL.

Merci pour leurs patiences et leurs encouragements.

Nous tiens tout particulièrement à remercier chaleureusement et vivement nos parents.

Nous aimerions remercier tous les collègues de ma promotion et tous les amis.

Résumé :

La mécanique de la rupture permet de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide de paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Toute structure contient des défauts, qu'ils soient introduits lors de l'élaboration du matériau ou lors de la fabrication de la pièce (défauts d'usinage ou de soudage par exemple). Ces défauts doivent être pris en compte car ils conditionnent la fiabilité de la structure et sa durée de vie. Le but de ce travail est déterminé numériquement par la méthode des éléments finis le facteur de concentration de contrainte K_t d'une plaque soumise à un chargement de traction contenant un défaut de forme latéral avec différentes tailles : un demi-cercle de différents rayons, une entaille avec différents angles d'ouverture et une fissure de différentes longueurs. La propagation de la fissure est ensuite automatiquement déterminée en utilisant une approche discontinue basée sur la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). La modélisation se réalisera grâce au code de calcul d'éléments finis ABAQUS.

Mot clé :

Mécanique de la rupture, Méthode des éléments finis, Facteur de concentration des contraintes K_t , Fracture, X-FEM.

Abstract :

Fracture mechanics characterize the cracking behavior of structures using quantifiable parameters in the engineer's view, including the stress field, crack size and cracking resistance of the material. Every structure contains defects, whether inserted during the preparation of the material or during the manufacture of the part (machining or welding defects for example). These defects must be taken into account as they affect the reliability of the structure and its lifetime. The main purpose of this work is to figure out numerically by the finite element method the stress concentration factor K_t of a plaque subjected to a traction loading containing a defect of lateral shape with different sizes already: a semicircle of different spokes, a notch with different opening angles and a crack of different lengths. The crack propagation will be determined automatically using a discontinuous approach based on extended finite element method (X-FEM). The modeling will be carried out using the ABAQUS finite element calculation code. The modeling will be done using the calculation code ABAQUS.

Keyword : mechanical of damage, finite element method, stress intensity factor K_t , fracture, X-FEM.

ملخص :

يسمح ميكانيك الكسر بوصف سلوك الشقوق في الهياكل بواسطة المعلومات القابلة للقياس بمعنى المهندس، وخاصة مجال الإجهادات، وحجم الشقوق، ومقاومة انكسار المادة. أي جميع الهياكل تحتوي على عيوب، و هذا يحدث أثناء عملية إعداد المادة أو أثناء تصنيع القطع (خلال في التصنيع على سبيل المثال أو في عملية الحدادة). هذه العيوب يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار لأنها شرط في دقة الهيكل والعمر المتوقع. الغرض من هذا العمل هو التحديد العددي باستعمال طريقة العناصر المنتهية لمعامل تركيز الاجهاد في لوحة تخضع لحمولة الشد تحتوي على عيب جانبي الشكل مع أحجام مختلفة . نصف دائرة بمختلف الاقطار، وفتحة مع زوايا مختلفة وشق مختلف الاطوال. يتم تحديد توزيع الشقوق تلقائيا باستخدام طريقة العناصر المنتهية الموسعة- X).
(fem) تتم هذه النمذجة بواسطة برنامج حساب العناصر المنتهية ABAQUS.

الكلمات المفتاحية :

ميكانيك الكسر ، طريقة العناصر المنتهية، معامل تركيز الإجهاد K_t ، كسر، طريقة العناصر المنتهية الموسعة (X-FEM).

Sommaire

Didicaces	I
Remerciments	II
Résumé	III
Abstract.....	IV
ملخص	V
Sommaire	VI
Liste des figures	X
Liste des tableaux.....	XIII
Liste des symbole	XIV
Introduction générale	XVI

Chapitre I : Généralités sur la mécanique de la rupture linéaire

I. Introduction	1
I.2. Mécanique linéaire de la rupture	2
I.2.1.Généralité.....	2
I.2.2.Classes de matériaux vis-a-vis` de la rupture	3
I.2.3.Généralités sur les ruptures par fissuration.....	4
I.2.4.Modèles de la fissuration des structures	5
I.2.5.Les trois modes d'ouverture d'une fissure.....	6
I.3. Les Types de fissuration.....	7
I.4.Mécanique de la rupture	10
I.5.Effet d'entaille	10
I.6.Étude d'un milieu élastique fissure	12
I.7.Utilisation de la mécanique de la rupture en conception.....	15
I.7.1.Le Critère d'énergie	16
I.7.2.Critères de rupture et de propagation.....	18
I.7.3.Critères d'amorçage.....	19
I.8.Facteur de concentration de contraintes	19
I.9.Facteur d'intensité de contrainte	21

I.9.1.Méthode analytique.....	21
I.9.2.Analyse asymptotique.....	23
I.9.3.Champs de contrainte et déplacement.....	24
I.9.4.pricipe de superposition.....	26
I.9.5.Méthode des fonction de poids.....	28
I.9.6.L'intégrale de contour J.....	28
I.9.7.Le taux de restitution d'énergie.....	29
I.10.La relation entre Taux de restitution d'énergie et facteurs d'intensités de contrainte	30
I.11.Conclusion.....	31

Chapitre II : Méthode des éléments finis étendus(XFEM)

II.1. Introduction.....	32
II.2. Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration.....	33
II.3. Méthodes « classiques basées sur les éléments finis (FEM).....	34
II.3.1. Historique de méthodes des éléments finis (FEM).....	34
II.3.1.1 Méthodes de remaillage.....	35
II.3.1.2.Elimination d'éléments (« Elément délétion méthode).....	37
II.3.1.3. Méthode des éléments cohésifs.....	37
II.3.2. Méthodes non basée sue les éléments finis.....	38
II.3.2.1. Méthode des éléments de frontières (BSF).....	38
II.3.2.2. Méthodes sans maillage.....	38
II.3.3. Méthodes basées sur la partition de l'unité.....	39
II.3.3.1. La partition de l'unité (PUM).....	39
II.3.3.2 Méthodes des éléments finis étendue (XFEM).....	40
II.3.3.3. Autres méthodes utilisant la partition de l'unité.....	40
II.4.Méthode des éléments finis.....	41
II.4.1. Généralités.....	41
II.4.2.Avantage de la méthode des éléments finis.....	41
II.4.3.Procédures de base de la méthode des éléments finis.....	41
II.4.4. Les différentes formulations de la méthode des éléments finis.....	43
II.4.5. Formulation des éléments finis.....	44

II.4.6. Procédure d'analyse par éléments finis	45
II.4.7. Grandes lignes de la méthode des éléments finis	46
II.4.8. La modélisation des structures fissurées	46
II.4.9. Modélisation des fissures par la méthode des éléments finis	46
II.4.10. Formulation de la méthode des éléments finis à la présence d'une fissure (cas de dédoublements).....	48
II.4.11. La défaillance de la méthode des éléments finis dans le calcul des matériaux fissurés.....	50
II.5. La méthode des éléments finis étendue (X-FEM).....	51
II.5.1. Revue de la littérature.....	51
II.5.2. formulation standard de la méthode des éléments finis étendus	53
II.5.3. La modélisation d'une fissure selon la X-FEM.....	56
II.5.4. Les difficultés techniques de mise en œuvre	58
II.5.5. Description de la fissure	58
II.5.6. Intégration numérique.....	58
II.5.7. Amélioration de la méthode XFEM	59
5.7.1. La méthode LEVEL-SET	59
5.7.2. Le cas tridimensionnel.....	60
5.7.3. La convergence de la méthode XFEM	61
II.6 Présentation du code de calcul Abaqus/CAE	62
II.6.1 Code de calcul Abaqus/CAE	62
II.6. 2 Système d'unités dans le code de calcul Abaqus	63
II.7. Conclusion.....	64

Chapitre III : Simulation numériques

III. 1 Introduction.....	63
III.2. Modélisation tridimensionnelle	65
III.2.1 Description géométrique et les conditions aux limites.....	65
III.2.2 Les propriétés mécanique.....	66
III.2.3. Maillage	67
III.3. Effet de la taille de l'élément utilisé (test de convergence).....	67
III.4. La méthode des éléments finis étendu (XFEM)	68

III.5.Résultats et discussion	69
III.5.1.Évolution des contraintes pour les différents cas étudiés.....	69
III.6. Effet de type d'entaille sur le facteur de concentration des contraintes K_t	72
III.7. Résultat de la fracture par la X-FEM.....	74
III.8.Influence de la forme du défaut sur les valeurs de K_I et G_I	77
III.9.Conclusion	79
Conclusion générale.....	80
Références bibliographiques	81

LISTE DES
FIGURES ET
DES
TABLEAUX

LISTE DE FIGURE

Introduction générale

Figure. I	Rupture au mouillage du pétrolier ‘Liberty Ship’	XVI
Figure. II	Stabilisateur vertical, qui s'est séparée du vol American Airlines 587, conduisant à un accident mortel.....	XVIII

Chapitre I

Figure.I.1	fissure dans un milieu continu.....	2
Figure.I.2	Classes de matériaux vis-à-vis de la rupture en sollicitation monotone [3].....	4
Figure.I.3	Trois modes d'ouverture d'une fissure.....	6
Figure.I.4	Schématisme de la séquence de formation de fissures sous l'action d'un indenteur Vickers.	8
Figure.I.5	Les différents types des fissures [10].....	9
Figure.I.6	(a) Propagation d'une fissure(b) Lignes de force et concentration de contraintes.....	10
Figure.I.7	Schéma de flux des forces.....	11
Figure.I.8	Géométrie définissant une entaille simple.	12
Figure.I.9	Configurations des entailles de bords.....	12
Figure.I.10	zone délimitant le voisinage d'une point de fissure.	13
Figure.I.11	Plasticité en pointe de fissure.....	14
Figure.I.12	Comparaison de l'approche classique (a) et de l'approche utilisant la MLR (b).....	15
Figure.I.13	Fissure traversant de longueur $2a$ dans une plaque infinie.....	17
Figure.I.14	Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR.	18
Figure.I.15	Amorçage et propagation quasi-statique.	19
Figure.I.16	Différents paramètre géométrique définissant une entaille simple	20
Figure.I.17	Définition de la contrainte globale, maximale et nominale [21].	21

LISTE DES FIGURE ET DES TABLEAUX

Figure.I.18	La variation de FIC.....	23
Figure.I.19	Dédinition du repère locale au voisinage du front d'une fissure.....	24
Figure.I.20	champ des contraintes au voisinage de la fissure.....	24
Figure.I.21	application de la méthode de superposition.....	27
Figure.I.22	Contour-Jd'intégration.....	28
Figure.I.23	Relation entre G et la complaisance de la structure.....	30

Chapitre II

Figure.II.1	Méthode du relâchement de nœud	35
Figure.II.2	Méthode des éléments finis.....	36
Figure.II.3	Modèle de zone cohésive.....	37
Figure.II.4	Boite à fissure : les 8 éléments ont un sommet sur le fond de fissure.....	47
Figure.II.5	Représentation des maillages avec et sans fissure.....	48
Figure.II.6	définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonction de niveau	55
Figure.II.7	Stratégie d'enrichissement pour une fissure quelconque placée sur un maillage.....	55
Figure.II.8	Fissure placée sur un maillage uniforme.....	57
Figure.II.9	Intégration numérique prenant en compte une fissure avec la X-FEM.....	58
Figure.II.10	La stratégie level-set.....	60
Figure.II.11	Représentation d'une fissure en 3D.....	60
Figure.II.12	Les nœuds « carrés » sont enrichis par les fonctions singulières.....	62
Figure.III.13	Interface ABAQUS 6.11.....	62
Figure.III.14	Étapes à suivre pour la programmation [75].....	63

LISTE DES FIGURE ET DES TABLEAUX

Chapitre III

Figure.III.1	Géométrie de la plaque et les conditions aux limites appliquées.	65
Figure.III.2	Courbe Traction contrainte-déformation pour plaque d'aluminium [76].....	66
Figure.III.3	Maillage pour les trois modèles étudié.....	67
Figure.III.4	Comparaison entre les valeurs de la contrainte d'ouverture σ_{yy} en fond d'entaille en fonction du nombre d'éléments générés pour le maillage.....	68
Figure.III.5	la distribution de la Contraintes de Von mises dans la plaque pour un défaut latéral demi-circulaire avec différents rayons.....	69
Figure.III.6	la distribution de la Contraintes de Von mises dans la plaque pour un défaut latéral d'entaille avec différents angles d'ouverture.....	70
Figure.III.7	la distribution de la Contraintes de Von mises dans la plaque pour un défaut latéral de fissure avec différentes longueurs.....	71
Figure.III.8	Variation de la facteur de concentration des contraintes K_t en fonction de la distance normalisée pour différents rayons du défaut demi-cercle.....	72
Figure.III.9	Variation de la facteur de concentration des contraintes K_t en fonction de la distance normalisée pour différents angles d'ouverture.....	73
Figure.III.10	Variation de la facteur de concentration des contraintes K_t en fonction de la distance normalisée pour différents longueurs de la fissure.....	74
Figure.III.11	Type de fracture prédite à partir de différentes temps pour les trois cas étudiés.....	76
Figure III.12	La création de pré-fissure de 2 mm-cas de l'entaille.....	77
Figure.III.13	Variation le facteur d'intensité de contrainte K_I , pour une fissure de 2 mm de longueur, localisée au fond d'un défaut en demi-circulaire et en entaille et le cas d'une fissure latérale de différentes longueurs.....	78
Figure.III.14	Variation du taux de restitution d'énergie G_I pour une fissure de 2 mm de longueur, localisée au fond d'un défaut en demi-circulaire et en entaille et le cas d'une fissure latérale de différentes longueurs.....	78

LISTE DES TABLEAUX

Tableau.II.1	Système d'unités pour le code de calcul Abaqus [75].....	64
Tableau.III.2	propriétés mécaniques de l'aluminium 2024-T3.	66

Liste des symboles

MLR	Mécanique linéaire de la rupture
Ω	Domaine
σ	Contrainte
ε	Déformation
P_0	Pression moyenne
q	Coefficients fonction de l'angle ψ
σ_{max}	Contraint maximal en fond d'entaille
σ_g	Contraint global
σ_N	Contraint nominale dans la section entaillée
ψ	Angle d'entaille
a	Profondeur de l'entaille
p	Rayon d'entaille
r, θ	Coordonnée polaires
r_p	Taille de la zone plastique
σ_E	La limite d'élasticité
γ	Coefficient de sécurité
K_C	Ténacité du matériau
G	L'énergie de Griffith
E	Module d'Young
G_c	Taux de restitution critique
a_c	La longueur critique
k	Facteur d'intensité de contraintes
K_{IC}	Facteur d'intensité critique
K_t	Facteur de concentration de contrainte
τ_{max}	La contrainte de cisaillement maximal
τ_n	La contrainte de cisaillement nominal
σ_{ij}	Tenseur de contraint
f_{ij}	Fonction de θ l'angle du plan

λ, u	Coefficients de lamé
ν	Coefficient de poisson
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$	Composant du tenseur de contrainte
K_I	Facteur d'intensité de contrainte (FIC) de mode I
K_{II}	Facteur d'intensité de contrainte (FIC) de mode II
K_{III}	Facteur d'intensité de contrainte (FIC) de mode III
J	L'intégral de contour
w_e	La densité d'énergie de déformation élastique
w_p	L'énergie potentielle
XFEM	Méthode des éléments finis étendus
MEF	Méthode des éléments finis
r	Distance du point fissure aux nœuds
k	Constant de Kosovo
u	Déplacement dans le modèle élastique
N_j	Fonction de forme
F_j	Fonction d'enrichissement singulier
Nd	Ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité
NP	Ensemble des nœuds enrichis par la singularité
ui	Degré de liberté (vectoriel) classique aux nœuds i
ai, bi	Constants présente le degré de liberté (vectoriel) aux nœuds
H	Fonction d'enrichissement discontinue

INTRODUCTION

GÉNÉRALE

Introduction générale

Durant ces dernières années, l'industrialisation a vu un développement rapide où la conception mécanique a pris sa part de ce développement. Des ruptures imprévues des armes, des bâtiments, des ponts, des navires, des trains, des avions et diverses machines ont eu lieu partout dans le monde industriel. Certains de ces ruptures ont été dus à une mauvaise conception. Cependant, il a été découvert que de nombreuses ruptures ont été causées par des défauts préexistants dans les matériaux qui initient les fissures et qui se développent et conduisent à la rupture.

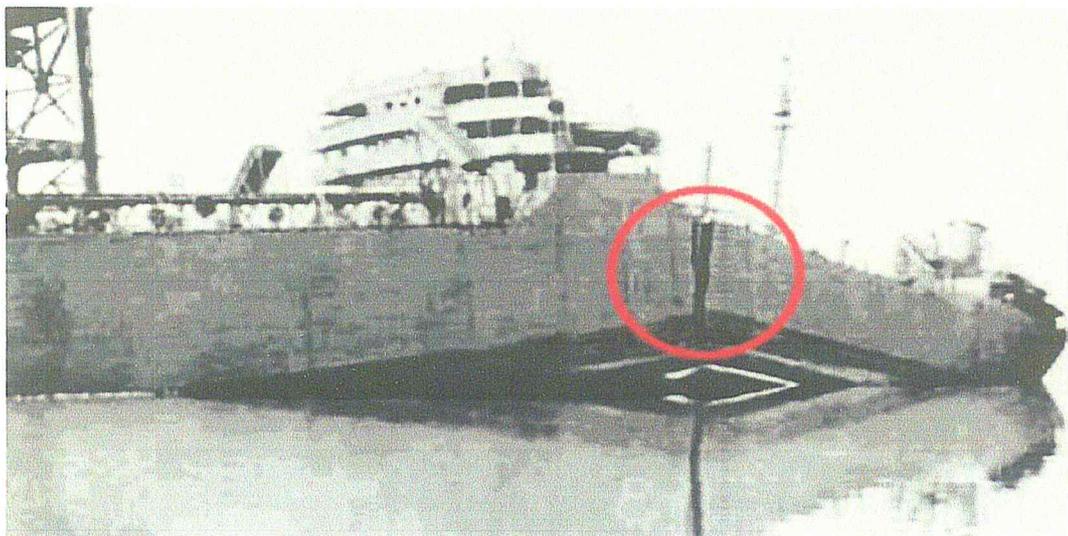


Figure.1 : Rupture au mouillage du pétrolier . En Janvier 1943, le tanker américain T2 SS Schenectady alors qu'il venait de terminer les derniers tests en mer avec succès, se brise soudainement en deux dans le port.

Parmi les plus célèbres accidents, nous citons le naufrage du navire 'Liberty Ship' dans le port de New-York causé par l'effet de concentration de contraintes et du froid [11], (Figure 1).

Le Stabilisateur vertical, qui s'est séparée du vol American Airlines 587, conduisant à un accident mortel (Figure 2). Les premiers incidents enregistré sur les structures fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en Mars 1830 en Grande Bretagne.

Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, des pétroliers. En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, et les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité.

Par ailleurs toute conception n'est guère à l'abri des incidents causés par l'existence de défauts d'origine : la fabrication, le moulage, le soudage et l'empilement de dislocations de glissement. Suite à tous les accidents survenus dans le monde, il est devenu nécessaire d'assurer la sécurité dans les conceptions des structures.

Les scientifiques se sont sentis les premiers concernés à comprendre toute anomalie qui surgit dans n'importe quel incident. Le premier concept à naître fut par Griffith aux années 1920. Sa théorie développée pour les matériaux fragiles, est basée sur le postulat, que l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture, se produit lorsque l'énergie est suffisante pour surmonter une résistance composée d'une énergie de création de surface et d'une énergie de plastification près de la pointe de fissure.



Figure.2 : Stabilisateur vertical, qui s'est séparée du vol American Airlines 587, conduisant à un accident mortel [77].

Cette découverte constitue un des fondements de la mécanique de la rupture. 25 ans plus tard, la validité de l'équation de Griffith a intéressé Irwin (1948) et Orowan (1952), lorsqu'elle est appliquée à des matériaux qui se déforment plastiquement près de la pointe de fissure. Irwin a défini un paramètre nommé taux de restitution d'énergie ou la force motrice de fissure G , comme énergie totale qui est libérée lors de la fissuration. Il a également reconnu que pour des matériaux relativement ductiles, l'énergie nécessaire pour former des nouvelles surfaces de fissure est généralement négligeable par rapport au travail effectué dans la déformation plastique.

Une autre contribution d'Irwin aux milieux des années 1950, a montré que l'approche énergétique est équivalente à un paramètre, K selon lequel la rupture se produit quand la distribution des contraintes critiques est atteinte.

L'étude des comportements de matériau en présence des fissures, a pris une réflexion approfondie et précise ; celle-ci a mis en évidence une géométrie assimilable à la fissure, qui est l'entaille. Cette géométrie engendre localement des concentrations des contraintes et peut donc induire une défaillance prématurée, si elle n'est pas correctement prise en compte lors de la conception. Au voisinage du fond de l'entaille, la distribution des contraintes indique une forte densité de flux, traversant un composant mécanique qui contient une discontinuité géométrique.

L'objectif de la présente étude consiste à simuler et analyser du champ des contraintes et détermination du facteur de concentration des contraintes (K_t), à proximité de l'entaille de traiter le problème d'une plaque contenant un défaut de forme latéral. Trois types de défauts avec différentes tailles ont été traités : un demi-cercle de différents rayons, une entaille avec différents angles d'ouverture et une fissure de différentes longueurs, ainsi que la détermination du facteur d'intensité des contraintes (K_{IC}). Dans cette modélisation on utilise la méthode des éléments finis étendue (X-FEM) pour prédire l'emplacement et la propagation de la fissure dans les différents cas entaillé.

En effet, ce mémoire contient trois chapitres en plus d'une introduction, une conclusion et des références bibliographiques.

Le premier chapitre : présent un état de l'art sur la mécanique linéaire de la rupture d'un point de vue théorique et numérique. Il y est rappelé les différentes propriétés caractérisant au voisinage de la pointe de fissure où entaille en termes de facteurs d'intensité de contrainte et de taux de restitution d'énergie

Le deuxième chapitre : présente la méthode des éléments finis étendus (ou eXtended Finite Element Méthode). C'est en effet, cette méthode moderne que nous avons choisi de développer dans le logiciel de calcul Abaqus, au vu des avantages qu'elle présente pour la simulation numérique de propagation arbitraire de fissure. La discussion sur l'utilisation de la méthode des élément (MEF) à l'étude du comportement à la rupture. ainsi que la description sua la thécnique de la méthode des élément finis étendus.

Dans le troisième chapitre : nous allons fait la modélisation de la structure par simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis. L'analyse permet de déterminer le champ des contraintes de Von mises dans la plaque à partir du chargement de traction pour les différentes cas étudiés, ensuite l'analyse de la variation du facteur de concentration des contraintes au bord et loin de l'entaille dans les plaques ensuite prédire la propagation de la fissure par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). Une comparaison entre les différents types d'entaille est étudiée on présente le calcul de

facteur d'intensité de contrainte K_I et le taux de restitution de l'énergie G_I en mode I pour une fissure considéré.

Enfin, une conclusion générale sur les principaux aspects abordés dans cette étude et les résultats obtenus ainsi que des perspectives sur l'importance de l'analyse numérique éléments finis 3D sur le comportement mécanique des plaques entaillé sous chargement statique, et des discussions des résultats obtenus ont été présentées.

CHAPITRE I
GÉNÉRALITÉ SUR
LA MÉCANIQUE DE
LA RUPTURE
LINEAIRE.

I. Introduction

La mécanique de la rupture couvrant un domaine extrêmement vaste, globalement pour objectif de prévoir le comportement des fissures susceptibles de se trouver dans tous composants industriels soumis à des sollicitations mécaniques.

La mécanique de la rupture a pour objet essentiel l'étude des fissures durant le chargement et de prévoir leur évolution jusqu'à la rupture de la structure. En fonction du chargement et du matériau considérés, si le milieu est globalement plastique ou viscoplastique, l'étude est du ressort de la mécanique non linéaire de la rupture, ou encore de l'approche locale, dans laquelle il est fait une description aussi précise que possible de l'état de contrainte et de déformation en pointe de fissure à l'aide de modèles de comportement non linéaire. Si au contraire la plasticité est absente ou reste confinée, les théories qui permettent de traiter le problème considèrent le matériau comme élastique partout : c'est la mécanique linéaire de la rupture (MLR), qui va être considérée dans cette partie. En effet la (MLR) considère les matériaux parfaitement élastiques, homogènes et isotropes. Elle permet de caractériser le comportement d'un matériau vis-à-vis d'une sollicitation, en présence d'une fissure [1].

La mécanique linéaire de la rupture a tout d'abord été étudiée. Elle concerne les matériaux dont le comportement est élastique linéaire. Compte tenu de cette linéarité, ainsi que de la possibilité d'appliquer les théorèmes de superposition, les calculs sont relativement simples à réaliser. Dans le cadre de travaux sur des matériaux fragiles comme le verre, les chercheurs du milieu du siècle ont ainsi pu déterminer une grandeur scalaire notée K qui caractérise les champs de contraintes et de déformations au voisinage de la fissure. Ce paramètre a permis d'établir un critère (K critique) pour déterminer l'amorçage de la propagation et a pu être relié à l'énergie libérée par la fissure au cours de sa propagation. Nous commencerons par spécifier de façon précise le cadre de l'étude. Puis nous introduirons les notions fondamentales liées aux approches locales et globales en mécanique linéaire de la rupture. Cela nous amènera à faire un tour d'horizon des différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul de grandeurs caractéristiques telles que les facteurs d'intensité de contraintes, ou le taux de restitution d'énergie (intégrale J en élastoplasticité).

Ce chapitre fait état des travaux bibliographiques portant sur la mécanique de la rupture et le rôle des approches globales et les approches locales pour l'analyse de comportement des structures en rupture, sur une plaque rectangulaire contenant un défaut latérale d'une certaine forme (demi- cercle, entaille latérale ou fissure).

I.2. Mécanique linéaire de la rupture

I.2.1. Généralité

Localement, la rupture est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu (Ω) en deux parties distinctes. On définit alors une fissure comme étant la surface géométrique (s) de séparation (Figure I.1). [2]

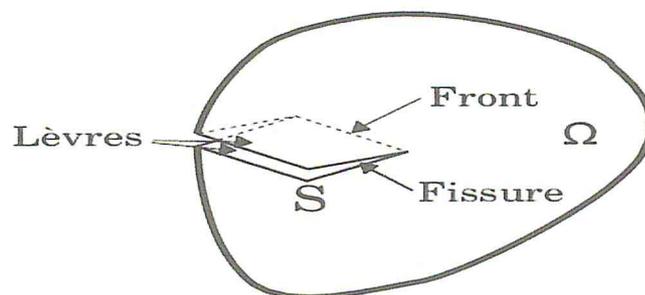


Figure.I.1: fissure dans un milieu continu.

Le mécanisme de rupture est un processus mécanique produisant au sein d'un matériau une discontinuité locale de matière appelée fissure. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. Par rapport au facteur temps. On distingue deux types de rupture :

- **Rupture fragile** : la rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique (mécanique linéaire de la rupture), et donc par la propagation très rapide possible des fissures (consommation d'énergie faible).
- **Rupture ductile** : la rupture ductile semble liée essentiellement à la présence d'inclusion ou de précipités (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce mode de rupture, la déformation plastique macroscopique est en général importante (consommation d'énergie grande).

I.2.2. Classes de matériaux vis-a-vis` de la rupture :

Pour un essai sous chargement monotone d'une éprouvette de traction simple, on peut distinguer différents types de mode de rupture (Figure I.2) :

- **Rupture élastique–fragile** Le comportement global est linéaire élastique et la rupture intervient de fac, on brutale (i.e. sans signes précurseurs). Les déformations a rupture sont Généralement faibles (< 1%). Les matériaux ayant ce type de comportement sont les céramiques massives, les verres.
- **Rupture quasi–fragile** Le comportement global est non linéaire. Des décharges partielles indiquent une forte perte de rigidité qui indique une micro–fissuration du matériau. Cette micro–fissuration est la cause essentielle de la non-linéarité globale. Les matériaux´ ayant ce type de comportement sont :

Les composites en particulier les composites céramique–céramique,

Les bétons On observe ce comportement en compression. En traction les bétons ont généralement une rupture élastique–fragile. Les nouveaux bétons renforcés ont également une rupture quasi– fragile en traction.

- **Rupture plastique– fragile** Le matériau plastifie mais rompt brutalement pour des déformations relativement faibles. C'est le cas des métaux de type cubique centre ou hexagonal lorsque la température est suffisamment faible.
- **Rupture ductile** Le matériau plastifie et rompt progressivement. Une fissure stable peut s'amorcer au sein de la matière. L'endommagement peut-être diffus et relativement important. Les métaux cubiques à faces centrées ont ce comportement. Les métaux de type cubique centre´ sont ductiles pour une température suffisamment élevée.

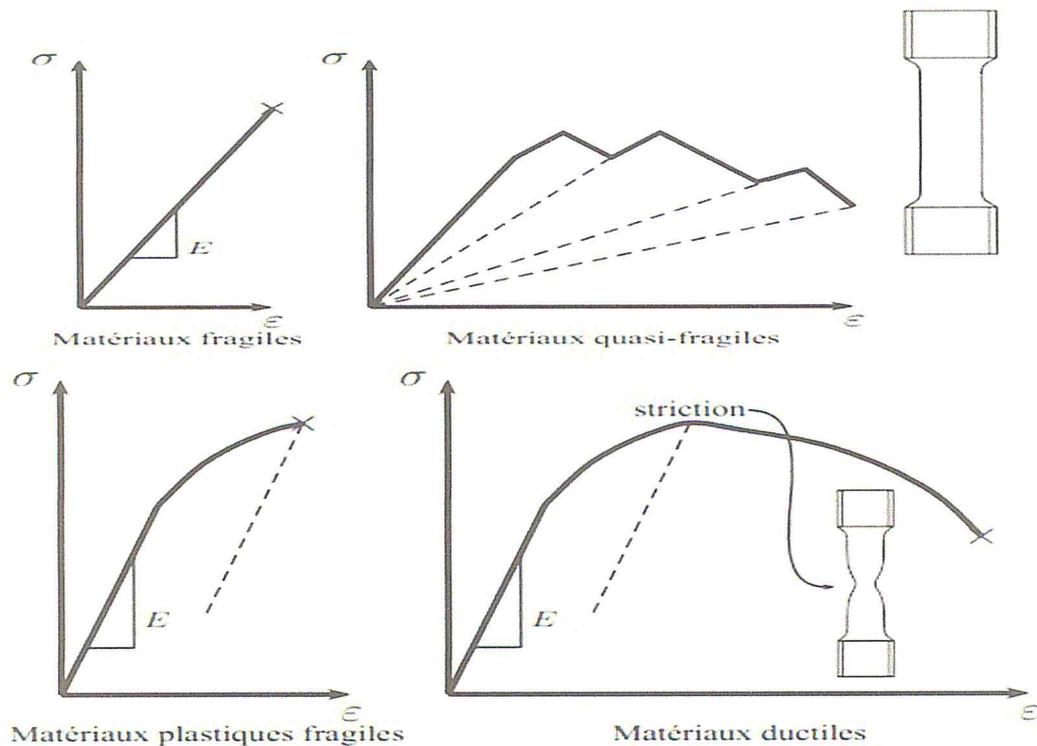


Figure.I.2: Classes de matériaux vis-à-vis de la rupture en sollicitation monotone [3].

I.2.3. Généralités sur les ruptures par fissuration

Généralités sur les ruptures par fissuration Hormis les processus chimiques de ruine des matériaux et structures, il existe plusieurs processus essentiellement mécaniques de rupture :

- Le flambage.
- La rupture ductile par surcharge.
- La rupture fragile sous des contraintes généralisées inférieures à la limite élastique.
- La rupture par fatigue à grand nombre de cycles.
- La rupture par fluage à haute température.

La rupture par fissuration est la création de la surface de discontinuité (4). L'échelle dimensionnelle de cette discontinuité surfacique dépend, en fait, directement du moyen de mesure utilisé, et bien entendu, de la nature de l'approche recherché. La mécanique des solides aborde les problèmes de calcul de structure où l'on parle d'un élément de volume dont les dimensions de 1 mm, et de structure pour 10 mm à 10³ mm. Dans ce domaine, on traite de problème le la "rupture par fissuration".

La fissuration prend en compte l'existence de défauts comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore des zones d'endommagement à partir desquels des fissures vont s'initier puis se propager pour parvenir à une taille provoquant la ruine de la structure. En général, on distingue deux types de fissuration :

1. La fissuration stable qui comprend :
 - ✓ La fissuration quasi-statique sous une charge constante.
 - ✓ La fissuration par fatigue sous une charge répétée (cyclique).
 - ✓ La fissuration dynamique lorsqu'une charge est appliquée soudainement.
2. La fissuration instable est-elle instantanée et à laquelle peut conduire la fissuration stable.

I .2.4.Modèles de la fissuration des structures

Il y a principalement [4] deux modèles pour décrire la fissuration des structures, la mécanique d'Endommagement et mécanique de la rupture.

Lorsqu'une pièce est soumise à des efforts d'origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micro-mécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées :

- **La mécanique d'Endommagement** : propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance, puis à la coalescence de micro-fissures ou de microcavités présentes dans le matériau. Cette approche, initialement introduite par Kachanov, a été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Chaboche, Lemaitre, Bui en 1981, Ehrlacher, Gurson, Tvergaard, Needleman, Rousselier, etc.... Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture.
- **La mécanique de la rupture** : pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non

d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

I.2.5. Les trois modes d'ouverture d'une fissure

Il a été montré que toutes les sollicitations sur la fissure peuvent être ramenées à la superposition de trois modes élémentaires (Figure I.3) :

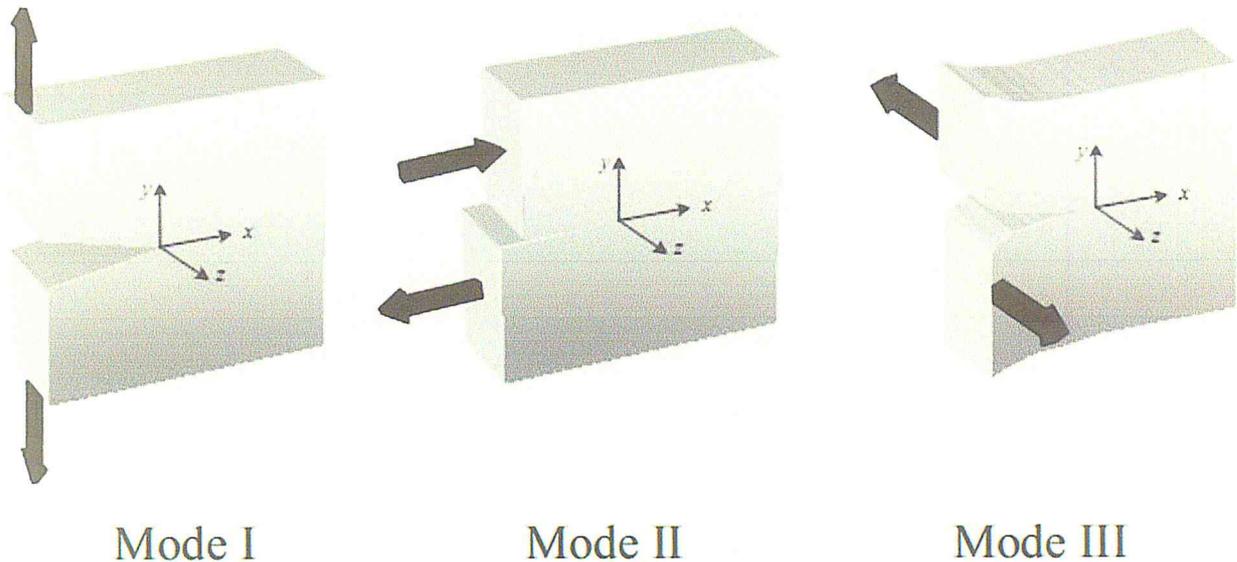


Figure.I.3: Trois modes d'ouverture d'une fissure.

- le mode I (mode d'ouverture) où les lèvres de la fissure se déplacent dans des directions opposées, perpendiculairement au plan de fissuration.
- le mode II (mode de cisaillement dans le plan) où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction perpendiculaire au front de fissure.
- le mode III (mode de cisaillement hors plan) où les lèvres de la fissure se déplacent dans le même plan, dans une direction parallèle au front de fissure.

Notons que dans le cas des modes II et III, les lèvres de fissures restent en contact et entraînent donc des frottements qui diminuent l'énergie disponible pour la propagation de fissure. Ces deux modes sont ainsi généralement moins dangereux que le mode I.

Le cas réel est une superposition de ces modes et on parle alors de mode mixte. On supposera par ailleurs que le mode I positif est toujours présent (ouverture) et donc on considéra les lèvres de la fissure comme étant libres d'effort .

I.3. Les Types de fissuration

Le mécanisme de rupture par fissuration peut intervenir selon deux types de fissuration :

- **La fissuration brutale** : pour les solides, ou pour les matériaux à très haute résistance, les contraintes de travail sont très élevées, une énergie potentielle considérable est ainsi créée ; La présence de petites fissures peut alors conduire à une rupture brutale qui souvent ne s'accompagne pas de déformations plastiques macroscopiques par suite de la très faible ductilité.
- **La fissuration successive** : il s'agit ici, d'une succession de mécanismes (fragile ductile) qui, sous contraintes répétées, entraîne la fissuration successive, appelée la rupture par fatigue. Les facteurs qui influencent le comportement à la rupture par fissuration des matériaux sont de deux natures : métallurgique et mécanique. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, déformations et contraintes, ainsi que les conditions d'environnement tel que la température ou le taux d'humidité relative [5].

- **Formation des fissures** : Lorsqu'un indenteur Vickers est appliqué à la surface d'un matériau céramique avec une charge suffisamment élevée (selon le matériau), il se crée des fissures. Des observations au cours de l'indentation de matériau transparent ont montré que la configuration finale de ces fissures est achevée lorsque l'indenteur est déchargé. Cela montre que la force motrice de fissuration lors de l'indentation est due aux contraintes résiduelles créées par la zone de déformation plastique formée autour de l'empreinte d'indentation. L'initiation et le développement des fissures sur du verre sont décrits par B.Lawn et M.Swan [6] à travers les séquences suivantes (Figure I.4).

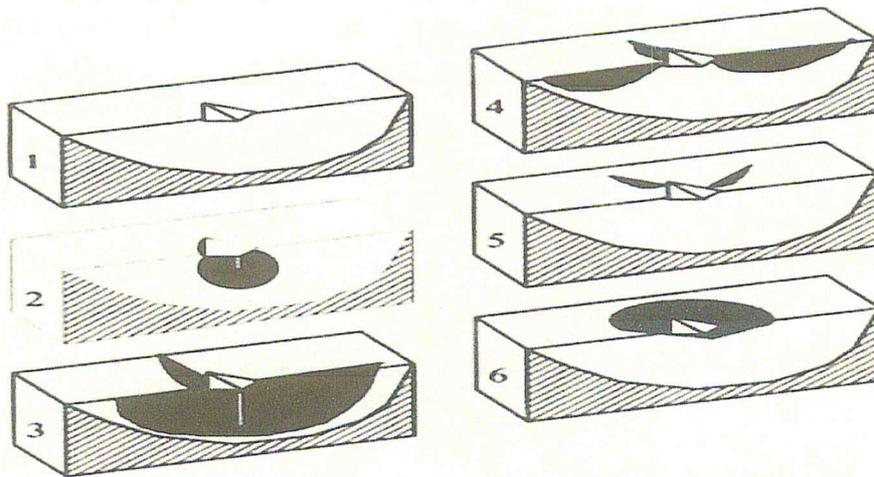


Figure.I.4: Schématisation de la séquence de formation de fissures sous l'action d'un indenteur Vickers.(1) empreinte du diamant Vickers; (2) fissure médiane; (3) fissure half-penny; (4) fissure radiale primaire, (5) fissure radiale secondaire; (6) fissure latérale (b) [1].

1. En début du chargement, l'indenteur produit autour du point de contact une zone de déformation qui augmente avec la charge. C'est l'empreinte du diamant vickers. La pression moyenne P_0 sur l'élément de surface reste constante.
2. Au cours du chargement, une fissure dite fissure médiane se produit sous la zone de déformation et croît jusqu'à former un cercle à mesure que la charge augmente mais n'apparaît pas à la surface de l'éprouvette [6].
3. limite de la zone de déformation et se développe sous l'effet du champ de contraintes résultant du chargement élastique de l'indenteur sur la surface de l'éprouvette.
4. Lors du déchargement, la fissure médiane grandit, s'étale vers l'extérieur et apparaît en surface. Elle prend ainsi un autre profil et peut devenir soit une fissure dite du type halfpenny au déchargement complet, soit :
5. Une fissure du type radial dite fissure radiale (ou fissure du type Palmqvist). Elle prend naissance aux défauts qui se trouvent près de la surface à la limite de la zone de déformation. Elle évolue de part et d'autre de celle-ci jusqu'à apparaître en surface, sous l'action des contraintes résiduelles, au déchargement complet. Si la fissure radiale se trouve dans le plan des diagonales de l'empreinte du diamant, elle est dite fissure radiale

primaire sinon c'est une fissure radiale secondaire. Les fissures radiales forment en principe un couple de fissures perpendiculaires.

6. Aux charges d'indentation élevées, une fissure latérale se forme au déchargement, sous la zone de déformation et se développe presque parallèlement à la surface [6]. Elle est responsable du phénomène d'écaillage. D'une façon générale l'amorçage des fissures a lieu aux endroits de fortes concentrations de contraintes, c'est-à-dire aux arêtes du diamant vickers et semble avoir deux aspects: les conditions de propagation d'un défaut préexistant pendant le chargement [7], d'une part, et l'existence d'un seuil de charge pour l'apparition d'un type de fissures [8-9], d'autre part. Lorsqu'un indenteur Vickers est appliqué à la surface d'un matériau céramique avec une charge suffisamment élevée (selon le matériau), il se crée un système de trois types de fissures (Figure I.5) :

a. **Fissure médiane** : elle s'étend en profondeur pendant le chargement sous l'action d'un champ élastique ;

b. **Fissure radiale** : elle s'étend en surface à partir des angles de l'indenteur et se développe sous l'action des contraintes résiduelles ;

c. **Fissure latérale** : elle provient également de l'action des contraintes résiduelles.

Ces fissures se développent presque parallèlement à la surface et sont responsables de l'écaillage de l'échantillon.

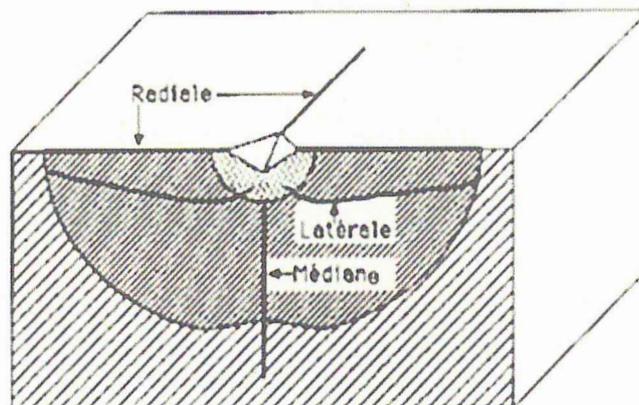


Figure.I.5 : Les différents types des fissures [10].

I.4.Mécanique de la rupture

Dans un matériau homogène soumis à une contrainte uni-axiale, l'effort se transmet d'un atome à l'autre en suivant des lignes de force qui sont parallèles (Figure.I.6). Dans un matériau qui possède une entaille, les lignes de force doivent contourner cette entaille, ce qui conduit à une concentration de ces lignes au voisinage de la pointe de l'entaille, donc une concentration de la contrainte dans cette région, appelée tête ou pointe de fissure.

La mécanique de la rupture étudie l'interaction entre la discontinuité géométrique (fissure) et le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité. D'un point de vue mécanique, on peut distinguer schématiquement, dans un milieu fissuré, trois zones successives. (Figure I.6)

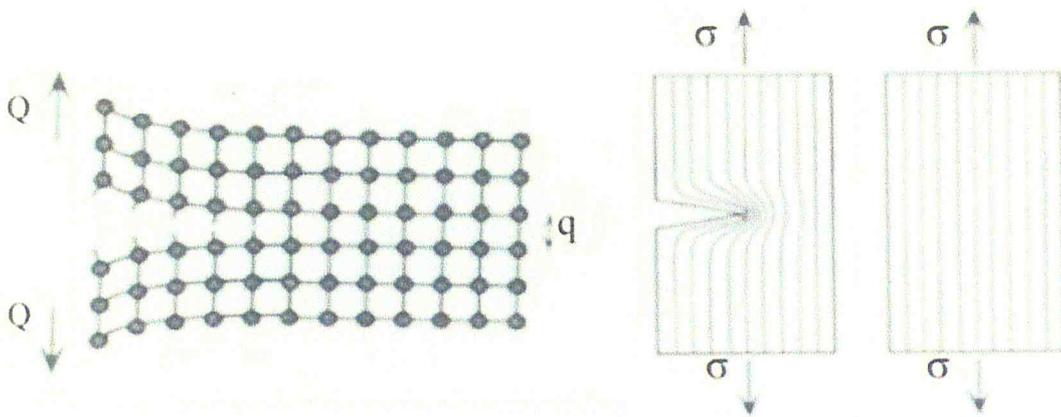


Figure.I.6: (a) Propagation d'une fissure (b) Lignes de force et concentration de contraintes [5].

I.5.Effet d'entaille

D'une manière générale, on appelle une entaille une discontinuité imposée ou créée accidentellement. Elle peut être nécessaire pour des raisons de fabrication, par exemple dans un siège de palier à roulement, une rainure de clavette, un perçage pour loger des goupillés, ou un pas de vis pour une connexion. Des entailles peuvent également être provoquées en service, par exemples : les cavités dans la coulée, les marques d'outils dans l'usinage ou les marques d'usure en service.

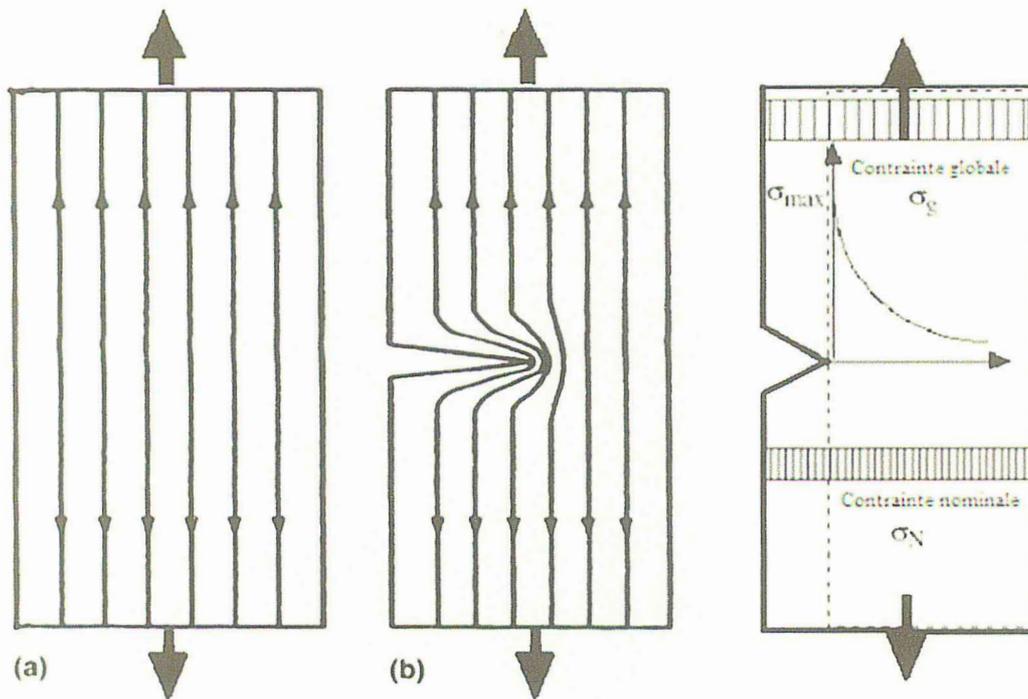


Figure.I.7: Schéma de flux des forces : a) Plaque soumise à une force de tension. b) Plaque avec entaille.

Les entailles entraînent des fortes concentrations de contraintes locales et peuvent donc induire une défaillance prématurée si elle n'est pas correctement prise en compte lors de la conception des composants mécaniques. Leurs effets résultent dans la modification du flux de force (Figure I.7) Près du fond d'une entaille, les lignes de force sont relativement proches et cela conduit à une concentration du champ de contraintes local avec un maximum en fond d'entaille [11]. La distribution des contraintes dans un composant, peut être visualisée en utilisant ce qu'on appelle les trajectoires des contraintes, par analogie avec l'écoulement d'un fluide ou un courant électrique parcourant un conducteur plat, percé d'un trou. Ces trajectoires sont toujours exécutées dans la direction de la contrainte principale maximale. Leur distance est inversement proportionnelle à la contrainte de telle sorte, que la densité de la trajectoire de contraintes est une mesure de la contrainte agissant localement [12]. Chaque changement brusque de section transversale dévie les trajectoires de contraintes qui se déplacent alors en se rapprochant. L'effet d'entaille dépend de trois facteurs essentiels, en plus des dimensions de l'entaille, de l'angle ' ψ ' et surtout son rayon ' ρ ' (Figure I.8).

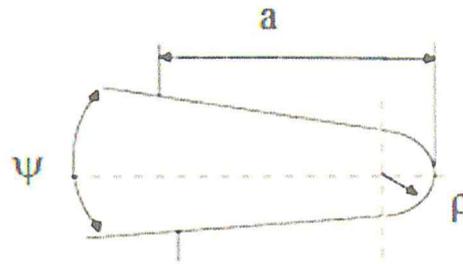


Figure.I.8: Géométrie définissant une entaille simple.

Ces deux facteurs conduisent à la classification suivante :

- Fissure : $\rho = 0$ et $\psi = 0$
- Entaille en V : $\rho = 0$ et $\psi \neq 0$
- Entaille en U : $\rho \neq 0$ et $\psi = 0$
- Entaille simple : $\rho \neq 0$ et $\psi \neq 0$

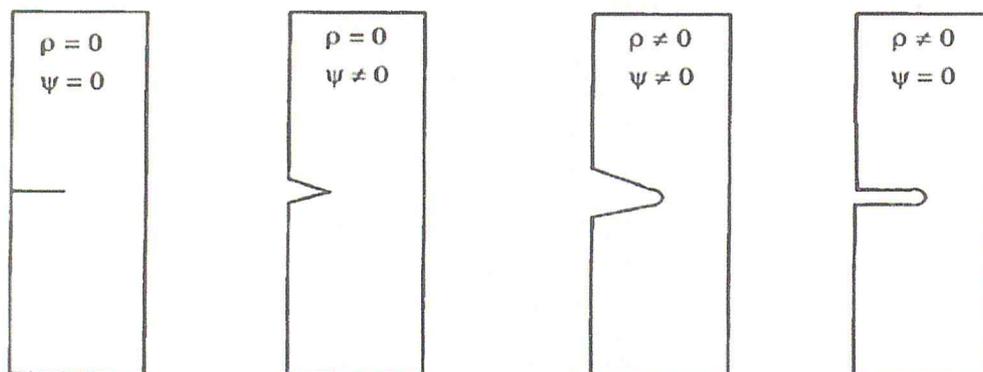


Figure.I.9: Configurations des entailles de bords.

I.6.Étude d'un milieu elastique fissure

D'un point de vue mécanique, on peut distinguer schématiquement, dans un milieu fissuré, trois zones successives (Figure I.10) :

La zone d'élaboration 1 : elle se trouve à la pointe de fissure et dans le sillage laissé par la fissure au cours de sa propagation. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui ont fortement endommagé le matériau. Elle est discontinue au sens de la mécanique des solides. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.

La zone singulière 2 : dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont continus et possèdent une formulation indépendante de la géométrie lointaine de la structure. On démontre que dans cette zone, les composantes du champ de contraintes sont infinies au voisinage du front de fissure ($r \rightarrow 0$).

Plus exactement, la singularité est en $(1/\sqrt{r})$ en milieu élastique linéaire. Le matériau ayant une limite élastique, il existe un rayon r_p autour de la pointe de fissure qui détermine la forme de la zone plastique. En fonction de la valeur de r_p , on dira que la rupture est fragile pour r_p petit et qu'elle est ductile pour r_p grand. Cette distinction sur la base du paramètre r_p est très importante car elle conditionne la validité de la théorie utilisée :

- La Mécanique Linéaire de la Rupture pour les ruptures fragiles
- La Mécanique Non Linéaire de la Rupture dans le cas de zone plastique non négligeable (rupture ductile).

La zone des champs lointains 3 : comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, déformations et contraintes varient peu et peuvent être approximés par des polynômes communément utilisés dans la méthode des éléments finis.

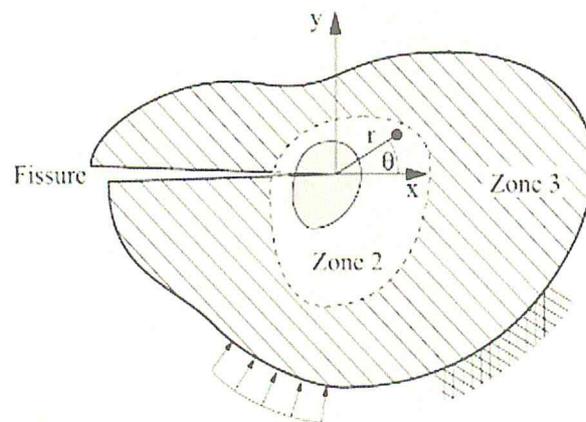


Figure.I.10: zone délimitant le voisinage d'une point de fissure.

Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure. On regroupe l'ensemble de ces méthodes sous deux types d'approches :

- ✓ Approches directes : qui sont fondées sur l'utilisation des fonctions d'Airy ; ces approches résolvent des problèmes plans et font appel à la recherche de fonctions analytiques. En particulier dans notre étude, nous avons utilisé l'expansion de Williams qui est basée sur ce type d'approches.
- ✓ Approches énergétiques qui sont basées sur l'analyse énergétique du milieu continu contenant une fissure. il s'agit d'un bilan énergétique global intégrant le taux de restitution d'énergie dû à un accroissement virtuel de la fissure.

C'est la singularité d'ordre $-1/2$ dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure. Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure I.11) [13].

De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, Une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

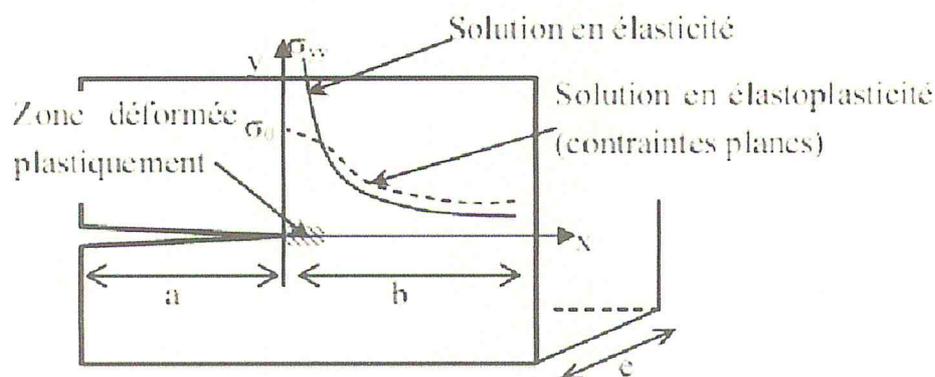


Figure.I.11: Plasticité en pointe de fissure.

I.7.Utilisation de la mécanique de la rupture en conception

Le schéma (Figure I.12) a comparé l'approche classique pour le dimensionnement des structures basée sur la limite d'élasticité du matériau σ_E à l'approche utilisant le concept de ténacité K_C issu de la mécanique linéaire de la rupture (MLR).

Dans le premier cas, on dimensionne les structures pour que les contraintes appliquées σ restent inférieures à la limite d'élasticité ($\sigma < \sigma_E$). On utilise en général un coefficient de sécurité pour prévenir tout risque de rupture fragile ($\sigma < \gamma\sigma_E$ avec $\gamma < 1$). Cette approche est à deux variables σ et σ_E , elle fait abstraction de l'existence d'éventuels défauts sous forme de microfissures par exemple.

L'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture est à trois variables : la contrainte appliquée, la ténacité K_C qui remplace la limite d'élasticité et une variable additionnelle qui est la taille du défaut. Il y a cependant deux approches alternatives de la mécanique de la rupture : l'une utilisant le concept d'intensité des contraintes critique (ténacité du matériau) et l'autre un critère d'énergie. Ces deux approches sont équivalentes dans certaines conditions. On va les présenter brièvement avant de préciser les hypothèses qui les sous-tendent et de rentrer dans les détails des calculs qu'elles mettent en œuvre.

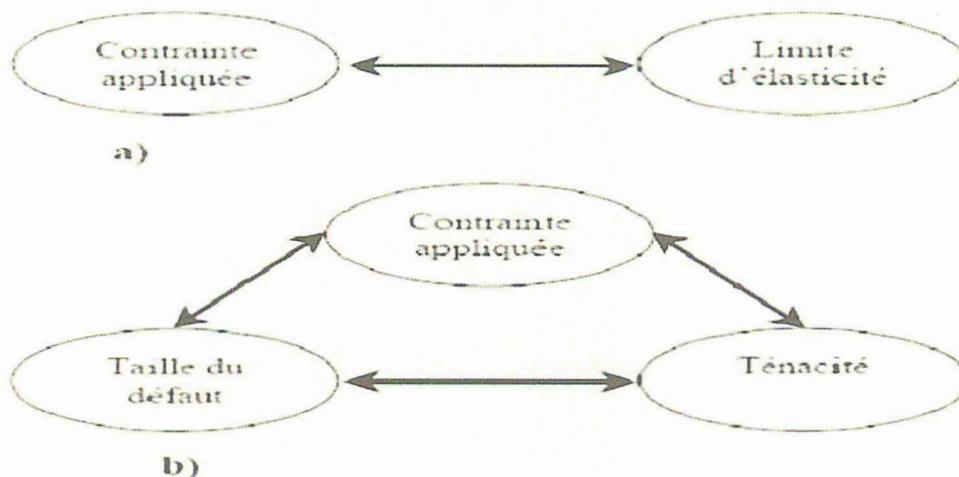


Figure.I.12 : Comparaison de l'approche classique (a) et de l'approche utilisant la MLR (b).

I.7.1. Le Critère d'énergie

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau : cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure.

Griffith fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles, qui fut ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs : Irwin et Orowan. L'énergie de Griffith notée G (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie) est définie par la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque G atteint une valeur critique G_C ; G_C est une mesure de la ténacité du matériau. Pour une fissure de longueur $2a$ (Figure I.13) dans une plaque de dimensions infinies (ce qui équivaut à dire que la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans la plan de chargement), constituée d'un matériau de module d'Young E et soumise à une contrainte de traction, l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E} \quad (I.1)$$

Si on continue à augmenter la contrainte appliquée σ^∞ , la rupture se produira lorsque l'énergie G atteint sa valeur critique pour une contrainte appliquée σ_R . On a alors d'après la relation précédente :

$$G_C = \frac{\pi(\sigma_R)^2 a}{E} \quad (I.2)$$

On peut noter qu'à valeur de G_C fixée, la contrainte à rupture σ_R varie avec $a^{-\frac{1}{2}}$; de même à G_C et σ^∞ fixées, la longueur critique de défaut a_c est donnée par :

$$a_c = \frac{EG_C}{\pi(\sigma^\infty)^2} \quad (I.3)$$

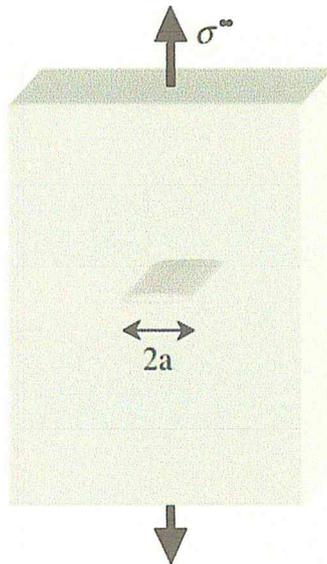


Figure.I.13 : Fissure traversant de longueur $2a$ dans une plaque infinie.

La (Figure.I.14) illustre bien la différence entre l'approche classique qui fait abstraction de l'existence d'une fissure (le critère de rupture est $(\sigma^\infty = \sigma_E)$) et l'approche par la MLR qui prend en compte la présence de la fissure (σ^∞ proportionnelle à $1/\sqrt{a}$). La zone de non rupture située sous les deux courbes représentant les approches précédentes, montre que de part et d'autre de la longueur de défaut a_0 , on utilisera l'une ou l'autre des approches.

L'énergie de Griffith G est la force motrice dans un matériau dont la résistance à la rupture est donnée par G_C . Par analogie avec l'approche basée sur la limite d'élasticité où c'est la contrainte qui joue le rôle de force motrice dans un matériau dont la résistance à la déformation plastique est donnée par la limite d'élasticité σ_E .

Cette analogie est utilisée aussi pour illustrer le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire est indépendante de la taille des éprouvettes et peut donc être utilisée pour des structures de tailles différentes dès lors que le matériau est raisonnablement homogène. Ce principe de similitude est une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture : la ténacité d'un matériau (mesurée par G_C) est indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée. Cette hypothèse de similitude reste valable tant que le comportement du matériau demeure linéaire élastique [14].

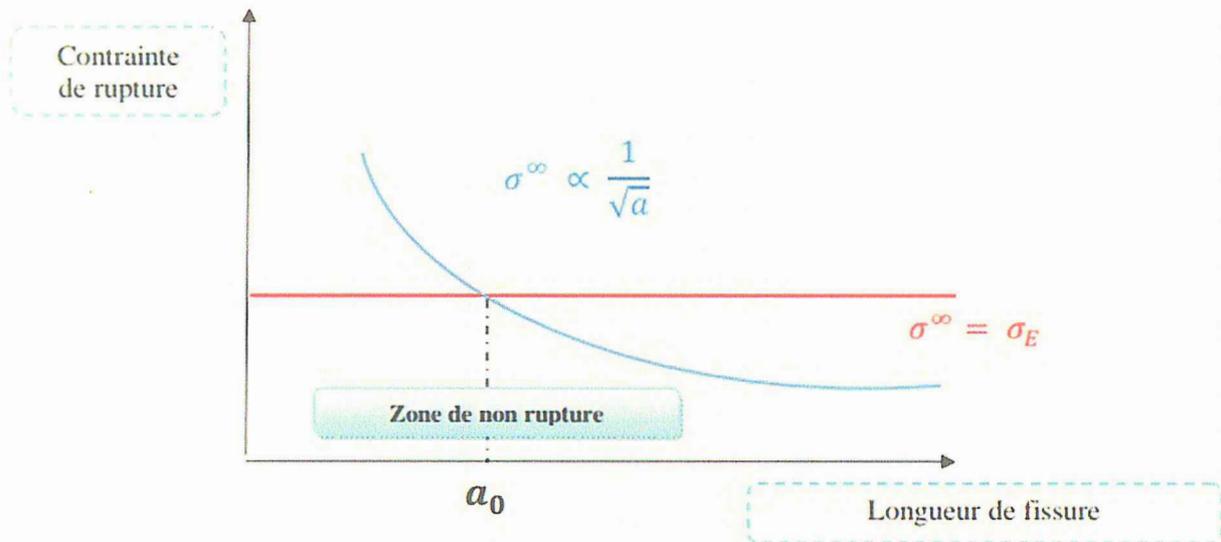


Figure.I.14: Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR.

I.7.2.Critères de rupture et de propagation

La définition des grandeurs facteurs d'intensité des contraintes K et taux de restitution d'énergie G suppose que ces grandeurs : propriété de structure (dynamique), gouvernent les mécanismes de rupture, à partir de critères sur les grandeurs caractéristiques ($G_C; K_C$) : propriété strictement de matériau (pas de notion de dynamique). Ces critères sont donc indispensables pour connaître les conditions d'évolution de la fissure et pour le dimensionnement en calcul des structures. Il existe différents types de critères sur les fissures. On distingue, entre autres, les critères [14] :

- d'amorçage,
- de propagation,
- d'arrêt,
- de bifurcation,
- de branchement.

I.7.3. Critères d'amorçage

Pour l'amorçage, c'est-à-dire juste avant qu'une fissure, déjà existante, ne se propage, on choisit, en quasi-statique (Figure 1.15), communément un critère du type $G \leq G_C$ où G_C est un taux de restitution critique pour le matériau. Ceci est équivalent en mode I à un critère du type $K \leq K_C$.

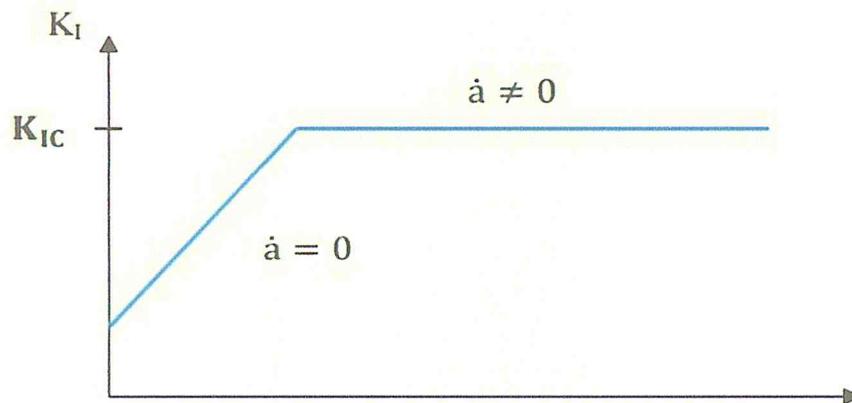


Figure.I.15: Amorçage et propagation quasi-statique.

I.8. Facteur de concentration de contraintes

Les paramètres de rupture (K ou J) sont très sensibles à la présence de concentration de contraintes d'hétérogénéités, issues des formes de pièces ou de contraintes dues à la façon dont elles sont assemblées. Ces zones de concentrations sont des sites préférentiels d'amorçage. Pour étudier ce phénomène, des entailles artificielles sont créées sous différentes formes et tailles. L'angle d'entaille ϕ et le rayon ρ en fond d'entaille sont donnés en (Figure I.16).

Le facteur de concentration de contrainte (K_t) relie la contrainte nominale de chargement à la contrainte maximale que va subir l'extrémité à l'entaille. Ce facteur dépend uniquement des dimensions géométriques relatives de l'entaille (plus le rapport a/ρ augmente et plus K_t augmente) et son expression analytique diffère selon le chargement [15].

Peterson [16] définit le facteur de concentration des contraintes K_t de deux manières : la première étant le rapport de la contrainte maximale σ_{max} (ou du cisaillement maximal τ_{max}) en fond d'entaille à la contrainte nominale σ_n (ou de cisaillement nominal τ_n) dans la section

correspondante de la pièce entaillée. Dans le cas d'une plaque semi-infinie comportant des entailles en U et semi elliptiques (Figure I.16), Baratta et Neal [17] ont procédé aux calculs des facteurs de concentration de contraintes K_t pour différents rapports a/ρ . Ces auteurs [17] regroupent les valeurs des rapports du facteur de concentration de contraintes correspond à l'entaille en U et celui de l'entaille semi elliptique obtenus par Bowie [18]. Pour le calcul, ces auteurs divisent la contrainte circonférentielle par la contrainte globale appliquée. Pour une plaque comportant un trou elliptique, Inglis [19] utilise la formule du facteur de concentration de contraintes suivante :

$$K_t = 1 + \sqrt{a/\rho} \tag{I.4}$$

Avec a profondeur de l'entaille et ρ rayon d'entaille. Cet auteur obtient des facteurs de concentration de contraintes identiques à ceux de Baretta [17] et Bowie [18]. Dans le cas d'une plaque de largeur finie et une entaille de bord en U, Isida [20] a proposé un facteur de correction permettant le passage du cas d'une plaque infinie à celui d'une plaque de largeur finie.

La forme générale du facteur de concentration de contraintes peut s'écrire selon [21] sous la forme :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_g} \tag{I.5}$$

où, K_t , σ_{max} et σ_g sont respectivement le facteur de concentration de contraintes, la contrainte élastique maximale au fond d'entaille et la contrainte globale à laquelle la structure est soumise.

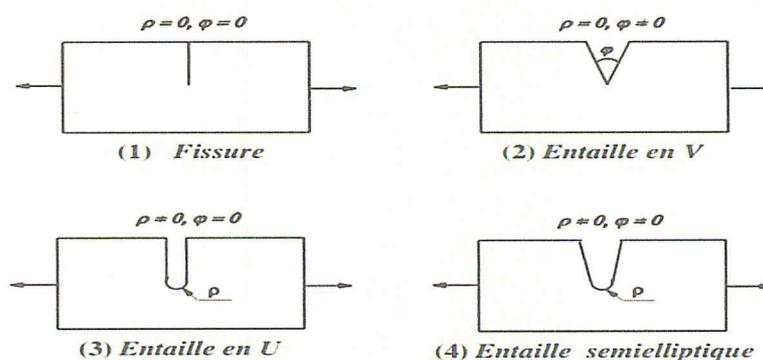


Figure.I.16: Différents paramètre géométrique définissant une entaille simple selon [17] et [18].

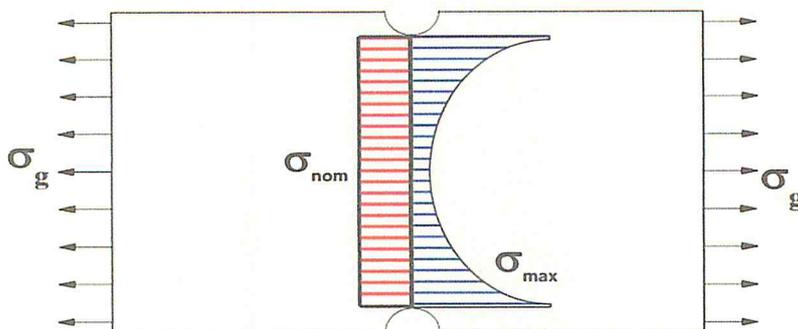


Figure.I.17: Définition de la contrainte globale, maximale et nominale [21].

Pour [21] le facteur de concentration de contrainte élastique est relié à la contrainte nominale σ_{nom} selon la relation suivante :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (I.6)$$

La définition de la contrainte maximale, de la contrainte globale et de la contrainte nominale est donnée en (Figure I.17) par [21].

Les contraintes maximales σ_{max} et τ_{max} sont déterminées numériquement par éléments finis ou expérimentalement par la méthode de la photoélasticimétrie. Les contraintes nominales σ_{nom} et τ_{nom} sont données par les équations de la résistance des matériaux. Ces contraintes sont déterminées mathématiquement au moyen des équations établies à la suite des travaux de Neuber [22] (formule de Peterson). Smith, (1978) [23] indique que la propagation de la fissure sera gérée uniquement par la contrainte nominale.

I.9.Facteur d'intensité de contrainte

I.9.1.Méthode analytique

- Généralité

Les facteurs d'intensité des contraintes s'expriment en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement, ce calcul ne devrait pas poser de problèmes à priori. Pourtant, nous allons voir qu'une bonne précision sur ces facteurs est difficile à obtenir.

Il existe un bon nombre de solutions, la méthode la plus couramment utilisée consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus dont les solutions sont connues. Le principe utilisé est toujours celui de superposition des solutions qui, bien évidemment, résulte de l'élasticité linéaire.

Ces solutions sont caractérisées par les facteurs d'intensité de contrainte K_I fonctions de la structure, de son chargement et de la fissure; ils s'expriment en $\text{MPa}\sqrt{m}$.

Les coefficients K_I dépendent à la fois de la structure, par sa géométrie et son chargement, et de la fissure par sa taille, sa forme et sa position.

Ils sont caractéristiques de la singularité de contrainte en pointe de fissure et de la discontinuité de déplacement le long des lèvres de la fissure.

- ❖ La solution de Westergaard-Irwin-Williams [24,25]. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déplacements au voisinage de la pointe de la fissure admettent un asymptotique dont le terme singulier est donné par :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (\text{I.7})$$

Où σ_{ij} est le tenseur de contrainte, k est le facteur d'intensité de contrainte. Il dépend de la longueur de la fissure, de la géométrie et des forces appliquées, r est la distance radiale de la fissure, et f_{ij} est une fonction de θ , l'angle du plan de la fissure.

$$K_I = \sigma_{app} \sqrt{\pi a} \quad (\text{I.8})$$

Les FIC caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure.

La (Figure I.18) représente la variation de la contrainte devant la pointe de la fissure, la solution de Westergaard et al. [26] implique que les contraintes approchent l'infini si r tend vers zéro (la singularité), le facteur d'intensité de contrainte est donc un constant qui permet de mesurer la singularité des contraintes à r et θ donnés.

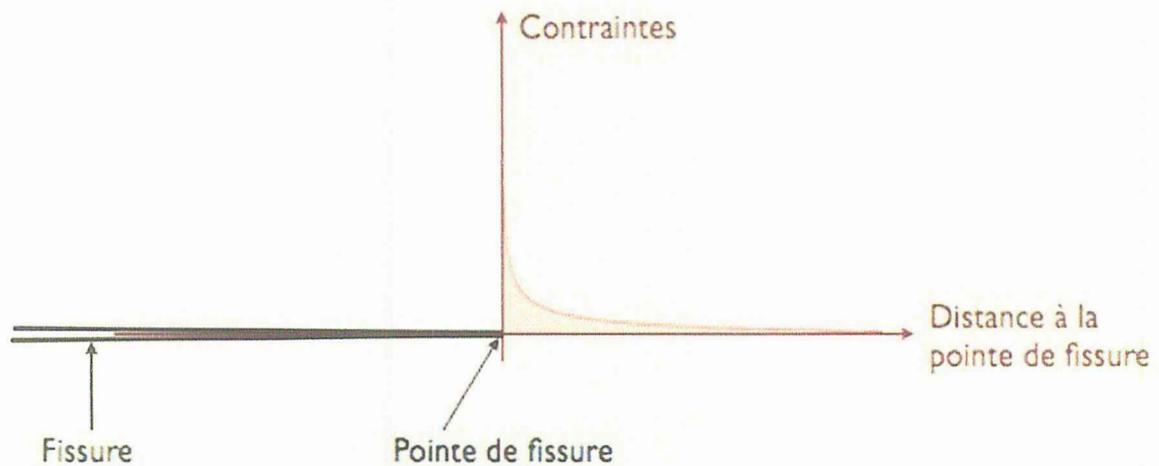


Figure.I.18: La variation de FIC.

La remarque la plus importante de l'analyse de Westergaard et al.[26] c'est que toutes les neuf composantes du tenseur de contrainte, ainsi que toutes les composantes du tenseur des déformations, sont entièrement définies par un seul constant, autrement dit, si k est connu pour une situation donnée, toutes les contraintes et les déformations à la proximité de la pointe de la fissure peuvent être calculées à partir de l'équation (1.7).

I.9.2. Analyse asymptotique

On considère un matériau homogène et isotrope dont le comportement est élastique linéaire. On note λ et μ ces coefficients de Lamé, E son module d'Young et ν son coefficient de Poisson. Sauf mention contraire explicite, les phénomènes étudiés seront bidimensionnels. Conformément à la (Figure I.19), on se place dans le plan (O, x_1, x_2) , plan de symétrie de la fissure. L'axe (O, x_1) est tangent au plan de la fissure et normal au front.

L'axe (O, x_2) est perpendiculaire au plan de la fissure. On définit également les coordonnées locales (r, θ) . Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le plan (O, x_1, x_2) , on a :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

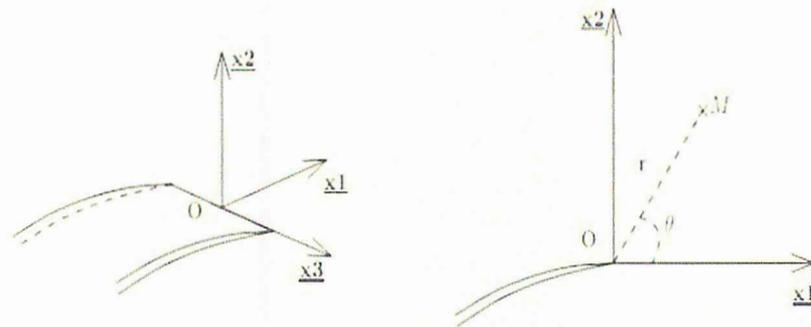


Figure.I.19: Définition du repère locale au voisinage du front d'une fissure.

Au voisinage immédiat du front, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$ et on caractérise cette singularité à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes (K_I, K_{II}) définis par Irwin(27). En élasticité plane, l'approche de Westergaard (28), reprise dans les ouvrages de Tada et al (29) et Bui (1978), permet d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les déplacements et les contraintes au voisinage du front.

I.9.3. Champs de contrainte et déplacement

On donne les résultats correspondant successivement aux modes I, II, III

Où r et θ sont les coordonnées polaires d'un point P par rapport au front de fissure (Figure I.20). Ainsi la singularité du champ de contraintes est connue dès que l'on connaît l'expression des F.I.C. [30]

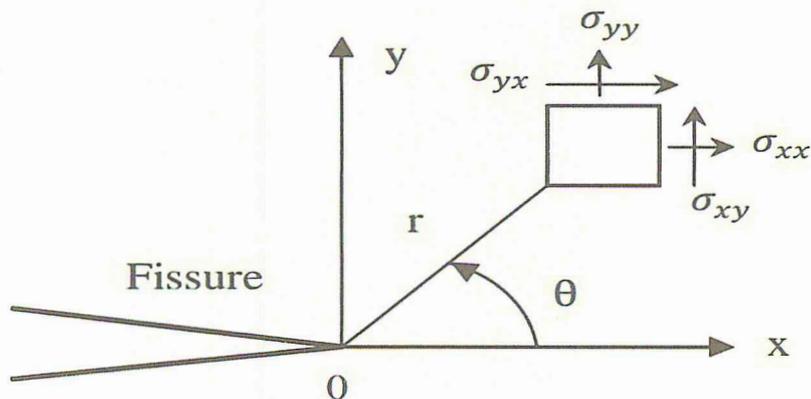


Figure.I.20: champ des contraintes au voisinage de la fissure.

Mode I

Contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{I. 9}$$

$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$, en déformation plane

$\sigma_{zz} = 0$, en contrainte plane

Déplacements :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K_I}{2u} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(k - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ u_y &= \frac{K_I}{2u} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{I. 10}$$

$k = 3 - 4\nu$. en déformation plane

$k = \frac{3-\nu}{1-\nu}$, en contrainte plane

Mode II

Contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{I. 11}$$

$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$, en déformation plane

$\sigma_{zz} = 0$, en contrainte plane

Déplacements :

$$u_x = \frac{K_{II}}{2u} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(k + 1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (I.12)$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{2u} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(-\cos \frac{\theta}{2} \right) \left(k - 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Mode III

Contraintes :

$$\sigma_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (I.13)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}$$

Déplacements :

$$u_z = \frac{2K_{III}}{u} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (I.14)$$

I.9.4. pricipe de superposition

Cette méthode, la plus couramment utilisé, consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus et dont les solutions se trouvent dans certains Handbooks Murakami et al (31). Le principe utilisé est celui de la superposition des solutions, qui résulte de l'élasticité linéaire.

Supposons un solide bidimensionnel fissuré soumis à différents efforts : charges ou moments imposés. Si la solution n'existe pas, il est possible de décomposer le problème en deux parties [32].

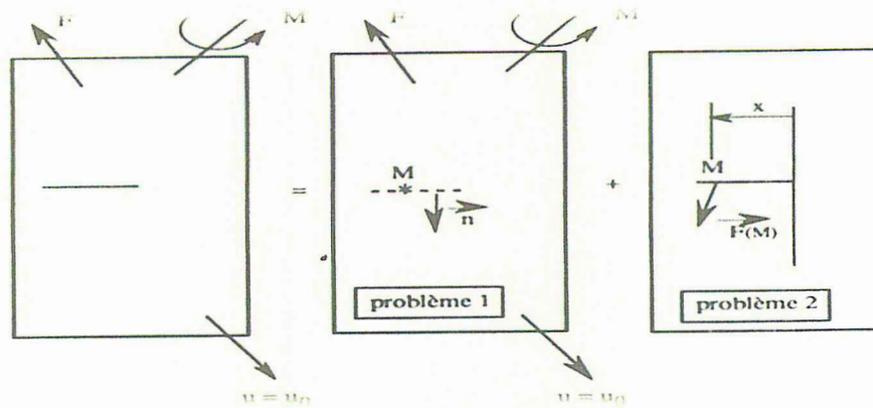


Figure.I.21: application de la méthode de superposition.

On cherche tout d'abord la solution du problème sans fissure avec les mêmes conditions aux limites (problème1). Cela permet de connaître, en tout point, la distribution des contraintes et des déformations. A tout point M, sur les lèvres de la fissure, on associe une force $F(M)$ telle que :

$$F(M) = \sum_j \sigma_{ij} n_j \quad (I.15)$$

Où n est le vecteur normal au plan de la fissure et tourné vers celle-ci. Cette force peut, elle-même, être décomposée en trois parties :

$F_I(M)$: Force normale au plan de la fissure.

$F_{II}(M)$: Force dans plan et parallèle au plan de la fissure.

$F_{III}(M)$: Force normale au plan du problème.

On ajoute alors la solution du problème 2 qui est le suivant. Avec des conditions aux limites de déplacements ou de forces nulles sur le contour extérieur : trouver le facteur d'intensité de contrainte pour une fissure soumise à un chargement $F(M)$.

La solution de ce problème peut être connue pour certaines formes particulières de la fonction $F(M)$; par exemple $F(M)$ constant, linéaire, parabolique.

On peut alors approcher la fonction $F(M)$ par un polynôme $F(M) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots$

où x est la distance du point M à la pointe de fissure considérée. Cela conduit à une solution de la

forme : $A_0K_{I0} + A_1K_{I1} + A_2K_{I2}$ où $K_{I0,I2,I3}$ sont les solutions pour les distributions élémentaires $F(M) = 1, x, x^2$, respectivement.

I.9.5.Méthode des fonction de poids :

On recherche la valeur de K_I produit par une force unité, placée à une distance x de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution $f(x)$, on peut alors écrire :

$$K_I = \int_{fissure} f(x)k(x) dx \tag{I.16}$$

La fonction $k(x)$ s'appelle fonction de poids . Elle est bien établie pour certains cas particuliers, et répertoriée dans certains Handbooks. L'avantage d'une telle méthode est qu'elle ne nécessite qu'un seul calcul de structure. Malheureusement, on reste limité aux géométries qui existent dans les tables.

I.9.6.L'intégrale de contour J :

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie Eshelby et al [33]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connus, on peut citer l'intégrale J de Rice [34].

Pour l'intégrale de Rice, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne, le contour C est un contour ouvert (Figure.I.22) orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

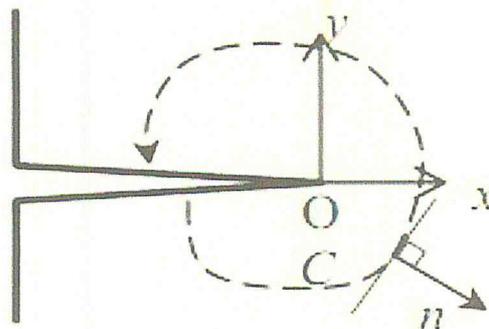


Figure.I.22 : Contour-J d'intégration.

$$J = \int_C \left(W_e(\varepsilon) n_1 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (I.17)$$

Où W_e est la densité d'énergie de déformation élastique telle que $\sigma_{ij} = \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon_{ij}}$, u est le vecteur déplacement en un point M du contour C avec la normale n tournée vers l'extérieur et σ représente le champ de contraintes.

L'intégrale J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle (pour la LFEM) :

$$J = \frac{\partial W_p}{\partial A} = G \quad (I.18)$$

I.9.7. Le taux de restitution d'énergie :

Noté G , le taux de restitution d'énergie [35] représente l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité, il correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a à une autre où la fissure est propagée d'une longueur da :

$$\begin{cases} G = -\frac{\partial W_p}{\partial A} \\ W_p = W_e + W_{ext} \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} W_e = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \\ W_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot u \end{cases} \quad (I.19)$$

Où W_e représentent l'énergie de déformation élastique, W_{ext} l'énergie potentielle des forces extérieures f , et ∂A l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

Irwin [24] a montré que les approches énergétiques et celles basées sur l'intensité de contrainte sont équivalentes, en utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie avec les facteurs d'intensité de contrainte :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} \quad (I.20)$$

$$\begin{cases} E' = E & \text{en contrainte plane} \\ E' = \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{en déformation plan} \end{cases}$$

Où E est le module de Young et ν le coefficient de poisson. K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte (I et II respectivement).

I.10. La relation entre Taux de restitution d'énergie et facteurs d'intensités de contrainte FIC :

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes par :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2u} \quad \text{Ou} \begin{cases} E' = E & \text{en contrainte plane} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformation plan} \\ u = \frac{E}{2(1+\nu)} & \text{est le module de cisaillement} \end{cases} \quad (I.21)$$

Ou E est le module d'Young et ν le coefficient de poisson.

Remarque : il est également possible de relier G à la complaisance C de la structure par

$$G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A}$$

Sur la courbe Force / Déplacement ci-contre, OA correspond à une fissure de longueur a, et OB à une fissure de longueur a+ δa . G représente l'aire située dans le triangle OAB pour un essai effectué à charge imposée à charge imposée ou dans le triangle OAC pour un pilotage en déplacement imposé.

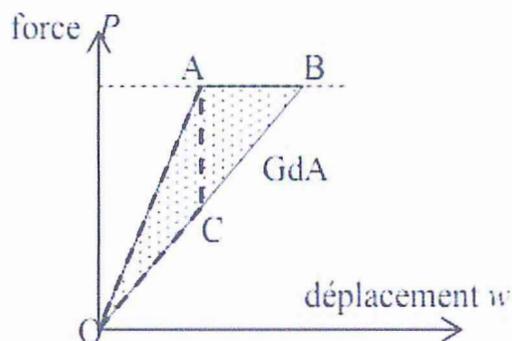


Figure.I.23: Relation entre G et la complaisance de la structure.

Conclusion :

Le comportement à la rupture d'une structure fissurée peut être décrit soit par l'approche globale basée sur un bilan énergétique soit par l'approche locale basée sur le champ de contraintes en pointe de fissure. Dans l'hypothèse du comportement élastique linéaire, les différentes expressions du taux de restitution d'énergie permettent, d'une part, d'avoir des relations avec le facteur d'intensités de contrainte et d'autre part, une caractérisation expérimentale simple. Si ces deux paramètres (K et G) sont essentiels pour la mécanique de la rupture, elles ne restent valables que pour un comportement élastique linéaire. Cependant, la prise en compte du comportement réel des structures est nécessaire pour définir d'autres paramètres de rupture tenant compte de l'effet de la plasticité.

CHAPITRE II

LA MÉTHODE DES

ÉLÉMENTS FINIS

ÉTENDUS (XFEM)

II.1. Introduction

La MEF est apparue en premier et elle se base sur l'interpolation d'un champ de déplacement ou de force pour transformer un milieu discret par sous domaine ou élément fini. La partition du domaine en sous domaine de plus en plus serré permettait d'arriver à une solution acceptable. Elle a été utilisée en premier pour analyser la fissuration avec quelques difficultés. La 2^{ème} méthode appelée éléments finis étendus (X-FEM) basée comme son nom l'indique essentiellement sur une modification de la MEF consistant à utiliser un enrichissement de la cinématique du milieu continu (des fonctions de formes). Elle permet de combler l'insuffisance de la MEF à analyser la propagation de la fissuration. Mais d'abord on prendra une idée générale sur la modélisation numérique de la fissuration.

La simulation numérique en mécanique de la rupture est essentiellement basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Classiquement, pour un problème de propagation de fissure, un premier calcul est réalisé sur un maillage initial, puis un nouveau maillage est déterminé en prenant en compte l'avancée de la fissure suivant la loi de propagation choisie. Un nouveau calcul s'en découle, et le procédé est itéré pour chaque pas de propagation.

Un inconvénient majeur et immédiat est la nécessité de remailler à la chaque pas de propagation [36]. Le processus de remaillage peut être facilement automatisé en 2D, et dans certains cas en 3D, mais un remaillage 3D de qualité s'avère coûteux en temps et en argent. En effet avec un meilleur automatique, un raffinement local approprié au niveau de la zone de fissuration entraîne souvent un nombre excessif d'éléments partout sur le reste de la structure. Un processus de raffinement est généralement utile, solution performante mais nécessitant une intervention humaine coûteuse ; et ce d'autant plus que la forme géométrique de la fissure est complexe (fissures hélicoïdales par exemple). Le problème de la réalisation du maillage devient quasi-inconcevable lorsque plusieurs fissures 3D coexistent au sein d'un même maillage. En plus de ces difficultés pratiques, la projection de grandeurs (contraintes, variables internes) d'un maillage à l'autre pose des problèmes théoriques fondamentaux (vérification des équations de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, de la masse). Parallèlement aux difficultés liées à la propagation, les méthodes avec maillage s'avèrent peu efficaces pour des études paramétriques ou l'on s'intéresse à l'influence de la position et de la forme de la fissure. [37]

La fissuration est simulée par une méthode numérique à l'aide d'analyses successives. Une première analyse résout les équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement du solide fissuré en tenant compte des charges appliquées et des déplacements imposés pour obtenir une estimation des déplacements, déformations et contraintes en tout point de ce solide. L'intensité et la variation de ces champs à proximité du front de fissure sont ramenées à quelques grandeurs caractéristiques qui sont introduites dans le modèle de fissuration choisi pour obtenir la direction et la longueur de propagation de la fissure. En mécanique linéaire de la rupture par exemple, ces grandeurs caractéristiques sont les trois facteurs d'intensité de contrainte. En ajoutant l'incrément de fissure prédit par le modèle au front de fissure, nous obtenons une nouvelle fissure, qui est la nouvelle frontière interne pour l'analyse suivante qui donnera les nouveaux champs de déplacement, déformation et contrainte et ainsi de suite.

II.2. Méthodes d'enrichissement traitant de la fissuration

Le traitement de la fissuration a fait l'objet de plusieurs travaux spécifiques permettant de répondre aux difficultés posées par la propagation de fissure. La première, d'ordre technique, concerne les difficultés dues aux processus de maillage et du remaillage au cours de la propagation. Cette difficulté est induite par l'utilisation de la méthode des éléments finis qui reste aujourd'hui la méthode de simulation la plus répandue dans le milieu industriel. Elle provient du fait qu'une fissure ne peut se propager que le long des bords des éléments. En d'autres termes, le maillage doit être conforme à la géométrie de la fissure. La deuxième difficulté concerne la description correcte des champs singuliers en pointe de fissure. Cette singularité est en effet difficile à représenter avec des éléments finis classiques. Néanmoins, les lois de propagation de fissure s'alimentent de données locales en pointe de fissure telles que les contraintes et les déformations pour prédire la direction de propagation. Dans cette partie, conscient de l'intérêt très marqué des industriels pour la méthode des éléments finis, nous présenterons essentiellement des approches qui ont été issues. Mais d'autres approches permettent de répondre à la question telle que la méthode des équations intégrales appliquée à la fissuration par (k, Hocine) en 1998 (7).[38]

Trois approches de philosophie différente sont présentées dans cette partie. La première approche est celle de Tong et Pian en 1973. Afin de mieux décrire la solution en pointe de fissure, ils proposent un élément fini hybride spécifique pour les problèmes plans de mécanique élastique linéaire de la rupture. Les deux autres approches sont basées sur l'enrichissement de la cinématique du milieu continu qui permet d'introduire une discontinuité dans le champ de déplacement. Ainsi, la méthode de la partition de l'unité (PUM) introduite

par Melenk et Babuska propose une façon d'augmenter l'espace d'approximations de la solution et a donné lieu à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) Belytschko et Black 1999, Moes et al 1999 et à celle des éléments finis généralisées (G-FEM) Strouboulis et al 2000-2001. Enfin, l'approche des fortes discontinuités (SDA) Oliver et al [39] prend en compte un saut de déplacement au sein de chaque élément suivant le concept « d'enhanced assumed strain ».

II.3. Méthodes « classiques basées sur les éléments finis (FEM)

II.3.1. Historique de méthodes des éléments finis (FEM)

❖ Méthode d'approximations :

- Fonctions de basse sur tout le domaine : Ritz 1908, Galerkin 1915.
- Fonctions de bases locales : Courant 1943

❖ Méthode de calcul :

- Approches énergétiques : Navier 1819, Maxwell-Castigliano 1870
- Développement systématique des approches énergétiques : Levy

1947, Garvey 1951

- Développement des approches matricielles

❖ Méthode des éléments finis :

- Unification des deux méthodes : Argyris 1955
- Développement systématique, vulgarisation et utilisation industrielle : Zienkiewicz 1960.

Depuis son introduction dans les années cinquante, la méthode numérique basée sur les éléments finis a largement été utilisée dans la résolution des problèmes de mécanique de la rupture. On citera par exemple les travaux de Newman & Strathmeier utilisant des éléments de bouts de fissures axisymétriques, les travaux de Yoshimura et al. Le relâchement de nœuds

Cette méthode, illustrée par la (figure II.1), consiste à bloquer les nœuds du ligament d'une fissure tant qu'ils ne sont pas rompus. Lorsqu'un critère de rupture est satisfait, on en déduit la nouvelle position de la fissure, et on relâche les nœuds correspondants.

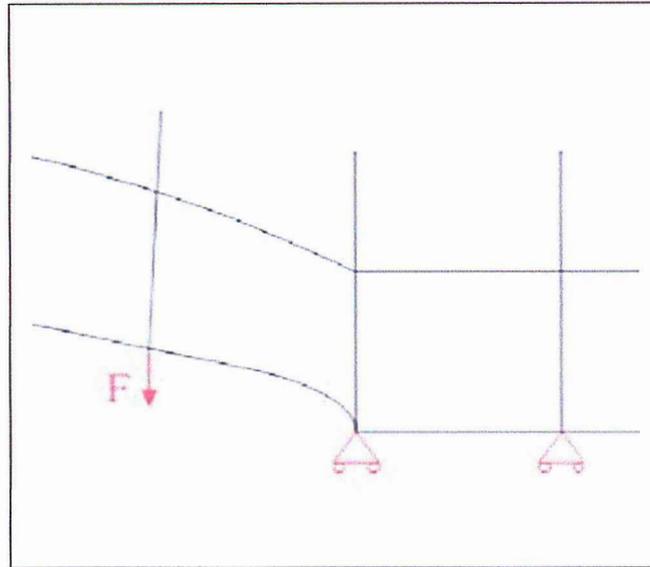


Figure.II.1: Méthode du relâchement de nœud.

Il existe plusieurs manières de relâcher les nœuds :

- ✓ Le relâchement instantané est le schéma le plus simple.
- ✓ Le schéma qui consiste à imposer la force de décroître linéairement dans le pas de temps est sans doute le plus répandu.

Enfin, il existe d'autres variantes du schéma précédent. Par exemple, Malluck et al propose un schéma où on impose à la force de décroître de manière à maintenir le facteur d'intensité des contraintes K constant durant le pas de temps.

Cette méthode nécessite la connaissance préalable du trajet de fissure et impose à la pointe de fissure de se situer sur un nœud. Elle permet de simuler des ruptures en 2D, mais est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre en 3D lorsque le front de fissure n'est pas rectiligne.

II.3.1.1 Méthodes de remaillage

Pour avoir une bonne idée des champs à proximité du front de fissure, il faut conserver un maillage suffisamment fin lors de la propagation. C'est pourquoi, partant de cette idée, il semble nécessaire de remailler la fissure lors de sa propagation. Les algorithmes de remaillage sont souvent complexes et délicats à mettre en œuvre. On peut extraire deux principales sources d'erreur.

D'abord, après une opération de remaillage, il est nécessaire de projeter les champs de la solution du pas précédent sur le nouveau maillage. Comme les solutions discrétisées sur

différents maillages ne sont pas les mêmes, une simple projection ne conduit pas à des champs en équilibre. Une étape supplémentaire de rééquilibrage est donc souvent introduite en prenant garde à conserver fermée la surface de fissure fraîchement introduite par le remaillage. Malheureusement, cette étape de rééquilibrage ne garantit pas la conservation de l'énergie mécanique du système pendant la projection.

Ensuite, tout comme pour la méthode de relâchement de nœud, il est nécessaire de libérer la nouvelle surface de fissure.

Finalement, ces opérations de projection et de relâchement modifient l'énergie du système discret de manière purement numérique.

L'utilisation d'éléments finis espace-temps peut aussi être considérée comme une variante des méthodes de remaillage puisque la discrétisation de la géométrie varie au cours du temps. Le principe de ces éléments est de considérer le temps de la même manière que les variables d'espace, et de remplacer les traditionnels schémas temporels basé sur les différences finies par des approximations de type éléments finis, ou même par des formulations de type Galerkin discontinu. L'avantage principal de ce type de formulation réside dans la capacité à raffiner le maillage où et quand on juge nécessaire de faire grâce à un indicateur de la solution. Comme cela est illustré par la (Figure. II.2), le front d'une onde élastique et la pointe de fissure requièrent une finesse de maillage localement plus élevée que dans le reste de la structure.

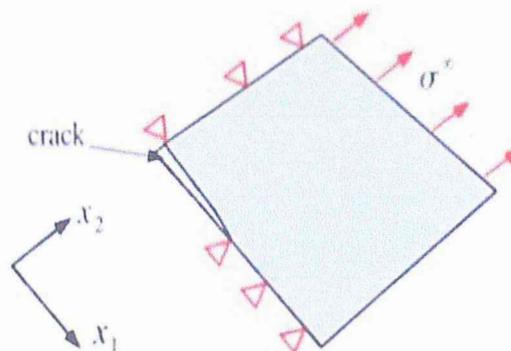


Figure.II.2: Méthode des éléments finis : Exemple de calcul d'une plaque fissurée fixe soumise à un chargement brutal de traction

II.3.1.2. Elimination d'éléments (« Élément délétion méthode »)

Cette méthode consiste à attribuer une valeur proche de zéro au module d'Young des éléments satisfaisant un critère de rupture donné. Suivant les logiciels la masse correspondante est elle-aussi éliminée ou pas. Cette méthode simple à mettre en œuvre et très utilisée dans le milieu industriel est également très grossière. Comme l'a récemment montré Song et al, l'énergie consommée par l'avancée de la fissure dépend de la taille de maille. En effet, lors de la propagation, on annule l'énergie d'un élément ; donc si on augmente le volume des éléments, on dissipe plus d'énergie. Afin d'atténuer cette dépendance à la taille de maille, les autres ont utilisé une loi de comportement élastique en dommageable modifiée en faisant dépendre la déformation à la rupture du taux de restitution d'énergie, de la taille et du volume de l'élément. La comparaison effectuée par ces auteurs sur plusieurs cas test entre la présente méthode (« élément délétion méthode »), la méthode des éléments cohésifs (« internelement méthode »), et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) est présentée en détail après dans ce chapitre.

II.3.1.3. Méthode des éléments cohésifs

Les modèles d'interface en dommageable (dits de zones cohésives) sont basés sur le modèle de Dugdale-Barenblatt. Ce dernier suppose l'existence d'une zone de transition d'une longueur caractéristique en pointe de fissure à l'intérieur de laquelle la séparation des surfaces est progressive (Figure.II.3). La loi de comportement à l'intérieur de cette zone d'épaisseur nulle définit le modèle de la zone cohésive, et consiste en générale en une relation liant les contraintes d'ouverture avec elle-même. L'aire sous la courbe représente le travail dissipé par l'ouverture des lèvres identifié comme le taux de restitution d'énergie. [38]

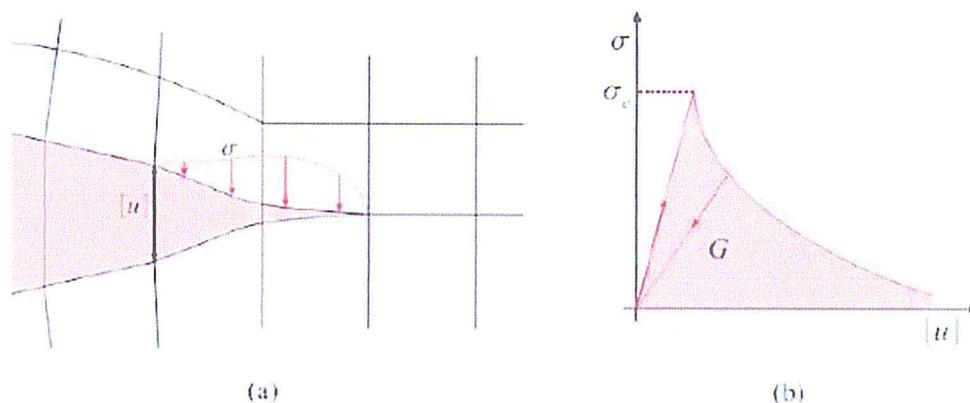


Figure.II.3: Modèle de zone cohésive. (a) Maillage. (b) loi de comportement

Intellectuellement très intéressante, cette méthode possède néanmoins quelques inconvénients. D'abord, elle introduit un élément d'épaisseur nul, mais de rigidité fini, qui modifie la rigidité globale de la structure, ce qui, en dynamique, perturbe le trajet des ondes mécaniques. De plus, il faut connaître le trajet de la fissure a priori. L'argument le plus souvent reproché à ce modèle est le fait qu'il introduit une dépendance au maillage. Ceci a été démontré par Xu et Needleman en introduisant des éléments cohésifs entre tous les éléments, et plus récemment par Zhou et Molinari. La direction de propagation montre alors une forte dépendance à la construction du maillage en termes d'orientation et de taille des éléments.

Une première évolution de cette méthode est celle que proposent Camacho, Pandolfi et Ortiz et Zhou et Molinari. Les auteurs n'introduisent de zones cohésives qu'aux bords des éléments qui vérifient un critère de rupture ou qui sont situés dans le prolongement immédiat de la fissure préexistante.

II.3.2. Méthodes non basée sur les éléments finis

II.3.2.1. Méthode des éléments de frontières (BSF)

Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis une vingtaine d'années, elle présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière du domaine et non de l'intérieur. Le travail de remaillage entre chaque étape est donc minime puisqu'il suffit d'ajouter un ou quelques éléments sur les incréments de fissure.

Dans cette méthode, les équations aux dérivées partielles sont transformées en des équations intégrales sur la frontière par le biais d'une certaine solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. Cette méthode n'est applicable que si une telle solution existe, ce qui n'est pas le cas des problèmes élastoplastiques. Pour ces problèmes, un maillage de la zone plastifiée est nécessaire, ce qui fait perdre une grande partie des avantages de la méthode. Les articles sur ce sujet sont nombreux, comme par exemple Portela, Aliabadi et Rooke (1991) et Yan et Nguyen Dang (1995) pour la fissuration à deux dimensions et Mi et Aliabadi (1993) à trois dimensions.

II.3.2.2. Méthodes sans maillage

Parmi les méthodes sans maillage, la méthode SPH « Smoothed Particule Hydrodynamics » et la méthode « Element Free Galerkin method » sont certainement les plus utilisées. Ces derniers sont munis de fonctions poids non nulles une zone d'influence qui peut contenir d'autres nœuds.

II.3.3. Méthodes basées sur la partition de l'unité

II.3.3.1. La partition de l'unité (PUM)

Le concept de partition de l'unité « Partition of Unity Method » a été introduit par Babsuka et Melenk. Les auteurs cherchent à améliorer la qualité de la solution fournie par la méthode des éléments finis non pas en raffinant le maillage, mais en injectant dans la base de fonctions utilisée pour approximer le problème des fonctions à priori proches de la solution attendue. Cette méthode s'applique donc particulièrement bien à tout problème présentant une singularité ou une couche limite dans sa solution.

Mathématiquement, une partition de l'unité de l'espace Ω est un ensemble de fonctions $\{N_i\}$ qui vérifie notamment la propriété essentielle rappelée par l'équation (II.1) :

$$\sum_i N_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{II.1})$$

Si $\{\Phi_i, p\}$ constitue une base de fonctions dont on espère être une bonne approximation locale, on peut construire et ajouter à l'approximation l'ensemble de fonctions $\{N_i, \Phi_i, p\}$. Il faut tout fois être prudent car rien ne garantit que cet ensemble de fonctions soit une base, et l'existence de deux fonctions trop proches peut conduire à un mauvais conditionnement de la matrice à résoudre. Si cet ensemble constitue une base de fonctions indépendantes, alors on peut enrichir l'approximation de la manière suivante :

$$U(x) = \sum_i N_i(x)u_i + \sum_{i,p} N_i(x)\Phi_{i,p}(x)a_{i,p} \quad (\text{II.2})$$

Cette équation (II.2) permet de se rendre compte que la fonction $\Phi(x)$ peut être exactement représentée grâce à la présence de la base de fonctions enrichis.

En pratique et pour des raisons de cout de calculs, on limite l'introduction de fonctions de la base d'enrichissement aux sous-domaines Ω_i , $i \in I\Phi$ ou cela est nécessaire. $I\Phi$ représente par exemple l'ensemble des nœuds des éléments appartenant à la zone que l'on souhaite enrichir. Ainsi on crée une couche d'éléments de transition pour lesquels une partie seulement des nœuds est enrichie et qui ne vérifie donc plus vraiment la propriété de partition de l'unité. Chessa que le traitement de cette zone de transition a des conséquences sur l'ordre de convergence de la méthode. L'auteur propose de masquer l'influence des fonctions

d'enrichissement en éliminant les termes indésirables introduits par les fonctions d'enrichissement dans cette couche d'éléments de transition. Ferhat propose également un moyen de s'affranchir de cette zone de transition. L'auteur sépare l'espace enrichi du reste du domaine et impose la continuité des champs aux frontières entre ces deux sous-domaines avec des multiplicateurs de Lagrange.

II.3.3.2 Méthodes des éléments finis étendue (XFEM)

Plus récemment, des formulations de la FEM mieux adaptées aux problèmes de la mécanique de la rupture ont été développées. La méthode des éléments finis étendus plus connue sous le sigle XFEM (pour eXtended Finite Element Method) et parfois appelée méthode des éléments finis généralisée, elle est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999. Elle se base sur la méthode des éléments finis avec un maillage normal en remplaçant les éléments qui sont coupés par une fissure par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de celle-ci. La propagation est simulée en remplaçant les éléments nouvellement traversés par une fissure par un élément spécial.

II.3.3.3. Autres méthodes utilisant la partition de l'unité

Le concept de partition de l'unité permet l'introduction d'une fonction arbitrairement discontinue dans le champ de déplacement. Il ouvre ainsi la porte à une nouvelle approche de la modélisation des phénomènes de rupture. Dans ce cadre, on distingue classiquement :

- La modélisation du volume ('the continuum').
- La modélisation de la zone de rupture ('the discontinuous part').

Ainsi, les modèles classiques de mécanique des milieux continus (élastique, plastique, viscoplastique, en dommageable,...) s'appliquent directement au volume, tandis que le traitement de la fissure est réalisé avec la méthode de partition de l'unité en :

- Ajoutant simplement des fonctions 'saut' lorsqu'un critère de rupture est vérifié.
- Introduisant un segment cohésif qui coupe de manière arbitraire un élément qu'un critère désigne comme rompu.

II.4.Méthode des éléments finis

II.4.1. Généralités

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie. Elle connaît, depuis 1970 environ [40], une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voir familier, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

II.4.2.Avantage de la méthode des éléments finis

- On peut représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide du modèle analytique général commun.
- La faculté de définir des maillages très irréguliers et depuis l'origine est l'un des grands avantages de la méthode des éléments finis.
- On peut accepter des lois complexes de propriétés intrinsèques des matériaux si on compare aux possibilités des méthodes classiques de résolution, et offrent plus vastes perspectives en analyse non linéaire.

II.4.3.Procédures de base de la méthode des éléments finis

Les différentes étapes pour l'application de la méthode des éléments finis seront décrites d'une manière générale.

- **Choix du type d'élément et discrétisation**

La première étape consiste à choisir le type d'élément le plus adapté au problème donné, ensuite on discrétise le milieu continu en un certain nombre d'éléments. En générale, les points suivants sont à prendre en considération dans la sélection du type d'élément.

- **Type d'élément**

La sélection de l'élément sera fonction du type de problème à résoudre, généralement :

Ils sont groupés en quatre classes :

1. Les contraintes planes, les déformations planes ; axisymétriques (problème à deux dimensions).
2. La flexion des plaques.
3. Les coques.
4. L'analyse des solides tridimensionnels.

*On distingue plusieurs classes d'éléments finis suivant leur géométrie :

- ❖ Les éléments unidimensionnels (1D) : sont utilisés de façon individuelle ou associée des plaques pour modéliser les raideurs. Exemple : barre, poutre rectiligne ou courbe.
- ❖ Les éléments bidimensionnels (2D) : Elasticité plane déformation ou contrainte plane). Exemple : plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.
- ❖ Les éléments tridimensionnels (3D) : élément de volume, ou coques épaisses.
Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière.

*Dans chaque groupe des différents niveaux de précision peuvent être atteints. Ceci dépend du nombre de degrés de liberté associée avec le type d'élément. Les points nodaux se trouvent généralement sur les frontières des éléments bien que des nœuds internes peuvent aussi être inclus dans certains éléments pour augmenter leur efficacité. Généralement, avec l'augmentation de l'ordre de l'élément, celui-ci devient plus précis et plus coûteux. Cependant certaines conditions doivent être satisfaites dans la sélection du type d'élément pour assurer une bonne convergence (Convergence vers la solution exacte). Ces conditions sont :

*le champ des déplacements à l'intérieur de l'élément doit être continu.

*Le modèle du déplacement doit inclure un état de déformation constante (L'élément doit être capable de reproduire un champ de déformation constant, si les déplacements nodaux le requièrent).

*L'élément doit être capable de reproduire un mouvement de corps rigide : par exemple quand les degrés de liberté nodaux correspondent à un mouvement de corps rigide, l'élément doit avoir une déformation égale à zéro et des forces nodales nulles. Ceci est cas particulier du critère de la déformation constante.

*L'élément doit être compatible, il ne doit pas y avoir de vide entre deux éléments. L'élément qui ne remplit pas cette condition est dit incompatible ou non conforme. Cependant un élément incompatible peut être valide et sa convergence maintenue si les incompatibilités disparaissent en augmentant le maillage et si l'élément se rapproche d'un état de déformation constante.

*L'élément n'a pas une direction privilégiée, c'est-à-dire que l'élément doit être géométriquement invariant et donne les mêmes résultats pour n'importe quelle orientation de l'élément.

- **Taille de l'élément**

En général plus le maillage est fin plus les résultats obtenus sont meilleurs, mais en même temps un grand effort de programmation est requis. Le nombre d'éléments utilisés sera la fonction du type de la structure à analyser, mais généralement plus d'éléments sont requis dans les régions où les contraintes varient rapidement que dans les régions où elles varient graduellement. Cependant pour les éléments complexes les maillages grossiers donneront des résultats aussi bons que ceux des maillages fins ayant des éléments simples.

II.4.4. Les différentes formulations de la méthode des éléments finis

En général, le principe de toute méthode de discrétisation consiste à remplacer un milieu continu (structure) comportant une infinité de modes de déformations ou de tensions par un milieu idéalisé ne possédant qu'un nombre fini de tels modes.

On va alors définir une approximation de la solution (déplacement et/ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la rupture, mais pour chacun de ses éléments en les réduisant à un petit nombre de mode décrits par des fonctions simple. Ils sont choisis parmi les plus fondamentaux pour la description du comportement de l'élément dans la structure.

La structure entière est donc idéalisée par un nombre fini de modes qui transmet entre chaque élément de manière bien précise. Les inconnues du problème sont alors les paramètres qui représentent l'intensité de chaque mode.

Il existe plusieurs manières d'approcher un système réel, cette approche consiste à formuler un champ qui porte sur tout le système ou une partie de celui-ci, les différentes formulations existantes sont les suivantes.

- **Formulation en déplacement**

C'est une formulation selon laquelle l'approximation est faite sur le champ de déplacements de façon que l'intégrabilité du champ de déformations soit assurée à l'intérieur de l'élément. L'élément est dit "cinématiquement admissible".

Cette condition est automatiquement réalisée lorsque le champ de la déformation est déduit à un champ de déplacement continu et éventuellement différentiable.

Si la continuité du champ de déplacement est vérifiée aux surfaces de séparation des éléments, le modèle est dit **Co-déformable ou compatible**.

Il existe un autre groupe d'éléments où l'on satisfait plus que les conditions de compatibilité, ce modèle est alors dit **sur-conforme ou sur-compatible**.

En général, dans ce modèle, on assure au moins la continuité au nœud du tenseur complet des déformations, y compris le changement des courbures.

➤ **Formulation équilibre**

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de tension de façon que les équations d'équilibres soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément.

➤ **Formulation hybride**

Dans cette formulation, le plus souvent on définit la solution en termes d'approximation, d'une part du champ de contraintes interne en équilibre, d'autre part de déplacements sur la frontière de l'élément.

➤ **Formulation mixte**

Dans celle-ci, on définit la solution en terme d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants ; généralement, le champ des déplacements et celui des contraintes, étendues à tout l'élément ; en général cette formulation conserve les paramètres inconnus de tous les champs comme DDL ; sa mise au point peut être longue et coûteuse ; elle peut toutefois être d'excellente qualité.

➤ **Formulation en déformation**

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de déformation de façon telle que les équations de compatibilité et d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacement est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable. Ce modèle est sur compatible.

II.4.5. Formulation des éléments finis

La méthode des éléments finis représente l'extension de la méthode de rigidité pour les portiques à l'étude bidimensionnelle et tridimensionnelle des structures continues (exemple : plaque, coque...etc.).

Dans la méthode des éléments finis, la structure continue est remplacée par une structure idéalisée équivalente composée d'un ensemble d'élément appelé « élément finis », qui est censé relier les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.

On définit de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque « élément fini », qui est censé relier les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.

On définit de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque « élément fini » qui est une approximation du problème. Cette approximation de la fonction choisie par un élément appelé une « interpolation » qui est exprimée en fonction des déplacements aux nœuds.

Il est possible, par l'utilisation des théorèmes de l'énergie, de déterminer la matrice de rigidité qui relie les forces nodales avec les déplacements nodaux d'un « élément fini ». La matrice de rigidité de l'assemblage des éléments est obtenue de la même manière que le cas des portiques (Méthode des rigidités).

Si les conditions d'équilibre sont appliquées, chaque nœud de la structure modélisée, on obtient un système d'équations simultanées résoudre.

II.4.6. Procédure d'analyse par éléments finis

La procédure comporte les étapes suivantes :

- L'idéalisation et la discrétisation de la structure en éléments finis par un maillage constitue de lignes ou de surfaces imaginaires. Les éléments sont supposés reliés en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières.

Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème. Il est apparent que la méthode des éléments finis est applicable pour les structures des matériaux de propriétés hétérogènes ou de formes géométriques compliquées (bords courbes, trous,...).

- On choisit une fonction de déplacement permettant de définir de manière unique le champ des déplacements de ces nœuds. On se basant sur cette fonction de déplacement, nous déduisons- la matrice de rigidité de l'élément qui lie les forces nodales avec les déplacements nodaux et la matrice masse en utilisant le principe des travaux virtuels ou le principe de l'énergie potentielle totale minimale.
- L'analyse de la structure idéalisée de l'assemblage des éléments. Cette analyse procède de la manière classique qui a été décrite par la méthode des rigidités.

En fin la solution de ces équations nous permet d'évaluer les déplacements et les efforts internes dans la structure (contrainte, déformation).

II.4.7. Grandes lignes de la méthode des éléments finis

Les différentes étapes de la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis sont : [4]

1. Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques.
2. Choix de la formulation : Choix des fonctions de base.
3. Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la matrice globale.
4. Calcul du vecteur des forces généralisées : idem.
5. Prise en compte de CL sur les inconnues.
6. Résolution du champ en tout point.
7. Détermination du champ en tout point.
8. Calcul des dérivées sur les éléments.
9. Détermination des réactions des réactions aux limites.

II.4.8. La modélisation des structures fissurées

La méthode des éléments finis a été utilisée sous de nombreuses formes en mécanique de la rupture. Un des problèmes dans la modélisation des structures fissurées est la description géométrique de la fissure ; Dans le cadre de la méthode des éléments finis, elle est décrite explicitement et fait partie intégrante des frontières du maillage.

Suivant le type de fissure que l'on cherche à étudier, diverses solutions sont envisageables.

II.4.9. Modélisation des fissures par la méthode des éléments finis

Avec cette méthode, le maillage doit tenir compte de fissure : celle-ci doit être positionnée sur des interfaces entre les mailles, et le fond de fissure sur un nœud du maillage. Au voisinage du fond de fissure, la mécanique de la rupture prédit que le champ de contrainte tend vers l'infini. Cette description est peut-être discutable physiquement, mais mathématiquement cela implique que le déplacement devient singulier près du fond de fissure.

Le taux de convergence d'une méthode numérique dépend principalement du degré des fonctions de forme utilisées et de la régularité de la solution exacte. Signalons que la présence de cette singularité empêche généralement que le taux de convergence optimal de l'élément fini soit atteint. Par exemple, en élasticité bidimensionnelle, avec des éléments finis, une solution suffisamment régulière permet d'obtenir une erreur en norme de l'énergie homogène à $O(h)$ (ou h désigne le pas de maillage). La présence d'une fissure fait descendre ce taux à $O(\sqrt{h})$ [41].

Afin de représenter cette singularité le plus précisément possible, il faut raffiner le maillage autour du fond de fissure, ou utiliser un élément spécifique. Pour la deuxième alternative, l'élément de Barsoum est considéré comme une bonne méthode. Il s'agit de construire une "boîte à fissure", constituée d'un carré contenant 8 éléments triangulaires ayant chacun une pointe sur le fond de fissure voir (Figure.II.4) sur ces triangles.

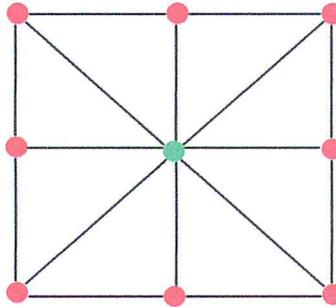


Figure.II.4: Boîte à fissure : les 8 éléments ont un sommet sur le fond de fissure.

Dans un deuxième temps, le déplacement du domaine est calculé, et le taux de restitution d'énergie est déduit, en général au moyen d'un post-traitement. Si celui-ci dépasse l'énergie de cohésion, et que la fissure doit être propagée, alors cette opération est simulée de manière itérative.

Une loi de propagation indique de quelle longueur on prolonge la fissure (il peut aussi être question d'un changement de direction). Il faut ensuite recalculer le taux de restitution d'énergie. Ce qui nécessite de remailler le domaine, et de mettre à jour le raffinement près du fond de fissure ou les éléments spécifiques de fond de fissure. Cette opération de remaillage est coûteuse, et pas toujours facile à maîtriser. Ensuite, il faut recalculer le déplacement, puis le taux de restitution d'énergie. Tant qu'il est supérieur à l'énergie de cohésion on répète cette procédure.

II.4.10. Formulation de la méthode des éléments finis à la présence d'une fissure (cas de dédoublements)

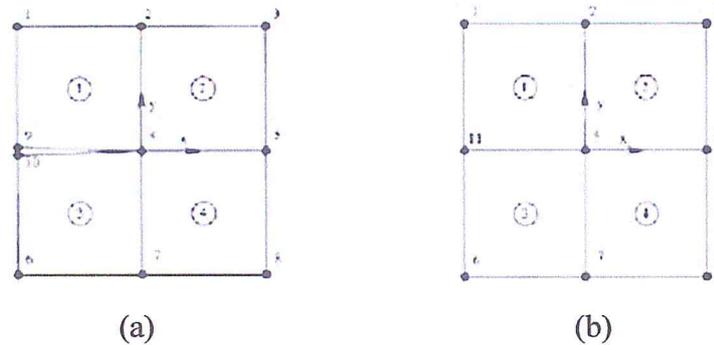


Figure.II.5: Représentation des maillages avec et sans fissure. (a) Élément fini fissuré. (b) Élément fini sain

L'approximation élément fini associée au maillage de la figure 3 est :

$$U = \sum_{i=1}^{10} N_i U_i \tag{II.3}$$

Ou les U_i sont les déplacements aux nœuds i et les N_i sont les fonctions de forme associées aux mêmes nœuds. On peut définir deux variables a et b par :

$$a = \frac{u_9 + u_{10}}{2} \tag{II.4}$$

$$b = \frac{u_9 - u_{10}}{2} \tag{II.5}$$

Qui représentent en fait la valeur moyenne et l'écart par rapport à cette valeur moyenne des déplacements u_9 de part et d'autre de la discontinuité. En faisant de même pour deux autres variables c et d relatives aux déplacements verticaux, nous pouvons exprimer u_9, u_{10} en fonction de a, b, c et d tel que :

$$u_9 = a + b \tag{II.6}$$

$$u_{10} = a - b \tag{II.7}$$

$$v_9 = c + d \tag{II.8}$$

$$v_{10} = c - d \tag{II.9}$$

Ensuite en remplaçant u_9 , u_{10} et v_9 , v_{10} en termes de a , b , c , d dans l'approximation éléments finis, on obtient :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + N_9 (a + b) + N_{10} (a - b) \quad (\text{II. 10})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + N_9 (a + b) + N_{10} (c - d) \quad (\text{II. 11})$$

Si on introduit une fonction de Heaviside telle que :

$$H(x, y) = \begin{cases} +1 \text{ pour } y > 0 \\ -1 \text{ pour } y < 0 \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

On peut alors écrire :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + N_9 (A + Hb) + N_{10} (a - Hb) \quad (\text{II. 13})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + N_9 (c + Hd) + N_{10} (c + Hd) \quad (\text{II. 14})$$

Puisque la fonction de Heaviside sera positive pour les fonctions de forme situées dans les quadrants des y positifs, ce qui est le cas de la fonction de forme N_9 .

Ensuite, en regroupant les termes a , c , Hm et Hd on a :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + a(N_9 + N_{10}) + Hb(N_9 + N_{10}) \quad (\text{II. 15})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 v_i N_i + c(N_9 + N_{10}) + Hd(N_9 + N_{10}) \quad (\text{II. 16})$$

Si l'on regarde maintenant de plus près l'allure des fonctions de forme aux nœuds 9 et 10, ainsi qu'aux nœuds 11 dans le cas du modèle sans fissure, on remarque une chose

intéressante : la fonction de forme N_{11} peut être remplacée par la somme des fonctions de forme N_9 et N_{10} du modèle "sain". On a alors comme expression pour les déplacements :

$$u = \sum_{i=1}^8 u_i N_i + u_{11} N_{11} + H b N_{11} \quad (\text{II. 17})$$

$$v = \sum_i^8 v_i N_i + v_{11} N_{11} + H d N_{11} \quad (\text{II. 18})$$

Ou encore sous forme compacte :

$$u = \sum_{i \in I} u_i N_i(x) + \sum_{i \in L} H(x) a_i N_i(x) \quad (\text{II. 19})$$

Ou I est l'ensemble des nœuds du domaine, et L l'ensemble des nœuds à enrichir le long de la discontinuité.

Cette forme est très proche de celle que l'on aurait prise pour étudier le modèle "sain". La seule différence est l'ajout d'un degré de liberté en plus par dimension. C'est d'ailleurs ce degré de liberté qui par la suite permettra de prendre en compte la discontinuité dans le champ de déplacement.

II.4.11. La défaillance de la méthode des éléments finis dans le calcul des matériaux fissurés

D'autre part, pour le calcul numérique [42] de propagation de fissures, la méthode des éléments finis standard souffre de plusieurs défauts :

Le problème de mise en œuvre, le calcul par éléments finis d'un domaine fissuré nécessite un maillage conforme : la fissure doit être localisée sur les interfaces des éléments, et le fond de fissure doit coïncider avec un nœud du maillage. De plus, au niveau pratique, il faut raffiner près du fond de fissure afin de représenter correctement la singularité (à cause du taux de convergence en \sqrt{h}).

La simulation d'une propagation de fissure étant itérative, après une modification de la fissure il est nécessaire de remailler le domaine, ce qui est une opération coûteuse en temps de calcul et peut poser des problèmes de précision numérique.

Problème de précision : en raison de la singularité en fond de fissure, le taux de convergence n'est pas optimal.

Contraintes au niveau du maillage : celui-ci doit être conforme à la fissure, qui doit ainsi coïncider avec les interfaces entre les maillages. Le fond de fissure doit être sur le nœud du maillage.

Au niveau pratique, ces inconvénients conduisent les utilisateurs de la MEF à devoir définir des maillages très raffinés près du fond de fissure, afin de représenter la singularité la plus fidèlement possible. En cas de prolongement de la fissure, il faut alors mettre à jour le maillage, ce qui est une procédure lourde.

La méthode des éléments finis n'est donc pas bien adaptée à la modélisation de la propagation de fissure, puisque sa mise en œuvre nécessite des opérations de remaillage et de raffinement de maillage assez lourds, qui peuvent être difficiles à maîtriser (le maillage automatique de domaines bidimensionnel complexes n'est pas évident).

II.5. La méthode des éléments finis étendue (X-FEM)

II.5.1. Revue de la littérature

Belyschko et Black [43] ont introduit une nouvelle méthode pour modéliser les fissures et leur propagation par des éléments finis avec un minimum de remaillage. Par cette méthode une fissure arbitraire alignée avec le maillage peut être représentée par l'intermédiaire des fonctions d'enrichissement. L'idée essentielle de cette méthode est d'ajouter des fonctions d'enrichissement de pointe (crack-tip) dans l'approximation, qui contient un champ de déplacement discontinu. La même technique a été développée par Fleming et al [44]. Pour introduire l'enrichissement dans la méthode « Galerkinélément-free » [45]. La méthode exploite la partition de l'unité des éléments finis qui a été développée par Malenk et Babuska[46], à savoir que la somme des fonctions doit être l'unité.[47]

La méthode a ensuite été améliorée par Moes et al [48]. et Dolbow [49] et appelée la méthode des éléments finis étendus (X-FEM : eXtended Finite Element Method). La nouvelle méthodologie a permis à la fissure entière d'être représentée de manière indépendante du maillage et construit le rapprochement enrichi de l'interaction de la géométrie de la fissure avec le maillage. Donc L'idée principale de la méthode des éléments finis étendus consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par : des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure. Cela permet une représentation fidèle des phénomènes physiques ayant lieu

en fond de fissure, et des fonctions discontinues localisées le long de la fissure pour prendre en compte la discontinuité du champ de déplacement autour de la fissure (Elle prend en compte la géométrie de la fissure).

Une méthode des fonctions de niveau (Level-set) progressivement évoluée a été utilisée pour localiser l'interface de la fissure, y compris la localisation des fronts des fissures. Stolarska et al [50]. Introduit le couplage entre la méthode level-set et la XFEM pour modéliser la propagation des fissures, la même idée de Belytschko et al [51]. En outre, Sukumar et al [52]. décrit la modélisation des trous et des inclusions par la méthode des éléments finis étendus. Moes et al [53]. et Gravoul et al [54]. Ont discuté le modèle mécanique et la mise à jour de la méthode level-set pour la propagation des fissures en 3D, qui est basé sur l'équation d'Hamilton-Jacobi (l'idée d'Osher et Sethian [55]).

En ce qui concerne des chargements de fatigue Sukumar et al [56]. Ont développé une technique numérique pour la simulation de la propagation des fissures par fatigue en trois dimensions qui couple la méthode des éléments finis étendus avec la méthode de marche rapide (FMM). Chopp et Sukumaront [57] étendu la méthode à de multiples fissures coplanaires, ou toute la géométrie de la fissure a été représentée par une seule fonction de distance signée (Level-set) et la fusion des fissures distinctes pourraient être traitée par la FMM, sans nécessité d'une détection de collision ou des procédures de reconstruction de maillage.

Le problème des fissures cohésives a été étudié par Moes et Belyschko et al [58], Zi et Belytschko [59], et la simulation de la propagation des multi-fissures était l'objectif de plusieurs autres étendues. Budyn et al [60]. Ont présenté une combinaison entre la XFEM et LSM pour modéliser des milieux de comportement linéaire élastique homogènes ou hétérogènes. Zi et al [61] ont discuté la jonction entre deux fissures et présenté un modèle XFEM numérique pour l'analyse de la propagation et la coalescence des fissures dans les Matériaux quasi-fragiles contenant des multi-fissures, Béchet et al [62]. Ont proposé un enrichissement géométrique au lieu de l'enrichissement topologique habituel dans lequel un domaine donné serait enrichi, même si les éléments ne touchent pas le front de la fissure.

La précision, la convergence et la stabilité ont été également la cible de laborde et al [63] et Chahine et al [64], qui ont étudié la convergence de la XFEM pour une variété des domaines fissurés. Peters et Hack [65] ont discuté les façons de liberté. Ventura [66] a montré comment la standard quadrature de Gauss peut être précisément utilisée dans les éléments contenant des discontinuités.

II.5.2. formulation standard de la méthode des éléments finis étendus

La méthode des éléments finis étendue, désignée par le sigle X-FEM (extended finite élément) développée par Moes et al [67], permet de s'affranchir des contraintes liées à la méthode des éléments finis concernant la modélisation des fissures. En effet, dans cette méthode, la fissure est représentée indépendamment du maillage, par une représentation explicite.

Le domaine est donc maillé sans tenir compte de la fissure, qui est indépendante du maillage. On définit d'abord une méthode d'éléments finis classique sur le maillage. Sur les éléments touchés par la fissure, la base élément fini reçoit des libertés spécifiques pour représenter les effets de la fissure :

Le long de la fissure, pour représenter la séparation du matériau, on multiplie les fonctions de forme classiques par une fonction de Heaviside.

Sur l'élément contenant le fond de fissure, les fonctions de forme classique sont multipliées par les singularités du modèle.

Signalons qu'un élément indispensable de la méthode X-FEM est une connaissance précise et à priori des singularités du modèle résolu.

L'introduction de la singularité exacte permet d'éviter de raffiner près du fond de fissure. De plus, en cas de propagation, il n'est pas nécessaire de remailler le domaine, car le maillage n'est pas modifié : seuls les degrés de liberté spécifiques qui représentent la fissure et ses effets doivent être mis à jour.

Basée sur le concept de partition de l'unité au paragraphe précédent, la méthode des éléments finis étendus est une idée originale de Moes et Black Blytschko T (9). Les champs asymptotiques solutions du problème d'une fissure dans un milieu élastique sont connue l'équation (II.20), et être exprimés comme une combinaison linéaire de base F_j donnée par l'équation (II.21).

$$\begin{cases} U^1(x) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[KI \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + kII \sin \frac{\theta}{2} (k - 2 + \cos \theta) \right] \\ U^2(x) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \left[KI \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + kII \cos \frac{\theta}{2} (k - 2 + \cos \theta) \right] \\ U^3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K III \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{II. 20})$$

La constante de Kosove est donnée par : $K = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en déformation plane} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en contrainte plane} \end{cases}$

$$U_i(x) = \sum_j F_j(x) u_{ij} \quad \text{ou} \quad F_j(x) = \sqrt{r} \begin{cases} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ \csc \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin(\theta), \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{cases}, \sin(\theta) \quad (\text{II. 21})$$

Grace à la méthode de partition de l'unité, ces enrichissements sont ajoutés au champ de déplacement.

Ensuite, Moes et al, éliminent complètement les opérations de remaillage en ajoutant une fonction discontinue dans la base d'enrichissement. Ainsi, le remaillage ne représente plus une contrainte lors de la modélisation par éléments finis de propagation de fissure.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } \Phi > 0 \\ -1 & \text{si } \Phi < 0 \end{cases} \quad (\text{II. 22})$$

Ou Φ représente la seconde coordonnée du repère local attaché à la pointe de fissure. La généralisation de ce repère local est réalisée par Stolarska et al, en utilisant un couple de fonctions de niveau (Φ, Ψ) qui définissent implicitement la position du plan et du front de fissure comme cela est illustré par la (Figure.II.6). Généralement l'utilisation des fonctions de niveau au cas tridimensionnel et donnent un schéma numérique pour actualiser les fonctions de niveau basé sur la résolution d'équations de type Hamilton-Jacobi (cf. « LEVEL Set méthode » de Sethian).

L'enrichissement du champ de déplacement est réalisé de manière locale selon la position de l'élément par rapport au plan et au front de fissure, c'est-à-dire selon les valeurs des fonctions de niveau.

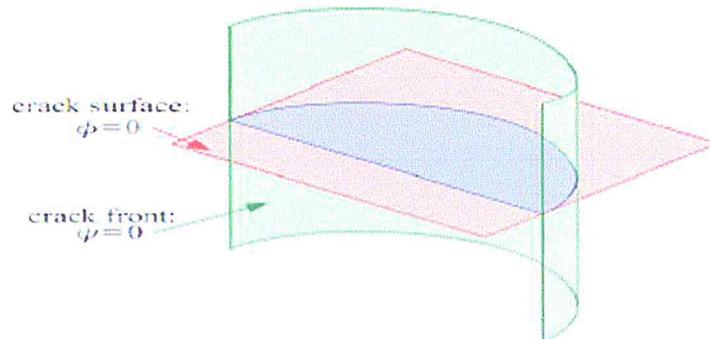


Figure. II.6: Définition de la géométrie de la fissure depuis le couple de fonction de niveau.

La stratégie d'enrichissement peut être résumée par l'équation (II.23) et la Figure.II.7.

$$U(x) = \sum_i N_i(x) \cdot \left(u_i + H(X_i) \cdot a_i + \left(\sum_{k=1,-4} Fk(x_i) \cdot b_i, k \right) \right) \tag{II.23}$$

Soit $U(x) = \sum_i N_i(x) \cdot q_i$ ou $N_i = \{N_i, N_{jH}, N_{jFk}\}$

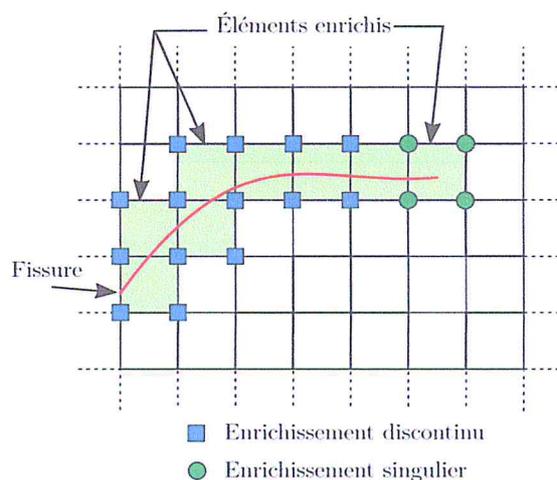


Figure. II.7: Stratégie d'enrichissement pour une fissure quelconque placée sur un maillage.

On remarque sur la (Figure.II.7) que les nœuds de l'élément contenant la pointe de fissure ne sont pas enrichis par la fonction discontinue H . Cela n'empêche pas l'ouverture de cet élément puisque la fonction F_j présente une discontinuité entre $-\pi$ et π .

L'utilisation de la méthode X-FEM bien que récente a connu un vif succès pour des cas de propagation de fissure très divers.

On propose d'utiliser la méthode X-FEM [Belytscho et Black 1999(14)] comme technique d'enrichissement locale pour décrire la fissure à une échelle fine. La méthode permet de décrire correctement la solution singulière en pointe de fissure. L'introduction d'une fonction d'enrichissement discontinue autorise au maillage de ne plus être conforme à la géométrie de la fissure.

II.5.3. La modélisation d'une fissure selon la X-FEM

(Approximation de déplacement)

Pour représenter une fissure, deux types de fonction d'enrichissement sont utilisés pour modéliser d'une part la discontinuité du déplacement le long de la fissure et d'autre part, la solution en pointe de fissure.

Le champ de déplacement U est alors cherché sous la forme :

$$U(x) = \underbrace{\sum_{i \in N} N_i(x) u_i}_{\substack{\text{Approximation} \\ \text{classique éléments} \\ \text{finis}}} + \underbrace{\sum_{i \in Nd} N_i(x) H(x) a_i}_{\substack{\text{Enrichissements} \\ \text{discontinus}}} + \underbrace{\sum_{i \in Np} N_i(x) \left(\sum_{f=1}^4 F_i(x) b \right)}_{\substack{\text{Enrichissements} \\ \text{singulier}}} \quad (\text{II. 24})$$

Ou

- N est l'ensemble des nœuds du maillage.
- u_i est le degré de liberté classique au nœud i .
- $N_i(x)$ sont les fonctions de forme éléments finis classique associée au nœud i
- $Nd \subset N$ est l'ensemble des nœuds enrichis par la discontinuité et les coefficients a_i sont les degrés de liberté correspondants. Un nœud appartient à Nd si son support est coupé par la fissure mais ne contient aucune de ses pointes. Ces nœuds sont entourés d'un carré sur la (Figure II.8)

• $N_p \subset N$ est l'ensemble des nœuds à enrichir pour modéliser le fond de fissure et les coefficients b_i sont les degrés de liberté correspondants. Un nœud appartient à N_p si son support contient la pointe de fissure. Ces nœuds sont entourés d'un triangle sur la figure II.8

Les fonctions F_j permettent de représenter les solutions asymptotiques en pointe de fissure.

Elles valent en élasticité

$$\{F_j(x)\} = \{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta\} \quad (II.25)$$

Où (r, θ) sont les coordonnées polaires dans les axes locaux en fond d'une fissure.

On remarquera que, parmi ces fonctions F_j , seule la fonction $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ est discontinue.

En accord avec Moes et al. (1999), on a :

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ est au dessus de la fissure} \\ -1 & \text{si } x \text{ est au dessous de la fissure} \end{cases}$$

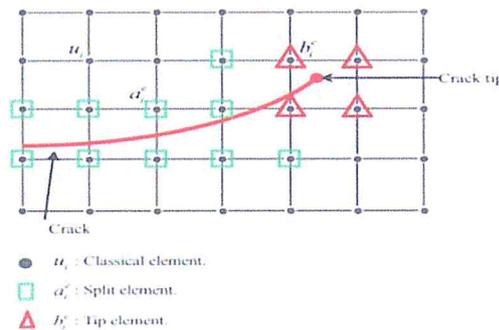


Figure.II.8: Fissure placée sur un maillage uniforme.

Les nœuds entourés d'un carré enrichis par la discontinuité et les nœuds entourés d'un triangle sont enrichis par les bases de fonctions asymptotiques en pointe de fissure.

On remarquera que cet enrichissement opéré suivant la méthode de la partition de l'unité est très local et ne concerne qu'un petit nombre de nœuds et un petit nombre de patches. Aussi si l'on souhaite que l'enrichissement soit efficace, la taille de cette zone enrichie doit être pertinente.

II.5.4. Les difficultés techniques de mise en œuvre

Les méthodes d'enrichissement basées sur la PUM donnent lieu à plusieurs difficultés en ce qui concerne leur implémentation. La grande flexibilité offerte par la X-FEM (le maillage n'a pas besoin de respecter la position de la fissure a un prix qui se paie dans sa mise en œuvre.

II.5.5. Description de la fissure

Dans une approche éléments finis classique, la position des fissures est décrite par un ensemble de faces d'éléments. Dans l'approche X-FEM, elle est indépendante de topologie du maillage et doit donc être fournie à part. En 2D, une fissure peut être représentée par une succession de segments de droite (Belytschko et Black 1999, Moes et al. 1999, Dolbow et al. 2000a). Il faut noter que la seule opération ou la représentation de la fissure intervient dans la X-FEM est l'évaluation des fonctions d'enrichissement $\{F_j(x)\}$ et $H(x)$. En un point d'intégration, il faut savoir si l'on se trouve d'un côté ou de l'autre de la fissure et connaître les coordonnées polaires (r, θ) de ce point dans les axes locaux en pointe de fissure. Ces évaluations se révèlent ardues à implémenter et si la géométrie de la fissure est complexe.

II.5.6. Intégration numérique

Sur les éléments finis coupés par une fissure, des fonctions discontinues doivent être intégrées. Afin de permettre l'intégration de part et d'autre de la fissure, on peut proposer un découpage de ces éléments en sous-éléments (triangles en 2D et tétraèdres en 3D). La Figure II.9 montre un exemple d'une telle décomposition en 2D. Sur les sous triangle, en 2D, 3 points de Gauss sont utilisés. Insistons sur le fait que ces sous-éléments créés n'apportent aucun nouveau degré. Leur seule raison d'être est l'intégration.

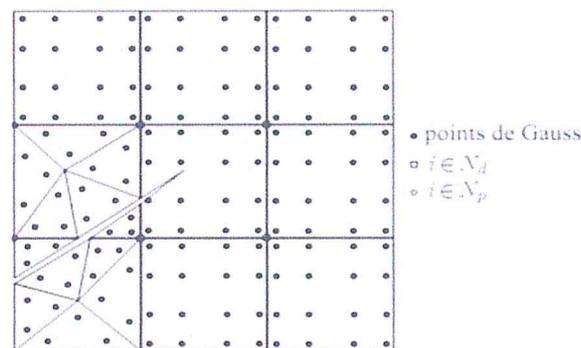


Figure.II.9: Intégration numérique prenant en compte une fissure avec la X-FEM.

Les éléments coupés par la fissure sont décomposés en sous-triangles sur lesquels une intégration à 3 points de Gauss est utilisée. Pour les éléments quadrangulaires qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques ($i \in N_p$) une intégration à 16 points est effectuée.

Sur les éléments qui ne sont pas coupés par la fissure mais dont au moins un des degrés de liberté est enrichi par les fonctions asymptotiques F_j en fond de fissure présentant la singularité en \sqrt{r} , un nombre élevé de points de Gauss est utilisé : 12 pour les triangles, 16 pour les quadrilatères.

Enfin, sur les éléments non coupés par la fissure et pour lesquels tous les degrés de liberté sont classiques, le nombre de points de Gauss utilisé est standard : pour les éléments du premier degré, on prend 1 point pour les triangles, 4 pour les quadrilatères.

II.5.7. Amélioration de la méthode XFEM

5.7.1. La méthode LEVEL-SET

Comme montré dans figure.II.10 l'idée d'Osher et Sethian [68] est de définir une fonction $\phi(x, t)$ régulière telle que, le sous espace $\phi(x, t)=0$ représente l'interface de coupure (fissure). Cette méthode s'applique aisément aux problèmes de fissuration en 2D. Par exemple pour la (Figure.II.10) on définit le plan de coupure Φ à l'aide d'une fonction de niveau (level-set) $l_{sn}(x)$ qui représente la distance normale a la surface on a $\Phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / l_{sn}(x)=0\}$.

Mais il faut une indication de l'endroit où s'arrête la fissure dans son plan et l'idée ce cas c'est l'utilisation d'une level-set $l_{st}(x)$ qui représente la distance au front de fissure (tangentielle à la surface) et les deux level-sets forment une base orthonormée en pointe de fissure.

Le lieu de la fissure est défini ainsi : $\Phi = \{x \in \mathbb{R}^3 / l_{sn}(x) = 0, l_{st}(x) = 0\}$. Et finalement on peut définir une base polaire :

$$\begin{cases} r = \sqrt{l_{sn}(x)^2 + l_{st}(x)^2} \\ \theta = \arctan \frac{l_{sn}(x)}{l_{st}(x)} \end{cases} \quad (II. 26)$$

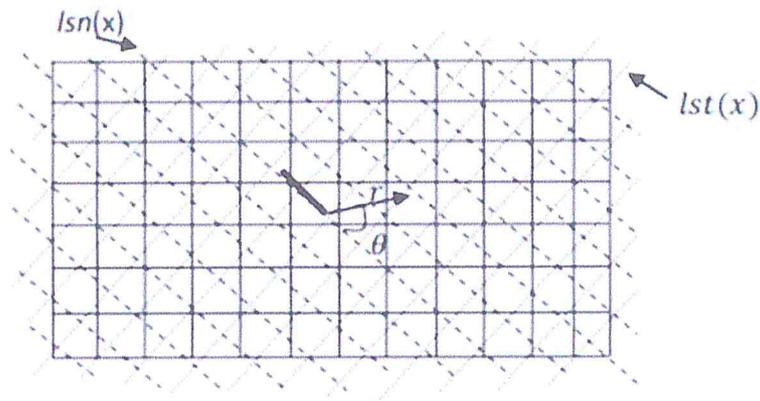


Figure.II.10: La stratégie level-set.

5.7.2. Le cas tridimensionnel

Le cas de trois dimensions est traité par Sukumar et al [69], de même manière que le cas en deux dimensions sauf que maintenant le front de la fissure n'est plus composé d'un ensemble de points, mais un ensemble de courbes, et l'approximation de déplacement d'écrite comme suit :

$$u = \sum_{i \in N} Ni(x)Ui + \sum_{i \in N} Ni(x)H(x)ai + \sum_{i \in N} N(x) \left(\sum_{j=1}^4 F_i^j(r, \theta)\gamma_i^j \right) \tag{II. 26}$$

Les nœuds N sont les nœuds tels que leur support croise avec la fissure, mais pas son front. Notez que le support d'un nœud est maintenant un volume.

Les fonctions d'enrichissement de front $F_i^j(r, \theta)$ sont toujours données par l'équation (II.25) ou le couple (r, θ) est défini comme les coordonnées polaires dans le plan x_1 - x_2 , voir (Figure. II.11). Le plan contient x^* et l'axe x_2 est aligné avec le normale n à la fissure au x^* .

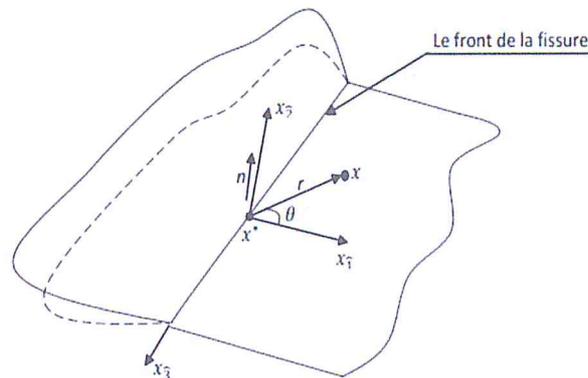


Figure.II.11: Représentation d'une fissure en 3D.

5.7.3. La convergence de la méthode XFEM

Le problème de la convergence est toujours discuté par les auteurs, dans la plupart des documents susmentionnés seuls les approximations par des éléments finis linéaire ont été utilisées dans les approximations de la XFEM et l'interpolation level-set. Well et al. [70] ont utilisés le concept XFEM en visco-plasticité des matériaux avec triangles de 6 nœuds. Mais seulement considérés comme des fissures qui se sont terminées sur un bord d'élément.

Il est bien connu que les éléments d'ordre supérieur offrant une précision importante pour les problèmes suffisamment raffinés. Par exemples les éléments finis quadratiques sont les éléments de choix pour la plupart des problèmes élastique statique et quasi-statique cela du à leur taux élevé de convergence et leur capacité à modéliser les frontalières courbées.

Par ailleurs, les fonctions level-set interpolées par des fonctions de forme quadratique sont capables de décrire des fissures incurvées, et la description des level-set par des éléments finis linéaires est limitée à des fissures linéaires.

Stazi et al. [71] étudient la convergence de l'erreur en énergie pour une plaque infinie avec une fissure droite, en mode I, pour des formulations linéaires et quadratiques. Ils remarquent que l'approximation quadratique améliore l'erreur, mais pas le taux de convergence. Béchet et al. [72] confirment cette observation et montrent qu'une zone d'enrichissement fixe. (Figure.II.12) permet de retrouver un taux de convergence presque optimal. Parallèlement, Laborde et al. [73] approfondissent la question et testent les taux de convergence pour les formulations polynomiales d'ordre supérieur.

Dans le cadre de la fissuration par zones cohésives, l'enrichissement par les fonctions singulières n'a plus lieu d'être, et Zi et al. Proposent de s'affranchir des éléments de transition. Au lieu d'utiliser des fonctions singulières, ils utilisent une fonction signe qui permet de représenter le front de fissure (similaire à un enrichissement Heaviside vis-à-vis de la level set tangente) au sein des éléments contenant le fond de fissure [74].

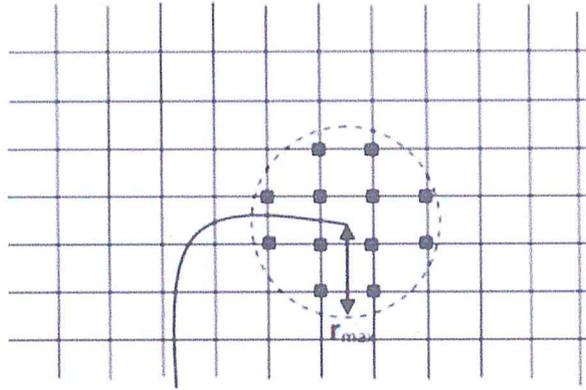


Figure.II.12: Les nœuds «carrés» sont enrichis par les fonctions singulières (enrichissement géométrique).

II.6 Présentation du code de calcul Abaqus/CAE

II.6.1 Code de calcul Abaqus/CAE

Abaqus/CAE est un code de calcul qui résout les problèmes de divers champs par la technique des éléments finis (M.E.F). Dans ce cadre il présente un système complet intégrant non seulement les fonctions de calculs proprement dites mais également les fonctions de construction du modèle (pré-processeur) et les fonctions de traitement des résultats (post-traitement). La (Figure II.13) représente l'interface de l'abaqus utilisée.

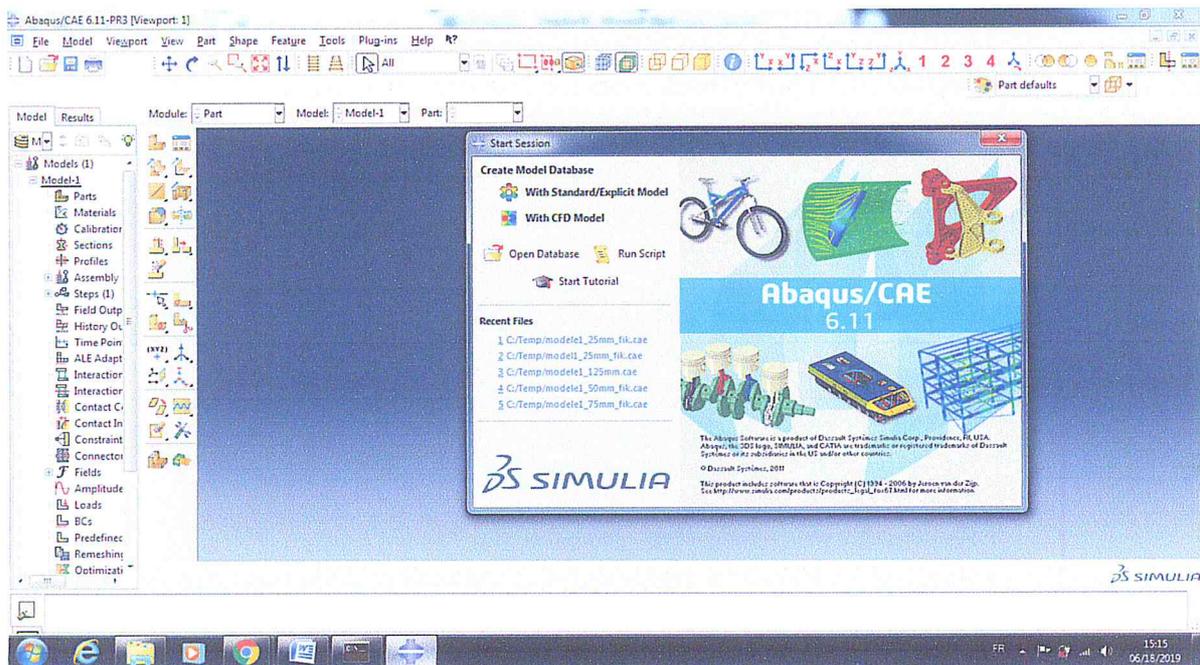


Figure.II.13 : Interface ABAQUS 6.11

Abaqus/CAE™ est un programme qui traite des problèmes d'élasticité linéaire dans les domaines statiques et dynamiques, des problèmes non linéaire, des problèmes thermiques etc...

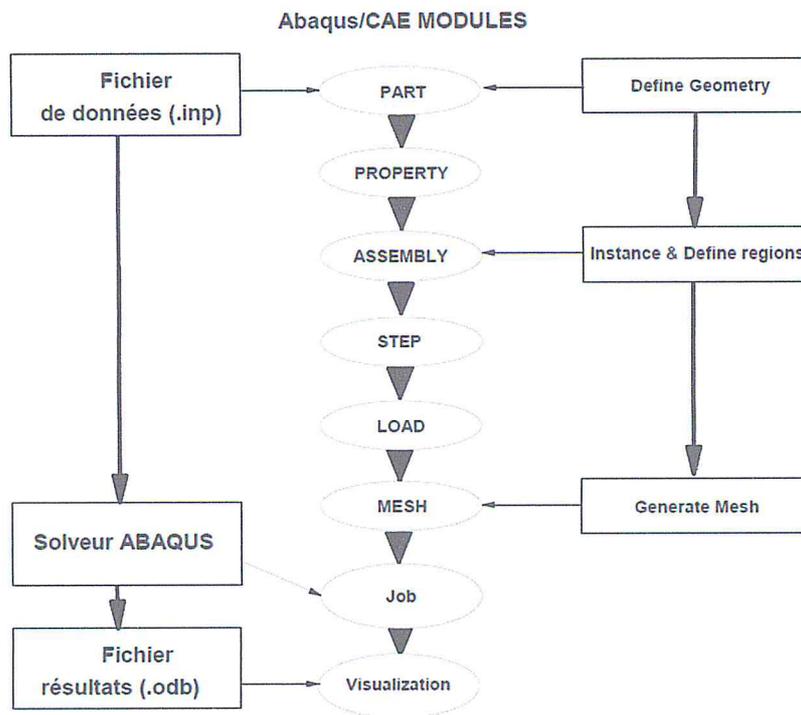


Figure.II.14 : Étapes à suivre pour la programmation [76]

La résolution complète d'un calcul numérique s'effectue après un passage successif dans les modules suivants :

Part, Property, Assembly, Step, Interaction, Load, Mesh, Job (pour lancer les calculs) [76]. Dans le code de calcul Abaqus le fichier de données décrit les géométries, les matériaux, les conditions aux limites avec une extension (.inp) et le fichier de résultats décrivent les contours et les courbes résultats avec l'extension (.odb).

II.6.2 Système d'unités dans le code de calcul Abaqus

Comme dans beaucoup de logiciels, il n'ya pas de système d'unités fixé. C'est à l'utilisateur de définir son propre système (tableau II.1).

Tableau .II.1 : Système d'unités pour le code de calcul Abaqus [76]

Masse	Longueur	Temps	Force	pression	Energie
M	L	T	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$	ML^2T^{-2}
Kg	M	S	N	Pa	J
g	Mm	ms	N	MPa	mJ
Tonne	Mm	S	N	MPa	mJ

II.7. Conclusion

Permet les méthodes présentées pour l'analyse de la propagation des fissures, la méthode X-FEM semble être de loin la plus performante. Dans le cadre de ce travail qui est et reste une formation à la recherche. Donc nous sommes concentré dans ce travail sur l'utilisation de l'approche X-FEM en utilisant des codes de calcul très performant afin d'analyse sur des exemples teste les possibilités de cette approche.

CHAPITRE III

SIMULATION

NUMÉRIQUE ET

VALIDATION DES

RÉSULTATS.

III.1.Introduction

La modélisation par éléments finis a été un outil précieux pour étudier un large éventail de problèmes biologiques et largement utilisée pour étudier le comportement mécanique, néanmoins la modélisation de la fissure reste quand même une analyse complexe. Nous étudions dans cette partie le comportement à la rupture du matériau sous chargements statique. La comparaison des résultats obtenus permettra d'évaluer l'influence des paramètres d'entaille, à savoir la longueur, rayon et l'angle d'entaille. On utilise dans ce chapitre la méthode des éléments finis étendu (XFEM) pour prédire l'emplacement de la fracture. Cela passe d'abord par la maîtrise des codes de la modélisation par élément finis en général. Une simulation numérique est abordée, pour l'analyse de l'influence de l'effet des paramètres d'entaille sur le phénomène de rupture, utilisant le code de calcul ABAQUS 6.11.

III.2. Modélisation tridimensionnelle

III.2.1 Description géométrique et les conditions aux limites

Une plaque rectangulaire contenant un défaut latéral d'une certaine forme (demi-cercle, entaille latérale ou fissure) est étudiée. On fait varier la taille du défaut en faisant changer la dimension caractéristique de celui-ci. C'est : le rayon pour le défaut de type demi-cercle, l'angle d'ouverture (la profondeur de l'entaille est considérée constante) dans le cas d'une entaille et pour la fissure, sa longueur. Les dimensions de la plaque considérée sont : une épaisseur $e=2.5\text{mm}$ et une largeur $W=50\text{mm}$ (figure III.a).

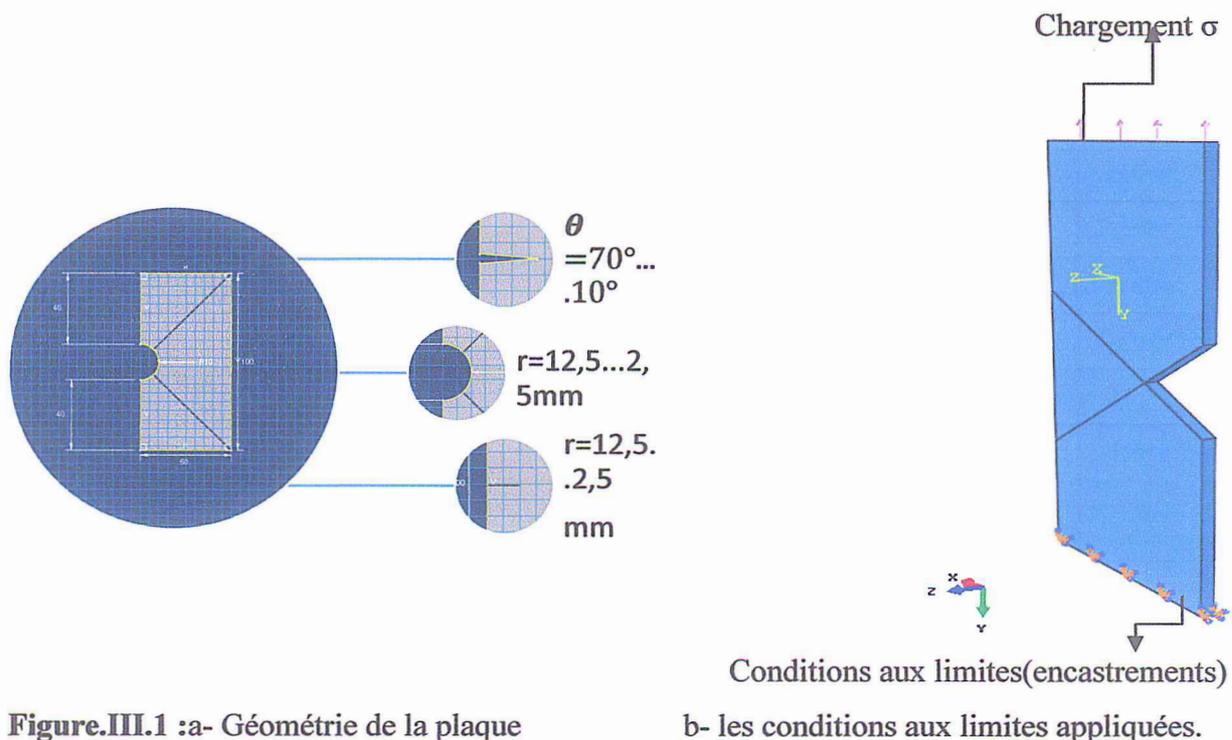


Figure.III.1 :a- Géométrie de la plaque

b- les conditions aux limites appliquées.

Le chargement appliqué et les conditions aux limites sont représentés sur la figure.III.b.Le chargement appliqué F est une traction constante uniformément répartie sur la partie supérieure de la plaque et dans la direction de la longueur. La valeur de la charge appliquée correspond à

$$F=120 \text{ N.}$$

III.2.2 Les propriétés mécanique

La plaque utilisée dans cette étude est en aluminium 2024T3, un matériau fréquemment utilisé dans les structures de l'aéronautique. Nous avons considéré que le comportement est élastique.

Les essais de traction effectués sur la plaque d'aluminium 2024-T3 ont permis d'avoir des courbes caractéristiques indiquées dans la (Figure III.2)[76].

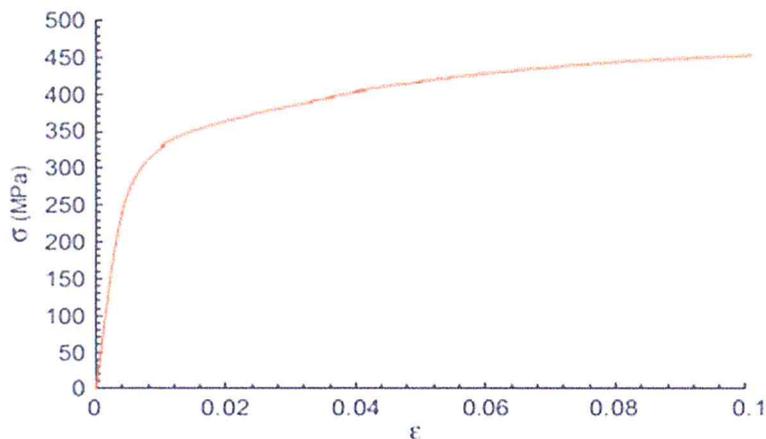


Figure.III.2: Courbe Traction contrainte-déformation pour plaque d'aluminium [76].

A partir de la courbe, on peut déterminer les propriétés mécaniques du matériau indiquée dans le tableau III.1.

Tableau.III.1 : propriétés mécaniques de l'aluminium 2024-T3.

Matériaux	E (MPa)	σ_e (MPa)	σ_{max} (MPa)	ν
Aluminium 2024T3	69000	350	430	0.3

III.2.3. Maillage

Le logiciel Abaqus dispose d'un puissant maillage automatique, pouvant analyser la géométrie et générer le maillage le plus adapté. Pour le comportement étudié, nous avons utilisé des éléments hexaédriques, type C3D8 conforme aux surfaces paramétriques définies (Figure III.3).

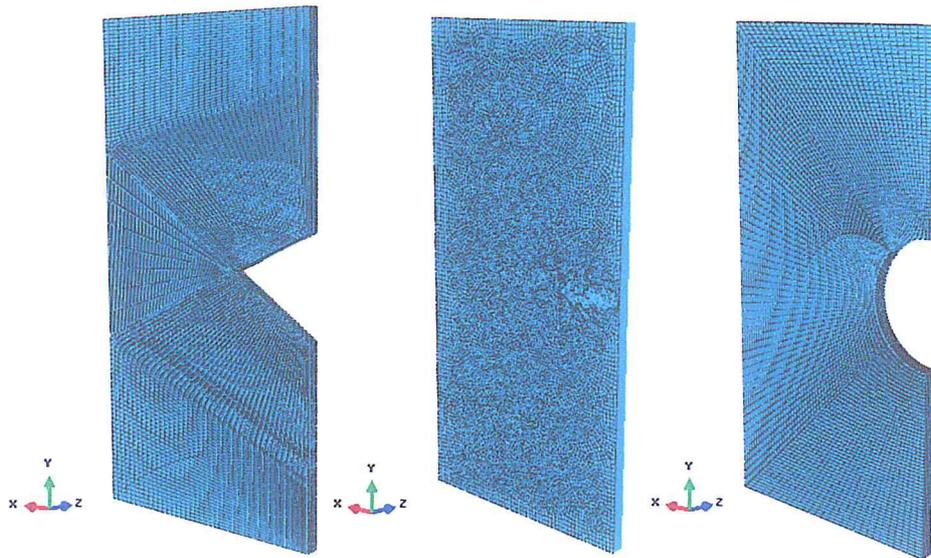


Figure.III.3 : Maillage des trois modèles étudiés.

Le maillage de la plaque pour différents types de défauts, est représenté sur la (Figure III.3). Il est réalisé en utilisant des éléments rectangulaires à 8 nœuds. En ce qui concerne le défaut demi-circulaire, l'entaille et la fissure, une discrétisation grossière est réalisée dans la zone lointaine du défaut, par contre un raffinement du maillage est indispensable à proximité du défaut, ce qui permettra d'obtenir une bonne convergence et une meilleure précision des résultats. Le maillage est effectué à l'aide des outils développés pour le maillage du logiciel Abaqus, les données de la géométrie et du maillage sont transférées automatiquement au module d'analyse par le logiciel.

III.3. Effet de la taille de l'élément utilisé (test de convergence)

L'autre étude du maillage est par rapport aux tailles des éléments utilisés pour générer le maillage. La réalisation est effectuée en trois dimensions avec des éléments hexaédriques linéaires à 8 nœuds. Nous représentons sur la (Figure III.6), la contrainte d'ouverture σ_{yy} en

fond d'entaille pour différents nombres d'éléments générés N, 2N, 4N, 8N, 16N, 32N et 128N avec N=6728 éléments.

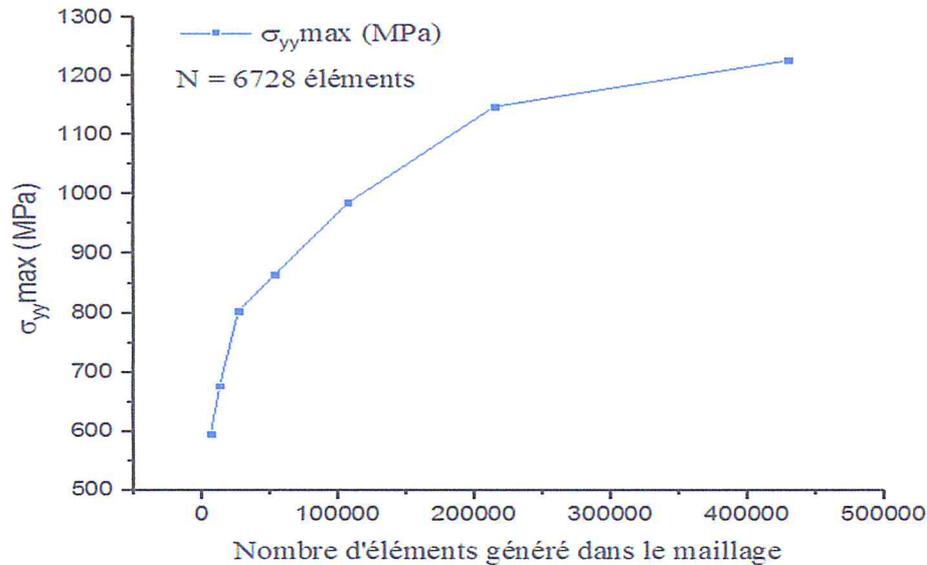


Figure.III.4 : Comparaison entre les valeurs de la contrainte d'ouverture σ_{yy} en fond d'entaille en fonction du nombre d'éléments générés pour le maillage.

On remarque en (Figure III.4), l'importance du raffinement du maillage sur la qualité des résultats numériques obtenus. Le raffinement du maillage et l'augmentation des éléments générés dans la simulation numérique convergent vers une stabilité des résultats du calcul.

III.4. La méthode des éléments finis étendu (XFEM)

La méthode des éléments finis étendus (XFEM) est apparue comme une puissante procédure numérique pour l'analyse des problèmes de fracture. Il a été largement reconnu que la méthode facilite la modélisation de la croissance de la fracture sous les hypothèses de la mécanique de rupture élastique linéaire (LEFM).

La fracture a été modélisée avec la XFEM qui se base sur des critères de la contrainte principale maximale pour déterminer l'emplacement de l'initiation de la fissure et sa. Ce critère peut être représenté comme suit:

$$F = \left\{ \frac{\langle \sigma_{max} \rangle}{\sigma_{max}^0} \right\}$$

Ici, σ_{max}^0 représente la contrainte principale autorisée maximale. Le symbole $\langle \rangle$ représente le support de Macaulay avec l'interprétation habituelle (c'est-à-dire, $\langle \sigma_{max} \rangle = 0$ si $\sigma_{max} < 0$ et $\langle \sigma_{max} \rangle = \sigma_{max}$ si $\sigma_{max} \geq 0$).

La contrainte de compression n'initie pas l'endommagement.

Lorsque $f \geq 0$ le critère d'amorçage est satisfais. [75]

III.5.Résultats et discussion

III.5.1.Évolution des contraintes pour les différents cas étudiés

Les (Figures.III.5, 6,7) représente le champ de contraintes de Von-mises en fonction du rayon dans le cas du défaut demi-circulaire (modèle 1), en fonction de l'angle d'ouverture dans le cas de l'entaille (modèle 2) et en fonction de la longueur du défaut dans le cas de la fissure (modèle 3).

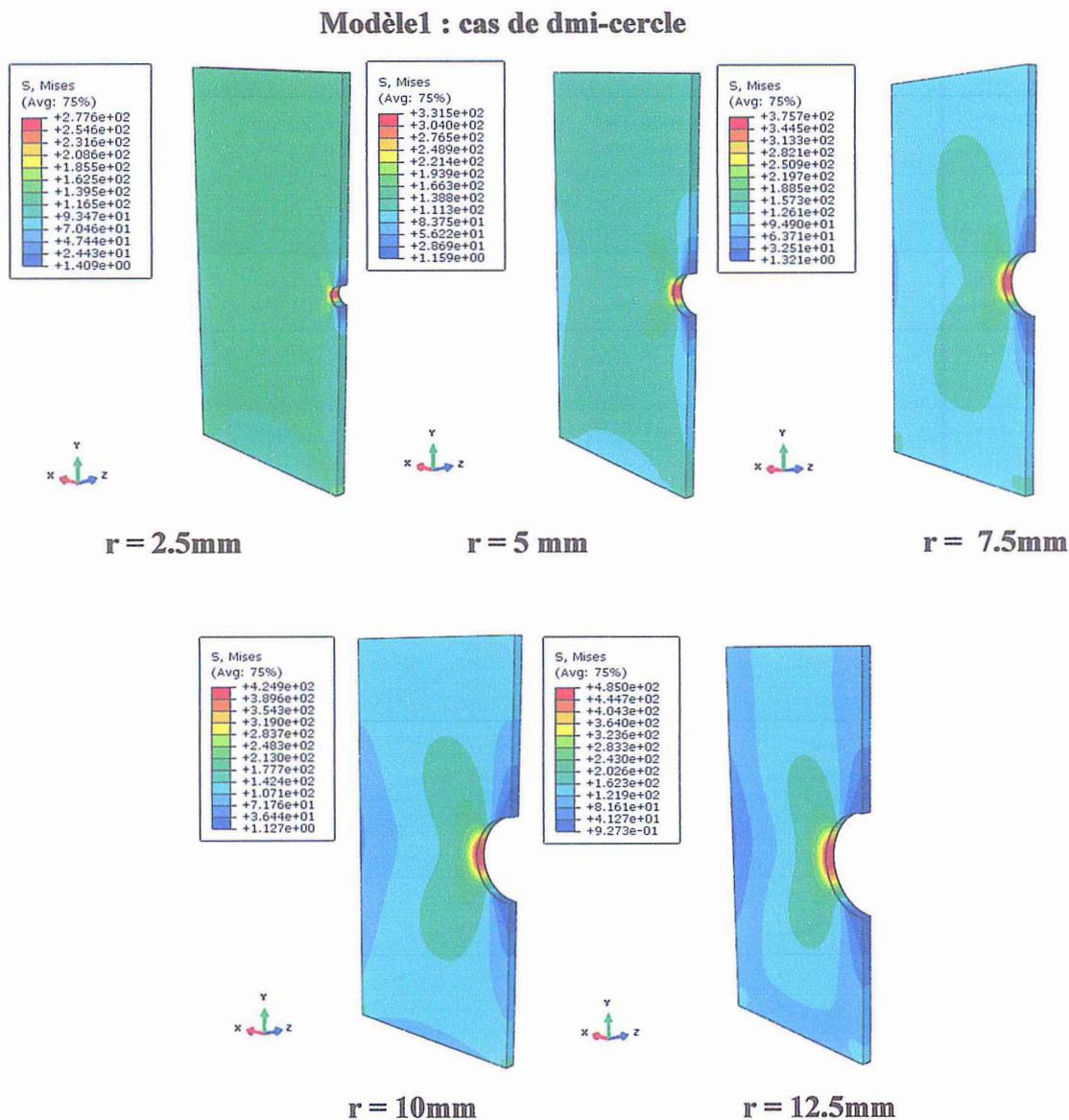


Figure.III.5 :la distribution de la Contraintes équivalentede Von mises dans la plaque pour un défaut latéral demi-circulaire avec différents rayons.

• Discussions :

Pour le premier cas de la modélisation, On remarque que les contraintes sont concentrées au niveau du défaut, cette concentration diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de celui-ci. La concentration de contrainte augmente avec l'accroissement du rayon du demi-cercle et de la longueur de la fissure.les contraintes les plus élevées son situées principalement au voisinage de défaut. Les valeurs des contraintes sont très élevé de l'ordre 485 MPa dans le cas rayon 12.5 mm et les contraintes se diminue jusqu'au 277 MPa avec le rayon 2.5mm.

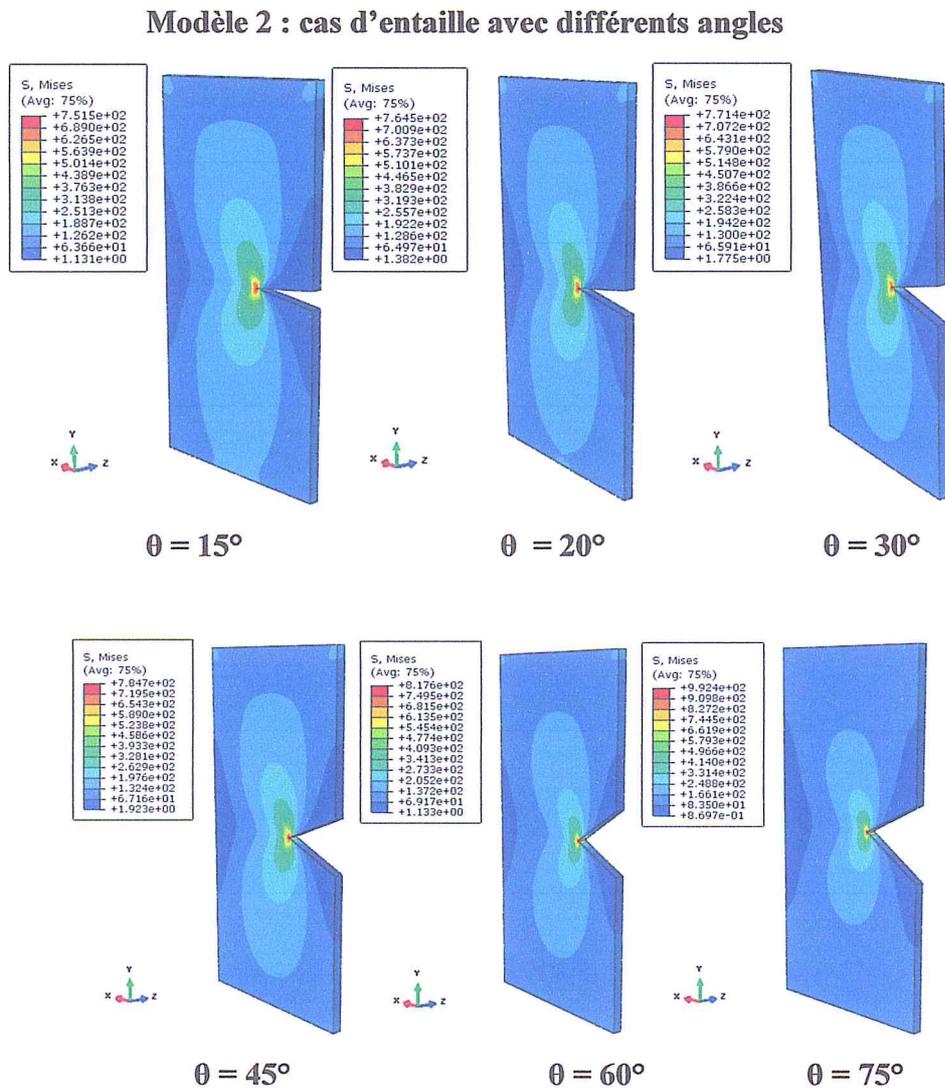


Figure.III.6 : la distribution de la Contraintes équivalente de Von mises dans la plaque pour un défaut latéral d'entaille avec différents angles d'ouverture.

• Discussions :

pour le deuxième cas de l'entaille (modèle 2) nous avons montré que la distribution des contraintes sont varié peu avec l'angle d'ouverture, il faut noter que pour des petits angles d'ouverture, l'entaille tend vers une vraie fissure (entaille fermé) et d'après la théorie de Griffith, les fissures engendrent des concentrations de contrainte importantes au voisinage de la pointe de fissure. On remarque que les contraintes sont stables et les valeurs varient entre 751 MPa et 784 MPa cas 15 degré, 45 degré à la suite.

Modèle 3 : cas de fissure avec différentes longueurs

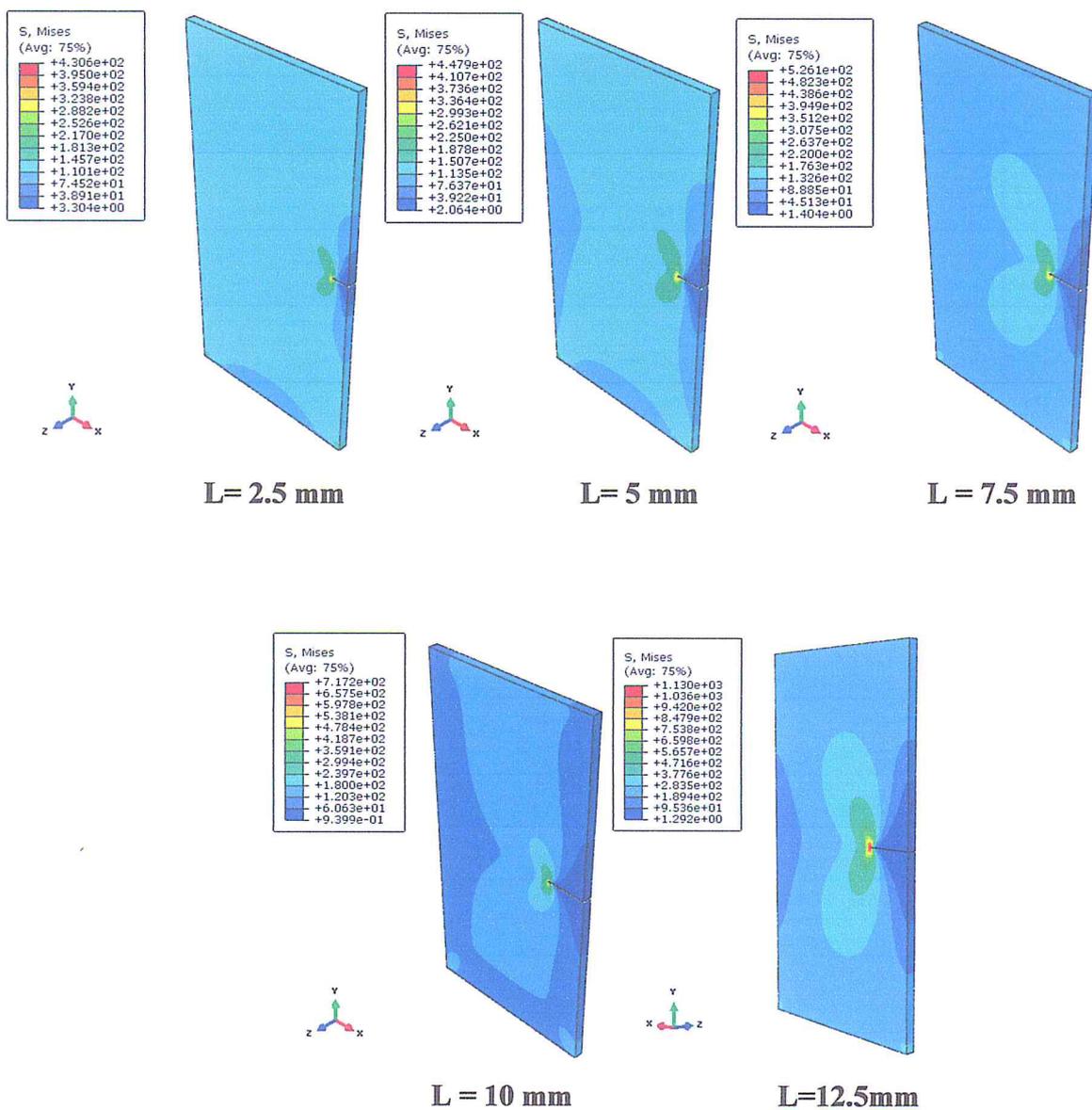


Figure.III.7 : la distribution de la contrainte équivalente de Von mises dans la plaque pour un défaut latéral de fissure avec différentes longueurs.

- **Discussions :**

Pour le dernier cas les contraintes sont transférées dans toute la région de la plaque dans la présence de défaut ce forme de fissure. Ce dernier cas donne une contrainte plus élevés que les deux autres modèles. On remarque que les contraintes de traction les plus intenses sont localisées dans la point de la fissure et se diminue au fur et à mesurer qu'on s'éloigne de celui-ci.

III.6. Effet de type d'entaille sur le facteur de concentration des contraintes K_t

Les (Figures 8, 9et 10) représentent la variation du facteur de concentration des contraintes en fonction de la distance normalisée pour les différents types de défaut.

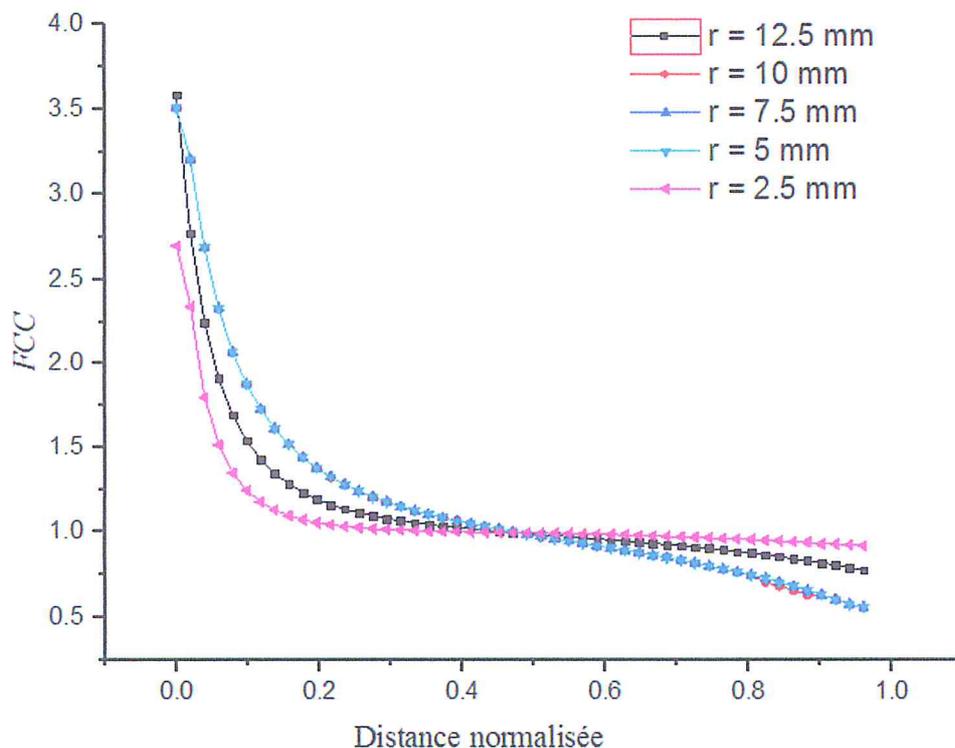


Figure.III.8 : Variation du facteur de concentration des contraintes K_t en fonction de la distance normalisée pour différents rayons du défaut demi-cercle.

- **Discussions :**

Pour le premier cas de défaut demi-circulaire latéral, la (Figure 8) représente les valeurs de FIC en fonction de la distance normalisée. Les valeurs importantes sont au voisinage direct du défaut, elles diminuent au fur et à mesure qu'on s'éloigne de ce dernier. Il faut noter que plus le rayon est grand, plus les valeurs de FIC augmentent. Pour toutes les valeurs du rayon, les graphes coïncident au milieu du ligament ($r/W=0.4$) et tendent vers des valeurs proches. Sur la partie droite du ligament l'inverse est observé et les valeurs des contraintes calculées sont plus

faible pour de grands rayons du défaut, ceci est due à la déformation de la plaque contenant un défaut de type demi-circulaire latéral.

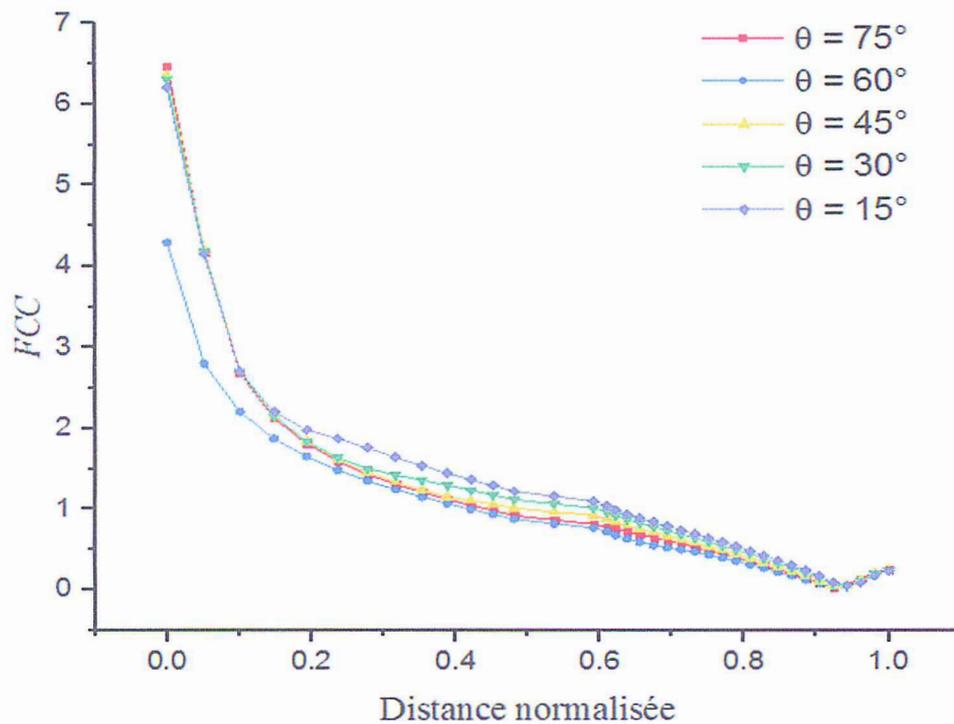


Figure.III.9 : Variation du facteur de concentration des contraintes K_t en fonction de la distance normalisée pour différents angles d'ouverture de l'entaille demi-circulaire.

- **Discussions :**

Dans le deuxième cas pour le défaut de type entaille, la (Figure 9) montre les valeurs de la composante du rapport FIC. Nous avons illustré que les valeurs les plus grandes sont localisées au voisinage de la pointe de fissure et sont celles qui correspondent à l'entaille avec le plus petit angle d'ouverture (conformément aux résultats obtenus pour une fissure qui est considérée comme un défaut fermé), puis ils diminuent légèrement avec l'augmentation de l'angle d'ouverture. On remarque que les valeurs de FIC sont très proches le long du ligament en s'éloignant du défaut.

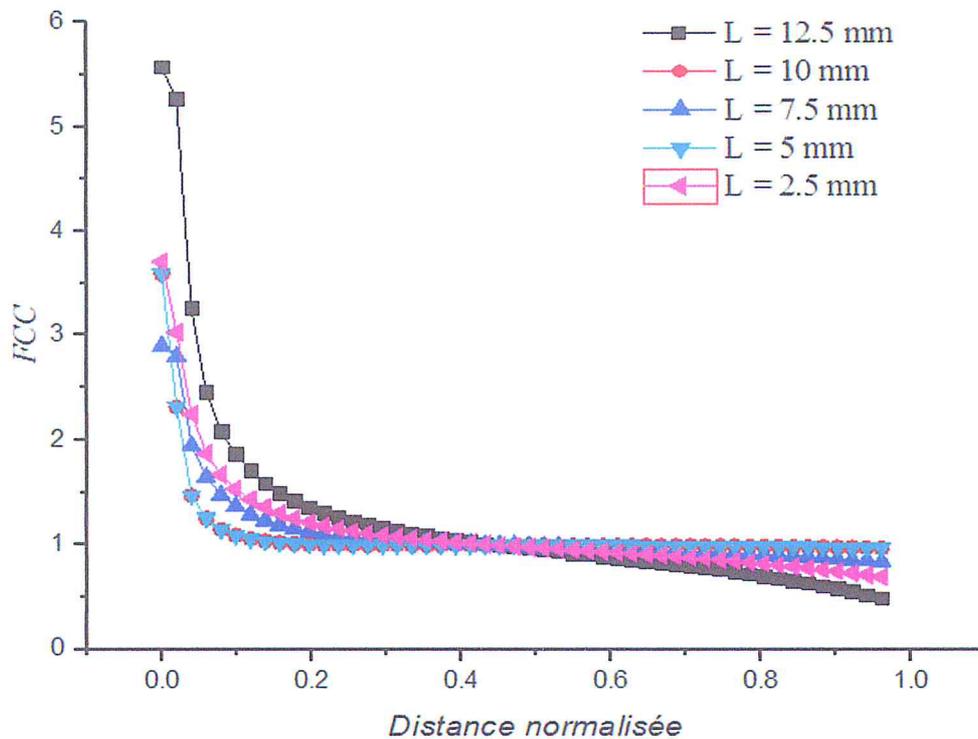


Figure.III.10 :Variation du facteur de concentration des contraintes K_t en fonction de la distance normalisée pour différents longueurs de fissure.

- **Discussions :**

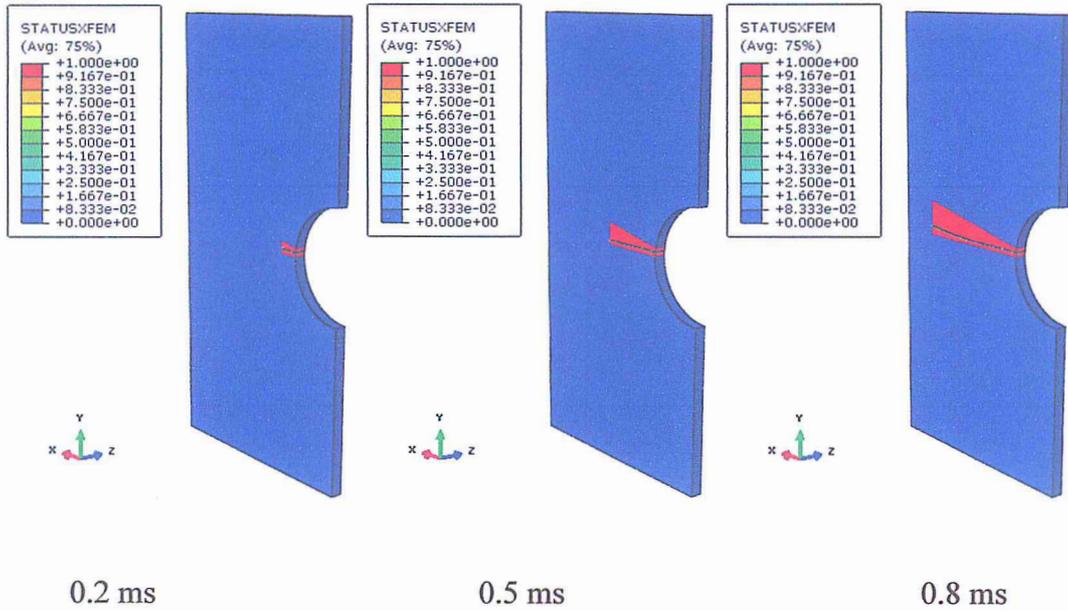
Pour le dernier cas du défaut de type fissure, nous avons montré que les valeurs de la F_{IC} pour différentes longueurs de la fissure sont représentées sur la (Figure 10). Comme remarqué précédemment, Au voisinage de la pointe, les valeurs calculées de F_{IC} sont faibles pour des petites longueurs de la fissure, les contraintes augmentent ensuite avec l'accroissement de la taille de la

fissure. Loin de la pointe (on s'éloignant de la pointe vers la partie droite du ligament), les valeurs de F_{IC} tendent à se rapprocher. On peut dire que pour un défaut de type fissure, les contraintes au voisinage de la pointe sont plus sensible à la taille du défaut, cette sensibilité diminue tout en s'éloignant de la pointe.

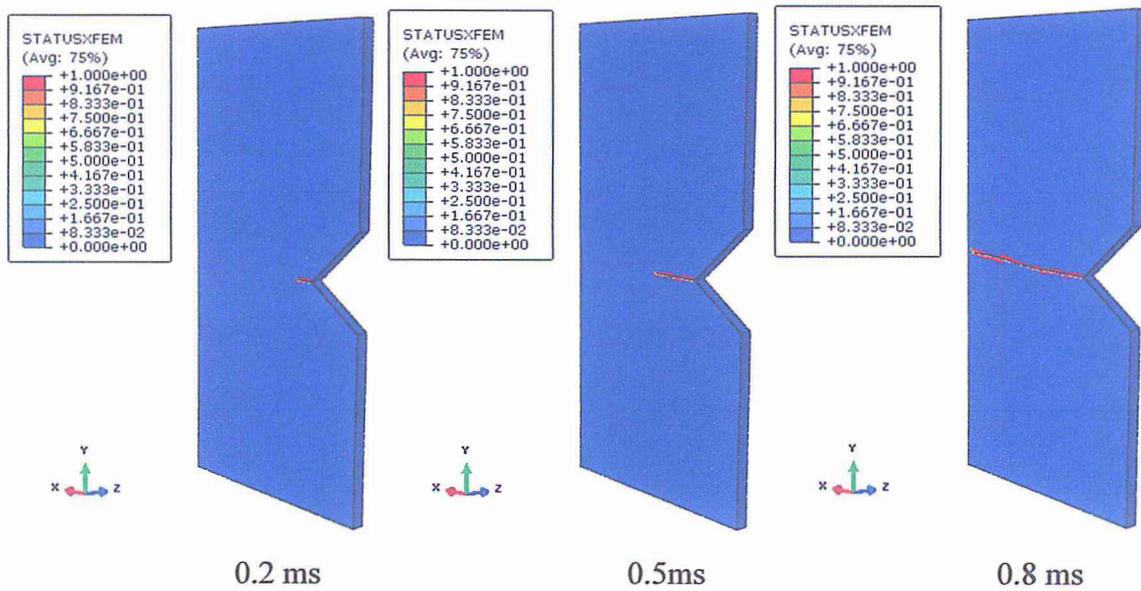
III.7. Résultat de la fracture par la X-FEM

Nos résultats de la simulation montrent que l'initiation et la propagation de la fissure a été détecté par la X-FEM de fissure et suivre sa propagation dans les différents cas étudiés sont représentés sur la (Figure III.11).

Modèle 1



Modèle 2



Modèle 3

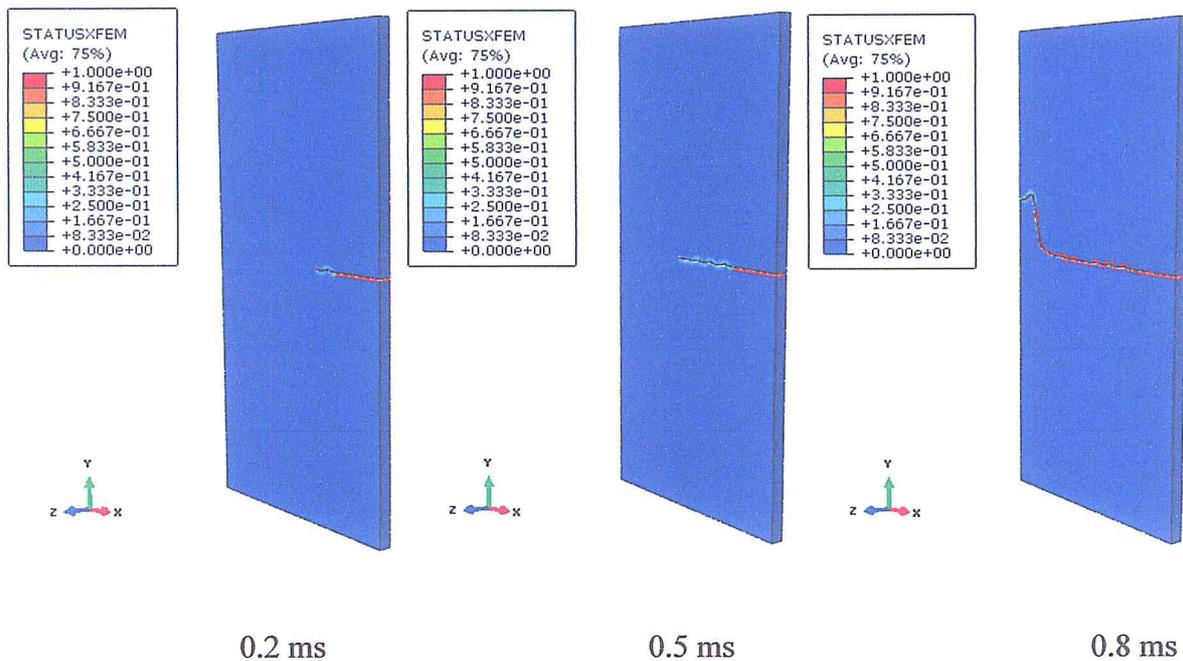


Figure.III.11 : Type de fracture prédite à partir de différents temps pour les trois cas étudiés.

Les résultats de la simulation montrent qu'avec la XFEM nous avons détecté l'initiation de fissure et suivre sa propagation dans les trois différentes orientations de chargement (demi-cercle, angle d'ouverture, longueur de fissure) la rupture est comprise entre 0.2 et 0.8 ms.

On compare dans un premier les réponses fournies par une modélisation du comportement du matériau comme étant élastique, Comme on le constate sur la (Figure.III.11) les réponses sont quasiment les mêmes. Cela permet de conclure que l'hypothèse de plasticité confinée est particulièrement bien adaptée à ce type de configuration.

La (Figure III.11) représente la zone endommagée dans la plaque au voisinage de défaut pour les trois modèles, on peut remarquer que la présence de la zone endommagée (en rouge). Sur la pointe de cette zone, on peut noter une concentration de contraintes. Sur l'extrémité de cette zone indique une concentration de contrainte.

Pour effectuer des calculs numériques en tenant compte du processus d'endommagement de la structure matérielle des composants du modèle ainsi que de leurs connexions, il est nécessaire d'appliquer une procédure numérique appropriée contenant des paramètres décrivant le mécanisme de formation et de propagation de l'endommagement. Le XFEM est une méthode de modélisation des processus d'endommagement. Traction – Séparation est une

loi de base utilisée pour décrire le processus de dommage dans le logiciel ABAQUS / Standard. Dans les deux cas, le matériau élastique avec les paramètres caractérisant le dommage au matériel était défini comme suit: module de Young $E = 69000$ MPa, coefficient de Poisson $\nu = 0,3$, valeur du dommage provoquant une contrainte de la fibre du matériau $\sigma_{\max} = 380$ MPa.

III.8. Influence de la forme du défaut sur les valeurs de K_I et G_I

La (Figure III.12) montre la création de la fissure de 2 mm de longueur localisée au fond d'un défaut latéral demi-circulaire et au fond d'un autre en forme d'entaille.

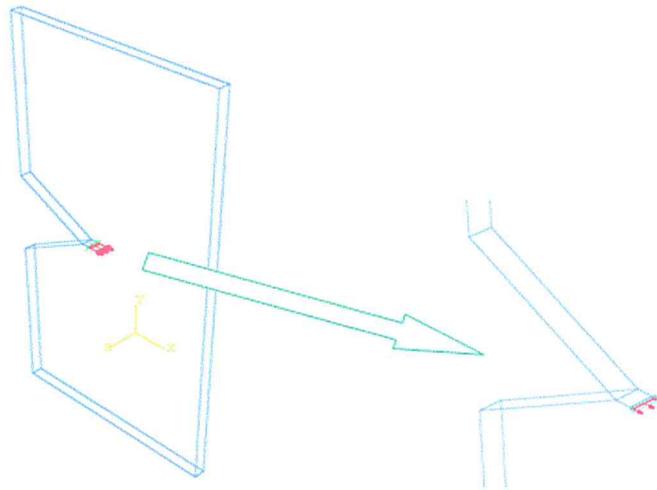


Figure III.12 : La création de pré fissure de 2 mm-cas de l'entaille.

Les (Figures III.13 et 14) sont représentés les différents rayons et angles d'ouverture ont été envisagés pour les défauts de formes demi-circulaires et entaille, respectivement. Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte K_I et le taux de restitution d'énergie élastique G_I , pour les deux cas et le cas d'une fissure latérale.

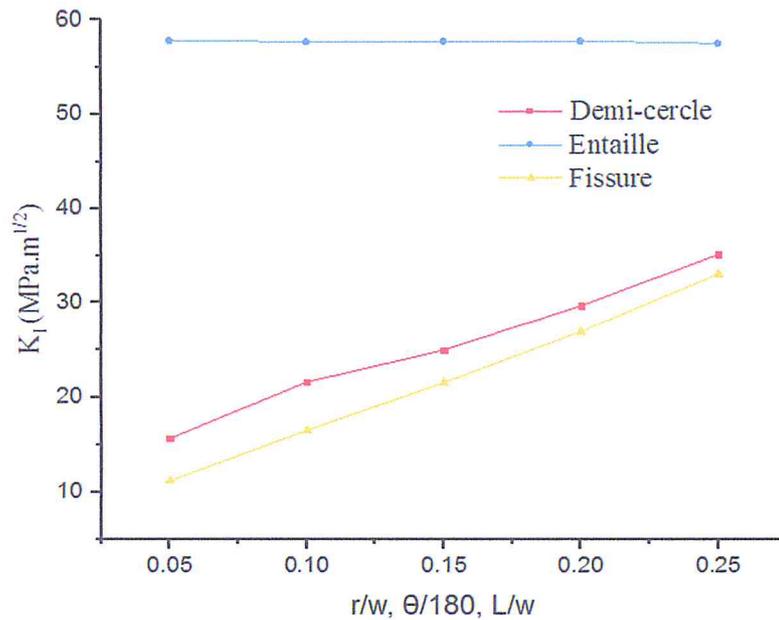


Figure.III.13 : Variation le facteur d'intensité de contrainte K_I , pour une fissure de 2 mm de longueur, localisée au fond d'un défaut en demi-circulaire et en entaille et le cas d'une fissure latérale de différent longueurs

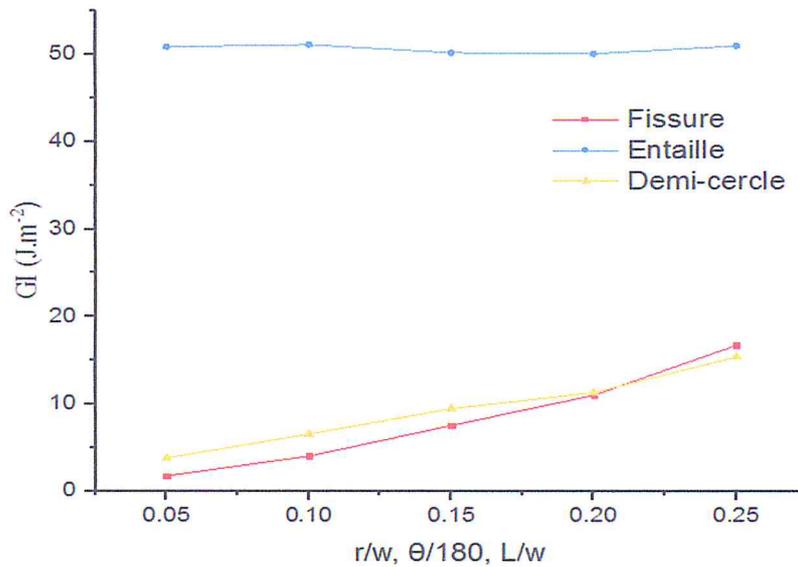


Figure.III.14 : Variation du taux de restitution d'énergie G_I pour une fissure de 2 mm de longueur, localisée au fond d'un défaut en demi-circulaire et en entaille et le cas d'une fissure latérale de différentes longueurs.

D'après las (Figure III.13 et 14), le facteur d'intensité de contraintes K_I et le taux de restitution d'énergie G_I sont très sensibles au rayon du défaut demi-circulaire et augmentent considérablement avec ce dernier. Par contre, pour le défaut de type entaille, les facteurs K_I et G_I varient très peu avec l'angle d'ouverture et on peut dire qu'ils sont quasiment constants.

Pour le cas d'une fissure latérale les valeurs des facteurs KI et GI varient avec la taille de la fissure et peuvent atteindre des valeurs élevées comparées aux autres types de défauts.

III..Conclusion

La présente étude numérique a permis de tirer des conclusions sur l'influence du type et de la taille d'un défaut sur le comportement mécanique d'une plaque mince soumise à un effort de traction. Il s'avère que les défauts de type demi-circulaire latérale sont des défauts qui engendrent les plus faibles contraintes par rapport aux autres types de défauts, à savoir les entailles et les fissures. Les entailles sont caractérisées par l'angle d'ouverture, le champ de contraintes est plus sensible aux entailles de faible ouverture conformément aux résultats analytique obtenue pour une fissure (entaille fermée). Les fissures sont les défauts qui ont le plus d'influence sur le champ de contrainte qui est très sensible à la taille de la fissure.

CONCLUSION

GÉNÉRALE

Dans cette étude l'objectif de ce présent travail a été consacré à faire une modélisation numérique concerne l'analyse tridimensionnelle à l'aide de la méthode des éléments finis, qui porte sur l'influence des plaques entaillé sous chargement statique sur le comportement à la rupture.

- Dans un premier temps, a permis de fixer le cadre dans lequel s'inscrit notre sujet de recherche. Présente les bases de la mécanique de la rupture nécessaires pour aborder la simulation numérique de propagation de fissure. La mécanique de la rupture est de caractérisée le comportement à la fissuration des structure à laide de paramètre quantifiable, notamment le champ des contraintes, la taille de la fissure est la résistance à la fissuration du matériau.
- En second lieu, concentré sur l'outil de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis étendue (XFEM) et dédié à l'étude de propagation de fissure. qui permet la prédiction de l'apparition et la propagation des fissures.
- Le troisième et dernier chapitre, nous avons utilisé le logiciel de calcul ABAQUS, dans sa version 6.11, qui représente l'un des outils numérique basée sur la méthode des éléments finis étendus, afin de traiter le problème d'une plaque contenant un défaut de forme latéral, permettant ainsi de confirmer le résultat de la Théorie de Griffith.

Nous avons procédé à l'examen du champ de contraintes en fond d'entaille de comportement élastique. Les résultats obtenus nous ont permis de conclure ce qui suit :

- Les défauts de type demi-circulaire latéral sont des défauts qui engendrent les plus faibles contraintes par rapport aux autres types de défauts.
- Les fissures sont les défauts qui ont le plus d'influence sur le champ de contrainte qui est très sensible à la taille de la fissure.
- Le facteur d'intensité de contraintes KI sont très sensibles au rayon du défaut demi-circulaire et augmentent considérablement avec ce dernier. Par contre, pour le défaut de type entaille, les facteurs KI varient très peu avec l'angle d'ouverture et on peut dire qu'ils sont quasiment constants. Pour le cas d'une fissure latérale les valeurs des facteurs KI varient avec la taille de la fissure et peuvent atteindre des valeurs élevées comparées aux autres types de défauts.

Références bibliographiques :

- [1] BOURAS, S. Etude par émission acoustique, de l'indentation Hertzienne et de l'indentation Vickers sur une vitro-céramique et sur des alumines. Thèse doct. ISAL (1993), pp. 186.
- [2] Naman recho. « Rupture par fissuration des structures ». Edition Hermès, Paris, 1995.
- [3] J. BESSON « Matériaux' pour l'ingénieur » p 190.
- [4] Recho, Naman. Rupture par fissuration des structures. Paris :Hermès, 1995. P. 349. 2-86601-488-X/.1158-3509.
- [5] Shixiang Ma. Propagation de fissure en mo de mixte dans un milieu 'elasto-plastique avec prise en compte des contraintes r'esiduelles. Mechanics. Université Blaise Pascal – Clermont- Ferrand II, 2005. French.
- [6] LAWN, BOR, and SWAIN, M. V: "Micro fracture Beneath Point Indentation in Brittle Solid". J. Mater. Sci, 1975, Vol. 10, n: 1, P 113-122.
- [7] LAWN, B.R., EVANS, E.G. A model of crack indentation Elastic-Plastic Indentation Solids. J. Mater., Sci., 1977, Vol. 12, p. 2195-2199.
- [8] LANKFORD, and J., D.L. The Crack indentation in ceramic material subject to elastic-plastic indentation. J. Mater. , Sci. , 1979, Vol. 14, p. 1662-1668.
- [9] LANKFORD, J., Thereshold Microfracture during Elastic/Plastic Indentation of Ceramics: J.Mater. Sci., 1981, Vol. 16, p. 1177-1182.
- [10] LIANG, K: « Contribution à l'étude des mécanismes de fissuration des matériaux céramiques de type oxyde ». Thèse. Sci : Institut National des sciences appliquées de Lyon(1990),p206.
- [11] Pluvinage G. Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators. Université de Metz,.©KLUWER , Academic Publishers, (2003).
- [12] Roesler J., Harders H. Baeker M. Mechanical Behaviour of Engineering Materials

- Metals, Ceramics, Polymers, and Composites, German Edition Published by the Teubner Verlag Wiesbaden, ©Springer- Verlag, (2006).
- [13] François.D : "Influence of hydrides on the strengths of Zircaloy-4 plate", Proc. of 8th Int.Conf. on Fracture, Kiev, Ukraine, (1993), pp. 693-700.
- [14] Zoumana SOUMAHORO , « ETUDE DU COUPLAGE THERMOMECHANIQUE DANS LA PROPAGATION DYNAMIQUE DE FISSURE » , Thèse de Doctorat. l'Ecole Polytechnique,2005.
- [15] J.P. Faurie, P. Monnier, A. Niku-Lari, – Guide de dessinateur, les concentrateurs de contraintes. Publications CETIM, 2000.
- [16] R.E. Peterson – Stress concentration factor, John Wiley and Sons, New-York, (1974).
- [17] F.I. Baratta, D.M.Neal – Stress concentration factors in U shaped and semi-elliptical edge notches, Journal of Strain Analysis, Vol.5, N°.2, pp 121-27. (1970).
- [18] O. L. Bowie – Analysis of edge notches in a semi-infinite region, Army Materials and Mechanics Research Center AMRA TR 66-07, June (1966).
- [19] C.E. Inglis. – Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, Trans. Instn Nav. Archit, Vol.55, pp 219, (1913).
- [20] M. Isida., On the tension of the strip with semicircular notches, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs, Vol. 19, N°.83, pp5, (1953).
- [21] Peterson R.E. Stress concentration factors, USA, John Willey et Sons, 1974, P : 317.
- [22] H. Neuber, N.E. Frost, K. Marsh enad L.P. Pook – Effect of stress concentration and cracks on fatigue strength. Metal Fatigue, Ed Oxford U., London W.I, pp 130-200, (1974).
- [23] R.A. Smith, K.J Miller, – Prediction of fatigue regimes in notched components. Int. J. Mech. Sci., Vol. 20, pp 201-206, (1978).
- [24] Irwin G.R. (1957). "Analysis of the Stresses and Strains near the End of

- Crack Traversing a Plate”. ASME J. Appl. Mech., 24, pp. 361-364.
- [25] Williams M. L. (1957). “On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack”. Journal of Applied Mechanics; 24: 109-114.
- [26] H. M. Westergaard (1939). “Bearing pressures and cracks”. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 6:49-53.
- [27] Irwin, GR. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. Journal of Applied Mechanics 1957 .24:361-364.
- [28] westergaard,H. M. Bearing Pressure and Cracks.Journal of Applied Mechanics 1939.Vol. 6:49-53.
- [29] Tada, H, Paris, P.C., Irwin, G. R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. Pennsylvania: Del Research Corporation, 1973.
- [30] Jia li, Naman Recho , « Méthodes asymptotique en mécanique de la rupture ». Edition Hermès Lavoisier, paris, 1996.
- [31] MURAKAMI Y. et al. Stress intensity factors handbook . pergamon press, Oxford, 1987.
- [32] H.D.BUI : « Mécanique de la rupture fragile » - Masson, 1978.
- [33] Eshelby, J.D. (1974). “Calculation of energy release rate. In: Prospect of Fracture Mechanics”, pp.69–84, Nordhoff, UK.
- [34] Rice, J.R. (1968). “Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks”. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 35 (2), 379–386.
- [35] A.A. Griffith, (1921). ‘The phenomena of rupture and flow in solids’. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A221, 163-198.
- [36] David Lebaillif, Naman Recho, « Prevision de la rupture en milieu élastique par

- remaillage », 9ème Colloque National Journal AIP PRIMECA, La Plage -5-8 avril 2005.
- [37] SAIB Meriem. Étude et numérique d'une structure fissurée sous contrainte de fatigue.2011. université M'Hamed BOUGARA-Boumerdas.
- [38] MEGDOUD Sofiane. Analyse et calcul par éléments finis étendus (X-FEM).des matériaux fissurées .2011.M'Hamed BOUGARA-Boumerdas.
- [39] J.Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity Kinematics and continuum constitutive equations. International Journal of Solids, 2000.37:7207-7229.
- [40] <http://thesis.univ-beskra.dz/id / eprint /2294>.
- [41] RAHMANI MOHAMED Yacine, Analyse Numérique de la propagation de fissure par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).2016. Université de Annaba.
- [42] LASRY. Jérémie. Calculs de plaques fissurées en Aexion avec la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), Toulouse, 2006.
- [43] Belytschko T; Black T.(1999) « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing “. Int Numer Meth. Eng; 45(5): 601-20.
- [44] Fleming M, Chu YA, Moran B, Belytschko T.(1999).”Enriched-free Galerkin methods for crack tip fields”. Int J Numer Meth Eng; 40(8): 1483 -504.
- [45] T .Belytschko, Y.Y. Lu. GU. (1944). « Element-free Galerkin methods », Inter .J. Numer. Meth .Engrg. 37-229-256.
- [46] Malenk JM, Babuska I.(1999)” The partition of unity finite element method : basic theory and application “ Comput Meth Appl Mech Eng ,139:289-314.
- [47] RAHMANI Abdallah Yacine. Contribution à la modélisation de la fissuration dans les structures en béton par la méthode X-FEM. Université ABOU BAKR BELKAID. Tlemcen.
- [48] Moes N, Dolbow J, Belytschko T. (1999) “A finite element method for crack growth without remeshing “. Int Numer Meth Eng; 46/131-50.

- [49] Dolbow J. (1999) "An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics". Phd thesis, Northwestern University.
- [50] Storska M, Chopp DI, Moes N, Belytschko T. (2001)." Modling crack growth by level sets in the extended finite element method ". *Int J Numer Meth Eng*;51:943-60.
- [51] Belytschko T, Daniel W.J.T and Venture, G. (2002) "A monolithic smoothing-gap algorithm for contact impact based on the signed distance function". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55,101-125.
- [52] Sukumar N, Chopp DI, Moes N, Belytschko T.(2001) " Modling holes and inclusion by level sets in the extended finite element method ". *Comput Meth Appl Mesh ENG*; 190: 6183-2000.
- [53] Moes N, Gravouil A, Belytschko T. (2002) "Non planer 3D crack growth by the extended finite element and level sets part I : mechanical model " *Int Numer Mech Eng* ; 53/ 2549-68.
- [54] Gravouil A, Moes N, Belytschko T.(2002) " Non planer 3D crack growth by the extended finite element and level sets part II : mechanical model " *Int Numer Meth Eng*; 53:2569-86.
- [55] Osher S, Sethian J.(1988). "Fronts propagation with curative dependent speed; algorithms based on Hamilton- Jacobi formulations " *J Comput phy*;79 (1):12-49.
- [56] Sukumar N, Chopp DI, Manor B.(2003). "Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation". *Eng Fract Mech*; 70:29-48.
- [57] Chopp DI, Sukumar N. (2003)." Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element fast marching method ". *Int J Eng Sci*; 41:854-69.
- [58] Moes N, Belytschko T.(2002)." Extended finite element method for cohesive crack growth" .*Eng Fract Mech*; 69/813-33.
- [59] Zi G, Belytschko T.(2003),"New crack tip elements for Xfem and application to

- cohesive cracks” . Int J Numer Mech Eng; 57: 2221-40.
- [60] Bodyn E, Zi G, Moes N, Belytschko T. (2004).”A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing “. Int J Numer Mech Eng; 61:1741-70.
- [61] Zi G, Song J H, Budyn E, Lee S H and Belytschko T, (2004) “A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth”. Modling and simulations for Materiel Science and engineering. 12.901-915.
- [62] Béchet E , Minnebo H , Moes N , Burgerdt B ,(2005) .” Improved implementation and robustness study of the X FEM . fortress analysis around cracks”. Int J Numer meth Eng; 64:1033-56.
- [63] Labored P, Pommier J, Renand Y ,Salaun M , (2005) “high order extended finite element method for cracked domains “ . Int J Numer Meth Eng; 64:354-81 .
- [64] Chahine E , Laborde l , Renard y ,(2005) . a quassi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM CR Acad Sci Paris , Ser I .342/527-32.
- [65] Peters M and Hack K .(2005)“Numerical aspects of the extended finite element method”. Proceeding of applied Mathematics, 5,355-356.
- [66] Ventura G.(2006).”On elimination of quadrature subells for discontinuous functions in the extended finite element method”. Int J Numer Meth Eng; 66:761-95.
- [67] Moes N, Belytschko T. (2002)” Extended finite element for cohesive crack growth” Eng .Frat Mech; 69:831-33.
- [68] Osher S, Sethian J. (1988). “Fronts propagating with curative dependent speed, algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”. J comput phys; 71(1):12-49.
- [69] Sukumar N, Moes N, Maron B , Belytschko T .(2000). “Extended finite element method for three-dimensional crack. Modeling”. Int J Numer Meth Eng; 48:1549-70.
- [70] Wells GN, Stuys LI. De Borst R (2002).” Simulating the propagation of displacement discontinuities a regularized strain-softening medium “. Int. Numer Meth . Eng 53(5): 1235-1256.

- [71] Stazi F, Budyn E, Chessa J, Belytschko T.(2003).” An extended finite element method with high-order elements for curved cracks”. *Computational Mechanics*, vol 31,pp .38-48.
- [72] Bechet E, Minnebo H, Burgardt B.(2005).”Improved Implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks”. *Int J NumerMeth Eng* ; 64:1033-56.
- [73] Laborde P, Pommier J, Renard Y , Salaun M.(2005). « High order extended finite element method for cracked domains ». *Int J. Numer Meth Eng*; 64:35-81.
- [74] Zi G, Belytschko T.(2003).” New crack-tip element for X-FEM and application to cohesive cracks”. *Int J NumerMeth Eng*; 57:2221-40.
- [75] ABAQUS documentation version 6.11.
- [76] Thèse, Marie Pierre FOULC, durabilité des assemblages par colles : état de L’art. (2008).
- [77] Eric Cavazos, Robert Khan. *Fracture and Bending Mechanics*. First Edition, Academic Studio, 4735/22 Prakashdeep Bldg, Delhi – 110002, (2012).