

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET**

---



**FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES**  
**DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL**

**Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master**

Spécialité : Génie Civil

Option : V.O.A

Présenté par :

ZABOUR Chahrazed

HAMEL Mohamed Amine

*Sujet du mémoire*

**VIBRATION DES POUTRES EN FGM**

*Soutenu publiquement le .....devant le jury composé de :*

Mr, H. H. ABDELAZIZ

Président

Mr, Y. TLIDJI

Rapporteur

Mr, K. DRAICHE

Examineur

Mme, Z. KHELIFA

Examineur

PROMOTION : 2019-2020

# Résumé

---

La plupart des analyses des matériaux fonctionnellement gradués utilisent la loi de puissance, qui présente des concentrations de contraintes aux interfaces lorsque les propriétés matérielles changent rapidement. L'objectif de ce travail est d'utiliser deux fonctions une symétrique et l'autre antisymétrique et comparer leurs effet sur la vibration avec la fonction de puissance. Les fonctions proposées sont la loi de puissance symétrique et la fonction sigmoïde antisymétrique. Les relations cinématique de plusieurs théories de poutre sont supposées et le principe d'Hamilton est utilisé pour dériver les équations du mouvement. Les résultats numériques montrent l'effet de l'indice de puissance et le rapport longueur-épaisseur sur les fréquences de vibration d'une poutre en FGM.

**Mots clés** : Poutre, Vibration, Loi de distribution, Fréquences.

# Abstract

---

Most analyses of functional graded materials (FGM) focusing on power law distribution, which presents stress concentration at the interface when material properties change rapidly. The objective of the current work is to use two symmetric and anti-symmetric functions and compare their effects on the vibration with classical power-law distribution. The proposed distributions are a symmetric power-law and a sigmoid function which is anti-symmetric. Kinematic relation of various beam theories are assumed and Hamilton's principle is proposed to derive the equations of motion. Numerical results present the effect of power exponent, and slenderness ratios on frequencies of FG beams.

**Key words:** Beam, Vibration, Law distribution; Frequencies

## ملخص

---

معظم الدراسات التحليلية للمواد المتدرجة وظيفيا تهتم بصفة خاصة بالتوزيع الاسي المؤدي الى تركيز القوة عند الواجهات خاصة عند التغير الفجائي لخصائص المادة

الهدف من هذا العمل هو استخدام معادلتين اسيتين الأولى متناظرة والثانية غير متناظرة و مقارنة تأثيرهما على الاهتزاز الأولي

للمسند

اعتمادا على مبدا هاميلتون نستخرج المعادلات الحركية. النتائج الرقمية تبين تاثير المعاملين  $(p, \frac{L}{h})$ . على ترددات الاهتزاز لمسند مصنف وظيفيا..

**الكلمات المفتاحية:** العارضة، الإهتزاز، قانون توزيع، ترددات

# Table de matière

---

Résumé .....	i
Abstract .....	ii
ملخص .....	iii
Table de matière .....	iv
Liste des figures.....	vii
Listes des tableaux.....	viii
Liste des symbole .....	ix
Introduction générale.....	1
Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM.....	3
1.1 Introduction : .....	3
1.2 Définition :.....	3
1.3 Historique : .....	4
1.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués : .....	5
1.4.1 Aérospatial :.....	5
1.4.2 Médecine : .....	5
1.4.3 Défense : .....	6
1.4.5 Énergie nucléaire : .....	6
1.4.6 Optoélectronique : .....	6
1.4.7 Autres domaines d'application : .....	6

1.5	Type des matériaux fonctionnellement gradués : .....	7
1.5.1	Gradient de composition chimique des Matériaux FGM : .....	7
1.5.2	Gradient de porosité des Matériaux FGM : .....	8
1.5.3	Gradient de la microstructure des Matériaux FGM : .....	9
1.6	Propriétés matérielles des poutres FGM : .....	9
1.6.1	Fonction de puissance(P-FGM) : .....	10
1.6.2	Fonction sigmoïde(S-FGM) : .....	11
1.6.3	Fonction exponentielle (E-FGM) : .....	11
1.6.4	Fonction puissance symétrique SP-FGM : .....	12
1.7	Loi de mélange : .....	13
1.8	Conclusion .....	14
Chapitre 2.	Théories des poutres .....	15
2.1	Introduction : .....	15
2.2	Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués .....	15
2.3	Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres : .....	16
2.3.1	-Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) : .....	17
2.3.2	Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FSDBT): .....	19
2.3.3	Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT) : .....	20
2.4	Conclusion : .....	22

---

Table de matière

---

Chapitre 3.	Formulation mathématique.....	23
3.1	Introduction : .....	23
3.2	Modèle mathématique : .....	23
3.3	Champ de déplacement : .....	24
3.4	Le champ des contraintes : .....	25
3.5	Équation du mouvement.....	27
3.6	Solution de Navier.....	29
3.7	Conclusion.....	31
Chapitre 4.	Résultatset discussions .....	32
4.1	Introduction .....	32
4.2	Résultats numériques et discussion .....	32
4.3	Effet du rapport R.....	38
4.4	Conclusions .....	42
Conclusion générale.....		44

# Liste des figures

---

<b>Figure (1.1)</b>	Matériau FGM poreux. ....	9
<b>Figure (1.2)</b>	Géométrie d'une poutre FGM. ....	10
<b>Figure (1.3)</b>	Lois de puissance (P-FGM). ....	10
<b>Figure (1.4)</b>	Fonction sigmoïde S-FGM. ....	11
<b>Figure (1.5)</b>	Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM). ....	12
<b>Figure (1.6)</b>	Lois de puissance symétrique (SP-FGM). ....	12
<b>Figure (1.7)</b>	Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel. ....	13
<b>Figure (2.1)</b>	Schéma d'un élément de poutre (Berthelot 2012).....	16
<b>Figure (2.2)</b>	cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.....	18
<b>Figure (2.3)</b>	Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort 2001).....	19
<b>Figure (2.4)</b>	: Cinématique de la poutre d'ordre élevé. ....	21
<b>Figure (3.1)</b>	Géométrie d'une poutre en FGM. ....	23
<b>Figure (4.1)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.....	37
<b>Figure (4.2)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles poutre ..... .	37
<b>Figure (4.3)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.....	40
<b>Figure (4.4)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles poutre $R=2$ ..... .	41
<b>Figure (4.5)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.....	41
<b>Figure (4.6)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.....	42

# Listes des tableaux

---

<b>Tableau (4.1)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, ( $L/h=5$ ).....	33
<b>Tableau (4.2)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, ( $L/h=20$ ).....	33
<b>Tableau (4.3)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre SP-FGM, ( $L/h=5$ ).....	34
<b>Tableau (4.4)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre SP-FGM, ( $L/h=20$ ).....	34
<b>Tableau (4.5)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre S-FGM, ( $L/h=5$ ).....	34
<b>Tableau (4.6)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre S-FGM, ( $L/h=20$ ).....	34
<b>Tableau (4.7)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles en mode axial et de cisaillement.....	35
<b>Tableau (4.8)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, en fonction du rapport R	38
<b>Tableau (4.9)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre SP-FGM, en fonction du rapport R	39
<b>Tableau (4.10)</b>	Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre S-FGM, en fonction du rapport R	39

# Liste des symboles

---

$V(z)$  : Fraction volumique

$E(z)$ : Module de Young en fonction de l'épaisseur

$E_m$ : Module Young (Métal)

$E_c$ : Module Young (Céramique)

$k$  : Indice de puissance, Paramètre de puissance

$\rho_z$  : Masse volumique en fonction de l'épaisseur

$\rho_m$  : Masse volumique (Métal)

$\rho_c$  : La masse volumique (Céramique)

$h$  : Épaisseur de la poutre

$L$  : Longueur de la poutre

$\sigma_x, \tau_{xz}$  : Composantes des contraintes

$\varepsilon_x, \gamma_{xz}$  : Composantes des déformations

$Q_{ij}$  : Coefficient de rigidité réduite

$\nu$  : Coefficient de Poisson

$u$  : Déplacement suivant  $x$

$w$  : Déplacement suivant  $z$

$u_0, w_0$  : Déplacements au niveau du plan moyen ( $z = 0$ )

$f(z)$  : La fonction de forme (Fonction de gauchissement)

$\phi$  : Rotation de la normale

$(x)'$  : Dérivée par rapport à  $x$

$f'(z)$  : La première dérivée de la fonction de forme

$\delta$  : Variationnel

$E$  : Énergie de déformation

$T$  : Énergie cinétique

$N_x$  : Effort normal

$M_x$  : Moments de flexion

$S_x$  : Moment supplémentaire du cisaillement transverse

$Q_{xz}$  : Effort de cisaillement

$\partial$  : Dérivée partielle

$A_{11}, B_{11}, D_{11}$  : Coefficients de rigidité d'extension

$A_{11}^a, B_{11}^a, F_{11}^a$  : Coefficients de rigidité de flexion

$A_{55}^s$  : Coefficients de rigidité de cisaillement transverse

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$  : moment d'inertie

$m$  : Nombre de mode

$\omega$  : Fréquence de vibration

$\varpi$  : Fréquence de vibration adimensionnelle en mode flexion

$\varpi_a$  : Fréquence de vibration adimensionnelle en mode axial

$\omega_s$  : Fréquence de vibration adimensionnelle en mode de cisaillement

$[K]$  : Matrice de rigidité

$det$  : Déterminant

$[ ]$  : Matrice

$\{ \}$  : Vecteur

$[M]$  : Matrice de masse

## Introduction générale

Les matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material* "F.G.M"); sont des matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans une direction donnée pour obtenir un profil bien déterminé. Le processus de graduation de ce type de matériaux peut créer de produit industriels avec des propriétés continue, évitant ainsi les phénomènes de concentration des contraintes, de fissuration et de délaminage survenus dans les composites conventionnels.

Au cours des dernières années, les matériaux à gradient de propriétés ont littéralement envahi le monde de la recherche académiques dans les domaines les plus divers des sciences des matériaux. Plusieurs axes sont abordés par les chercheurs, principalement focalisées sur le développement des théories et l'élaboration des méthodes de résolution permettant l'analyse des structures en FGMs.

Le comportement statique et dynamique des structures en FGM sont été étudié par l'utilisation des diverses théories allant de la théorie classique des poutres et des plaques aux théories d'ordre élevés de déformation en cisaillement. Les équations différentielles obtenus sont résolus par des méthodes analytiques (solution de Navier, méthode de Levy) et numérique (Méthode de RAYLEIGH-Ritz, méthode des éléments finis).

Les chercheurs disposent de diverses lois de distribution décrivant la variation des propriétés matériels des structures en FGM ; généralement a travers leurs l'épaisseur. La plupart des études des matériaux fonctionnellement gradués utilisent la distribution en loi de puissance (PFGM), présentant une concentration des contraintes lorsque les propriétés varient rapidement.

L'objectif du présent travail est d'utiliser deux lois de distribution, la première est symétrique (la loi de puissance symétrique, SP-FGM) et la deuxième est antisymétrique (la loi sigmoïde, SFGM), et comparer leurs effets avec la loi de puissance sur le comportement vibratoire d'une poutre en FGM.

Pour atteindre cet objectif, notre mémoire s'articule sur quatre chapitres. Le premier chapitre présente les matériaux fonctionnellement gradués, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. Le deuxième chapitre est consacré pour la présentation des différentes théories de déformation des poutres, en commençant par les théories les plus anciennes telles que la théorie classique et la théorie du premier ordre, puis les plus utilisées et enfin les plus récentes.

Dans le troisième chapitre une formulation mathématique du problème de vibration libre des poutres FG en utilisant une théorie d'ordre élevée été développée. Trois lois de distribution décrivent les caractéristiques du matériau de la poutre à travers l'épaisseur. Les équations de mouvement sont obtenues selon le principe d'Hamilton. Ces équations sont résolues par la solution de Navier.

Le quatrième chapitre détail les résultats obtenus pour l'analyse de vibrations libre des poutres rectangulaires simplement appuyées en FGM. Ce travail s'achèvera par une conclusion générale qui résumera l'ensemble des travaux et permet aussi de revenir sur les résultats importants mis en avant ainsi que des perspectives.

# Chapitre 1. Généralités sur les matériaux FGM

## 1.1 Introduction :

Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose alors le problème de l'interface. Cette transition brutale de compositions peut générer localement de fortes concentrations de contraintes.

La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

Les matériaux FGM sont des matériaux fonctionnellement gradués, microscopiquement non-homogènes. Ils sont fabriqués généralement à partir d'un mélange de métal et de céramique.

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

## 1.2 Définition :

Un matériau FGM représente une combinaison de deux matériaux ou plus (généralement métal +céramique). Un FGM produit en changeant sans interruption les fractions volumiques dans la direction de l'épaisseur pour l'obtention d'un volume bien déterminé.

Généralement, les FGM sont fabriqués à partir des matériaux isotropes tels que les céramiques et les métaux. Un FGM permet de combiner plusieurs caractéristiques telles que la légèreté, la bonne résistance mécanique et chimique, une maintenance réduite, une dureté plus élevée de rupture, et réduit les facteurs d'intensité d'effort.

### 1.3 Historique :

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé une vaste recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques ». L'intérêt du projet est d'améliorer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux.

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux doivent supporter des températures de surface de 1800°C, ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;

Ténacité du matériau coté basse température ;

Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Alors l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température). A la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K.

Dans la seconde étape, le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape.

Enfin, en 1990 la conférence internationale qui s'est tenue à Sendai, la technologie des FGM a vu le jour, et devenue non seulement au niveau des nations, mais aussi au niveau mondiale.

### **1.4 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués :**

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que :

#### **1.5 Aérospatial :**

Le secteur de l'aérospatiale est l'un des secteurs qui montre plus d'intérêt au développement des FGM. NASA et la JAXA ont montré un grand intérêt au développement de cette technologie. Comme le coût de lancement des navettes spatiales dépend du poids qu'ils soulèvent dans l'espace, la création de pièces avec des éléments de connexion moins est une solution.

En outre, la conception optimale, l'équilibre entre le poids et la performance peut réduire les coûts de lancement. La performance et la sécurité sont toujours très préoccupantes dans l'aérospatiale. La protection de bouclier thermique des navettes spatiales pourrait être optimisée pour réduire le poids et augmenter la fiabilité en utilisant des plaques FGM.

Bhatt, 1989 a montré l'utilisation de céramiques à base de nitrure de silicium pour les aubes de distributeur de turbine.

#### **1.6 Médecine :**

Le but d'utiliser les FGM pour produire des implants est d'utiliser les propriétés mécaniques des alliages, céramiques et composites gradué avec des matériaux biocompatibles. Ainsi, un implant osseux peut être constitué par un matériau solide et dur dans le noyau avec le tissu osseux gradué compatible à la surface et un matériau de faible coefficient de frottement dans les articulations.

Kumar et Maruno (2002) ont également ajouté le verre à la poudre d'hydroxyapatite et des implants en titane revêtus pour une meilleure biocompatibilité.

### 1.7 Défense :

Dans la demande de défense, tels que des plaques de blindage et des gilets pare-balles, la pénétration des matériaux résistants est nécessaire. Une des caractéristiques les plus importantes du matériau à gradient fonctionnel est la capacité à inhiber la propagation des fissures, ce qui rend les matériaux à gradient fonctionnel appropriés pour les applications de défense.

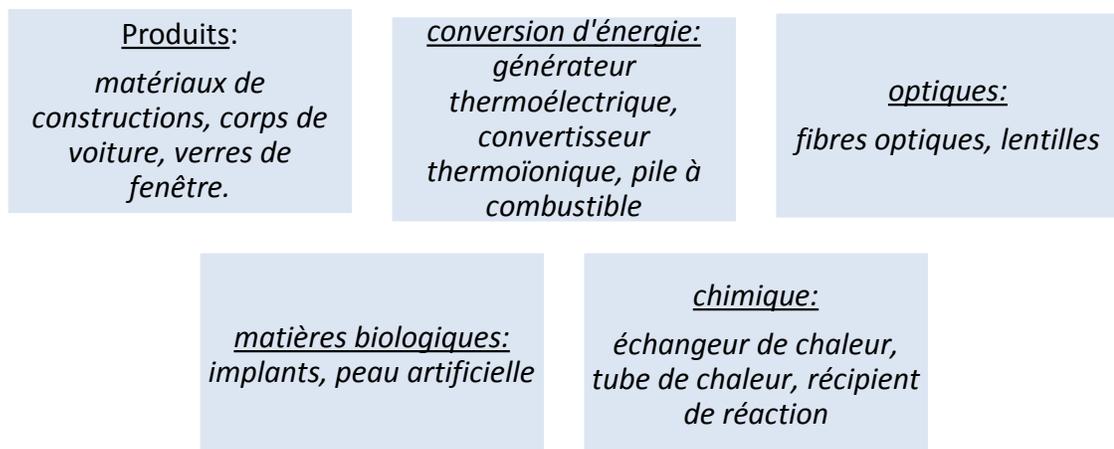
### 1.8 Énergie nucléaire :

Les FGM sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Ils fournissent également une barrière thermique et ils sont utilisés comme revêtement de protection sur des aubes de turbine dans le moteur à turbine à gaz et aussi dans le générateur thermoélectrique, pile à combustible, réacteurs nucléaires, pastilles de combustible

### 1.9 Optoélectronique :

Les FGM trouvent aussi leur application dans l'optoélectronique comme les matériaux à indice de réfraction gradués et des disques audio-vidéo ; support de stockage magnétique, semi-conducteur à bande graduée.

#### 1.9.1 Autres domaines d'application :



### **1.10 Type des matériaux fonctionnellement gradués :**

Au début du développement des matériaux FGM, le concept était d'éliminer l'interface nette qui existait dans le matériau composite traditionnel et de la remplacer par une interface progressivement variable, qui s'expliquait par la composition chimique changeante de ce composite dans cette région d'interface. L'intérêt progressif pour ce type de matériaux a conduit à la mise au point de différents types de FGM. Le type d'application étudiée détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types des matériaux FGM en cours de production comprennent à présent le gradient de composition chimique, le gradient de porosité et le gradient de la microstructure. Chacun de ces types des matériaux FGM est décrit en détail dans les sections suivantes.

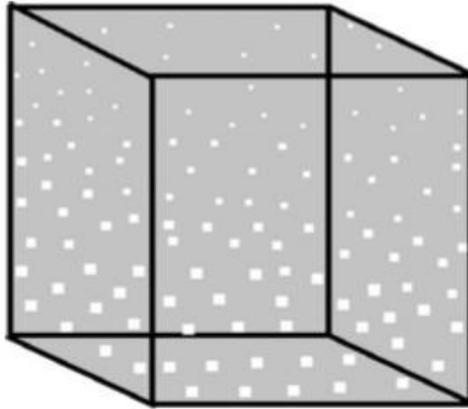
#### **1.10.1 Gradient de composition chimique des Matériaux FGM :**

Il s'agit d'un type des matériaux FGM, dans lesquels la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Une FGM monophasée est produite lorsque le composite est fabriqué à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement lors du processus de frittage [Bhartiet al. 2013]. Le changement graduel de la répartition des éléments chimiques dans la phase unique entraîne la formation du matériau fonctionnellement gradué. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajoutée à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de composition et des conditions de mélange. Ce matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau monophasé mais de composition chimique variable en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins habituel. Les matériaux FGM les plus couramment conçus et les plus habituellement utilisés sont ceux qui ont une composition chimique multi phase [Mahmoud et al. 2012,2015]. Les phases et la composition chimique on fait varier à travers le volume apparent du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui permettraient de réaliser l'application souhaitée, pour laquelle la FGM a été conçue. Les

différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique appliqué à ce matériau. Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM est en plaçant la couche par couche de composition de poudre requise, et cela est suivi par le compactage et le frittage de la poudre par la suite. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques vont réagir pour former différents composés et phases chimiques. Celles-ci varieraient en fonction de la position spatiale dans le matériau fonctionnellement gradué.

### **1.11 Gradient de porosité des Matériaux FGM :**

Le Gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématique du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la Figure I.5. Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores. Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité ou un gradient de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.



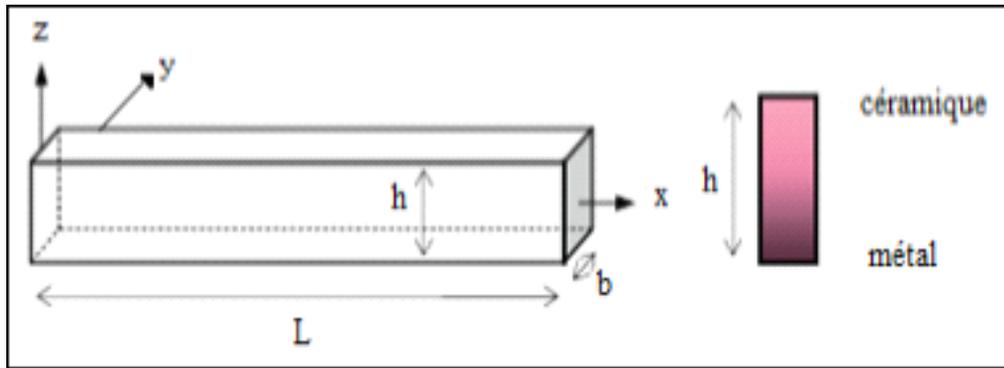
**Figure (1.1)** Matériau FGM poreux.

### **1.12 Gradient de la microstructure des Matériaux FGM :**

Un matériau fonctionnellement gradué de gradient microstructural est un autre type de FGM, dans lequel la microstructure est conçue de manière à produire différentes microstructures dans le matériau, qui sont amenées à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue pendant le processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est laissé refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles situées à la surface du matériau et à la partie la plus interne. De plus, la gradation microstructurale peut être obtenue par un processus de traitement thermique contrôlé.

### **1.13 Propriétés matérielles des poutres FGM :**

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Considérons une poutre de longueur  $L$ , de section rectangulaire avec la largeur  $b$  et l'épaisseur  $h$  comme représenté sur la (figure 1.1).



**Figure (1.2)** Géométrie d'une poutre FGM.

**1.13.2 Fonction de puissance(P-FGM) :**

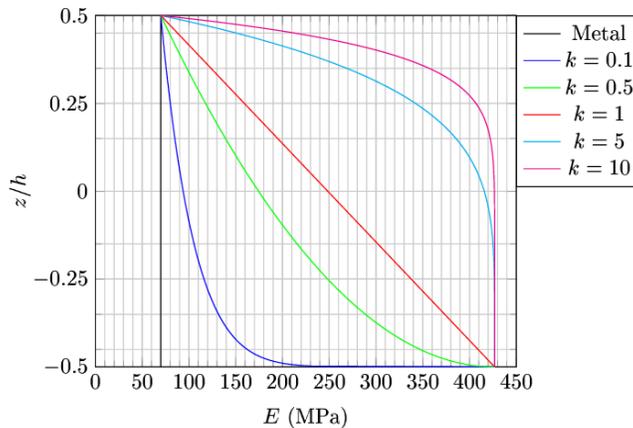
La première fonction les propriétés matérielles obéit à une fonction en loi de puissance (P-FGM) comme suit [Kolahchi *et al.* 2015, Bennai *et al.* 2015] :

$$P_e = P_m V_m + P_c V_c \tag{1.1}$$

$P_m, P_c$  sont les propriétés du métal et de la céramique,  $V_m$  et  $V_c$  représentent les fraction volumique du métal et de la céramique définies par

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k \tag{1.2.a}$$

$$V_m = 1 - V_c \tag{1.2.b}$$



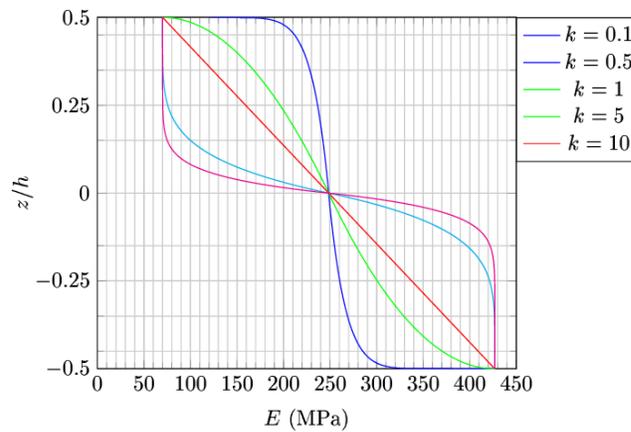
**Figure (1.3)** Lois de puissance (P-FGM).

### 1.14 Fonction sigmoïde(S-FGM) :

La troisième fonction utilisée dans cette étude est la fonction sigmoïde (S-FGM), (Aldousari (2017), Bouguenina et al. 2015).

$$P_e = P_m + \frac{1}{2}(P_m - P_c) \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k \left(\frac{-h}{2} \leq z \leq 0\right) \quad (1.3.a)$$

$$P_e = P_m + \frac{1}{2}(P_m - P_c) \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2}\right) \quad (1.3.b)$$



**Figure (1.4)** Fonction sigmoïde S-FGM.

La distribution du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM, SP-FGM et distribution sigmoïdale est présentée aux Fig. 2, 3 et 4, respectivement.

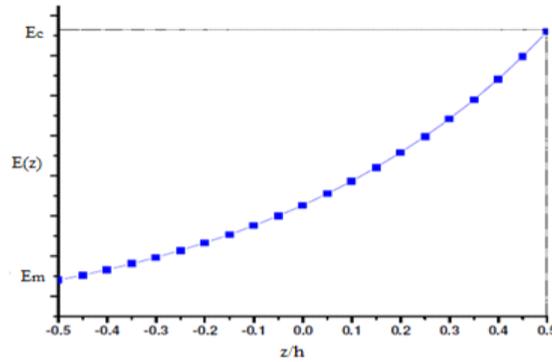
### 1.15 Fonction exponentielle (E-FGM) :

La fonction exponentielle est utilisée pour décrire les propriétés matérielles d'une poutre FGM ; elle s'écrit comme suit (Delale et Erdogan 1983) :

$$E(z) = E_m \cdot e^{\beta(z+h/2)} \quad (1.4)$$

Avec :

$$\beta = 1/h \cdot \ln(E_c/E_m)$$



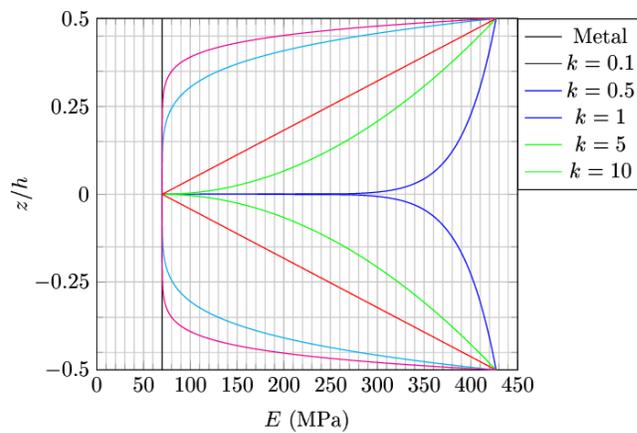
**Figure (1.5)** Variation du module de Young en fonction de l'épaisseur (E-FGM).

**1.15.2 Fonction puissance symétrique SP-FGM :**

La loi de puissance symétrique modifiée (S-P-FGM), Aldousari (2017), a la forme suivante :

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left(\frac{-2z}{h}\right)^k \left(\frac{-h}{2} \leq z \leq 0\right) \tag{1.5.a}$$

$$P_e = P_c + (P_m + P_c) \left(\frac{2z}{h}\right)^k \left(0 \leq z \leq \frac{h}{2}\right) \tag{1.5.b}$$



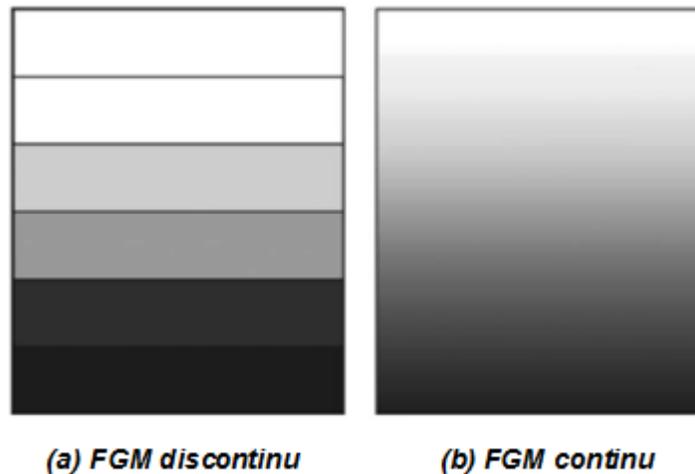
**Figure (1.6)** Lois de puissance symétrique (SP-FGM).

### 1.16 Loi de mélange :

Plusieurs approches sont utilisées pour décrire la variation matérielle du FGM qui sont fabriqués à partir de deux phases de matériaux. En général, la plupart des approches sont basées sur la distribution de la fraction volumique plutôt que développé à partir de microstructures classées réelles[Bao et Wang, 1995 ; Shen, 2009]. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants (figure1.7a).

Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé, et celle du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ )(figure1.7b).

Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 1.6a).



**Figure (1.7)**    Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel.

### **1.17 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés (FGM), leurs propriétés, leurs domaines d'application, l'histoire de leur développement.

La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être utilisées dans de nombreux domaines d'application.

Enfin nous avons terminé par la présentation des différentes lois qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM suivant l'épaisseur de la poutre. Ces lois pouvaient être sigmoïdes, exponentielles ou même loi de puissance.

# Chapitre 2. Théories des poutres

## 2.1 Introduction :

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).

Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). L'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.

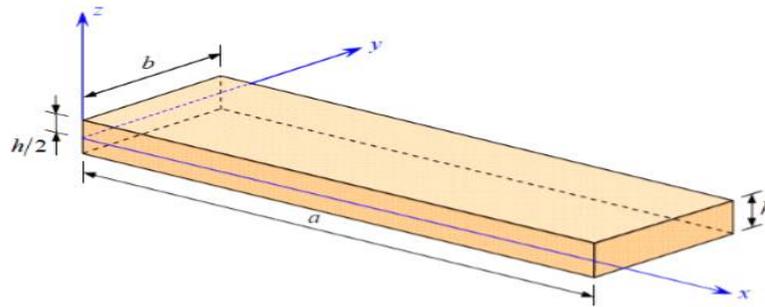
Nous sommes intéressés uniquement, dans ce chapitre, à l'analyse vibratoire des structures de type « poutre ».

Un résumé sur le phénomène de la propagation des ondes est présenté à la fin de ce chapitre.

## 2.2 Les modèles des poutres pour les matériaux fonctionnellement gradués

Le terme « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande comparée aux dimensions transverses (section fine) (figure 2.1). Une poutre est un élément de structure utilisée dans la construction des bâtiments, des navires, autres véhicules et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines normes. Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés [les prismes dont la longueur vaut 10

fois la plus grande dimension transversale]. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements (SALLAI, 2011).



**Figure (2.1)** Schéma d'un élément de poutre (Berthelot 2012)

**Définition du cisaillement :** Le cisaillement est une notion très importante et ce paragraphe vise à expliquer le plus clairement possible en quoi il consiste. Par soucis de simplicité l'exemple qui suit traite d'une poutre homogène et isotrope dont l'axe longitudinal est « x ».

Lorsqu'une charge dirigée vers les « z » positifs est appliquée à l'extrémité droite de la poutre, elle induit un moment de flexion et du cisaillement et se déforme vers le haut selon une certaine courbe :

### 2.3 Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres :

- *L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres (Coffignal 2001) est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement".*
- *L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".*

- *L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.*

- *L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.*

### **Remarques :**

1) *L'hypothèse énoncée de Navier montre que la section reste plane. Il n'est donc pas imposé a priori que la section reste perpendiculaire à la ligne moyenne.*

2) *L'hypothèse de Navier n'est pas suffisante pour définir l'état de contrainte dans une section droite. Des hypothèses supplémentaires doivent être faites pour passer des "contraintes généralisées" (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant) aux contraintes en chaque point de la section droite.*

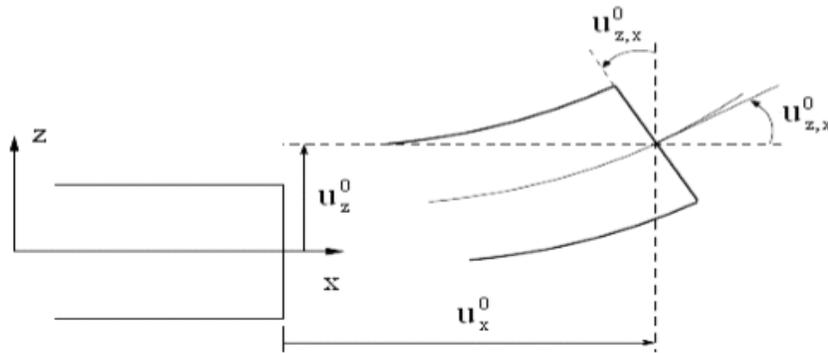
*Dans notre travail on utilise les modèles d'Euler Bernoulli, Timochenko et quelques modèles d'ordre élevé.*

### **2.3.1 -Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory- CBT) :**

Cette théorie est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement.

Comme hypothèse de cette théorie, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées car il n'existe pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre,

« La section reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre de la poutre avant et après la déformation » (Fig. 2.2).



**Figure (2.2)** cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli

La répartition de déplacement (le gauchissement) est décrite par la fonction nulle :

D'après la CBT ; le champ de déplacement de n'importe point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0 - zu_{0,x}(x) \\ w(x, z) = w_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec :

$u(x, z)$ : C'est le déplacement suivant X et  $w(x, z)$  est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

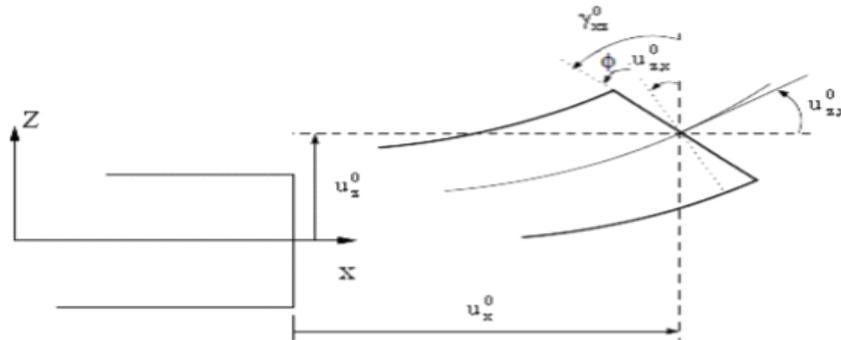
$$w_{0,x}(x) = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

$u_0(x)$  et  $w_0(x)$  sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

### 2.3.2 Modèle de Timoshenko (First shear deformation beam theory-FSDBT):

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle est basée sur le principe : « qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre » (Timoshenko 1972) (Fig2.3).



**Figure (2.3)** Cinématique de la poutre de Timoshenko (Dufort 2001)

Dans le cas où nous avons un élancement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction s'écrit comme suit :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - w_0, x(x) + z\gamma_{xz}^0 & (x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT). Le champ de déplacements de Timoshenko s'écrit alors

Avec :

$\gamma_{xz}^0$ , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0 = w_x^0(x) - \varphi^0(x) \quad (2.5)$$

$\varphi^0(x)$ , Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

La contrainte de cisaillement est :

$$\tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}^0 \quad (2.7)$$

$G_{xz}$ , est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant

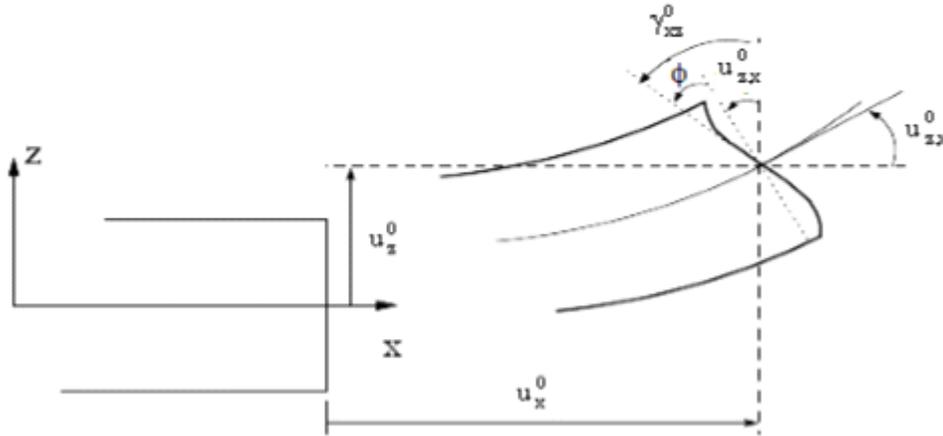
La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique.

Le non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs ; c'est "la théorie d'ordre élevé".

### **2.3.3 Modèle d'ordre élevé (High shear deformation beam theory HSDBT) :**

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ».

Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité. La fonction représente le gauchissement et sa dérivée représente le cisaillement (figure 2.4).



**Figure (2.4)** : Cinématique de la poutre d'ordre élevé.

Le champ de déplacement devient :

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir :

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - zw_{0,x}(x) + \varphi(z)\gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = -w^x(x) + \varphi'(z)\gamma_{xz}^0(z) + w_{0,x}(x) \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xz(x)} = \varphi'(z)\gamma_{xz}^0(x) \quad (2.10)$$

Cette condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition.

- ***Quelques modèles de gauchissement :***

- *Approche de Levinson 1980, Murthy 1981 et Reddy 1945*  $f(z) = z \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{3 \cdot h^2}\right)$
- *Modèle exponentiel proposé par Afaq et al* :  $f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
- *L'approche de Reissner 1945* :  $f(z) = \frac{5}{4} z \left(1 - \frac{4 \cdot z^2}{3 \cdot h^2}\right)$
- *Touratier* :  $f(z) = \left(\frac{z}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{h}\right)$

#### 2.4 Conclusion :

Dans cette partie de la recherche ; nous avons présenté les différents types des théories des poutres telles que la théorie de Bernoulli (CBT), Timochenko (FSDBT) et la théorie d'ordre élevé (HSDBT).

On a aussi présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter.

# Chapitre 3. Formulation mathématique

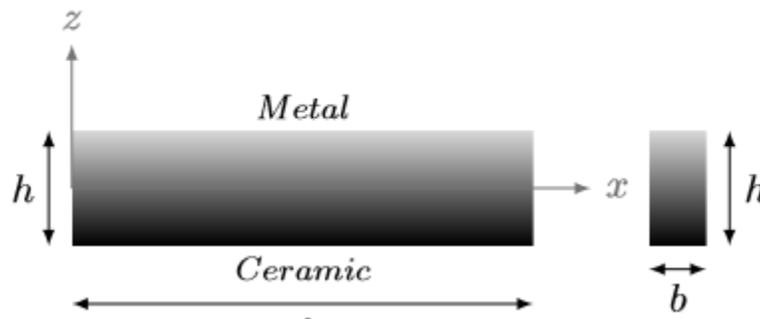
## 3.1 Introduction :

Avec l'utilisation croissante des matériaux avancés dans les éléments de structures a éveillé l'intérêt des chercheurs à l'étude de la réponse des structures fonctionnellement graduées (FG). Les propriétés mécaniques des poutres varient graduellement à travers l'épaisseur suivant trois loi de distribution.

Dans l'analyse vibratoire les équations de mouvement sont déterminées à l'aide du principe d'Hamilton.

## 3.2 Modèle mathématique :

Les propriétés du FGM varient de façon continue en fonction de la fraction volumique des matériaux suivant la direction de l'épaisseur  $h$  d'une poutre de longueur  $L$ .



**Figure (3.1)** Géométrie d'une poutre en FGM.

La fonction de la fraction volumique du P-FGM obéit cette loi de puissance :

$$v(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (3.1)$$

$v(z)$ : est la fonction de la fraction volumique

$k$  : indice de fraction volumique ;

$h$  : épaisseur de la poutre ;

$z$  : la coordonne suivant l'épaisseur

En se reposant sur la loi de mélange on peut exprimer les propriétés effectives ; tel que le module de Young  $E$  et masse volumique  $\rho$ .

$$E(z) = E_1 \times v(z) + (1 - v(z)) \times E_2^k \quad (3.2a)$$

$$\rho(z) = \rho_1 \times v(z) + (1 - v(z)) \times \rho_2 \quad (3.2b)$$

### 3.3 Champ de déplacement :

Le champ de déplacement de n'importe quel point M est le suivant :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi(x) \quad (3.3a)$$

$$u(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.3b)$$

Ou  $u_0(x, t)$ ,  $w_0(x, t)$  sont les déplacements dans les directions  $x, z$ . et  $\phi(x)$  est une fonction inconnue, qui représente l'effet de la déformation en cisaillement transverse sur le plan moyen. Et  $f(z)$  représente la fonction de forme de distribution des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre.

Dans notre travail nous utilisons les théories suivantes :

Euler Bernoulli:  $f(z) = 0$

Timoshenko:  $f(z) = z$

Reddy (HBT1) :  $f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$

Touratier(HBT2) :  $f(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{z\pi}{h}\right)$

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \quad (3.4a)$$

$$\gamma_{xz} = f'(z) \phi_0(x) \quad (3.4b)$$

### 3.4 Le champ des contraintes :

En utilisant les relations suivantes on peut déduire le champ des contraintes :

$$\sigma_x = Q_{11} \times \varepsilon_x \quad (3.5a)$$

$$\tau_{xz} = Q_{55} \times \gamma_{xz} \quad (3.5b)$$

Avec :

$$Q_{11} = E(z) \quad (3.6a)$$

$$Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1-\nu^2)} \quad (3.6b)$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (3.7a)$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \times \sigma_x dz \quad (3.7b)$$

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) \times \sigma_x dz \quad (3.7c)$$

$$Q_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(z) \times \tau_{xz} dz \quad (3.7d)$$

Les résultats supplémentaires  $S_x$  et  $Q_{xz}$  sont dus à l'introduction de  $f(z)$  dans l'expression du champ de déplacement sont :

$N_x$ : Effort normal.

$M_x$ : Moment fléchissant

$S_x$ : Moment supplémentaire du au cisaillement transversal

$Q_{xz}$  = Effort de cisaillement

Nous obtenons les relations fondamentales suivantes

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ S_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B_{11}^a \\ B_{11} & D_{11} & B_{11}^a \\ B_{11}^a & D_{11}^a & F_{11}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\phi_0(x)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$Q_{xz} = A_{55}^s \times \phi_0(x) \quad (3.9)$$

Les coefficients de rigidité d'extension et de flexion sont donnés par les expressions :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q \times (1, z, z^2) \quad dz \quad (3.10a)$$

$$(B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} \times f'(z) \times (1, z, f(z)) \quad dz \quad (3.10b)$$

Le coefficient de rigidité de cisaillement transverse est donné par l'expression :

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} \times f'(z)^2 \quad (3.11)$$

### 3.5 Équation du mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé pour obtenir les équations du mouvement.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U_e - T) \quad dt \quad (3.12)$$

Avec :

$U_e$ : Énergie de déformation.

$T$ : Énergie cinétique

L'énergie de déformation  $U_e$  s'écrit en coordonnées cartésiennes suivant :

$$U_e = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad dx dz \quad (3.13)$$

La variation de l'énergie de déformation  $U_e$  s'écrit

$$\delta U_e = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \quad dx dz \quad (3.14)$$

Ou encore :

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \int \left( N_x \cdot \frac{\partial \delta u_0(x)}{\partial x} - M_x \cdot \frac{\partial^2 \delta w_0(x)}{\partial x^2} + S_x \cdot \frac{\partial \delta \phi_0(x)}{\partial x} \right) dx \quad (3.15)$$

Et l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dz \quad (3.16)$$

La variation de l'énergie cinétique s'écrit

$$\delta T = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) \right] dx dz \quad (3.17)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \delta T = \frac{1}{2} \int & \left[ I_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \right) \right. \\ & + I_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + \\ & \left. I_4 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} \right) - I_5 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} \right) - I_6 \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

en faisant l'intégration par partie de l'énergie de déformation (3.18) et l'énergie cinétique(3.21), tout en conservant alors le second terme sous forme intégrale, nous obtenons leséquations du mouvement.

$$N_{x,x} = (I_1 u_0 - I_2 w_{0,x} + I_4 \phi_0)_{,tt} \quad (3.19a)$$

$$M_{x,xx} = (I_2 u_{0,x} - I_3 w_{0,xx} + I_1 w_0 + I_5 \phi_{0,x})_{,tt} \quad (3.19b)$$

$$S_{x,x} - Q_{xz} = (-I_4 u_0 - I_5 w_{0,x} + I_6 \phi_0)_{,tt} \quad (3.19c)$$

Ou désigne les dérivés de temps et  $I$  sont les moments d'inertie comme suit :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2, f(z), z \cdot f(z), f(z)^2) dz \quad (3.20)$$

Pour une poutre en appuis simples, les conditions aux frontières en  $x = 0$  et  $x = \ell$  sont :

$$\delta u = 0 \quad \text{Ou} \quad N_x = 0 \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0 \quad \text{Ou} \quad M_x = 0 \quad (3.21b)$$

$$\delta w = 0 \quad \text{Ou} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (3.21c)$$

$$\delta \phi = 0 \quad \text{Ou} \quad S_x = 0 \quad (3.21d)$$

### 3.6 Solution de Navier

Une solution de type Navier de (3.19), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$u_0 = A_m \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) e^{i\omega t} \quad (3.22a)$$

$$w_0 = B_m \sin \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right) e^{i\omega t} \quad (3.22b)$$

$$\phi_0 = C_m \cos \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right) e^{i\omega t} \quad (3.22c)$$

Avec :  $A_m; B_m; C_m$  sont des coefficients indéterminés.

En reportant ces expressions dans les équations (3.19), il vient :

$$\left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Où  $[K_{ij}]$  est la matrice de rigidité symétrique et  $[M_{ij}]$  est la matrice de masse symétrique, les éléments des deux matrices sont exprimées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} K_{11} &= A_{11} \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)^2 \\ K_{12} &= K_{21} = -B_{11} \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)^3 \\ K_{13} &= K_{31} = B_{11}^a \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)^3 \\ K_{22} &= D_{11} \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)^4 \\ K_{23} &= K_{32} = D_{11}^a \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)^3 \\ K_{33} &= F_{11}^a \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right)^2 + A_{55}^s \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 \\ m_{12} &= m_{21} = -I_2 \cdot \left( \frac{m\pi x}{\ell} \right) \end{aligned}$$

$$m_{13} = m_{31} = I_3$$

$$m_{22} = I_4 \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) + I_1$$

$$m_{23} = m_{32} = -I_5 \cdot \left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)$$

$$m_{33} = I_6$$

Une solution non nulle est obtenue lorsque le déterminant de l'équation 3.23 est nul :

$$\det \left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - w^2 \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Pour obtenir les équations du mouvement de la théorie FBT, il suffit de remplacer la fonction de gauchissement  $f(z)$  par  $z$  dans l'expression de déplacement. et l'introduire un coefficients de correction de cisaillement dans ce cas égale a  $k = 5/6$  (p outre de section rectangulaire).

En mettant  $f(z) = 0$ , nous obtenons le système à résoudre de la théorie classique (CBT) :

$$\det \left( \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{23} \end{bmatrix} - w^2 \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.25)$$

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre une formulation mathématique du problème de vibration libre des poutres FG en utilisant une théorie d'ordre élevée été développe. Les caractéristiques du matériau a travers l'épaisseur de cette p outre suit une loi de puissance (P-FGM). Les équations de mouvement sont obtenues selon le principe e de Hamilton. Ces équations sont résolues par la solution de Navier. Les résultats obtenus de ce travail seront présentés et interprétés dans le chapitre suivant.

## Chapitre 4. Résultats et discussions

### 4.1 Introduction

Le présent chapitre illustre la vibration libre d'une poutre rectangulaire en FGM. Les propriétés matérielles sont estimées par trois lois de distribution (P-FGM, S-FGM et SP-FGM). Cette poutre est composée du métal (Al) et de céramique (Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), les deux phases (métal et la céramique) varient à travers l'épaisseur de la poutre.

### 4.2 Résultats numériques et discussion

Dans cette partie, l'exactitude de la formulation développée dans ce travail est montrée, nos résultats seront validés par des comparaisons avec les solutions disponibles dans la littérature. Une poutre fonctionnellement graduée simplement appuyée composée de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>,  $E_m = 70$  GPa,  $\rho_m = 2702$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu_m = 0.3$  and  $E_c = 380$  GPa,  $\rho_c = 3960$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu_c = 0.3$ , Deux rapports longueur- épaisseur sont considérés ( $L/h = 5, 20$ ). La fréquence naturelle de vibration est normalisée par l'expression suivante:

$$\bar{w} = w \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (4.1)$$

Les fréquences fondamentales de vibration adimensionnelle d'une poutre P-FGM sont représentées dans les tableaux 4.1 et 4.2 pour un indice de puissance  $k$  variables et deux rapports ( $L/h = 5, 20$ ). Nous observons que nos résultats sont en excellent accord avec ceux publiés par. Les légères différences observées sont dues aux théories des poutres utilisées.

Il convient de noter que la fréquence adimensionnelle diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance  $k$ . Les résultats des théories HBT1, HBT2 se situent entre ceux de la théorie classique (CBT) et du premier ordre (FBT).

**Tableau (4.1)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, ( $L/h=5$ ).

Théorie	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
CBT	5.39533	4.14835	3.77931	3.59487	3.49208
FBT	5.15248	3.99024	3.63439	3.43120	3.31343
HBT1	5.15275	3.99042	3.62644	3.40120	3.28161
HBT2	5.15314	3.99068	3.62633	3.39980	3.28109
Sayyad, 2018	5.15423	3.99140	3.62671	3.40000	3.28135

**Tableau (4.2)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, ( $L/h=20$ )

Théorie	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
CBT	5.47773	5.32832	5.06359	4.47192	3.96389
FBT	5.46032	4.20505	3.83676	3.65088	3.54156
HBT1	5.46032	4.20506	3.83613	3.64849	3.53899
HBT2	5.15313	3.99068	3.62633	3.39980	3.28109
Sayyad, 2018	5.46043	4.20513	3.83614	3.64830	3.53895

Dans les tableaux 4.3 et 4.4, la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre SP-FGM est illustrée. Les mêmes effets de la poutre P-FGM sont notés pour SP-FGM. À la même valeur de l'indice de puissance, les fréquences propres pour SP-FGM sont plus élevées que P-FGM. Ceci est dû à la distribution de la phase céramique dans SP-FGM est inférieure à celle dans P-FGM.

**Tableau (4.3)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre SP-FGM, ( $L/h=5$ )

Théorie	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
CBT	5.39533	5.24080	4.97945	4.39875	3.90063
FBT	5.15248	4.93208	4.66008	4.10702	3.65531
HBT1	5.15275	4.85252	4.54564	4.01346	3.61007
HBT2	5.15314	4.84499	4.53659	4.01138	3.61168

**Tableau (4.4)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre SP-FGM, ( $L/h = 20$ )

Théorie	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
CBT	5.47773	5.32832	5.06359	4.47192	3.96390
FBT	5.46032	5.30559	5.03988	4.45022	3.94577
HBT1	5.45686	5.29323	5.02358	4.43637	3.93762
HBT2	5.45689	5.29245	5.02261	4.43613	3.93777

On observe pour la distribution sigmoïde que, les fréquences de vibration diminuent avec l'augmentation de l'indice de puissance  $k$ , (Tableau 4.5 et 4.6). Pour  $k = 1$  les distributions S-FGM et P-FGM génèrent les mêmes fréquences de vibration. Par la variation de l'indice de puissance de 0 à 10, la réduction des fréquences de vibration adimensionnelles est très importante pour les lois de distribution P-FGM et SP-FGM. , cependant, elle est moindre pour la distribution S-FGM.

**Tableau (4.5)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre S-FGM, ( $L/h=5$ )

Théorie	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
CBT	4.52666	4.14835	3.92043	3.71615	3.65361
FBT	4.32291	3.99024	3.78635	3.60150	3.54454
HBT1	4.28556	3.96090	3.76300	3.58416	3.52918
HBT2	4.28596	3.96121	3.76347	3.58491	3.53006

**Tableau (4.6)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre S-FGM, ( $L/h = 20$ )

Théorie	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
CBT	4.59580	4.21634	3.98712	3.78131	3.71825
FBT	4.58118	4.20505	3.97757	3.77317	3.71050
HBT1	4.57828	4.20281	3.97579	3.77185	3.70933
HBT2	4.57831	4.20283	3.97582	3.77190	3.70939

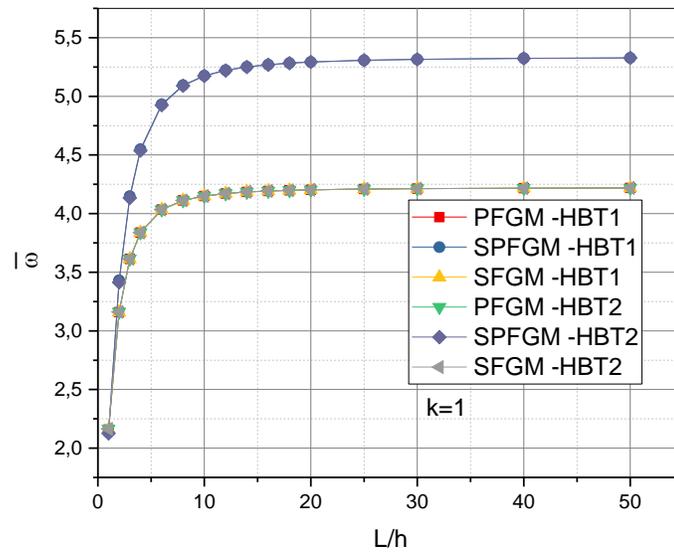
La validé du présent travail est aussi vérifiée pour la prédiction des fréquences de vibration en mode axiale et de cisaillement d'une poutre simplement appuyée en FGM. Les fréquences de vibration du premier mode, pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ , pour les poutres PFGM, SPFGM et SFGM sont présentés dans le tableau (4.). Nos résultats sont comparés avec celle de Sayyad et al. (2018), obtenus par une théories raffine d'ordre élevé. Les fréquences de vibration en mode axiales et de cisaillement se concordent bien avec celle de Sayyad et al. (2018). Notons que l'augmentation de l'indice de puissance, induit une réduction des fréquences de vibration, cette augmentation de  $k$  rend la poutre flexible.

Les figures 4.1 et 4.2 montrent la variation des fréquences de vibration adimensionnelles en fonction du rapport  $\frac{L}{h}$  pour les trois lois de distribution. Elles sont traces pour les théories HBT1 et HBT2 et deux indices des puissances  $k = 1$  et 10. On observe des fréquences de vibration adimensionnelles augmente avec l'augmentation du rapport  $\frac{L}{h}$ . Sa variation est remarquable lorsque le rapport est inferieur a 5. Elle est indépendante du rapport longueur-épaisseur lorsque  $\frac{L}{h} > 20$

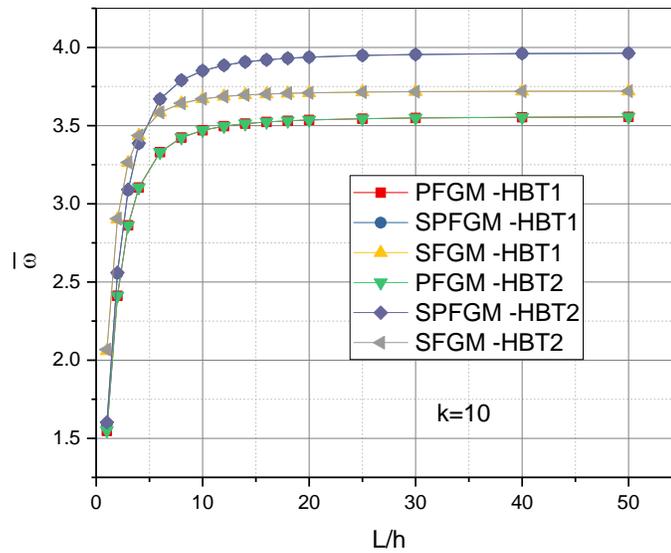
**Tableau (4.7)** Fréquences de vibration adimensionnelles en mode axial et de cisaillement

$L$	$k$	Théorie	$w_a$	$w_s$
-----	-----	---------	-------	-------

			PFGM	SPFGM	SFGM	PFGM	SPFGM	SFGM
5	0	HBT1	30.23136	30.23136	25.3640	99.86435	99.86438	83.78579
		HBT2	30.23136	30.23136	25.36398	99.80200	99.80203	83.73348
		Sayyad, 2018	30.2313	-	-	99.8604	-	-
	1	HBT1	25.29006	25.36398	25.29006	84.02161	71.79963	84.02161
		HBT2	25.29022	25.36398	25.29022	83.96823	70.92338	83.96822
		Sayyad 2018	25.2907	-	-	84.0167	-	-
	2	HBT1	22.85200	22.99770	25.24254	72.71498	62.11062	84.16927
		HBT2	22.85104	22.99770	25.24212	72.48774	61.24670	84.11670
		Sayyad, 2018	22.8507	-	-	72.3531	-	-
	5	HBT1	19.78029	19.94934	25.19760	58.85079	54.23958	84.30615
		HBT2	19.77833	19.94934	25.19601	58.42695	53.79400	84.25580
		Sayyad, 2018	19.7772	-	-	58.0842	-	-
	10	HBT1	18.12905	18.22152	25.18313	53.73901	52.28711	84.34951
		HBT2	18.12959	18.22152	25.18098	53.45580	52.11909	84.30032
		Sayyad, 2018	18.1306	-	-	53.2534	-	-
10	0	HBT1	60.46273	60.46273	50.72797	381.52098	381.52098	320.09446
		HBT2	60.46273	60.46273	50.72797	381.27692	381.27692	319.88970
		Sayyad, 2018	60.4627	-	-	381.528	-	-
	1	HBT1	50.69108	50.72797	50.69108	321.68783	267.96023	321.68783
		HBT2	50.69115	50.72797	50.69116	321.47726	264.36424	321.47726
		Sayyad, 2018	50.6913	-	-	321.684	-	-
	2	HBT1	45.92249	45.99541	50.66744	276.84244	229.44639	322.68328
		HBT2	45.92201	45.99541	50.66724	275.93910	225.90567	322.47905
		Sayyad, 2018	45.9218	-	-	275.418	-	-
	5	HBT1	39.81325	39.89868	50.64516	221.27044	200.33899	323.60459
		HBT2	39.81229	39.89868	50.64438	219.57117	198.59578	323.41583
		Sayyad, 2018	39.8118	-	-	218.213	-	-
	10	HBT1	36.39622	36.44305	50.63801	201.73661	195.14353	323.89610
		HBT2	36.39653	36.44305	50.63695	200.63382	194.55597	323.71521
		Sayyad, 2018	36.3970	-	-	199.870	-	-



**Figure (4.1)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.



**Figure (4.2)** Fréquences de vibration adimensionnelles poutre.

### 4.3 Effet du rapport R.

Dans cette partie, nous préposons d'étudier l'effet du rapport  $R$  défini comme le rapport entre  $E_c/E_m$ , ( $E_c = R \times E_m$ ) et  $\rho_c/\rho_m$  ( $\rho_c = R \times \rho_m$ ).

Les tableaux 4.7 -4.9, représentent les fréquences de vibration d'une poutre en FGM, quand le rapport  $R$  varie de (1,2,5,10) et l'indice de puissance  $k= 0.5,1,2,5$  et 10, pour les trois fonction de distribution (PFGM, SPFGM et SFGM) respectivement. Pour  $R = 1$ , la poutre, dans ce cas, est entièrement en métal.

Pour le même paramètre de puissance et en variant le rapport  $R$ , nous constatons une diminution des fréquences pour les distributions PFGM et SFGM par contre elles augmentent pour la distribution SP-FGM.

**Tableau (4.8)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre P-FGM, en fonction du rapport R

$\frac{L}{h}$	R	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
5	1	2.65406	2.65406	2.65406	2.65406	2.65406
	2	2.60593	2.61073	2.65408	2.72572	2.73951
	5	2.52987	2.47351	2.48926	2.67386	2.79966
	10	2.48949	2.37399	2.29949	2.47015	2.70450
20	1	2.83534	2.83538	2.83534	2.83534	2.83534
	2	2.77573	2.78283	2.83944	2.93234	2.94720
	5	2.68380	2.61877	2.64485	2.88992	3.04841
	10	2.63563	2.50175	2.42210	2.65483	2.96396

**Tableau (4.9)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre SP-FGM, en fonction du rapport R

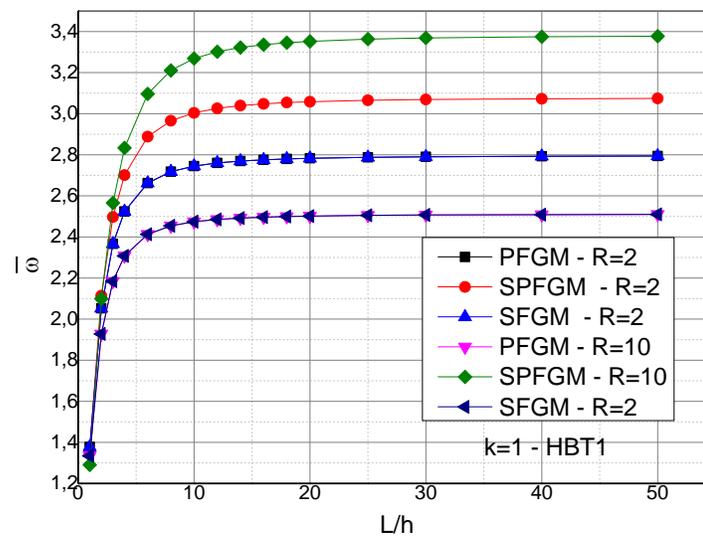
$\frac{L}{h}$	R	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
5	1	2.65406	2.65406	2.65406	2.65406	2.65406
	2	2.76834	2.81714	2.84905	2.83511	2.78983
	5	2.85027	2.94729	3.03163	3.07668	3.03262
	10	2.87980	2.99453	3.09353	3.17440	3.19310
20	1	2.83534	2.83534	2.83534	2.83534	2.83534
	2	2.99030	3.05849	3.10120	3.07435	3.00926
	5	3.11058	3.26414	3.40784	3.45764	3.35708
	10	3.15682	3.35241	3.56299	3.72000	3.66540

**Tableau (4.10)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre S-FGM, en fonction du rapport R

$\frac{L}{h}$	R	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
5	1	2.65406	2.65406	2.65406	2.65406	2.65406
	2	2.63289	2.61072	2.58610	2.56506	2.55883
	5	2.56774	2.47351	2.36352	2.26427	2.23380
	10	2.52230	2.37400	2.19380	2.02301	1.96868
20	1	2.83534	2.83534	2.83534	2.83534	2.83534
	2	2.80973	2.78283	2.75286	2.72712	2.71946
	5	2.73142	2.61877	2.48845	2.37188	2.33625
	10	2.67722	2.50175	2.29224	2.09726	2.03592

Lorsque l'indice de puissance varie et pour la même valeur de  $R$ , les fréquences de vibration adimensionnelles générées par les distributions PFGM et SPFGM augmentent avec l'augmentation de  $k$ . Cependant elles diminuent pour la distribution SFGM. Par exemple pour  $R=5$ , les fréquences de vibration adimensionnelles augmentent de 2.529869519 à 2.799658547 lorsque  $k$  varie de 0.5 à 10 pour la distribution PFGM. Cependant elles diminuent de 2.567738796 à 2.233799328 pour la distribution SFGM.

Les figures (4.3) – (4.6) qui suivent illustre la variation des fréquences propres adimensionnelles en fonction du rapport  $\frac{L}{h}$  pour le trois fonctions de distribution. Elles sont tracées pour deux rapport R=2 et 10 et deux valeur de k = 1 et 10. De manière générale, les fréquences de vibration adimensionnelles augmentent avec l'augmentation du rapport  $\frac{L}{h}$ . Sa variation est remarquable lorsque le rapport est inferieur a 5. Elle est indépendante du rapport longueur-épaisseur lorsque  $\frac{L}{h} > 20$



**Figure (4.3)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.

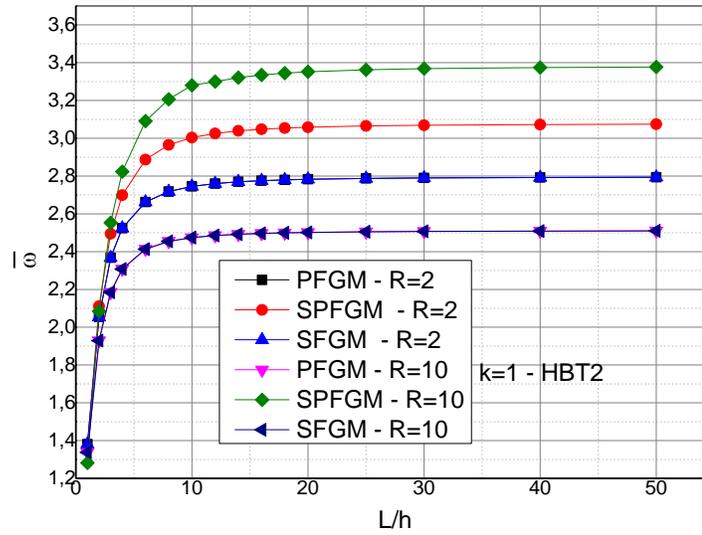


Figure (4.4) Fréquences de vibration adimensionnelles poutre R=2.

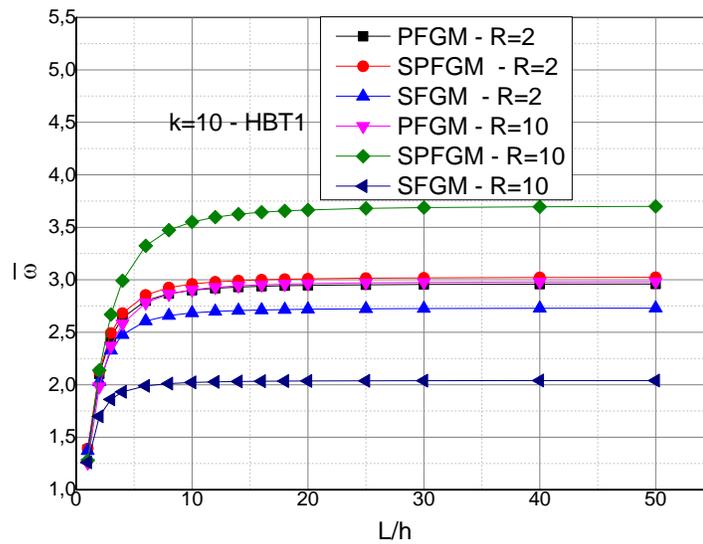
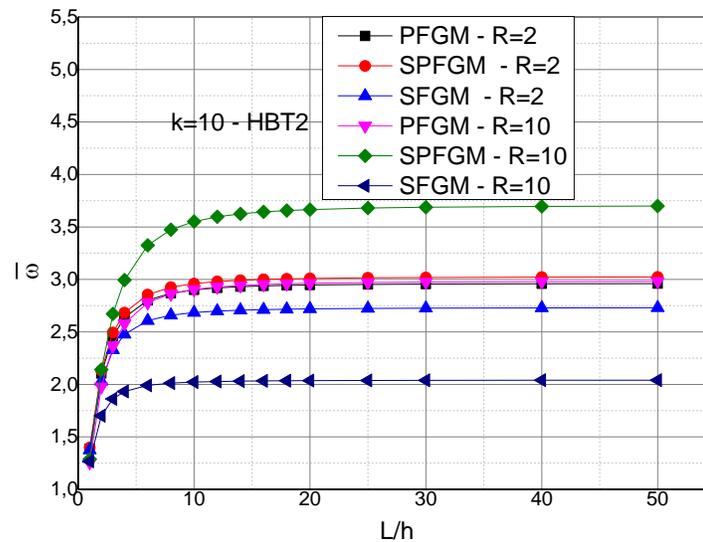


Figure (4.5) Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.



**Figure (4.6)** Fréquences de vibration adimensionnelles d'une poutre.

#### 4.4 Conclusions

Une analyse de la vibration libre d'une poutre simplement appuyée en FGM a été présentée dans ce travail de fin d'étude. La variation de propriétés matérielle a travers l'épaisseur de cette poutre est supposé suit trois fonctions de distribution, qui sont, la fonction de puissance (P-FGM), la fonction de puissance symétrique (SP-FGM) et la fonction de distribution sigmoïde (S-FGM). Les équations de mouvement sont obtenues par le principe d'Hamilton. Les résultats sont validés par des comparaisons avec les études précédentes. Les résultats numériques montrent l'effet des fonctions de distribution, l'indice de puissance et le rapport longueur - épaisseur sur les fréquences de vibration.

A travers ces résultats, on peut conclure que les fréquences fondamentale adimensionnelle les plus élevées sont obtenus par la loi distribution SP-FGM, et les plus petites ceux générées par la fonction sigmoïde (SFGM).

Une variation importante des fréquences fondamentale adimensionnelle de vibration pour les lois PFGM et SPFGM quand  $k$  varie de 0 a 10, elle est moindre pour la distribution SFGM.

## Conclusion générale.

Le travail de ce mémoire est une contribution à l'étude des vibrations libres des structures en FGM.

Le problème est traité en analysant les premières modes propres de vibration des cas de poutre rectangulaire simplement appuyée dont la variation des propriétés matérielles varie en suivant trois lois de distribution à savoir la loi de puissance (PFGM), la loi de puissance symétrique (SPFGM) et la loi sigmoïde (SFGM). Les résultats obtenus ont été présentés par des tableaux et des figures pour les cas des poutres (PFGM, SPFGM et SFGM) composées du métal et la céramique. Nos résultats sont obtenus pour différentes valeurs de l'indice de puissance et le rapport longueur-épaisseur. Les résultats ont été comparés avec les résultats de la référence.

A travers ces résultats, les conclusions suivantes sont formulées ; Concernant l'effet des lois de distribution, Les fréquences fondamentales adimensionnelles sont plus élevées pour la distribution SP-FGM, et les plus petites pour la fonction sigmoïde (SFGM). Une variation importante des fréquences de vibration fondamentale adimensionnelle pour les lois PFGM et SPFGM quand  $k$  varie de 0 à 10, elle est moindre pour la distribution SFGM.

Quant à l'effet du rapport  $E_c/E_m$  et  $\rho_c/\rho_m$ , les fréquences de vibration adimensionnelles ont augmentées lorsque le rapport a augmenté pour la distribution SPFGM et diminuent pour les lois PFGM et SFGM. En revanche pour la même valeur de ce rapport et en variant l'indice de puissance les fréquences ont augmentées pour les lois PFGM et SPFGM et elles ont diminuées pour la fonction SFGM.

Le travail présenté dans le cadre de ce projet de fin d'étude peut être développé et enrichi par l'étude d'autres phénomènes (flexion, flambement). Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'analyser le flambement et la flexion des différentes formes de structures (poutres sandwichs, plaque) épaisses et modérément épaisses avec les différentes conditions aux limites en utilisant la méthode des éléments finis.

**Bibliographie**

- AitAtmane 2010, H., Tounsi, A., Mechab, I. and AddaBedia, E.A. (2010), “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 6(2), 113-121
- Aldosari S.M. Bending analysis of different material distributions of functionally graded beam. *Appl. Phys. A*, 91(4) :123–296, 2017
- Bao G. and Wang L. Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *Int. J ; Solids Structures* , 32(119) :28532871, 1995.
- Bennai, R., AitAtmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546.
- Bhatt, R., 1989. "Oxidation Effects on the Mechanical Properties of SiC Fiber-Reinforced Reaction Bonded Silicon Nitride Matrix Composites," .NASA TM-102360, NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH.
- Bouguenina, O., Belakhdar, K, Tounsi, A. and AddaBedia, E.A. (2015), “Numerical analysis of FGM plates with variable thickness subjected to thermal buckling”, *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 679-695
- Chen 2009, W.Q., Wang, H.M. and Bao, R.H. (2007), “On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate”, *Compos. Struct.*, 81, 233-242.
- Coffignal, Gérard. "Mécanique non-linéaire et éléments finis." Version Electronique e.1.0, 2001. <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>
- Delale, F., and F. Erdogan. 1983. "The Crack Problem For A Nonhomogeneous Plane". *Journal Of Applied Mechanics* 50 (3): 609. doi:10.1115/1.3167098
- Dufort, L., S. Drapier, and M. Grédiac. 2001. "Closed-Form Solution For The Cross-Section Warping In Short Beams Under Three-Point Bending". *Composite Structures* 52 (2): 233-246. doi:10.1016/s0263-8223(00)00171-9

- Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.G., Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells .NACA T.N° : 1833, 1949.
- Jean-Marie Berthelot 2012. « Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures ». 5<sup>ème</sup> Edition, Lavoisier ,2012
- Karama M., Afaq K.S, Mitsou S., (2003), Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, International Journal of Solids and Structures, vol. 40, p. 1525-1546.
- Kumar, R.Roop, and S Maruno. 2002. "Functionally Graded Coatings Of HA–G–Ti Composites And Their In Vivo Studies". Materials Science And Engineering: A 334 (1-2): 156-162. doi:10.1016/s09215093(01)01792-0.
- Mahmood, R. M., Akinlabi, E. T., Shukla, M., & Pityana, S. (2012). Functionally Graded Material: An overview. Retrieved from <http://researchspace.csir.co.za/dspace/handle/10204/6548>
- Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. ASME J. Appl. Mech , 51(14) :745752, 1984.
- SALLAI BEN-OUMRANE 2010 « Etude et analyse des structures en FGM : Comparaison entre E-FGM, P-FGM et S-FGM. » Thèse de Doctorat de l'université de DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 2011.
- Sayyad A. S. and Ghugal Y. M. Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams. Asian Journal of Civil Engineering, 19(5) :607623, 2018.
- Shanmugavel, P., Bhaskar, G.B., Chandrasekaran, M., Mani, P.S., Srinivasan, S.P.: An overview of fracture analysis in functionally graded materials. Eur. J. Sci. Res. 68(3), 412-439 (2012).
- Touratier M. An efficient standard plate theory. Int. J. Engng Sci. , 29(8) :901916, 1991.