



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Présenté Par :
Hammadi Nadia et Khelifi Rouba

Sous L'intitulé :

Étude de certains problèmes d'évolution avec conditions non locales

Soutenu publiquement le 25/06/2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr ZIANE Mohamed

Mr BRAIKI Mohamed Hocine

Mr ZENTAR Oualid

Pr Université de Tiaret

MCB Université de Tiaret

MCB Université de Tiaret

Président

Examineur

Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude à notre encadrant, Monsieur **Zentar Oualid**, pour son accompagnement, sa disponibilité et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Un remerciement tout particulier va à Monsieur **Ziane Mohamed**, dont l'aide, le soutien et l'expertise ont grandement contribué à la réalisation de cette recherche.

Nous adressons nos remerciements les plus sincères à nos chers parents, qui ont été notre plus grand soutien tout au long de ce parcours, par leur amour inconditionnel, leur patience et leurs encouragements constants.

Nos remerciements vont également à nos familles et à nos amis, pour leur présence, leur compréhension et leur motivation tout au long de cette aventure.

Nous remercions aussi notre université pour nous avoir offert un cadre d'apprentissage stimulant et les ressources nécessaires à la concrétisation de ce projet.

Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réussite de ce travail, même par les gestes les plus simples.

TABLE DES MATIÈRES

0.1	Introduction	2
1	Preliminaires	4
1.1	Espaces fonctionnels	4
1.2	Critères de Compacité : Lemme d'Arzelà-Ascoli	6
1.3	Théorèmes du Point Fixes	6
2	Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés	8
2.1	Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus	8
2.2	Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continus .	10
2.3	Théorème de Hille-Yosida	14
3	Quelques équations d'évolution non linéaires	16
3.1	Existence, unicité et régularité	16
3.2	Équations semi-linéaires avec des semi-groupes compacts	18
4	Problème d'évolution avec condition non locale	25
4.1	Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale	25
4.1.1	1 ^{er} Cas : Compacité de la non linéarité	26
4.1.2	2 ^{eme} Cas : Lipschizianité de la condition non locale . .	30
4.1.3	3 ^{me} Cas : Compacité de semi-groupe	32

4.2	Conter exemple	32
-----	--------------------------	----

0.1 Introduction

Les équations d'évolution jouent un rôle central dans la modélisation de nombreux phénomènes dynamiques issus de la physique, de la biologie, de l'ingénierie et d'autres disciplines. Leur étude, dans un cadre abstrait, permet de dégager des résultats généraux applicables à une large classe de problèmes. En particulier, l'analyse fonctionnelle et la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires fournissent des outils puissants pour l'investigation de tels systèmes, notamment en ce qui concerne les problèmes de Cauchy dans des espaces de Banach.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de certains problèmes d'évolution soumis à des conditions non locales, un type de problème qui a suscité un intérêt croissant ces dernières années, notamment en raison de ses nombreuses applications pratiques, où les conditions initiales dépendent de l'état global ou partiel du système à différents instants. Contrairement aux conditions initiales classiques, les conditions non locales introduisent une dépendance globale dans le temps, rendant leur traitement analytique plus délicat. Ce travail est structuré en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à des rappels théoriques nécessaires à la compréhension du mémoire. Nous y présentons la théorie des semi-groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés, qui constitue un cadre fondamental pour l'étude des équations d'évolution linéaires. Nous y rappelons également le critère de compacité d'Ascoli-Arzelà, outil central dans l'établissement de résultats d'existence, ainsi que certains éléments d'analyse fonctionnelle indispensables à la suite.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude quantitative d'un problème de Cauchy abstrait, formulé dans un espace de Banach. Nous y établissons les résultats d'existence, d'unicité et de régularité en temps des solutions, en nous appuyant principalement sur la théorie des semi-groupes et des techniques classiques d'analyse fonctionnelle. Ce cadre sert de base pour l'analyse des problèmes plus complexes abordés dans le chapitre suivant.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude systématique de problèmes d'évolution avec conditions non locales. Nous examinons différentes hypothèses sur les données du problème (notamment sur les termes non linéaires et les opérateurs), et développons des résultats d'existence et d'unicité en adaptant

des méthodes de point fixe, des estimations a priori et des critères de compacité. Cette analyse met en lumière la richesse et la complexité des problèmes à conditions non locales, tout en offrant des perspectives d'application dans divers contextes.

Ce mémoire a pour objectif non seulement de fournir une étude rigoureuse de ces problèmes abstraits, mais aussi de proposer des outils généraux pouvant être adaptés à des cas concrets dans les sciences appliquées.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions, les théorèmes et les outils de base nécessaires à la compréhension des problèmes de Cauchy semi-linéaires non locaux dans un espace de Banach. Nous abordons les concepts fondamentaux liés à l'intégrabilité, aux opérateurs compacts, aux théorèmes de point fixe, ainsi que les inégalités utiles pour l'analyse des équations différentielles non linéaires.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans ce qui suit, X étant un espace de Banach.

Définition 1.1.1. [1] *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet sur un corps K (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), c'est-à-dire que toute suite de Cauchy converge dans l'espace. $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach autrement dit $\forall (x_n) \subset X, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \exists x \in X, x_n \rightarrow x$.*

Définition 1.1.2. [1] *Une algèbre de Banach est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec une multiplication bilinéaire $\cdot : E \times E \rightarrow E$ et une norme $\|\cdot\|$ telles que :*

- *La norme est sub-multiplicative, c'est-à-dire :*

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

– *L'espace est complet, c'est-à-dire qu'il est un espace de Banach.*

Exemple 1.1.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

$$C([0, b], X) = \{f : [0, b] \rightarrow X \mid f \text{ est continue}\}.$$

$$\|f\|_{C([0, b], X)} = \sup_{t \in [0, b]} \|f(t)\|_X.$$

Cet espace est un espace de Banach si X est un espace de Banach.

Définition 1.1.3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite Lebesgue intégrable si elle est mesurable et si :

$$\int_E |f(x)| d\mu(x) < +\infty.$$

Dans ce cas, l'intégrale de f sur E est définie par :

$$\int_E f(x) d\mu(x).$$

Exemple 1.1.2. L'espace L^1 est défini par :

$$L^1(J) = \left\{ f : J \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(t)| dt < \infty \right\}, \quad J = [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et X un espace de Banach. Une fonction $f : X \rightarrow X$ est dite Bochner-mesurable si elle est la limite presque partout d'une suite de fonctions simples. Elle est Bochner-intégrable si :

$$\int_X \|f(x)\|_X d\mu(x) < +\infty.$$

Dans ce cas, l'intégrale de f est définie comme :

$$\int_X f(x) d\mu(x) \in X.$$

Théorème 1.1.1. [2] Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, telle que : $f_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout (ou en mesure), il existe une fonction intégrable $g \in L^1(\mu)$ telle que pour tout n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout. Alors : $f \in L^1(\mu)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

Lemme 1.1.1. (*Lemme de Gronwall*) : Soient u , a et b des fonctions réelles continues définies sur un intervalle $[a, b]$, avec $b(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. On suppose que :

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t b(s)u(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [a, b].$$

Alors :

$$u(t) \leq a(t) + \int_a^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(r) dr\right) ds.$$

En particulier, si $a(t) = C$ est constante, alors :

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_a^t b(s) ds\right).$$

1.2 Critères de Compacité : Lemme d'Arzelà-Ascoli

Théorème 1.2.1. [3] Soit K un espace compact, et soit F une famille des fonctions réelles (ou à valeurs dans un espace de Banach) continues sur X . Alors F est relativement compacte dans $C(K, X)$ (muni de la topologie de la convergence uniforme) si et seulement si :

1. F est uniformément bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout F , $\|F\|_\infty \leq M$,
2. F est équicontinue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ avec $d(x, y) < \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tout $f \in F$.
3. $\{F(t)\}_{t \in K}$ relativement compact dans X .

1.3 Théorèmes du Point Fixes

Théorème 1.3.1. [3] Soit (X, d) un espace métrique complet et $F : X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe une constante $0 \leq \alpha < 1$ vérifiant :

$$d(F(u), F(v)) \leq \alpha d(u, v), \quad \forall u, v \in X.$$

Alors F admet un unique point fixe $u^* \in X$, et la suite définie par $u_{n+1} = F(u_n)$ converge vers u^* pour tout $u_0 \in X$.

Théorème 1.3.2. [4] Soit C une partie fermée non vide d'un espace métrique complet (E, d) , et soit $F : C \rightarrow C$ une K -contraction. Alors F admet un unique point fixe et, pour tout $u \in C$, on a :

$$d(F^n(u), u) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(F(u), u).$$

La conclusion reste valable s'il existe un entier $m \in \{1, 2, \dots\}$ tel que F^m est une contraction.

Théorème 1.3.3. (Schauder) : [3] Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, non vide et borné d'un espace de Banach X . Si $F : C \rightarrow C$ est continue et compacte (i.e., $F(C)$ est relativement compact dans X), alors F admet au moins un point fixe, c'est-à-dire existe $u \in C$ tel que $F(u) = u$.

Théorème 1.3.4. (Schaefer) : [3] Soit X un espace de Banach, et $F : X \rightarrow X$ une application complètement continue. Supposons que l'ensemble : $S = \{u \in X : u = \lambda F(u) \text{ pour un certain } \lambda \in (0, 1)\}$ est borné. Alors, F possède au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $u \in X$ tel que $F(u) = u$.

Définition 1.3.1. (Alternative de Leray-Schauder) : Soit S un fermé borné convexe non vide d'un espace de Banach X , et soit $F : S \rightarrow X$ un opérateur continu compact (c'est-à-dire F est complètement continu). Supposons que, pour tout $\lambda \in (0, 1)$, l'équation suivante n'admette pas de solution sur le bord de S : $u = \lambda F(u)$, $u \in \partial S$. Alors l'opérateur F admet au moins un point fixe dans S , c'est-à-dire : $\exists u \in S$ tel que $F(u) = u$.

CHAPITRE 2

SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS

2.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus

Soit X un espace de Banach de norme $\|\cdot\|$. Notons par $\mathcal{L}_B(X)$ l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans X de norme d'opérateurs que l'on notera par :

$$\sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \|T\|, \quad T \in \mathcal{L}_B(X).$$

Définition 2.1.1. Une famille à un paramètre $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :

1. $T(0) = I$, (où I est l'opérateur identité de X).
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Définition 2.1.2. Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X est dit uniformément continu sur X si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}_B(X)} = 0. \quad (2.1)$$

L'opérateur linéaire A défini par

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (2.2)$$

est appelée le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ et $\mathcal{D}(A)$ est appelé le domaine de A .

Dans ce paragraphe, on caractérise le générateur infinitésimal engendré par un semi-groupe uniformément continue.

Théorème 2.1.1. [6] *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu sur X si et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X .*

Théorème 2.1.2. [6] *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus si :*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}. \quad (2.3)$$

Alors, $T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$

Corollaire 2.1.1. [6] *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continue. Alors :*

1. *Il existe une constante $w \geq 0$ telle que : $\|T(t)\| \leq e^{wt}, \quad \forall t \geq 0.$*
2. *Il existe un unique opérateur linéaire borné A telle que :*

$$T(t) = e^{tA}, \quad \forall t \geq 0.$$

3. *L'opérateur A de l'assertion (2) est générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}.$*
4. *L'application $t \mapsto T(t)$ est différentiable en norme et on a :*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \quad (2.4)$$

2.2 Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continus

Définition 2.2.1. Une famille $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}_B(X)$ est dite *fortement continue* sur X si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X. \quad (2.5)$$

Un semi-groupe fortement continue sur X est appelé aussi semi-groupe de classe C_0 sur X , ou tout simplement un C_0 -semi-groupe sur X .

Théorème 2.2.1. [6] Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X . Alors il existe deux constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

Corollaire 2.2.1. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X . Alors pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X .

Preuve : Soit $x \in X$ et soient $t, h \geq 0$. La continuité de $t \mapsto T(t)x$ découle des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)(T(h)x - x)\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

quand $h \rightarrow 0$. De plus, pour $t \geq h \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)(x - T(h)x)\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|x - T(h)x\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2. Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A . Alors :

1.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in X. \quad (2.7)$$

2. Pour tout $x \in X$ et tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in \mathcal{D}(A) \quad \text{et on a :} \quad A \left(\int_0^t T(s)x \, ds \right) = T(t)x - x. \quad (2.8)$$

3. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a :

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \quad (2.9)$$

4. Pour tout $t \geq s \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a :

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(u)x \, du = \int_s^t T(u)Ax \, du. \quad (2.10)$$

Preuve :

1. L'égalité énoncée découle de l'inégalité :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - T(t)x \right\| &\leq \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) \, ds \right\| \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \end{aligned}$$

et de la continuité de la fonction $t \mapsto T(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X , pour tout $x \in X$.

2. Pour $x \in X$ et tout $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^h T(s)x \, ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^h T(s+h)x - T(s)x \, ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds \end{aligned}$$

En utilisant le résultat (1), $T(h)x - x$ tend vers 0 quand $h \rightarrow 0^+$, d'où (2).

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = AT(t)x, \quad (*)$$

Ce qui montre alors que $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et que $AT(t)x = T(t)Ax$.
L'égalité (*)

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

Il reste à montrer que pour tout $t > 0$, la dérivée à gauche de $T(t)x$ existe et vaut aussi $T(t)Ax$. Pour tout $h > 0$ et tout $t \geq h$, et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \\ &= \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} + T(t-h)Ax - T(t-h)Ax - T(t)Ax \\ &= T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) + T(t-h)(Ax - T(h)Ax). \end{aligned}$$

Comme $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\|T(t-h)\|$ est bornée pour $h \in [0, t]$ et que $(T(t))_{t \geq 0}$ est fortement continue, on obtient que :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h)(Ax - T(h)Ax) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

D'où l'assertion (3).

4. S'obtient par intégration entre s et t .

Corollaire 2.2.2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, alors :*

1. *Le domaine $\mathcal{D}(A)$ de A est dense dans X , (c'est-à-dire : $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$).*
2. *A est un opérateur linéaire fermé. Autrement dit, A est un opérateur linéaire dont le graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times X$.*

Preuve :

1. Soit $x \in X$ et soit (t_n) une suite réelle telle que $t_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$$

(par exemple $t_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). Posons

$$x_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x \, ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'assertion (2) du Théorème 2.2.2, on voit que $x_n \in \mathcal{D}(A), \forall n \in \mathbb{N}$ et par l'assertion (1) du Théorème 2.2.2, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} T(s)x \, ds = x.$$

Ainsi, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, c'est-à-dire $\mathcal{D}(A)$ est dense dans X .

2. La linéarité de A est évidente. Montrons que A est un opérateur fermé, c'est-à-dire que le graphe :

$$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$$

de A est fermé dans $X \times X$. Pour cela, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \rightarrow x$ et $Ax_n \rightarrow y$. Montrons alors que $x \in \mathcal{D}(A)$ et que $Ax = y$. Puisque $x_n \in \mathcal{D}(A), \forall n \in \mathbb{N}$, alors d'après la formule (2.8), on a :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t > 0. \quad (2.11)$$

Soit $t > 0$. Alors pour tout $s \in [0, t]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| = \|T(s)(Ax_n - y)\| \leq Me^{\omega t} \|Ax_n - y\|.$$

Donc $(T(s)Ax_n)_n$ converge uniformément vers $T(s)y$ quand $n \rightarrow +\infty$ sur $[0, t]$. Il vient alors de l'égalité (2.11) et du Théorème d'interversion limite et intégrale que :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds.$$

Donc :

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds, \quad \forall t > 0.$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds = y,$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe.}$$

D'où $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

Théorème 2.2.3. *Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux C_0 -semi-groupes sur X de générateurs infinitésimaux respectivement A et B . Si $A = B$ alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$.*

Preuve : Soit $t \geq 0$ et soit $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Il vient facilement du Théorème (2.2.2) que la fonction :

$$s \mapsto u(s)x = T(t-s)S(s)x, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

est dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}u(s)x &= \frac{d}{ds}(T(t-s))S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ (A = B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, la fonction $s \mapsto u(s)x = T(t-s)S(s)x$ est constante et en particulier ses valeurs aux points $s = 0$ et $s = t$ coïncident, c'est-à-dire :

$$u(0)x = u(t)x, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

D'où :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et $T(t)$ et $S(t)$ sont des opérateurs bornés sur X , pour tout $t \geq 0$, il en résulte que

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in X.$$

D'où

$$T(t) = S(t), \quad \forall t \geq 0.$$

2.3 Théorème de Hille-Yosida

Nous avons vu qu'un C_0 -semi-groupe génère un opérateur fermé à domaine dense. Pour avoir la réciproque, il faut donc un ingrédient sur la résolvante.

Définition 2.3.1. Si A est un opérateur linéaire pas nécessairement borné, dans X , l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels : $\lambda I - A$ est inversible, c'est-à-dire $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné dans X . La famille :

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A),$$

des opérateurs linéaires bornés est appelée la résolvante de A .

Définition 2.3.2. Soit $T(t)$ un C_0 -semi-groupe. D'après le Théorème (2.2.1), il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Si $\omega = 0$, alors $T(t)$ est dit uniformément borné. Si de plus $M = 1$, il est dit un C_0 -semi-groupe de contractions.

Théorème 2.3.1. (Hille-Yosida). Un opérateur linéaire (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$, si et seulement si :

1. A est fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$, pour tout $\lambda > 0$:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 2.3.2. Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ vérifiant :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

avec $\omega \geq 0$, $M \geq 1$. Alors :

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ et A est fermé.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

CHAPITRE 3

QUELQUES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES

3.1 Existence, unicité et régularité

Dans cette section, nous étudierons le problème de Cauchy abstrait semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = f(t, u(t)), & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, sur un espace de Banach X et $f : [t_0, b] \times X \rightarrow X$ est continue en t et satisfait une condition de Lipschitzianité par rapport à la 2^{ème} variable.

Définition 3.1.1. *La fonction $u : [t_0, b[\rightarrow X$ est une solution (classique) de l'équation (3.1) sur $[t_0, b[$ si u est continue sur $[t_0, b[$, continûment différentiable sur $]t_0, b[$, avec $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t_0 < t < b$ et satisfait l'équation (3.1) sur $[t_0, b[$.*

Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ le C_0 semi-groupe engendré par A et soit u une solution de (3.1). Alors, la fonction $g(s) = T(t - s)u(s)$ est différentiable pour tout

$t_0 < s < t$, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Si $f \in L^1([t_0, b]; X)$, alors $T(t-s)f(s)$ est intégrable au sens de Bochner. En intégrant (3.2) de 0 à t , on obtient :

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s) ds.\tag{3.3}$$

Définition 3.1.2. Une solution continue u de l'équation intégrale (3.3) sera appelée une solution faible du problème de Cauchy (3.1).

Sous une hypothèse de lipschitzianité sur la non linéarité, établissons un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (3.1).

Théorème 3.1.1. Soient $f : [t_0, b] \times X \rightarrow X$ continue en t sur $[t_0, b]$ et uniformément Lipschitzienne (de constante K) sur X . Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, sur X . Alors pour tout $u_0 \in X$, le problème de Cauchy (3.1) admet une solution unique faible $u \in C([t_0, b] : X)$. De plus, l'application $u_0 \mapsto u$ est Lipschitzienne de X dans $C([t_0, b] : X)$.

Preuve : On transforme le problème (3.1) en un problème du point fixe. Introduisons l'opérateur H Défini par :

$$(Hu)(t) := T(t)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

On se place dans le cadre fonctionnel suivant : $C_b := C([0, b], X)$ de sorte que $H : C_b \rightarrow C_b$. Montrons que H possède un point fixe unique à l'aide d'une version du Théorème de Banach. Soient $u_1, u_2 \in C_b$, alors

$$(Hu_1)(t) - (Hu_2)(t) = \int_{t_0}^t T(t-s)(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) ds.$$

D'après le Théorème 2.2.1. On note par

$$M_b = \sup_{t \in [0, b]} \|T(t)\| \leq Me^{\omega b} < +\infty, \quad \omega > 0,$$

Nous avons

$$\|(Hu_1)(t) - (Hu_2)(t)\|_X \leq M_b K t \|u_1 - u_2\|_\infty,$$

Par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \|H^2 u_1(t) - H^2 u_2(t)\|_X &\leq M_b K \int_{t_0}^t \|H(u_1) - H(u_2)\|_X ds \\ &\leq M_b K \int_{t_0}^t (M_b K s) \|u_1 - u_2\|_\infty ds, \quad \forall t \in [0, b] \\ &= \frac{(M_b K)^2}{2!} t^2 \|u_1 - u_2\|_\infty, \quad \forall t \in [0, b] \\ &\leq \frac{(M_b K)^2}{2!} b^2 \|u_1 - u_2\|_\infty, \quad \forall t \in [0, b] \\ &\vdots \\ \|H^n u_1(t) - H^n u_2(t)\|_X &\leq \frac{(M_b K)^n}{n!} b^n \|u_1 - u_2\|_\infty, \quad \forall t \in [0, b]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|H^n u_1(t) - H^n u_2(t)\| \leq \frac{(M_b K)^n}{n!} b^n \|u_1 - u_2\|, \quad \forall t \in [0, b].$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M_b K)^n}{n!} b^n = 0$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{(M_b K)^p}{p!} b^p < 1$. On en déduit que H^p est une contraction et donc, par le Théorème du point fixe de Banach, il existe un unique $u \in C_b$ tel que $H^p u = u$. On déduit que $Hu = u$, est une solution faible de (3.1) sur $[0, b]$, pour tout $b > 0$. Ainsi l'équation (3.1) admet unique solution faible sur $\mathbb{R}^+$.

3.2 Équations semi-linéaires avec des semi-groupes compacts

Sous une hypothèse de compacité sur le semi-groupe engendré par A , nous poursuivons notre étude du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.4)$$

Théorème 3.2.1. *Soit U un ouvert d'un espace de Banach X . Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $(T(t))_{t \geq 0}$. Si $0 < a \leq \infty$ et $f : [0, a[\times U \rightarrow X$ est une fonction continue, alors pour tout $u_0 \in U$, il existe un $t_1 = t_1(u_0)$, $0 < t_1 < a$, tel que le problème (3.4) admet une solution faible $u \in C([0, t_1], U)$.*

Preuve : Puisque nous nous intéressons ici uniquement aux solutions locales, nous pouvons supposer que $a < \infty$. Soit $\|T(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq a$. Soient $t' > 0$ et $p > 0$ tels que la boule

$$B_p(u_0) = \{v \in X : \|v - u_0\| \leq p\} \subset U$$

et que $\|f(s, v)\| \leq N$ pour $0 \leq s \leq t'$
et $v \in B_p(u_0)$. Choisissons $t'' > 0$ tel que

$$\|T(t)u_0 - u_0\| < \frac{p}{2}, \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t''.$$

Définissons ensuite

$$t_1 = \min \left(t', t'', a, \frac{p}{2MN} \right).$$

On se place dans le cadre fonctionnel suivant : Posons $Y = C([0, t_1], X)$ et définissons

$$Y_0 = \{u \in Y : u(0) = u_0, u(t) \in B_p(u_0), \quad \text{pour } 0 \leq t \leq t_1\}.$$

Il est clair que Y_0 est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de Y .

On définit l'application $F : Y_0 \rightarrow Y_0$ par :

$$(Fu)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds. \quad (3.5)$$

L'opérateur F est bien défini, en effet

$$\begin{aligned} \|(Fu)(t) - u_0\| &\leq \|T(t)u_0 - u_0\| + \int_0^t \|T(t-s)f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \frac{p}{2} + t_1 MN \leq p, \end{aligned}$$

Il est clair que $F(Y_0)$ est uniformément borné dans Y .

Supposons que $u_n \rightarrow u$ dans Y_0 . Donc $f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u(s))$ (car f est continue)

$$\|Fu_n(t) - Fu(t)\| \leq M \int_0^t \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds \rightarrow 0.$$

Donc F est continue.

Montrons maintenant que $F(Y_0)$ est un sous-ensemble relativement compact de Y_0 . Pour $t > 0$, définissons

$$\begin{aligned}(F_\varepsilon u)(t) &= T(t)u_0 + \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s)f(s, u(s)) ds \\ &= T(t)u_0 + T(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)f(s, u(s)) ds.\end{aligned}$$

Puisque $T(t)$ est compact pour $t > 0$, l'ensemble

$$Y_\varepsilon(t) = \{(F_\varepsilon u)(t) : u \in Y_0\}$$

est relativement compact dans X pour tout $0 < \varepsilon < t$. De plus, pour tout $u \in Y_0$, nous avons

$$\|(Fu)(t) - (F_\varepsilon u)(t)\| \leq \int_{t-\varepsilon}^t \|T(t-s)f(s, u(s))\| ds \leq \varepsilon MN.$$

Cela implique que $Y_0(t)$ est totalement borné, c'est-à-dire précompact dans X . Il rest à montrer que la famille $F(Y_0) = \tilde{Y} = \{Fu : u \in Y_0\}$ est équicontinue.

Soit Pour $t_2 > t_1 > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\|(Fu)(t_1) - (Fu)(t_2)\| &\leq \|(T(t_1) - T(t_2))u_0\| \\ &\quad + N \int_0^{t_1} \|T(t_2-s) - T(t_1-s)\| ds + (t_2 - t_1)MN.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Puisque $T(t)$ est équicontinue, Le membre à droite de (3.6) tend vers zéro lorsque $t_1 \rightarrow t_2$ (indépendamment de $u \in Y_0$).

En vertu du Théorème d'Ascoli-Arzelà $\tilde{Y}$ est relativement compact. D'après le Théorème de Schauder, l'opérateur F possède un point fixe dans Y_0 . Qui sera la solution faible du problème (3.4) sur $[0, t_1]$. De sorte que $u(t) \in U$, pour tout $t \in [0, t_1]$. Le résultat suivant concernant la maximalité de la solution faible du problème (3.4).

Théorème 3.2.2. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $(T(t))_{t \geq 0}$ sur X . Si $f : [0, \infty[\times X \rightarrow X$ est continue et transforme les*

3.2 Équations semi-linéaires avec des semi-groupes compacts

ensembles bornés de $[0, \infty[\times X$ en des ensembles bornés de X , alors pour tout $u_0 \in X$, le problème de Cauchy (3.4) admet une solution faible u sur un intervalle maximal d'existence $[0, t_{\max}[$. Si $t_{\max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Preuve : Nous notons tout d'abord qu'une solution faible u de (3.4) définie sur un intervalle fermé $[0, t_1]$ peut être étendue à un intervalle plus grand $[0, t_1 + \delta]$, $\delta > 0$, en définissant $u(t + t_1) = w(t)$ où $w(t)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}w(t) + Aw(t) = f(t + t_1, w(t)), \\ w(0) = u(t_1). \end{cases} \quad (3.7)$$

L'existence d'une telle solution sur un intervalle de longueur $\delta > 0$ est assurée par le Théorème 3.2.1. Soit $[0, t_{\max}[$ l'intervalle maximal sur lequel la solution faible u de (3.1) peut être prolongée. Nous allons montrer que si $t_{\max} < \infty$, alors

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Pour cela, nous allons d'abord prouver que $t_{\max} < \infty$ implique

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty.$$

En effet, supposons par l'absurde que $t_{\max} < \infty$ et que $\overline{\lim}_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| < \infty$. Nous pouvons alors supposer que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \|u(t)\| \leq K, \quad \text{pour } 0 \leq t < t_{\max},$$

où M et K sont des constantes. Par hypothèse sur f , il existe aussi une constante N telle que

$$\|f(t, u(t))\| \leq N, \quad \text{pour } 0 \leq t < t_{\max}.$$

Si $0 < p < t < t' < t_{\max}$, alors

$$\begin{aligned}
 \|u(t') - u(t)\| &\leq \|T(t')u_0 - T(t)u_0\| \\
 &+ \left\| \left(\int_0^{t-p} + \int_{t-p}^t \right) (T(t' - s) - T(t - s))f(s, u(s))ds \right\| \\
 &+ \left\| \int_t^{t'} T(t' - s)f(s, u(s))ds \right\| \\
 &\leq \|T(t')u_0 - T(t)u_0\| + N \int_0^{t-p} \|T(t' - s) - T(t - s)\|ds \\
 &+ 2MNp + (t' - t)MN.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Puisque $t > p > 0$ est arbitraire et puisque $T(t)$ est équicontinue pour $t \geq p > 0$, le second membre de (3.8) tend vers zéro lorsque t, t' tendent vers $t_{\max}$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} u(t) = u(t_{\max})$$

existe et par la première partie de la démonstration, la solution u peut être prolongée au-delà de $t_{\max}$, ce qui contredit la maximalité de $t_{\max}$. Par conséquent l'hypothèse $t_{\max} < \infty$ implique que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Pour conclure la démonstration, nous allons montrer que

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty.$$

Si cela était faux, il existerait une suite $t_n \rightarrow t_{\max}$ et une constante K telles que

$$\|u(t_n)\| \leq K, \quad \forall n.$$

Soit $\|T(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq t_{\max}$, et soit

$$N = \sup\{\|f(t, x)\| : 0 \leq t \leq t_{\max}, \|x\| \leq M(K + 1)\}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \|u(t)\|$ est continue et que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty.$$

il existe une suite $\{h_n\}$ telle que

$$h_n \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty, \quad \|u(t)\| \leq M(K + 1) \text{ pour } t_n \leq t \leq t_n + h_n$$

et

$$\|u(t_n + h_n)\| = M(K + 1).$$

Mais alors, nous avons

$$\begin{aligned} M(K + 1) &= \|u(t_n + h_n)\| \leq \|T(h_n)u(t_n)\| \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_n + h_n} \|T(t_n + h_n - s)f(s, u(s))\| ds \\ &\leq MK + h_n NM. \end{aligned}$$

Ce qui est absurde car $h_n \rightarrow 0$. Ainsi, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\| = \infty,$$

et la preuve est terminée.

Corollaire 3.2.1. *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe compact, $T(t)_{t \geq 0}$ sur X . Soit $f : [0, \infty[\times X \rightarrow X$ est continue et applique les ensembles bornés de $[0, \infty[\times X$ sur des ensembles bornés de X . Alors, pour tout $u_0 \in X$, le problème de Cauchy (3.4) admet une solution globale $u \in C([0, \infty[\times X)$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *Il existe une fonction continue $k_0(s) : [0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ telle que*

$$\|u(t)\| \leq k_0(t),$$

pour tout t dans l'intervalle d'existence de u .

2. *Il existe deux fonctions localement intégrables $k_1(s)$ et $k_2(s)$ telles que*

$$\|f(s, x)\| \leq k_1(s)\|x\| + k_2(s) \quad \text{pour } 0 \leq s < \infty, x \in X \quad (3.9)$$

Preuve : La partie (1) est une conséquence triviale du Théorème (3.2.2). Pour démontrer (2), nous la réduisons à (1) comme suit : supposons que la solution u existe sur l'intervalle $[0, t[$. Posons $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ et

$$\psi(t) = M\|u_0\| + \int_0^t Me^{-\omega s} k_2(s) ds.$$

La fonction ψ ainsi définie est évidemment continue sur $[0, \infty[$ et nous avons

$$\begin{aligned} \|u(t)\|e^{-\omega t} &\leq e^{-\omega t}\|T(t)u_0\| + e^{-\omega t} \int_0^t \|T(t-s)f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \psi(t) + \int_0^t Mk_1(s)\|u(s)\|e^{-\omega s} ds \end{aligned} \quad (3.10)$$

et par l'inégalité de Gronwall,

$$\|u(t)\|e^{-\omega t} \leq \psi(t) + M \int_0^t k_1(s)\psi(s) \exp\left(M \int_s^t k_1(r)dr\right) ds$$

ce qui implique le bornitude de $\|u(t)\|$ par une fonction continue.

CHAPITRE 4

PROBLÈME D'ÉVOLUTION AVEC CONDITION NON LOCALE

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

Dans cette section, on s'intéresse à étudier le problème d'évolution avec condition non locale suivant :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, b], \\ u(0) + g(u) = u_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ dans un espace de Banach X , $f : [0, b] \times X \rightarrow X$ est une fonction Carathéodory, $g : C([0, b]; X) \rightarrow X$ est une fonction continue représentant la condition initiale non locale et $u_0 \in X$.

Le résultat de cette section est inspiré de [7].

Définition 4.1.1. *Une solution faible est une fonction $u \in C([0, b]; X)$ qui satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$u(t) = T(t)u_0 + T(t)g(u) + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds, \quad t \in [0, b].$$

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

Pour démontrer les résultats d'existence, nous utilisons le Théorème de Schaefer. L'existence de solutions est démontrée sous trois cas d'hypothèses différentes.

4.1.1 1^{er} Cas : Compacité de la non linéarité

Supposons les hypothèses suivantes :

(Hg) :

- (1) $g : C([0, b]; X) \rightarrow X$ est complètement continue.
- (2) Il existe $M > 0$ tel que $\|g(u)\| \leq M$ pour $u \in C([0, b]; X)$.

(Hf) :

- (1) f est Carathéodory (mesurable par rapport à t et continue par rapport à x).
- (2) Il existe une fonction $a(\cdot) \in L^1(0, b; \mathbb{R}^+)$ et une fonction croissante et continue $\Omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\Omega(\|x\|) \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } t \in [0, b].$$

- (3) f est compact .

On définit $K : C([0, b]; X) \rightarrow C([0, b]; X)$ par :

$$(Ku)(t) = \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds. \quad (4.2)$$

Lemme 4.1.1. *Si (Hf) est vérifiée, alors K est complètement continue .*

Preuve : La continuité de K est démontrée comme suit :

soit $u_n \rightarrow u$ dans $C([0, b]; X)$, alors

$$\|Ku_n - Ku\| \leq \sup_{t \in [0, b]} \left\| \int_0^t T(t-s) [f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))] ds \right\|.$$

Donc $Ku_n \rightarrow Ku$ dans $C([0, b]; X)$ par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue, K est continue.

Soit $B_r = \{u \in C([0, b]; X); \|u\|_\infty \leq r\}$. par le Théorème d'Arzelà-Ascoli, pour démontrer la compacité de K , on doit montrer que $K(B_r)$ est relativement compact dans $C([0, b]; X)$. Maintenant montrons que $K(B_r)$ est

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

équicontinue :

$$\begin{aligned}
\|K(u(t+h)) - K(u(t))\| &= \left\| \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s, u(s))ds \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t [T(t+h-s) - T(t-s)]f(s, u(s))ds \right\| \\
&\leq N \int_t^{t+h} \|f(s, u(s))\| ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t+h-s) - T(t-s)\| \|f(s, u(s))\| ds \\
&\leq N\Omega(r) \int_t^{t+h} a(s)ds + N\Omega(r) \int_0^t \|T(h) - I\| a(s)ds.
\end{aligned}$$

Car $\|f(s, u(s))\| \leq a(s)\Omega(\|u(s)\|) \leq a(s)\Omega(r)$. Puisque f est compact $\|[T(h) - I]f(s, u(s))\| ds \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ uniformément, pour $s \in [0, b]$ et $u \in B_r$. Cela implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|[T(h) - I]f(s, u(s))\| < \varepsilon, \quad \text{pour tout } 0 \leq h \leq \delta.$$

On sait que

$$\|Ku(t+h) - Ku(t)\| \leq N\Omega(r) \int_t^{t+h} a(s) ds + N\varepsilon$$

Donc $K(B_r) \subset C([0, b]; X)$ est équicontinue sur $[0, b]$. L'ensemble $\{T(t-s)f(s, u(s)) : s, t \in [0, b], u \in B_r\}$ est précompact car f est compact et $T(\cdot)$ est un C_0 -semi-groupe. Donc $K(B_r)(t) \subset X$ est précompact, d'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli K est compact. Ainsi elle est complètement continue.

Théorème 4.1.1. *Si (Hg) et (Hf) sont vérifiées, alors il existe au moins une solution u faible du problème (4.1), à condition que :*

$$\int_0^b a(s) ds < \int_{NM}^{+\infty} \frac{ds}{N\Omega(s)}$$

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

On définit $J : C([0, b]; X) \rightarrow C([0, b]; X)$ par :

$$(Ju)(t) = T(t)g(u)$$

Lemme 4.1.2. *Si $(Hg)(1)$ est vérifiée, alors J est complètement continu .*

Preuve du Théorème : On sait que $J + K : C([0, b]; X) \rightarrow C([0, b]; X)$ est complètement continue. Pour prouver l'existence d'un point fixe on doit montrer que l'ensemble des solutions $\{u, u = \lambda(J + K)u, \lambda \in (0, 1)\}$ est uniformément borné. Soit $u \in C([0, b]; X)$

$$u(t) = \lambda T(t)g(u) + \lambda \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds, \quad \text{pour tout } t \in [0, b],$$

on a :

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \lambda \|T(t)\| \|g(u)\| + \lambda \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \lambda NM + \lambda N \int_0^t a(s) \Omega(\|u(s)\|) ds \end{aligned}$$

On pose $x(t) = \lambda NM + \lambda N \int_0^t a(s) \Omega(x(s)) ds$.

Donc $x(0) = NM$ et $\|u(t)\| \leq x(t)$, pour tout $t \in [0, b]$

et $x'(t) = Na(t)\Omega(\|u(t)\|)$ Comme Ω est croissante, alors

$$x'(t) \leq Na(t)\Omega(x(t)) \Rightarrow \frac{x'(t)}{N\Omega(x(t))} \leq a(t)$$

d'où

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{N\Omega(x(s))} ds \leq \int_0^t a(s) ds$$

Pour tout $t \in [0, b]$

$$\int_{NM}^{x(t)} \frac{ds}{N\Omega(s)} \leq \int_0^t a(s) ds < \int_{NM}^{+\infty} \frac{ds}{N\Omega(s)}$$

cela implique qu'il existe une constante $r > 0$ telle que $\|u(t)\| \leq x(t) \leq r$, r independant de λ . Par conséquence toutes les conditions du Théorème de Schaefer sont satisfaites, ce qui garantit que l'opérateur $J + K$ admet un point fixe qui est solution faible du problème (4.1).

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

Théorème 4.1.2. *Si $(Hg)(1)$ et (Hf) sont vérifiées, alors il existe au moins une solution faible de (4.1), à condition que :*

$$\int_0^b a(s) ds < \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{T - N\alpha(T)}{N\Omega(T)} \quad (4.3)$$

où $\alpha(T) = \sup\{\|g(u)\|; u \leq T\}$.

Preuve : Par le lemme 4.1.1 et le lemme 4.1.2, nous avons que $J + K$ est complètement continu. D'après (4.3) il existe une constante $r > 0$ telle que :

$$\int_0^b a(s) ds \leq \frac{r - N\alpha(r)}{N\Omega(r)}$$

Pour tout $u \in B_r$ et $v = (J + K)u$, on obtient :

$$\|v(t)\| \leq N\|\alpha(r)\| + N \int_0^t a(s)\Omega(r) ds \leq r$$

pour $t \in [0, b]$. Est implique que $(J + K)B_r \subset B_r$. Par le Théorème de Schauder, on en déduit qu'il existe au moins un point fixe $u \in B_r$ de $J + K$ et u est une solution faible.

Maintenant , affaiblissant les hypothèses précédent, on obtient par la suite un résultat semilinéaire au théorème

– **(Hg)(2')** : Il existe des constantes c, d telles que :

$$\forall u \in C([0, b]; X), \quad \|g(u)\| \leq c\|u\| + d.$$

– **(Hf)(2')** : Il existe $m(\cdot), h(\cdot) \in L^1([0, b], \mathbb{R}^+)$ telles que :

$$\|f(t, x)\| \leq m(t)\|x\| + h(t), \quad \forall t \in [0, b], x \in X.$$

Théorème 4.1.3. *Si $(Hg)(1)$, $(Hg)(2')$, $(Hf)(1)$, $(Hf)(2')$ et si $(Hf)(3)$ sont vérifiés ou $T(t)$ est compact. Alors il existe au moins une solution faible de (4.1), à condition que :*

$$Nce^{N\|m\|_1} < 1$$

où $\|\cdot\|_1$ est la norme dans $L^1([0, b])$.

Preuve : D'après le Théorème 4.1.1, le lemme 4.1.1 et le lemme 4.1.2 l'application $J + K$ est complètement continue. Par le Théorème de Schaefer, il

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

suffit de démontrer que l'ensemble $\{u; u = \lambda(J + K)u, \lambda \in (0, 1)\}$ est borné. Pour tout u tel que $u = \lambda(J + K)u$, on a :

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \lambda N(c\|x\| + \lambda d) + \lambda N \int_0^t m(s)\|u(s)\| ds + \lambda N \int_0^t h(s)\| ds \\ &\leq Nc\|u\| + N(d + \|h\|_1) + N \int_0^t m(s)\|u(s)\| ds \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Gronwall pour estimer $\|u\|$ pour $t \in [0, b]$.

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq (Nc\|u\| + N(d + \|h\|_1)) \exp(N \int_0^t m(s) ds) \\ &\leq (Nc\|u\| + N(d + \|h\|_1)) \exp(N\|m\|_1) \\ &= Nc\|u\| \exp(N\|m\|_1) + N(d + \|h\|_1) \exp(N\|m\|_1) \\ &\leq \frac{N(d + \|h\|_1) \exp(N\|m\|_1)}{(1 - Nc) \exp(N\|m\|_1)}. \end{aligned}$$

4.1.2 2^{eme} Cas : Lipschizianité de la condition non locale

Supposons les hypothèses suivantes :

– (**Hg'**) : Il existe une constante $k < \frac{1}{N}$ telle que :

$$\|g(u) - g(v)\| \leq k\|u - v\|, \quad \forall u, v \in C([0, b]; X).$$

– (**Hf**) et (**Hg**).

Soit $L : C([0, b]; X) \rightarrow C([0, b]; X)$ définie par :

$$(L(u))(t) = u(t) - T(t)g(u).$$

Lemme 4.1.3. *Si (Hg') est vérifiée, alors L est bijectif et L^{-1} est Lipschitzien avec constante $\frac{1}{1 - Nk}$.*

Preuve : Pour tout $v \in C([0, b]; X)$ en utilisant le Théorème de contraction de Banach. On sait qu'il existe un point fixe $v \in C([0, b]; X)$, cela implique que L est bijectif. Pour tout $v_1, v_2 \in C([0, b]; X)$:

$$\begin{aligned} \|L^{-1}v_1 - L^{-1}v_2\| &\leq \|T(t)g(L^{-1}v_1) - T(t)g(L^{-1}v_2)\| + \|(v_1(t) - v_2(t))\| \\ &\leq Nk\|L^{-1}v_1 - L^{-1}v_2\| + \|v_1(t) - v_2(t)\| \\ &\leq \frac{1}{1 - Nk}\|v_1 - v_2\|, \quad \text{pour } t \in [0, b]. \end{aligned}$$

4.1 Existence de solutions pour les problèmes de Cauchy semi-linéaires avec condition initiale non locale

Théorème 4.1.4. *Si (Hg') , $(Hg)(2)$ et (Hf) sont vérifiées, alors il existe au moins une solution faible de (4.1), lorsque le Théorème 4.1.1 est satisfait.*

Preuve : Soit u est la solution faible du problème (4.1) si et seulement si elle est un point fixe de $L^{-1}k$. De la même manière de Théorème 4.1.1, on doit prouver que l'ensemble $\{u; \lambda u = (L^{-1}k)u \text{ avec } \lambda \in (0, 1)\}$ est borné, puisque L^{-1} est complètement continu par le Théorème de Schaefer. Si $\lambda u = L^{-1}ku$ alors pour tout $t \in [0, b]$,

$$\begin{aligned} \lambda u(t) &= T(t)g(\lambda u) + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds \\ \|u(t)\| &\leq \frac{1}{\lambda}NM + \frac{N}{\lambda} \int_0^t a(s)\Omega(\|u(s)\|) ds \\ &\leq NM + N \int_0^t a(s)\Omega\|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Comme pruvé dans le Théorème 4.1.1, on sait qu'il existe une constante r indépendante de λ telle que $\|u\| \leq r$.

Théorème 4.1.5. *Si (Hg') et (Hf) sont vérifiées, alors il existe au moins une solution faible du problème (4.1) à condition que :*

$$\int_a^b a(s) ds \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T - NkT}{N\Omega(T)}. \quad (4.4)$$

Preuve : Par lemme 4.1.1 et lemme 4.1.3, nous savons que $L^{-1}K$ est complètement continu. D'après le Théorème 4.1.5 il existe une constante $r > 0$ telle que :

$$\int_0^t a(s) ds \leq \frac{r - N\|kr - N\|\|g(0)\|}{N\Omega(r)}$$

Pour tout $u \in B_r$ et $v = L^{-1}Ku$, nous avons

$$\|v(t)\| \leq Nk\|v\| + N\|g(0)\| + N \int_0^t a(s)\Omega(r) ds$$

pour $t \in [0, b]$, cela implique que $\|v\| < r$, donc $L^{-1}KB_r \subset B_r$. Par le Théorème de Schaefer il existe au moins un point fixe $u \in B_r$ de $L^{-1}K$ et u est une solution faible de (4.1).

4.1.3 3^{me} Cas : Compacité de semi-groupe

Supposons les hypothèses suivantes :

Théorème 4.1.6. *Si (Hg') , $(Hf)(1)$ et $(Hf)(2)$ sont vérifiées et $T(t)$ est compact. Alors il existe au moins une solution faible de (4.1) à condition que :*

$$\int_0^b a(s) ds \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T - NkT}{N\Omega(T)}.$$

Preuve : Par la preuve du Théorème 4.1.1, nous savons que k est complètement continu sous $(Hf)(1)$, $(Hf)(2)$ et la condition de compacité des semi-groupes $(T(t))_{t>0}$. Donc $L^{-1}k$ est complètement continu, De même manière de la preuve du Théorème 4.1.5, nous complétons la preuve.

Théorème 4.1.7. *Si (Hg') , $(Hf)(1)$, $(Hf)(2)$ et $(Hf)(3)$ sont vérifiés, ou $T(t)$ est compact, alors il existe au moins une solution faible de (4.1).*

Preuve : D'après le Théorème 4.1.1, le Lemme 4.1.2 et le Lemme 4.1.3, on sait que l'application $L^{-1}K$ est complètement continue. Par le Théorème de Schaefer nous prouver seulement que l'ensemble $\{u : u = \lambda(L^{-1}K)u, \text{ pour } \lambda \in (0, 1)\}$ est borné, pour tout $u \in \{u : u = \lambda(L^{-1}K)u \text{ pour } \lambda \in (0, 1)\}$, on utilisant l'estimation ci-dessus, nous avons :

$$|u| \leq \frac{N(\|g(0)\| + \|h\|_1) \exp(N\|m\|_1)}{1 - NK \exp(N\|m\|_1)}.$$

Nous donnons un contre-exemple à certaines publication récentes concernant l'existence de solutions faibles des équations d'évolution non locales, nous indiquons que dans l'étude de telles équations les opérateurs à partir des quels les solutions faibles sont obtenues ne sont en général pas compacts. Par conséquent, les théorèmes du point fixe qui nécessitent la compacité des opérateurs ne sont pas applicables.

4.2 Contre exemple

Récemment, la notion de condition non locale a été introduite pour généralisation de l'étude du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq b \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

au problème non local suivant :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq b \\ u(0) + g(u) = u_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

où $g : C([0, b], X) \rightarrow X$ est une fonction continue et A est un générateur infinitésimal non borné d'un C_0 -semi groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ dans X . Pour étudier ce problème, on définit une application $F : \mathcal{C}([0, b]; X) \rightarrow \mathcal{C}([0, b]; X)$ par :

$$(Fu)(t) = T(t)u_0 - T(t)g(u) + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds, \quad \forall t \in [0, b]. \quad (4.7)$$

On va montrer que les opérateurs associés ne sont généralement compacts, ce qui entraîne que le Théorème de Schauder n'est pas applicable. Pour cela, il est nécessaire de montrer que l'application F est un opérateur compact selon le Théorème d'Arzélà-Ascoli, cela revient à prouver que F envoie un ensemble borné de $C([0, b]; X)$ vers une famille équicontinue. Supposons que le semi-groupe $T(\cdot)$ est compact pour $t > 0$, donc $T(\cdot)$ est équicontinu, par conséquence :

$$\begin{aligned} \|F(u)(t_1) - F(u)(t_2)\| &\leq \|(T(t_1) - T(t_2))[u_0 - g(u)]\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{t_1} T(t_1 - s)f(s, u(s)) ds - \int_0^{t_2} T(t_2 - s)f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \|(T(t_1) - T(t_2))\| \|u_0 - g(u)\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{t_1} T(t_1 - s)f(s, u(s)) ds - \int_0^{t_2} T(t_2 - s)f(s, u(s)) ds \right\|. \end{aligned}$$

Donc si $\|T(t_1) - T(t_2)\| \rightarrow 0$ quand $t_1 - t_2 \rightarrow 0$ Pour tout $t_1, t_2 \in [0, b]$. Mais si on prend $t_2 = 0$, cela revient à dire que $\|T(t_1) - I\| \rightarrow 0$ lorsque $t_1 \rightarrow 0$ alors $(T(t))_{t \geq 0}$ est uniformément continue. Or, d'après le Théorème 2.1.1, cela contredit donc les hypothèses classiques où A est supposé non borné. Une autre manière de dire cela est de remarquer que si $T(\cdot)$ est compact pour $t > 0$ et si $\|T(t) - I\| < 1$, alors $T(t)$ admet une inverse bornée par la série géométrique, donc $I = T(t)^{-1}T(t)$ une composition d'un opérateur borné avec un opérateur compact. Cela implique que X est de dimension finie, donc A est borné suppose que $T(\cdot)$ est un C_0 -semi-groupe. Pour l'équation d'évolution dans X , il est donc fondamental de supposer que l'opérateur A

est non borné. Par conséquent le résultat est vrai lorsque l'opération A est borné, ou lorsque le semi-groupe est uniformément continu. Après cela, nous devons poser la question suivante : l'application F définie par (4.7) peut-elle être un opérateur compact ? En d'autres termes, l'application F définie par (4.7) envoie-t-elle un ensemble borné de $C([0, b], X)$ dans un ensemble précompact de $C([0, b], X)$? Dans le cas où $u_0 = 0$ et $f(\cdot, \cdot) = 0$, la question devient l'application définie par :

$$[T(\cdot)g](u) = T(\cdot)[g(u)], \quad u \in C([0, b]; X). \quad (4.8)$$

Théorème 4.2.1. *Soit A un opérateur linéaire non borné, soit $T(\cdot)$ le semi-groupe fortement continu engendré par A . (ici $T(\cdot)$ peut ou non être compact pour $t > 0$), alors il existe une fonction continue $g : ([0, b]; X) \rightarrow X$ est borné, soit $K \subset C([0, b]; X)$, tel que pour l'application $T(\cdot)g$ définie en (4.8), $T(\cdot)g(K)$ n'est pas précompacte dans $C([0, b]; X)$. Autrement dit, $T(\cdot)g$ n'est pas un opérateur compact.*

Preuve : D'après le Théorème d'Ascoli, il suffit de montrer que $T(\cdot)g(K)$ n'est pas équicontinue pour un certain ensemble borné $K \subset C([0, b]; X)$. Selon le Théorème 2.1.1, $T(\cdot)$ n'est pas uniformément continu sur $[0, \infty)$. Par conséquence, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $t_n \rightarrow 0$ telle que

$$\|T(t_n) - I\| \geq \varepsilon. \quad (4.9)$$

Définissons $g : C([0, b]; X) \rightarrow X$ par

$$g(u) = u(0), \quad u \in C([0, b]; X). \quad (4.10)$$

Et pour tout $x \in X$, définissons la fonction constante $y_x(\cdot) \in C([0, b]; X)$ par :

$$y_x(t) = x, \quad t \in [0, b]. \quad (4.11)$$

Soit en suite K l'ensemble borné de $C([0, b]; X)$ défini par :

$$K = \{f \in C([0, b]; X) : \|f\|_{C([0, b]; X)} \leq 1\}. \quad (4.12)$$

Alors

$$H = \{y_x(\cdot) \in C([0, b]; X) : \|x\| \leq 1\} \subset K. \quad (4.13)$$

Maintenant, pour l'ensemble K donné en (4.12) si $T(\cdot)g(K)$ est équicontinu dans $C([0, b]; X)$, alors pour le ε donné ci-dessus il existe $\delta > 0$ tel que $0 < t_n < \delta$ implique que :

$$\sup_{f \in K} \| [T(t_n) - T(0)]g(f) \| = \sup_{f \in K} \| T(t_n)g(f) - T(0)g(f) \| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.14)$$

Mais d'après les équations (4.9) - (4.13), on a :

$$\begin{aligned} \sup_{f \in K} \| [T(t_n) - T(0)]g(f) \| &\geq \sup_{f \in H} \| [T(t_n) - T(0)]g(f) \| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \| [T(t_n) - I]g(Y_x) \| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \| [T(t_n) - I]x \| \\ &= \| T(t_n) - I \| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui contredit (4.14). Cela complète la démonstration pour la fonction g dans (4.10), L'équation d'évolution non locale (4.6) devient :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq b \\ u(0) = \frac{1}{2}u_0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Par conséquent, les résultats ci-dessus montrent que la fonction g dans (4.6) fournit un contre-exemple valable à la démonstration [7] et que, en général, l'opérateur F défini par (4.7) n'est pas compact sur $C([0, b]; X)$. Cela a une conséquence très importante :

pour obtenir les solutions modérées de l'équation d'évolution (4.6) à partir de l'opérateur F , il semble qu'en général, les théorèmes de point fixe qui requièrent la compacité de F tels que le Théorème de point fixe de Schauder et l'alternative de Leray–Schauder, ne sont pas applicables.

Remarque 4.2.1. *Sans modifier la démonstration dans [7], une méthode consiste à utiliser d'autres théorèmes de point fixe qui ne nécessitent pas la compacité de l'opérateur F (défini par (4.7)), tels que le Théorème de contraction de Banach, quel cas :*

$$\| T(t_1) - T(t_2)[u_0 - g(u)] \|$$

n'apparaîtra pas une autre méthode consiste à supposer certaines conditions de compacité sur la fonction $g(u)$, à utiliser : $\| T(t_1) - T(t_2)[u_0 - g(u)] \|$ plutôt que $\| T(t_1) - T(t_2) \| \| u_0 - g(u) \|$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
- [2] H.L. Royden, Real Analysis, Theorem 4. dominated convergence.
- [3] A. Granas; J. Dugundji, Fixed point theory. Springer Monographs in Mathematics. New York, NY : Springer. xv, 690 p. (2003). Reviewer : Peter Zabreiko (Minsk).
- [4] Dj. Smaïl ; G. Lech ; w. Abdelghani, Solution sets for differential equations and inclusions. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 18. Berlin : de Gruyter (ISBN 978-3-11-029344-9/hbk ; 978-3-11-029356-2/ebook). xix, 453 p. (2013).
- [5] W. Rudin, Principes d'analyse mathématique, 3^e édition française, Dunod, 2010, Chapitre 7, Théorème 7.25, page 172.
- [6] A. Pazy, «Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations», Springer-Verlag. (1983).
- [7] X.Xingmei, Existence of solutions for semilinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces. Electron. J. Differ. Equ. 2005, Paper No. 64, 7 p. (2005).
- [8] H.J liu, A remark on the mild solutions of non-local evolution equations. Semigroup Forum 66, No. 1, 63-67 (2003).