RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« AFA »

Présenté Par :

OUNNAS HOUDA

Sous L'intitulé :

Inégalité de Hermite-Hadamard pour les fonctions h-convexes via l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction

Soutenu publiquement le 29 / 05 / 2025
à Tiaret devant le jury composé de :

Mr SENOUCI Abdel Kader	Prof	Université Ibn Khaldoun, Tiaret	Président
Mr BENAISSA Bouharket	MCA	Université Ibn Khaldoun, Tiaret	Examinateur
Mr AZZOUZ Noureddine	MCA	C. Universitaire Nour Bachir, El Bayadh	Encadreur

Année universitaire : 2024/2025

Table des matières

Table des matiéres **1**
0.1 Introduction 4
0.2 Préliminaires 6
0.2.1 Fonctions convexes 6
0.2.2 Fonctions h-convexes 9
0.2.3 Notions d'analyse 9
0.2.3.1 Espace de Lebesgue $L^1_w([a,b])$ 9
0.2.3.2 Les fonctions spéciales 10
0.2.3.3 B-fonction 12

1 Inégalités classiques de Hermite-Hadamard **13**
1.1 Cas de fonctions convexes 13
1.2 Cas de fonctions h-convexes 15

2 Inégalités de Hermite-Hadamard via les opérateurs intégraux fractionnaires de Riemann-Liouville **18**
2.1 Les opérateurs intégraux d'ordre entier 18
2.1.1 Premier opérateur : 18
2.1.2 Deuxième opérateur : 20
2.2 Les opérateurs intégraux de Riemann-Liouville ($\mathcal{RL}$) d'ordre réel $\alpha > 0$ . . 22
2.2.1 Propriété de semi-groupe 23
2.2.2 Propriété de la bornitude 24
2.2.3 Propriété utile 26
2.3 Inégalités H-H via l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville pour les fonctions $h-$convexes 28
2.3.1 Inégalités de H-H au premier sens 29
2.3.2 Inégalités de H-H au second sens (middle ending point) 30
2.3.3 Inégalités de H-H au troisième sens (middle starting point) 32
2.4 Inégalités H-H via l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour des cas particuliers de convexité 33
2.4.1 Inégalités H-H pour les fonctions convexes 33
2.4.2 Inégalités H-H pour les fonctions $s-$convexes 34
2.4.3 Inégalités H-H pour les $P-$fonctions 35

3 Inégalités de Hermite-Hadamard via les opérateurs intégrales fractionnaires Psi-Hilfer **36**
3.1 Les opérateurs d'ordre entier 36
3.1.1 Premier opérateur : 36
3.1.2 Deuxième opérateur : 38

3.2 Les opérateurs intégrales Psi-Hilfer ${}^{\psi}\mathcal{I}$ d'ordre réel $\alpha > 0$ 40
3.2.1 Propriété de semi-groupe 41
3.2.2 Propriété de la bornitude 43
3.3 Inégalités H-H via l'intégral fractionnaire Psi-Hilfer pour les fonctions $h-$convexes 45
3.3.1 Inégalités de H-H au premier sens 45
3.3.1.1 Cas particuliers pour la fonction ψ 46
3.3.2 Inégalités de H-H au deuxième sens 47
3.3.2.1 Cas particuliers pour la fonction ψ 48
3.3.3 Inégalités de H-H au troisième sens 48
3.3.3.1 Cas particuliers pour la fonction ψ 49
3.4 Inégalités H-H pour des cas particuliers de convexité 50
3.4.1 Inégalités H-H pour les fonctions convexes 50
3.4.2 Inégalités H-H pour les fonctions $s-$convexes 50
3.4.3 Inégalités H-H pour les $P-$fonctions 51

Introduction et préliminaire

0.1 Introduction

On se plaçant dans le cadre de l'espace de Lebesgue $L^1([a,b])$, ensemble des fonctions intégrables sur un intervalle non vide $[a,b]$, la notion de convexité est cruciale afin de prouver certaines inégalités intégrales, dont l'inégalité de Hermite-Hadamard (**H-H** pour abrégé) qui représente un résultat fondamental en analyse convexe établissant une estimation de la moyenne intégrale d'une fonction convexe sur l'intervalle $[a,b]$.

Cette inégalité fut initialement présente dans les travaux de Hadamard [1], toutefois, c'est Hermite [2] qui a découvert le résultat sous sa forme mathématique. En conséquence, beaucoup d'experts ont qualifié ce résultat d'inégalité de Hermite Hadamard.

Formellement, pour une fonction convexe $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cette inégalité s'écrit :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ce résultat a suscité un intérêt considérable en raison de ses applications en optimisation, en théorie des estimations et en analyse fonctionnelle. Au fil des années, des généralisations et des extensions de cette inégalité ont été proposées pour diverses classes de fonctions, telles que les fonctions s-convexes, les P-fonctions ... élargissant ainsi son champ d'application [3,4].

D'autre part, un développement récent dans ce domaine concerne l'utilisation des opérateurs intégraux fractionnaires pour établir des versions généralisées de l'inégalité de Hermite-Hadamard [5,6]. Ces opérateurs, qui étendent la notion d'intégration et de dérivation à des ordres non entiers, offrent une flexibilité accrue pour étudier des problèmes scientifiques complexes.

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur l'étude des inégalités de Hermite-Hadamard pour les fonctions h-convexes via l'intégrale fractionnaire par rapport à une autre fonction (notée ψ), communément dite intégrale ψ-Hilfer. La notion de h-convexité, qui généralise la convexité classique, combinée à celle de B-fonction seront exploitées pour obtenir des inégalités simples et adaptées à des types de convexités variées. Notre objectif est d'établir des versions généralisées de l'inégalité de Hermite-Hadamard dans différents sens (premier, deuxième et troisième sens) et d'explorer des cas particuliers liés aux choix de la fonction ψ et à ceux de la fonction h.

Ce travail est organisé comme suit :

Après les préliminaires utiles, un premier chapitre rappelle les inégalités classiques de Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes et les fonctions $h-$convexes.

Le chapitre 2 décrit l'élaboration des opérateurs intégraux fractionnaires de Riemann-Liouville, en soulignant leurs caractéristiques majeures (semi-groupe et bornitude), ainsi que leur utilisation dans l'extension des inégalités de Hermite-Hadamard. On déduira ensuite certaines inégalités liées à des cas spécifiques de $h-$convexité.

Enfin, le chapitre 3 approfondit l'étude des inégalités de Hermite-Hadamard pour les fonctions $h-$convexes en utilisant l'opérateur $\psi-$Hilfer (opérateurs d'intégration par rapport à une autre fonction ψ), avec une attention particulière portée aux choix spécifiques de la fonction ψ puis celle de la fonction h.

On termine tout cela par une conclusion et une bibliographie rassemblant les ressources utilisées dans ce mémoire.

0.2 Préliminaires

0.2.1 Fonctions convexes

Cette partie est inspirée du cours [7] du Professeur Rémy Bertrand, École polytechnique - France.

Définition 0.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si*

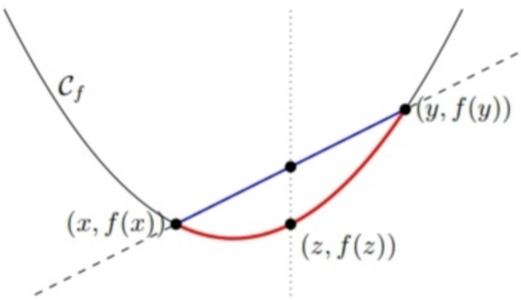
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \qquad \forall x, y \in I \text{ et } \forall \lambda \in [0,1]\,. \tag{1}$$

f est dite concave si $-f$ est convexe. Dans ce cas l'inégalité (1) est inversée.

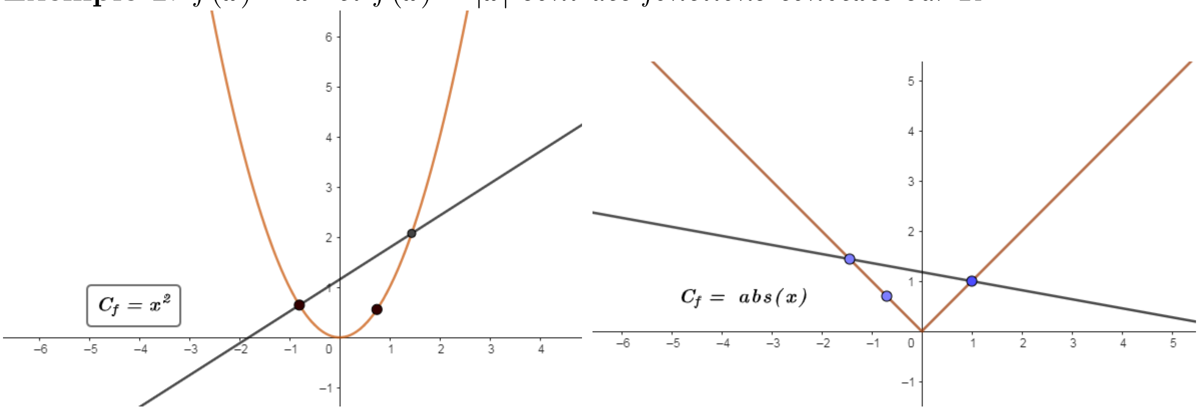
Interprétation géométrique : Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère orthonormé usuel du plan affine.
On fixe deux points $x \leq y$ arbitraires de I.

- Pour $\lambda \in [0,1]$, le point $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ parcoure le segment $[x, y]$.
- Le point de coordonnées $(z, f(\lambda x + (1-\lambda)y))$ est situe sur la courbe C_f.
- Le point de coordonnées $(z, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$ est situe sur la corde issue des points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

Ainsi l'inégalité (1) signifie que la courbe d'une fonction convexe est située au-dessous de toute ses cordes.

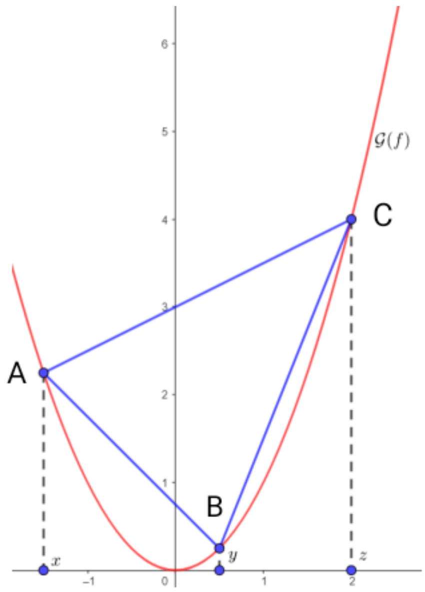


Exemple 1. *$f(x) = x^2$ et $f(x) = |x|$ sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$*



Proposition 0.1. *(**Inégalité des pentes**) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tout $x < y < z \in I$ on a :*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \tag{2}$$



Preuve 0.1. *Considérons* $A = (x, f(x))$ *,* $B = (y, f(y))$ *et* $C = (z, f(z))$ *, le point* B *se trouve sous la ligne* $[AC]$*.*
Les inégalités (2) *indiquent que la pente de la droite* (AC) *est située entre celle de* (AB) *et celle de* (BC)*, ce qui est manifestement évident d'un point de vue géométrique.*

Proposition 0.2. *Considérons une fonction* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

1. *Si* f *est une fonction convexe , alors on peut affirmer que :*
   - f *est continue sur l'intervalle* I*.*
   - *La fonction* f *admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point de* $\mathring{I}$ *(intérieur de* I*), et on a*

$$f^{'}(x^-) \leq f^{'}(x^+) \leq f^{'}(y^-), \qquad \textit{pour tous } x < y \in \mathring{I}$$

2. *Inversement , si la fonction* f *est dérivable sur* $\mathring{I}$ *et que sa dérivée* $f^{'}$ *est croissante, alors* f *est convexe .*

Preuve 0.2. 1. *Pour* $x \in \mathring{I}$ *et* $r > 0$*, on considère l'intervalle* $[x - r, x + r]$*.*
Selon l'inégalité des pentes , on observe que pour tout $0 < \epsilon < r$ *:*

$$\frac{f(x) - f(x-r)}{r} \leq \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \leq \frac{f(x+r) - f(x)}{r},$$

ce qui signifie en particulier que les quotients

$$g_\epsilon(x+\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon},$$

restes bornés lorsque ϵ *se rapproche de 0.*

De plus , l'inégalité des pentes indique que $\epsilon \to g_\epsilon(x+\epsilon)$ *représente une fonction croissante de* ϵ*.* $g_\epsilon(x+\epsilon)$ *étant croissante et majorée, la limite suivante existe*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon},$$

prouvant l'existence de la dérivée à droite de f et par suite la continuité dans cette même direction.
Le même argument pour $\epsilon = -\varepsilon$ démontre l'existence de la dérivée à gauche de f ainsi que la continuité à cette même direction.

Finalement nous réutilisons l'inégalité des pentes pour obtenir :

$$\frac{f(x) - f(x-\epsilon)}{\epsilon} \leq \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0,$$

ce qui nous amène, à la limite, au résultat suivant :

$$f^{'}(x^{-}) \leq f^{'}(x^{+}).$$

2. *Soit $x < y$ dans $\overset{\circ}{I}$ et $\lambda \in]0,1[$. Nous utilisons le théorème des accroissements finis entre x et $\lambda x + (1-\lambda)y$ d'une part et entre $\lambda x + (1-\lambda)y$ et y d'autre part. Cela nous permet de démontrer l'exsistance d'un ξ_1 et d'un ξ_2 qui satisfont :*

$$\xi_1 \in]x, \lambda x + (1-\lambda)y[\text{ tel que } f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) = f^{'}(\xi_1)\,(1-\lambda)\,(y-x), \quad (3)$$

$$\xi_2 \in]\lambda x + (1-\lambda)y, y[\text{ tel que } f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f^{'}(\xi_2)\,\lambda\,(y-x). \quad (4)$$

Par conséquent, $(1-\lambda)\,(4) - \lambda\,(3)$ nous donne

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda(1-\lambda)(y-x)\left[f^{'}(\xi_2) - f^{'}(\xi_1)\right].$$

Étant donné que $\xi_1 < \xi_2$ et que $f^{'}$ est croissante, alors

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0,$$

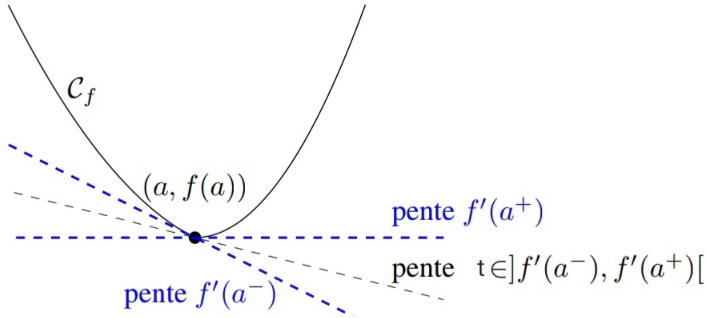
ceci prouve la convexité de f.

De l'inégalité des pentes on peut déduire la proposition suivante.

Proposition 0.3. *Considérons I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors pour tout $t \in \left[f^{'}(a^{-}), f^{'}(a^{+})\right]$, on a l'inégalité :*

$$f(x) > f(a) + t(x-a), \quad \forall x \in I.$$

***i.e.**, pour tout $t \in \left[f^{'}(a^{-}), f^{'}(a^{+})\right]$, la ligne de pente t passant par le point $(a, f(a))$ est située sous la courbe représentative C_f.*



0.2.2 Fonctions h-convexes

Dans [8], l'auteur présente une nouvelle classe de fonctions appelées fonctions h-convexes.

Définition 0.2. *Soit $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, $h \neq 0$. La fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite h-convexe si, pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1-\lambda)f(y). \tag{5}$$

Cas particuliers :

La définition de la $h-$convexité généralise plusieurs classes de fonctions bien connues, selon le choix de h :

1. **Convexité classique** :
   Si $h(\lambda) = \lambda$, alors l'inégalité (5) se réduit à : pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$
   $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y). \tag{6}$$
2. **s-convexité au deuxième sens** [9] :
   Si $h(\lambda) = \lambda^s,\ s \in (0,1]$, alors l'inégalité (5) se réduit à : pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$
   $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda^s\, f(x) + (1-\lambda)^s\, f(y). \tag{7}$$
3. **P-Fonctions** [10] :
   Si $h(\lambda) = 1$, alors l'inégalité (5) se réduit à : pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$
   $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x) + f(y). \tag{8}$$

0.2.3 Notions d'analyse

0.2.3.1 Espace de Lebesgue $L^1_w([a,b])$

Soit w une fonction poids (une fonction strictement positive et mesurable) sur un intervalle non vide $[a,b]$. L'espace de Lebesgue pondéré $L^1_w([a,b])$ est constitué des fonctions mesurables sur $[a,b]$ telles que

$$\|f\|_{L^1_w([a,b])} := \int_a^b |f(x)|\, w(x)\ dx < \infty.$$

Désignant par $\mathcal{L}\big(L^1_w([a,b])\big)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de $L^1_w([a,b])$ vers lui même, un opérateur $T \in \mathcal{L}\big(L^1_w([a,b])\big)$ est dit borné si et seulement si, il existe $C > 0$ telle que

$$\|T(f)\|_{L^1_w([a,b])}\ \leq C\ \|f\|_{L^1_w([a,b])}. \quad \forall\, f \in L^1_w([a,b])$$

Le théorème suivant permet de changer l'ordre d'intégration dans une intégration multiple.

Théoréme 0.1. *(de Fubini) Soit $f(x,y)$ une fonction intégrable sur $\Omega = (a,b) \times (c,d) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors pour p.p. $x \in (a,b)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (c,d) et pour p.p. $y \in (c,d)$ $f(x,y)$ est intégrable sur (a,b) et on a*

$$\int_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy\right)\, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right)\, dy.$$

La formule de Dirichlet qui suit est un cas particulier du théorème de Fubini, (sous l'hypothèse de la convergence absolue de l'une des deux intégrales) on a :

$$\int_a^b \int_a^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_y^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

0.2.3.2 Les fonctions spéciales

On présente ici ce qui est utile pour notre travail, pour plus de détails voir [11].

1. **Fonction gamma :**
   L'une des bases essentielles du calcul fractionnaire repose sur la fonction gamma, qui généralise de manière naturelle la notion de factoriel aux nombres réels positifs.

   Définition 0.3. *Soit $x \in I\!R_+^*$, la fonction gamma d'Euler est définie par :*

   $$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp^{-t} t^{x-1}.dt \tag{9}$$

   (*cette intégrale converge pour chaque valeur de $x > 0$*)

   Exemple 2. *Valeurs de la fonction gamma pour certains nombres réels :*

   $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1 \ , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

   Proposition 0.4. *Pour tout $n \in I\!N^*$, et pour tout $x > 0$ on a :*

   $$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{10}$$

   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,. \tag{11}$$

   Preuve 0.3.

   (a) Pour $x > 0$, en utilisant la méthode d'intégration par parties, nous obtenons :

   $$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt \\ &= \Big[-e^{-t}\ t^x \Big]_{t=0}^{t=+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \\ &= x\Gamma(x)\,. \end{aligned}$$

   (b) Pour $n \in I\!N^*$, en mettant en œuvre consécutivement la formule susmentionnée, nous obtenons :

   $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = ... = n\,(n-1)\,(n-2)\,... = 1\Gamma(1) = n!$$

2. **Fonction Bêta :**

   Définition 0.4. *Pour $x, y > 0$, la fonction bêta est définie par :*

   $$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt\,. \tag{12}$$

Proposition 0.5. *La fonction bêta est liée à la fonction gamma par l'identité suivante :*

$$\forall x, y > 0 \ : \quad \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \,. \tag{13}$$

Preuve 0.4. *Soient $x, y > 0$ on a*

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dtds = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} s^{y-1}e^{-(t+s)}ds\right)dt\,,$$

on réalise le changement de variable
$\tau = t+s$, ce qui donne $\quad s = \tau - t \quad$ et $\quad d\tau = dt \quad$,
pour $s = 0$ on a $\tau = t$, $\quad$ et pour $\quad s \to +\infty$ on a $\tau \to +\infty$, $\quad$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1}dt \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{y-1}\, e^{-\tau}d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \int_0^{\tau} (\tau - t)^{y-1}\, t^{x-1}dt\,.\end{aligned}$$

Si on pose $r = \dfrac{t}{\tau}$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \left(\int_0^1 (r\tau)^{x-1}(\tau - r\tau)^{y-1}\,\tau dr\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \left(\tau^{x-1+y-1+1}\int_0^1 (r)^{x-1}(1-r)^{y-1}\,dr\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \left(\tau^{x+y-1}\ \beta(x,y)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \tau^{(x+y)-1}e^{-\tau}d\tau\ \beta(x,y) \\ &= \Gamma(x+y)\ \beta(x,y)\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Proposition 0.6. *Soient $(x,y) \in I\!R_+^*$, nous avons*

$$\beta(x,y) = \beta(y,x)\,,$$

c'est-à-dire : la fonction bêta presente une symétrie.

Preuve 0.5. *Nous avons*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\,,$$

en réalisant le changement de variable $s = 1 - t$ *ce qui donne* $t = 1 - s$ *et* $dt = -ds$ *, on déduit*

$$\beta(x,y) = \int_1^0 (1-s)^{x-1} s^{y-1} \, (-ds)$$

$$= \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1} \, ds$$

$$= \beta(y,x) \, .$$

0.2.3.3 B-fonction

Cette notion qui permet de simplifier considérablement les calculs dans les inégalités utilisant la h-convexité a été introduite par B. Benaissa et al. dans [12].

Définition 0.5. *Une fonction* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *positive est appelée B-fonction si*

$$f(\lambda - a) + f(b - \lambda) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{14}$$

où $a < \lambda < b$ *avec* $a, b \in [0,\infty)$*.*

En particulier, en prenant $a = 0$ *et* $b = 1$ *dans* (14)*, on obtient le résultat suivant.*

Théoréme 0.2. *Si* $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *positive est une B-fonction, alors*

$$h(\alpha) + h(\beta) \leq 2h\left(\frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

où $\alpha + \beta = 1$ *et* $\alpha \in [0,1]$*.*

Exemple 3. *Des exemples d'une telle fonction h satisfaisant l'inégalité* (15) *peuvent être fournis par* $h_1(\lambda) = 1$*,* $h_2(\lambda) = \lambda$ *et* $h_3(\lambda) = \lambda^s$ *avec* $s \in (0,1]$*.*

Remarquons que ces exemples sont liées aux différents cas spéciaux de h-convexité cités plus haut.

Chapitre 1

Inégalités classiques de Hermite-Hadamard

Dans ce chapitre, nous allons considérer certains résultats concernant l'inégalité de Hermite-Hadamard pour la classe des fonctions convexes et celle des fonctions h-convexes.

1.1 Cas de fonctions convexes

Théoréme 1.1. *Si une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$, est convexe alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.1}$$

Preuve 1.1. *Soit f convexe sur l'intervalle $[a, b]$, nous avons*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

D'autre part, en posant $x = \lambda a + (1-\lambda)b$, avec $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f(a+b-x)+f(x) &= f(a+b-\lambda a-(1-\lambda)b)+f(\lambda a+(1-\lambda)b) \\ &= f((1-\lambda)a+\lambda b)+f(\lambda a+(1-\lambda)b) \\ &\leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)+\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \\ &= f(a)+f(b). \end{aligned} \tag{1.3}$$

D'après (1.2) *et* (1.3) *nous avons :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

En effectuant une intégration par rapport à x sur $[a, b]$, on obtient

1. ***Intégration du terme de gauche :***

$$I_1 := \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\,dx = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2. ***Intégration du terme du milieu :***

$$I_2 := \frac{1}{2}\int_a^b \left(f(a+b-x)+f(x)\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(a+b-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En effectuant un changement de variable $u = a+b-x$ dans la première intégrale, nous obtenons

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(u)\,(-du) = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx,$$

ainsi

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. ***Intégration du terme de droite :***

$$I_3 := \int_a^b \frac{f(a)+f(b)}{2}\,dx = (f(a)+f(b))\int_a^b \,dx = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

En combinant ces résultats, on aura

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

en divisant par $(b-a)$, nous obtenons le résultat final :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exemple 1.1.
*La fonction définie par $f(x)=x^2$ est **convexe** sur $[a,b]=[1,2]$. On a :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

On vérifie alors que

$$2,25 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \approx 2,33 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} = 2,5.$$

Exemple 1.2.
La fonction définie par $\mathfrak{f}(x) = \ln x$ *est* ***concave*** *sur* $[a, b] = [1, 2]$ *(les inégalités seront inversées). On a :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,41$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^2 \approx 0,39.$$

On vérifie alors que

$$0,41 = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \approx 0,39 \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} = 0,35.$$

1.2 Cas de fonctions h-convexes

L'inégalité de Hermite-Hadamard pour une fonction h-convexe est établie comme suit :

Théoréme 1.2. [13] *Considérons* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction h-convexe sur* I *et* $a, b \in I$ *avec* $a < b$*. Si* $f \in L^1([a, b])$ *alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq (f(a)+f(b))\int_0^1 h(\alpha)d\alpha. \tag{1.4}$$

Preuve 1.2. *Soit une fonction* f *h-convexe sur* I*, alors* $\forall \alpha \in [0, 1]$ *:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y). \tag{1.5}$$

On pose $x = \lambda a + (1-\lambda)b,\ y = (1-\lambda)a + \lambda b$ *et* $\alpha = \frac{1}{2}$*, de* (1.5) *on déduit*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right) f(\lambda a + (1-\lambda)b) + h\left(\frac{1}{2}\right)) f((1-\lambda)a + \lambda b),$$

On effectue une intégration par rapport à λ *sur* $[0, 1]$*, d'où*

$$I_g := \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) d\lambda \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(\lambda a+(1-\lambda)b)d\lambda + h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f((1-\lambda)a+\lambda b)d\lambda := I_d. \tag{1.6}$$

Pour le terme de gauche

$$I_g = \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) d\lambda = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 d\lambda = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Pour le terme de droite

$$I_d = h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b)d\lambda + h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f((1-\lambda)a + \lambda b)d\lambda.$$

En utilisant le changement de variable $u = 1 - \lambda$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_0^1 f((1-\lambda)a + \lambda b))d\lambda = \int_1^0 f(ua + (1-u)b)(-du) = \int_0^1 f(ua + (1-u)b)du,$$

d'où

$$I_d = 2h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b)d\lambda, \tag{1.7}$$

en posant $x = \lambda a + (1 - \lambda b)$ dans (1.7) on obtient

$$I_d = 2h\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b)d\lambda = 2h\left(\frac{1}{2}\right)\int_b^a f(x)\frac{dx}{a-b} = 2h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Donc l'inégalité (1.6) devient

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

ainsi la première inégalité du résultat désiré (1.4) est démontrée.

Maintenant, prenons $x = a$ et $y = b$ dans l'inégalité (1.5) :

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq h(\alpha)f(a) + h(1-\alpha)f(b).$$

On effectue une intégration par rapport à α sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$I_1 := \int_0^1 f(\alpha a + (1-\alpha)b)d\alpha \leq \int_0^1 h(\alpha)f(a) + h(1-\alpha)f(b)d\alpha := I_2. \tag{1.8}$$

<u>Calcul du terme de gauche :</u> en posant $x = \alpha a + (1-\alpha)b$on obtient

$$I_1 = \int_0^1 f(\alpha a + (1-\alpha)b)d\alpha = \int_b^a f(x)\frac{dx}{a-b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

<u>Calcul le terme de droite</u>

$$I_2 = f(a)\int_0^1 h(\alpha)d\alpha + f(b)\int_0^1 h(1-\alpha)d\alpha,$$

en utilisant le changement de variable $u = 1 - \alpha$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_0^1 h(1-\alpha)d\alpha = \int_1^0 h(u)(-du) = \int_0^1 h(u)du = \int_0^1 h(\alpha)d\alpha,$$

d'où

$$I_2 = (f(a) + f(b))\int_0^1 h(\alpha)d\alpha.$$

En substituant les résultats des intégrales, l'inégalité (1.8) devient

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq (f(a) + f(b))\int_0^1 h(\alpha)d\alpha,$$

ainsi la deuxième inégalité du résultat désiré (1.4) est démontrée.

Remarque 1.1. *Pour différents choix de $h(\alpha)$ on obtient différentes inégalités de Hermite-Hadamard, en particulier on a les résultats suivants :*

1. *Si on prend $h(\alpha) = \alpha$ dans l'inégalité (1.5), on obtient l'inégalité (1.1) qui représente l'**inégalité de Hermite-Hadamard pour la classe des fonction convexes**.*
2. *En posant $h(\alpha) = \alpha^s$ avec $s \in (0, 1]$ dans le Théorème 1.2, on obtient le corollaire suivant qui présente l'**inégalité de Hermite-Hadamard pour la classe des fonction s-convexes** [14].*

   Corollaire 1.1. *Considérons $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction s-convexe sur I avec $s \in (0, 1]$ et $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f \in L^1([a, b])$ alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vraie*

   $$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \tag{1.9}$$

3. *Pour $h(\alpha) = 1$ dans le Théorème 1.2, on obtient le corollaire suivant qui présente l'**inégalité de Hermite-Hadamard pour la classe des P-fonction** [15].*

   Corollaire 1.2. *Considérons $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une P-fonction sur I et $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $f \in L^1([a, b])$ alors on a l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante*

   $$\frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(a) + f(b). \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Inégalités de Hermite-Hadamard via les opérateurs intégraux fractionnaires de Riemann-Liouville

2.1 Les opérateurs intégraux d'ordre entier

2.1.1 Premier opérateur :

Soit $f \in L^1([a,b])$, nous définissons alors la fonction $J_{a^+}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$J_{a^+}f(x) = \int_a^x f(t)\, dt \ ,$$

et on peut dire que $J_{a^+}f$ est absolument continue. Il est possible d'effectuer une seconde intégration, et ainsi de suite ...

Nous définissons $J^1_{a^+}f(x) := J_{a^+}f(x)$, et nous allons procéder à une composition successive de cette intégration, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} J^2_{a^+}f(x) &= \int_a^x J^1_{a^+}f(s)ds \\ &\vdots \\ J^n_{a^+}f(x) &= \int_a^x J^{n-1}_{a^+}f(s)ds. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons

$$\begin{aligned} J^2_{a^+}f(x) &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\, dt \right) ds = \int_a^x \int_a^s f(t)\, dt\, ds \\ &= \int_a^x \int_t^x f(t)\, ds\, dt = \int_a^x f(t) \left(\int_t^x ds \right) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t)\, dt\, . \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$J^2_{a^+}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt\,.$$

Suivant la même approche, intégrons $J^2_{a^+}f(x)$

$$\begin{aligned}
J^3_{a^+}f(x) &= \int_a^x J^2_{a^+}f(s)\,ds \\
&= \int_a^x \left(\int_a^s (s-t)\,f(t)\,dt\right)\,ds = \int_a^x \int_a^s (s-t)f(t)\,dt\,ds \\
&= \int_a^x \int_t^x (s-t)f(t)\,ds\,dt = \int_a^x \left(\int_t^x (s-t)f(t)\,ds\right)\,dt \\
&= \int_a^x f(t)\left(\int_t^x (s-t)\,ds\right)\,dt = \int_a^x f(t)\left(\left[\frac{1}{2}(s-t)^2\right]_t^x\right)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)\,dt\,,
\end{aligned}$$

ainsi

$$J^3_{a^+}f(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)\,dt\,.$$

Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$J^n_{a^+}\,f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Appliquons une démonstration par récurrence pour établir ce résultat : supposons que

$$J^n_{a^+}\,f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt\ , \tag{2.1}$$

et démontrons que

$$J^{n+1}_{a^+}\,f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt\ .$$

On a par définition $J^{n+1}_{a^+}\,f(x) = \int_a^x J^n_{a^+}\,f(t)\,dt$, donc

$$\begin{aligned}
J^{n+1}_{a^+}\,f(x) &= \int_a^x \left(\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}\,f(\tau)\,d\tau\right)\,dt \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \int_a^t (t-\tau)^{n-1}\,f(\tau)\,d\tau\,dt\,,
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_\tau^x (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, dt\, d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\tau) \left(\int_\tau^x (t-\tau)^{n-1}\, dt \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\tau) \left(\left[\frac{1}{n}(t-\tau)^n \right]_\tau^x \right) d\tau\,,$$

nous obtenons

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\tau)^n f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-\tau)^n f(\tau)\, d\tau\,.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

2.1.2 Deuxième opérateur :

Considérons $f \in L^1([a,b])$, nous définissons la fonction $J_{b^-} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$J_{b^-} f(x) = \int_x^b f(t)\, dt\ ,$$

donc $J_{b^-} f$ est absolument continue. Il est possible de procéder à une seconde intégration, et ainsi de suite... en notant $J_{b^-}^1 f(x) := J_{b^-} f(x)$:

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b J^1 f(s) ds \quad ... \quad J_{b^-}^n f(x) = \int_x^b J^{n-1} f(s) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on arrive à

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b \left(\int_s^b f(t)\, dt \right) ds = \int_x^b \int_s^b f(t)\, dt ds$$

$$= \int_x^b \int_x^t f(t)\, ds\, dt = \int_x^b \left(\int_x^t f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t ds \right) dt = \int_x^b (t-x) f(t)\, dt$$

ainsi

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b (t-b) f(t)\, dt\,.$$

Suivant la même approche, intégrons $J^2 f(x)$

$$J^3_{b^-} f(x) = \int_x^b J^2 f(s)\, ds$$

$$= \int_x^b \left(\int_s^b (t-s)\, f(t)\, dt \right) ds = \int_x^b \int_s^b (t-s) f(t)\, dt\, ds$$

$$= \int_x^b \int_x^t (s-t) f(t)\, ds\, dt = \int_x^b \left(\int_x^t (t-s) f(t)\, ds \right) dt$$

$$= \int_x^b f(t) \left(\int_x^t (t-s)\, ds \right) dt = \int_x^b f(t) \left(\left[\frac{1}{2}(t-s)^2 \right]_x^t \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^2 f(t)\, dt\,,$$

alors

$$J^3_{b^-} f(x) = \frac{1}{2} \int_x^b (t-x)^2 f(t)\, dt\,.$$

Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$J^n_{b^-} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)\, dt.$$

On suppose que

$$J^n_{b^-} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)\, dt\ , \tag{2.2}$$

et en utilisant un raisonnement par récurrence, on montre que

$$J^{n+1}_{b^-} f(x) = \frac{1}{n!} \int_x^b (t-x)^n f(t)\, dt\ .$$

Comme $J^{n+1}_{b^-} f(x) = \int_x^b J^n_{b^-} f(t)\, dt$ on obtient

$$J^{n+1}_{b^-} f(x) = \int_x^b \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau)\, d\tau \right) dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_t^b (\tau - t)^{n-1} f(\tau)\, d\tau\, dt\,,$$

en utilisant le théorème de Fubinni

$$J_{b^-}^{n+1}\, f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_x^\tau (\tau - t)^{n-1}\, f(\tau)\, dt\, d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(\tau) \left(\int_x^\tau (\tau - t)^{n-1}\, dt \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(\tau) \left(\left[\frac{1}{n} (\tau - t)^n \right]_\tau^x \right) d\tau\,,$$

ainsi

$$J_{b^-}^{n+1}\, f(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (\tau - x)^n f(\tau) d\tau = \frac{1}{n!} \int_x^b (\tau - x)^n f(\tau)\, d\tau\,.$$

Ceci est le résultat souhaité.

2.2 Les opérateurs intégraux de Riemann-Liouville $(\mathcal{RL})$ d'ordre réel $\alpha > 0$

En se basant sur les formules (2.1) et (2.2) établies sur $\mathbb{N}$, nous introduisons les définitions suivantes pour les intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'ordre α réel positif.

Définition 2.1. *Pour $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$, on définit les intégrales de Riemann-Liouville d'ordre α à droite (respectivement à gauche) de la fonction f, par les expressions suivantes :*

$$\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < x \leq b, \tag{2.3}$$

et

$$\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a \leq x < b. \tag{2.4}$$

avec $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction gamma d'Euler.

Remarque 2.1. *Si $\alpha = 0$ on pose* $J_{a^+}^0 f(x) = f(x)$ *et* $J_{b^-}^0 f(x) = f(x)\,.$

Si $\alpha = 1$ on déduit $J_{a^+}^1 f(x) = \int_a^x f(x) dx$ *et* $J_{b^-}^1 f(x) = \int_x^b f(x) dx\,,$ *qui correspondent a l'intégrale de Riemann.*

Exemple 4.

$$\begin{aligned}
\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}(1) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} dx = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-x)^\alpha}{\alpha} \Big|_a^t = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}(1) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} \Big|_t^b = \frac{(b-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2.1 Propriété de semi-groupe

Proposition 2.1. *Soient $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha, \mu \in I\!R_+^*$; pour tout $x \in [a,b]$ nous avons :*

$$\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\mu} f(x)\right) = \mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha+\mu} f(x) = \mathcal{RL}_{a^+}^{\mu}\Big(\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f(x)\Big), \tag{2.6}$$

et

$$\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\mu} f(x)\right) = \mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha+\mu} f(x) = \mathcal{RL}_{b^-}^{\mu}\Big(\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f(x)\Big). \tag{2.7}$$

Preuve 2.1. *La formule* (2.3) *appliquée deux fois, nous donne*

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\mu} f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\mu} f\right)(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\int_a^s (s-t)^{\mu-1} f(t)dtds,\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\left[\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\mu} f\right)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\mu-1}ds\right]dt,$$

en réalisant le changement de variable $s = t + (x-t)y,\ 0 \leq y \leq 1$ on obtient

$$\left[\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\mu} f\right)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\mu-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\mu-1}dydt.$$

Finalement, en utilisant (12) *et la relation* (13), *on arrive à*

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\mu} f\right)\right](x) &= \frac{\beta(\alpha,\mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\mu-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\mu-1} f(t)dt \\ &= \left(\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha+\mu} f\right)(x).\end{aligned}$$

La deuxième égalité dans (2.6) *découle de la propriété de commutativité : $\alpha + \mu = \mu + \alpha$.*

On démontre (2.7) *de manière similaire, d'après la définition (2.9), nous avons :*

$$\left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\mu} f\right)(s) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_s^b (t-s)^{\mu-1} f(t)\,dt.$$

En appliquant $\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}$ à ce résultat, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\mu} f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (s-x)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_s^b (t-s)^{\mu-1} f(t)\,dt\right)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_x^b\int_s^b (s-x)^{\alpha-1}(t-s)^{\mu-1} f(t)\,dt\,ds,\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\left[\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\mu} f\right)\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_x^b f(t)\left[\int_x^t (s-x)^{\alpha-1}(t-s)^{\mu-1}\,ds\right]dt. \tag{2.8}$$

Posons le changement de variable $s=x+(t-x)y$, où $0\leq y\leq 1$, alors $ds=(t-x)dy$, et l'intégrale intérieure devient :

$$\begin{aligned}\int_x^t (s-x)^{\alpha-1}(t-s)^{\mu-1}\,ds &= (t-x)^{\alpha+\mu-1}\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\mu-1}\,dy\\ &= (t-x)^{\alpha+\mu-1}\beta(\alpha,\mu).\end{aligned}$$

En substituant dans (2.8) puis en utilisant la relation $\beta(\alpha,\mu)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}\left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\mu} f\right)\right](x) &= \frac{\beta(\alpha,\mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha+\mu-1}\,dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu)}\int_x^b (t-x)^{\alpha+\mu-1}f(t)\,dt\\ &= \left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha+\mu} f\right)(x).\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré la première égalité dans (2.7), la deuxième égalité découle de la commutativité de l'addition $\alpha+\mu=\mu+\alpha$ qui donne :

$$\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha+\mu} f(x)=\mathcal{RL}_{b^-}^{\mu}\left(\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f(x)\right).$$

2.2.2 Propriété de la bornitude

Nous allons établir que les opérateurs $\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha}$ et $\mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha}$ sont bien définis, pour tout ordre d'intégration $\alpha>0$, et bornés sur $L^1([a,b])$.

Théoréme 2.1. [15] *Si $f\in L^1([a,b])$, alors pour tout $\alpha>0$*

$$\parallel \mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f \parallel_{L^1([a,b])}\leq C \parallel f \parallel_{L^1([a,b])}, \tag{2.9}$$

et

$$\parallel \mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f \parallel_{L^1([a,b])}\leq C \parallel f \parallel_{L^1([a,b])}, \tag{2.10}$$

où $C=\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Preuve 2.2. *soit $f\in L^1([a,b])$, alors*

$$\begin{aligned}\parallel \mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f \parallel_{L^1([a,b])} &= \int_a^b \left|\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f(x)\right| dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left|\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right| dx\\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left|f(t)\right| dt\,dx,\end{aligned}$$

en appliquant le Théorème de Fubini, on déduit

$$\| \mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(x-t)^{\alpha} \Big]_t^b \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \, (b-t)^{\alpha} \, dt,$$

En se basant sur la propriété (0.4) *de la fonction Gamma et sur la décroissance de la fonction* $t \to (b-t)^{\alpha}$, *on a*

$$\| \mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| \, (b-t)^{\alpha} \, dt$$

$$\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L^1([a,b])} .$$

De manière similaire, pour $f \in L^1([a,b])$ *on a*

$$\| \mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f \|_{L^1([a,b])} = \int_a^b \left| \mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f(x) \right| dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \Big| \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \Big| \, dx$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} \big| f(t) \big| \, dt \, dx,$$

le Théorème de Fubini, donne

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} |f(t)| \, dx \, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \, dx \, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(t-x)^{\alpha} \Big]_a^t \right) \, dx \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \, (t-a)^{\alpha} \, dt,
\end{aligned}$$

et de la propriété (0.4) *de la fonction Gamma et la croissance de la fonction* $t \to (t-a)^{\alpha}$, *on aboutit à*

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f \|_{L^1([a,b])} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| \, (t-a)^{\alpha} \, dt \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| dt \\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{L^1([a,b])} .
\end{aligned}$$

Remarque 1. *D'après les propriétés* (2.9) *et* (2.10), *si* $f \in L^1([a,b])$, *alors pour tout* $\alpha > 0$

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f \in L^1([a,b]) \quad \textit{et} \quad \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f \in L^1([a,b]) \,, \tag{2.11}$$

ce qui établit que les opérateurs d'intégration fractionnaire $\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}$ *et* $\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}$ *sont bien définis sur* $L^1([a,b])$, *pour tout* $\alpha > 0$.

2.2.3 Propriété utile

Le lemme suivant présente une propriété utile pour un travail ultérieur.

Lemme 2.1. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable, si* $\mathcal{F}(t) = f(t) + f(a+b-t)$ *alors*

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} \mathcal{F}(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} \mathcal{F}(a) = 2[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a)]. \tag{2.12}$$

Preuve 2.3.

1. ***Calcul de*** $\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} \mathcal{F}(b)$ *: En utilisant la définition de* $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} \mathcal{F}(b) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} \mathcal{F}(t) \, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t) \, dt + \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t) \, dt \right] \\
&= \mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t) \, dt.
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = a + b - t$ (donc $du = -dt$) :

$$\begin{aligned}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt &= \int_b^a (b-(a+b-u))^{\alpha-1} f(u)(-du) \\ &= \int_a^b (u-a)^{\alpha-1} f(u)\,du \\ &= \Gamma(\alpha)\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a),\end{aligned}$$

ainsi :

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{F}(b) = \mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a). \tag{2.13}$$

2. ***Calcul de*** $\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(a)$ *: De même*

$$\begin{aligned}\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(a) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}\mathcal{F}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt\right] \\ &= \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt,\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = a + b - t$:

$$\begin{aligned}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt &= \int_b^a ((a+b-u)-a)^{\alpha-1} f(u)(-du) \\ &= \int_a^b (b-u)^{\alpha-1} f(u)\,du \\ &= \Gamma(\alpha)\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b),\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(a) = \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b). \tag{2.14}$$

En additionnant (2.13) *et* (2.14) *:*

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{F}(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(a) = \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a)\right] + \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b)\right]$$

$$= 2\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a)\right].$$

C'est le résultat désiré.

2.3 Inégalités H-H via l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville pour les fonctions $h-$convexes

Dans cette partie on s'est inspiré de [16, 17] combiné avec la notion de B-fonction de [12]. À l'inverse de l'intégrale classique de Riemann, dans le cas fractionnaire on peut considérer trois types d'inégalités H-H sur un intervalle $[a, b]$:

1. **premier sens :** faisant intervenir des intégrations de a vers b et inversement.
2. **second sens (middle ending point) :** faisant intervenir des intégrations de a vers $\frac{a+b}{2}$ et de b vers $\frac{a+b}{2}$.
3. **troisième sens (middle starting point) :** faisant intervenir des intégrations de $\frac{a+b}{2}$ vers a et de $\frac{a+b}{2}$ vers b.

Le lemme suivant est utilisée pour établir les inégalités de Hermite-Hadamard qui vont suivre.

Lemme 2.2. *Soit h une B-fonction. Si f est h-convexe sur $[a, b]$, alors les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout $x \in [a, b]$*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(x)+f(a+b-x)] \leq 2\ h^2\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)]\,. \tag{2.15}$$

Preuve 2.4. *Soit $a < b$ et f soit h-convexe où h satisfait l'inégalité* (15), *alors pour tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tel que $\alpha + \beta = 1$ nous avons*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{(\alpha a+\beta b)+(\beta a+\alpha b)}{2}\right) \\ &\leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)[f(\alpha a+\beta b)+f(\beta a+\alpha b)] \\ &\leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)(h(\alpha)+h(\beta))\,[f(a)+f(b)] \\ &\leq 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)]\,, \end{aligned}$$

d'où

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(\alpha a+\beta b)+f(\beta a+\alpha b)] \leq 2\ h^2\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)], \tag{2.16}$$

En changeant la variable $x = \alpha a + \beta b$ dans (2.16), *nous obtenons $x \in [a, b]$ puisque $\alpha + \beta = 1$, et*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(x)+f(a+b-x)] \leq 2\,h^2\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)].$$

C'est le résultat désiré.

2.3.1 Inégalités de H-H au premier sens

Un premier résultat relatif à l'intégration au premier sens (faisant intervenir des intégrations de a vers b et inversement) est obtenue comme suit :

Théorème 2.2. *Soit h une B-fonction. Si f est h-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\,(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a)\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(a)+f(b)\right], \quad (2.17)$$

Preuve 2.5. *En multipliant* (2.15) *par* $\frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *et en intégrant sur* $t \in [a,b]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt \\
&\leq \int_a^b h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt\right] \\
&\leq \int_a^b 2\,h^2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+f(b)\right] dt,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt\right] \\
&\leq 2\,h^2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+f(b)\right],
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u = a+b-t$ *dans* $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a (b-(a+b-u))^{\alpha-1} f(u)\,(-du) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_b^a (u-a)^{\alpha-1} f(u)\,(-du) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (u-a)^{\alpha-1} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1} f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a)\right] h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2\,h^2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+f(b)\right],$$

en multipliant par $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\ h(\frac{1}{2})(b-a)^{\alpha}}$ *on obtient le résultat désiré* (2.17).

Exemple 2.1.
Soit la fonction convexe définie par $f(x) = x^2$ *sur* $[a, b] = [1, 2]$. *Pour* $h(t) = t$, *on obtient la Figure 2.1 qui illustre l'inégalité* (2.17) *réécrite sous la forme suivante :*

$$\frac{2\,(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq [\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f(a)] \leq \frac{2\,(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right],$$

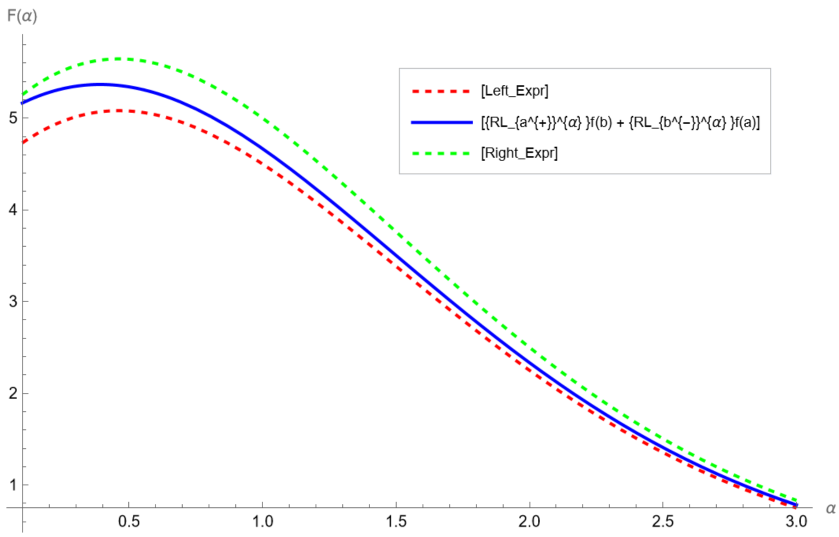


FIGURE 2.1 – Estimations of $RL^{\alpha}_{a^+} f(b) + RL^{\alpha}_{b^-} f(a)$

2.3.2 Inégalités de H-H au second sens (middle ending point)

Un deuxième résultat relatif à l'intégration au deuxième sens (faisant intervenir des intégrations de a vers $\frac{a+b}{2}$ et de b vers $\frac{a+b}{2}$) est obtenue comme suit :

Théoréme 2.3. *Soit* h *une B-fonction. Si* f *est* h*-convexe sur* $[a, b]$, *alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right) [f(a) + f(b)], \tag{2.18}$$

Preuve 2.6. *En multipliant* (2.15) *par* $\frac{(t-\frac{a+b}{2})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *et en intégrant sur* $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{(t-\frac{a+b}{2})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h\left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(t)\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(a+b-t)\, dt\right] \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} 2\, h^2\left(\frac{1}{2}\right) \frac{(t-\frac{a+b}{2})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [f(a) + f(b)]\; dt,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt\right] \\
&\leq 2\,h^{2}\left(\frac{1}{2}\right)\,\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+f(b)\right],
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u=a+b-t$ *dans* $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a}\left((a+b-u)-\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha-1} f(u)\,(-du) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-u\right)^{\alpha-1} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)^{\alpha-1} f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \left[\mathcal{RL}^{\alpha-}_{(b)} f(\frac{a+b}{2})+\mathcal{RL}^{\alpha-}_{(a)+} f(\frac{a+b}{2})\right] h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2\,h^{2}\,\left(\frac{1}{2}\right)\,\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+f(b)\right],$$

puis en multipliant par $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\ h(\frac{1}{2})(\frac{b-a}{2})^{\alpha}}$ *on obtient le résultat désiré* (2.18).

Exemple 2.2.
Pour la fonction convexe définie par $f(x)=x^{2}$ *sur* $[a,b]=[1,2]$. *Pour* $h(t)=t$, *on obtient la Figure 2.2 qui illustre l'inégalité* (2.18) *réécrite sous la forme suivante :*

$$\frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}\,\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right],$$

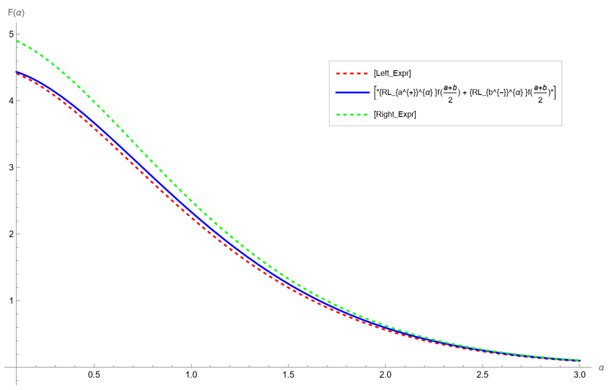


FIGURE 2.2 – Estimations of $\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+} f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2.3.3 Inégalités de H-H au troisième sens (middle starting point)

Un troisième résultat relatif à l'intégration au troisième sens (faisant intervenir des intégrations de $\frac{a+b}{2}$ vers a et de $\frac{a+b}{2}$ vers b) est obtenue comme suit :

Théoréme 2.4. *Soit h une B-fonction. Si f est h-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a)\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)], \tag{2.19}$$

Preuve 2.7. *En multipliant* (2.15) *par* $\frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *et en intégrant sur* $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-\alpha-1} \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt\right] \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[f(a)+f(b)]\,2\,h^{2}\left(\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-\alpha-1} \\
&\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt\right] \\
&\leq [f(a)+f(b)]\,2\,h^{2}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u = a+b-t$ *dans* $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)^{\alpha-1} f(a+b-t)\,dt &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a}(b-(a+b-u)^{\alpha-1} f(u)\,(-du) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\frac{a+b}{2}}^{a}(u-a)^{\alpha-1} f(u)\,(-du) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(u-a)^{\alpha-1} f(u)\,du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}(t-a)^{\alpha-1} f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{+}} f(b) + \mathcal{RL}^{\alpha}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{-}} f(a)\right] h\left(\frac{1}{2}\right) \leq [f(a)+f(b)]\,2\,h^{2}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

en élevant à la puissance $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\ h(\frac{1}{2})(\frac{b-a}{2})^{\alpha}}$ *on obtient le résultat désiré* (2.19).

Exemple 2.3.
Considérons la fonction convexe définie par $f(x) = x^2$ *sur* $[a, b] = [1, 2]$*. Pour* $h(t) = t$*, on obtient la Figure 2.3 qui illustre l'inégalité* (2.19) *réécrite sous la forme suivante :*

$$\frac{(b-a)^\alpha}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \left[\mathcal{RL}^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+} f(b) + \mathcal{RL}^\alpha_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-} f(a)\right] \le \frac{(b-a)^\alpha}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right],$$

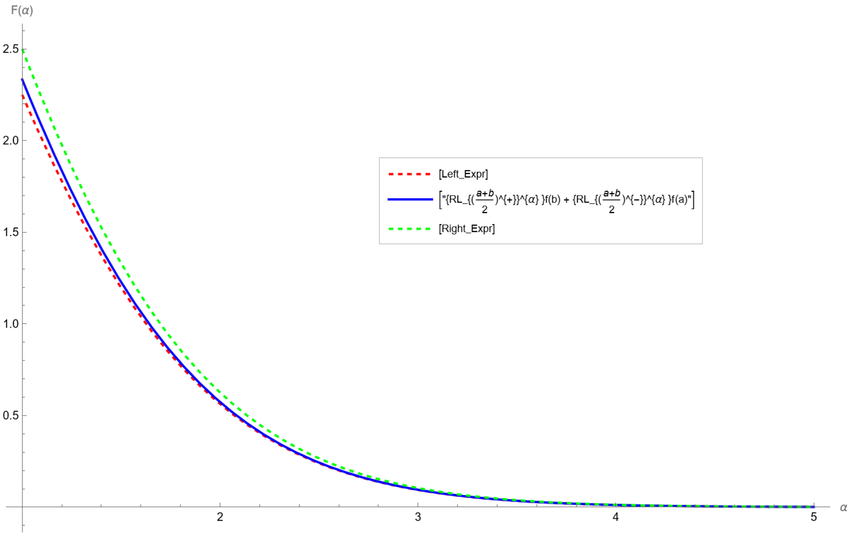


FIGURE 2.3 – Estimations of $\mathcal{RL}^\alpha_{a^+} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathcal{RL}^\alpha_{b^-} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Remarque 2.2.
En prenant $\alpha = 1$ *dans* (2.17), (2.18) *et* (2.19) *on obtient l'inégalité de Hermite-Hadamard via l'opérateur intégral de Riemann pour les fonctions h-convexes.*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \le \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(t)\,dt\right] \le h\left(\frac{1}{2}\right)[f(a)+f(b)], \tag{2.20}$$

et qui est une version du type de l'inégalité (1.4).

2.4 Inégalités H-H via l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour des cas particuliers de convexité

Dans les résultats établis dans la section précédente pour les fonctions $h-$convexes, on va considérer des valeurs spécifiques pour $h(t)$. Cela va engendrer des inégalités H-H pour types spécifiques de convexité.

2.4.1 Inégalités H-H pour les fonctions convexes

En prenant $h(t) = t$ dans (2.17), (2.18) et (2.19), on obtient les résultats suivants.

Corollaire 2.1. *Si f est convexe sur $[a,b]$, alors les inégalités de Hermite-Hadamard suivantes sont vérifiées*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}f(b)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.21}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.22}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+}f(b)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.23}$$

Remarque 2.3. *On retrouve dans* (2.21) *et* (2.22) *les résultats de* [16] *et* [17] *(respectivement).*

Remarque 2.4. *Pour $\alpha = 1$ les deux opérateurs de Riemann-Liouville se réduisent à l'intégrale classique de Riemann et les trois inégalités du corollaire précédent se réduisent à l'inégalité suivante*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.24}$$

qui n'est autre que l'inégalité (1.1).

2.4.2 Inégalités H-H pour les fonctions $s-$convexes

En prenant $h(t) = t^s$, $s \in (0,1]$, dans (2.17), (2.18) et (2.19), on obtient les résultats suivants.

Corollaire 2.2. *Si f est s-convexe sur $[a,b]$ avec $s \in (0,1]$, alors les inégalités de Hermite-Hadamard suivantes sont vérifiées*

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}f(b)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^s}. \tag{2.25}$$

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^s}. \tag{2.26}$$

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}}\left[\mathcal{RL}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+}f(b)+\mathcal{RL}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^s}. \tag{2.27}$$

Remarque 2.5. *Pour $\alpha = 1$ les deux opérateurs de Riemann-Liouville se réduisent à l'intégrale classique de Riemann et les trois inégalités du corollaire précédent se réduisent à l'inégalité suivantes*

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2^s}. \tag{2.28}$$

qui est une autre version de l'inégalité (1.9).

2.4.3 Inégalités H-H pour les $P-$fonctions

En prenant $h(t) = 1$, dans (2.17) et (2.18), (2.19), on obtient les résultats suivants.

Corollaire 2.3. *Si f est une p-fonction sur $[a, b]$ avec $s \in (0, 1]$, alors les inégalités de Hermite-Hadamard suivantes sont vérifiées*

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f(b) + \mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq f(a) + f(b). \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{RL}_{a^+}^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathcal{RL}_{b^-}^{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq f(a) + f(b). \tag{2.30}$$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[\mathcal{RL}_{(\frac{a+b}{2})+}^{\alpha} f(b) + \mathcal{RL}_{(\frac{a+b}{2})-}^{\alpha} f(a)\right] \leq f(a) + f(b). \tag{2.31}$$

Remarque 2.6. *Pour $\alpha = 1$ les deux opérateurs de Riemann-Liouville se réduisent à l'intégrale classique de Riemann et les trois inégalités du corollaire précédent se réduisent à l'inégalité suivantes*

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq f(a) + f(b). \tag{2.32}$$

qui n'est autre que l'inégalité (1.10).

Chapitre 3

Inégalités de Hermite-Hadamard via les opérateurs intégrales fractionnaires Psi-Hilfer

3.1 Les opérateurs d'ordre entier

Cette partie concernant l'élaboration des intégrales par rapport à une autre fonction ψ est inspirée de [18] avec quelques adaptations. Dans ce chapitre ψ est une fonction continûment différentiable (i.e. de classe C^1) tels que $\psi' > 0$.

3.1.1 Premier opérateur :

Soit $f \in L^1_{\psi'}([a,b]) = \{f : \|f\|_\psi = \int_a^b f(t)\,\psi'(t)\,dt < \infty\}$, nous définissons alors la fonction $J_{a^+}f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$J_{a^+}f(x) = \int_a^x f(t)\,\psi'(t)\,dt\ .$$

Nous définissons $J^1_{a^+}f(x) := J_{a^+}f(x)$, et nous allons procéder à une composition successive de cette intégration :

$$J^2_{a^+}f(x) = \int_a^x J^1_{a^+}f(s)\,\psi'(s)\,ds \quad ... \quad J^n_{a^+}f(x) = \int_a^x J^{n-1}_{a^+}f(s)\,\psi'(s)\,ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, nous obtenons

$$J^2_{a^+}f(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)\,\psi'(t)\,dt\right)\psi'(s)\,ds = \int_a^x \int_a^s f(t)\,\psi'(t)\,\psi'(s)\,dt\,ds$$

$$= \int_a^x \int_t^x f(t)\,\psi'(t)\,\psi'(s)\,ds\,dt = \int_a^x f(t)\,\psi'(t)\,\left(\int_t^x \psi'(s)\ ds\right)\,dt$$

$$= \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))\ f(t)\,\psi'(t)\,dt\,.$$

Ce qui nous donne

$$J^2_{a^+} f(x) = \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t)\right)\, f(t)\, \psi'(t)\, dt\,.$$

Suivant la même approche, intégrons $J^2_{a^+} f(x)$

$$\begin{aligned}
J^3_{a^+} f(x) &= \int_a^x J^2_{a^+} f(s)\, \psi'(s)\, ds \\
&= \int_a^x \left(\int_a^s \left(\psi(s) - \psi(t)\right)\, f(t)\, \psi'(t)\, dt \right) \psi'(s)\, ds \\
&= \int_a^x \int_a^s \left(\psi(s) - \psi(t)\right) f(t)\, \psi'(t)\, \psi'(s)\, dt\, ds \\
&= \int_a^x \int_t^x \left(\psi(s) - \psi(t)\right) f(t)\, \psi'(t)\, \psi'(s)\, ds\, dt \\
&= \int_a^x f(t)\, \psi'(t) \left(\int_t^x \left(\psi(s) - \psi(t)\right)\, \psi'(s)\, ds \right) dt \\
&= \int_a^x f(t)\, \psi'(t)\, \left(\left[\frac{1}{2} \left(\psi(s) - \psi(t)\right)^2 \right]_t^x \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^2 f(t)\, \psi'(t)\, dt\,,
\end{aligned}$$

ainsi

$$J^3_{a^+} f(x) = \frac{1}{2} \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^2 f(t)\, \psi'(t)\, dt\,.$$

Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$J^n_{a^+} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\psi(x) - \psi(t)\right)^{n-1} f(t)\, \psi'(t)\, dt.$$

Appliquons une démonstration par récurrence pour établir ce résultat : supposons que

$$J^n_{a^+} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{n-1} f(t) \psi'(t)\, dt\ , \tag{3.1}$$

et démontrons que

$$J^{n+1}_{a^+} f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^n f(t) \psi'(t)\, dt\ .$$

On a par définition $J_{a^+}^{n+1} f(x) = \int_a^x J_{a^+}^n f(t)\psi'(t)\,dt$, donc

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \int_a^x \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{n-1} f(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau \right) \psi'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{n-1} f(\tau)\psi'(\tau)\psi'(t)\,d\tau\,dt\,,$$

d'après le théorème de Fubini

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \int_\tau^x (\psi(t)-\psi(\tau))^{n-1} f(\tau)\psi'(t)\psi'(\tau)\,dt\,d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\tau)\psi'(\tau) \left(\int_\tau^x (\psi(t)-\psi(\tau))^{n-1}\psi'(t)\,dt \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\tau)\psi'(\tau) \left(\left[\frac{1}{n}(\psi(t)-\psi(\tau))^n \right]_\tau^x \right) d\tau\,,$$

nous obtenons

$$J_{a^+}^{n+1} f(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (\psi(x)-\psi(\tau))^n f(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{n!} \int_a^x (\psi(x)-\psi(\tau))^n f(\tau)\psi'(\tau)\,d\tau\,.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

3.1.2 Deuxième opérateur :

Pour $f \in L^1_{\psi'}([a,b]) = \{f : \|f\|_\psi = \int_a^b f(t)\,\psi'(t)\,dt < \infty\}$, nous définissons la fonction $J_{b^-} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$J_{b^-} f(x) = \int_x^b f(t)\,\psi'(t)\,dt\ .$$

Nous définissons $J_{b^-}^1 f(x) := J_{b^-} f(x)$, et nous allons procéder à une composition successive de cette intégration :

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_a^x J_{b^-}^1 f(s)\,\psi'(s)\,ds \quad \ldots \quad J_{b^-}^n f(x) = \int_a^x J_{b^-}^{n-1} f(s)\,\psi'(s)\,ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on arrive à

$$J_{b^-}^2 f(x) = \int_x^b \left(\int_s^b f(t)\psi'(t)\,dt \right) \psi'(s)\,ds = \int_x^b \int_s^b f(t)\psi'(t)\psi'(s)\,dtds$$

$$= \int_x^b \int_x^t f(t)\psi'(s)\psi'(t)\,ds\,dt = \int_x^b \left(\int_x^t f(t)\psi'(s)\,ds \right) \psi'(t)\,dt$$

$$= \int_x^b f(t)\psi'(t) \left(\int_x^t \psi'(s)\,ds \right) dt = \int_x^b (\psi(t)-\psi(x)) f(t)\psi'(t)\,dt$$

ainsi

$$J^2_{b^-} f(x) = \int_x^b (\psi(t) - \psi(x)) f(t)\psi'(t)\, dt\,.$$

Suivant la même approche, intégrons $J^2 f(x)$

$$J^3_{b^-} f(x) = \int_x^b J^2 f(s)\psi'(s)\, ds$$

$$= \int_x^b \left(\int_s^b (\psi(t) - \psi(s))\, f(t)\psi'(t)\, dt \right) \psi'(s)\, ds = \int_x^b \int_s^b (\psi(t) - \psi(s)) f(t)\psi'(t)\psi'(s)\, dt\, ds$$

$$= \int_x^b \int_x^t (\psi(s) - \psi(t)) f(t)\psi'(s)\psi'(t)\, ds\, dt = \int_x^b \left(\int_x^t (\psi(t) - \psi(s)) f(t)\psi'(s)\, ds \right) \psi'(t) dt$$

$$= \int_x^b f(t)\psi'(t) \left(\int_x^t (\psi(t) - \psi(s))\psi'(s)\, ds \right) dt = \int_x^b f(t)\psi'(t) \left(\left[\frac{-1}{2} (\psi(t) - \psi(s))^2 \right]_x^t \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_x^b (\psi(t) - \psi(x))^2 f(t)\psi'(t)\, dt\,,$$

alors

$$J^3_{b^-} f(x) = \frac{1}{2} \int_x^b (\psi(t) - \psi(x))^2 f(t)\psi'(t)\, dt\,.$$

Conjecture : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$J^n_{b^-} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (\psi(t) - \psi(x))^{n-1} f(t)\psi'(t)\, dt.$$

On suppose que

$$J^n_{b^-} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (\psi(t) - \psi(x))^{n-1} f(t)\psi'(t)\, dt\ , \tag{3.2}$$

et en utilisant un raisonnement par récurrence, on montre que

$$J^{n+1}_{b^-} f(x) = \frac{1}{n!} \int_x^b (\psi(t) - \psi(x))^n f(t)\psi'(t)\, dt\ .$$

Comme $J^{n+1}_{b^-} f(x) = \int_x^b J^n_{b^-} f(t)\psi'(t)\, dt$ on obtient

$$J^{n+1}_{b^-} f(x) = \int_x^b \left(\frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (\psi(\tau) - \psi(t))^{n-1} f(\tau)\psi'(\tau)\, d\tau \right) \psi'(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_t^b (\psi(\tau) - \psi(t))^{n-1} f(\tau)\psi'(\tau)\psi'(t)\, d\tau\, dt\,,$$

en utilisant le théorème de Fubini

$$J_{b^-}^{n+1} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b \int_x^\tau (\psi(\tau) - \psi(t))^{n-1} f(\tau)\psi'(t)\psi'(\tau)\, dt\, d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(\tau)\psi'(\tau) \left(\int_x^\tau (\psi(\tau) - \psi(t))^{n-1} \psi'(t)\, dt \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b f(\tau)\psi'(\tau) \left(\left[\frac{-1}{n} (\psi(\tau) - \psi(t))^n \right]_x^\tau \right) d\tau\,,$$

ainsi

$$J_{b^-}^{n+1} f(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (\psi(\tau) - \psi(x))^n f(\tau)\psi'(\tau) d\tau = \frac{1}{n!} \int_x^b (\psi(\tau) - \psi(x))^n f(\tau)\psi'(\tau)\, d\tau\,.$$

Ceci est le résultat souhaité.

3.2 Les opérateurs intégrales Psi-Hilfer ${}^{\psi}\mathcal{I}$ d'ordre réel $\alpha > 0$

En se basant sur les formules (3.1) et (3.2) établies sur $\mathbb{N}$, nous introduisons les définitions suivantes pour les intégrales fractionnaires de fonctions par rapport à une autre fonction (ou plus simplement intégrales Psi-Hilfer) d'ordre α réel positif.

Définition 3.1. *Pour $\alpha > 0$ et $\psi(.)$ est une fonction positive, continûment dérivable, telle que $\psi'(t) > 0$, on définit les intégrales Psi-Hilfer d'ordre α à droite (respectivement à gauche) de la fonction $f \in L^1([a, b])$, par les expressions suivantes :*

$${}^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} f(t)\psi'(t) dt, \quad a < x \leq b, \tag{3.3}$$

et

$${}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} f(t)\psi'(t) dt, \quad a \leq x < b. \tag{3.4}$$

où $\Gamma(.)$ désigne la fonction gamma d'Euler.

Exemple 5.

$$\begin{aligned} {}^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(1) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (\psi(t) - \psi(x))^{\alpha-1} \psi'(x) dx = \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\psi(t) - \psi(x))^{\alpha}}{\alpha} \Big|_a^t = \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \\ {}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}(1) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1} \psi'(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha}}{\alpha} \Big|_t^b = \frac{(\psi(b) - \psi(t))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Remarque 3.1. *Selon les valeurs de ψ et α, des types particuliers d'opérateurs intégrales sont obtenus.*

1. *Si $\psi(t) = t$ alors on obtient les opérateurs de* ***Riemann-Liouville*** (2.3) *et* (2.4) *:*

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{a^+}f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt,$$

$$\mathcal{RL}^{\alpha}_{b^-}f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)\,dt.$$

2. *Si $\psi(t) = t$ et $\alpha = 1$, on obtient l'intégrale de* ***Riemann*** *(classique).*

3. *Si $\psi(t) = \ln(t)$ et $a > 1$, on aura les opérateurs de* ***Hadamard*** *d'ordre $\alpha > 0$*

$$\begin{aligned} H^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [\ln(x)-\ln(t)]^{\alpha-1}\,f(t)\,\frac{dt}{t}, \\ H^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [\ln(t)-\ln(x)]^{\alpha-1}\,f(t)\,\frac{dt}{t},. \end{aligned} \tag{3.6}$$

4. *Pour $\psi(t) = \frac{t^\rho}{\rho}$, nous obtenons les opérateurs de* ***Katugompola*** *d'ordre $\alpha > 0$ et de paramètre $\rho > 0$*

$$\begin{aligned} {}^{\rho}K^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left[\frac{x^\rho - t^\rho}{\rho}\right]^{\alpha-1} t^{\rho-1}\,f(t)\,dt, \\ {}^{\rho}K^{\alpha}_{a^+}f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left[\frac{t^\rho - x^\rho}{\rho}\right]^{\alpha-1} t^{\rho-1}\,f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2.1 Propriété de semi-groupe

Proposition 3.1. *Soient $f \in L^1([a,b])$ et $\alpha, \mu \in I\!R^*_+$; pour tout $x \in [a,b]$ nous avons :*

$${}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{a^+}f(x)\right) ={}^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha+\mu}_{a^+}f(x) ={}^{\psi} \mathcal{I}^{\mu}_{a^+}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}f(x)\right), \tag{3.8}$$

et

$${}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{b^-}f(x)\right) ={}^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha+\mu}_{b^-}f(x) ={}^{\psi} \mathcal{I}^{\mu}_{b^-}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}f(x)\right). \tag{3.9}$$

Preuve 3.1. *La formule* (3.3) *appliquée deux fois, nous donne*

$$\begin{aligned} \left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{a^+}f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(s))^{\alpha-1}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{a^+}f\right)(s)\psi'(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(s))^{\alpha-1}\int_a^s (\psi(s)-\psi(t))^{\mu-1}f(t)\psi'(t)\psi'(s)dtds, \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{a^+}f\right)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_a^x f(t)\psi'(t)\left[\int_t^x (\psi(x)-\psi(s))^{\alpha-1}(\psi(s)-\psi(t))^{\mu-1}\psi'(s)ds\right]dt. \tag{3.10}$$

En réalisant le changement de variable $\psi(s)-\psi(t)=(\psi(x)-\psi(t))\,y$*, pour* $t\leq s\leq x$ *on a* $0\leq y\leq 1$ *et* $\psi'(s)ds=(\psi(x)-\psi(t))\,dy$*, d'autre part on déduit*

$$1-y=\frac{\psi(x)-\psi(t)-\psi(s)+\psi(t)}{(\psi(x)-\psi(t))}=\frac{\psi(x)-\psi(s)}{(\psi(x)-\psi(t))},$$

l'intégrale intérieure dans (3.10) *devient :*

$$\begin{aligned}
I &:= \int_t^x (\psi(x)-\psi(s))^{\alpha-1}(\psi(s)-\psi(t))^{\mu-1}\psi'(s)ds\\
&= \int_0^1 (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\,(1-y)^{\alpha-1}\ (\psi(x)-\psi(t))^{\mu-1}\,y^{\mu-1}\ (\psi(x)-\psi(t))\,dy\\
&= (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+\mu-1}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\mu-1}\,dy\\
&= (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+\mu-1}\beta(\alpha,\mu).
\end{aligned}$$

En substituant dans (3.10) *puis en utilisant la relation* $\beta(\alpha,\mu)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}$*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{a^+}f\right)\right](x) &= \frac{\beta(\alpha,\mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_a^x f(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+\mu-1}\psi'(t)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu)}\int_a^x (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha+\mu-1}f(t)\psi'(t)dt\\
&= \left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha+\mu}_{a^+}f\right)(x).
\end{aligned}$$

La deuxième égalité dans (3.8) *découle de la propriété de commutativité :* $\alpha+\mu=\mu+\alpha$.

On démontre (3.9) *de manière similaire, d'après la formule* (3.3) *, nous avons :*

$$\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{b^-}f\right)(s)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_s^b(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}f(t)\psi'(t)\,dt.$$

En appliquant ${}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}$ *à ce résultat, nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{b^-}f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b(\psi(s)-\psi(x))^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_s^b(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}f(t)\psi'(t)\,dt\right)\psi'(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_x^b\int_s^b(\psi(s)-\psi(x))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}f(t)\psi'(t)\psi'(s)\,dt\,ds,
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-}\left({}^{\psi}\mathcal{I}^{\mu}_{b^-}f\right)\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_x^b f(t)\left[\int_x^t(\psi(s)-\psi(x))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\psi'(s)\,ds\right]\psi'(t)dt. \tag{3.11}$$

Posons le changement de variable $\psi(s)-\psi(x)=(\psi(t)-\psi(x))\,y$*, pour* $x\leq s\leq t$ *on a* $0\leq y\leq 1$ *et* $\psi'(s)ds=(\psi(t)-\psi(x))\,dy$*, d'autre part on déduit*

$$1-y=\frac{\psi(t)-\psi(x)-\psi(s)+\psi(x)}{(\psi(t)-\psi(x))}=\frac{\psi(t)-\psi(s)}{(\psi(t)-\psi(x))},$$

l'intégrale intérieure dans (3.11) *devient :*

$$
\begin{aligned}
I &:= \int_x^t (\psi(s)-\psi(x))^{\alpha-1}\ (\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\ \psi'(s)\,ds \\
&= \int_0^1 (\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1}\, y^{\alpha-1}\ (\psi(t)-\psi(x))^{\mu-1}\,(1-y)^{\mu-1}\ (\psi(t)-\psi(x))\,dy \\
&= (\psi(t)-\psi(x))^{\alpha+\mu-1}\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\mu-1}\,dy \\
&= (\psi(t)-\psi(x))^{\alpha+\mu-1}\beta(\alpha,\mu).
\end{aligned}
$$

En substituant dans (3.11) *puis en utilisant la relation* $\beta(\alpha,\mu)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}$*, nous obtenons*

$$
\begin{aligned}
\left[{}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\left({}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\mu}f\right)\right](x) &= \frac{\beta(\alpha,\mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)}\int_x^b f(t)(\psi(t)-\psi(x))^{\alpha+\mu-1}\psi'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu)}\int_x^b (\psi(t)-\psi(x))^{\alpha+\mu-1}f(t)\psi'(t)\,dt \\
&= \left({}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha+\mu}f\right)(x).
\end{aligned}
$$

Nous avons ainsi démontré la première égalité dans (3.9)*, la deuxième égalité découle de la commutativité de l'addition* $\alpha+\mu=\mu+\alpha$ *qui donne :*

$$
{}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha+\mu}f(x) = {}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\mu}\left({}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f(x)\right).
$$

3.2.2 Propriété de la bornitude

Nous allons établir que les opérateurs ${}^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}$ et ${}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}$ sont bien définis et bornés sur $L^1([a,b])$ pour tout ordre d'intégration $\alpha>0$.

Théoréme 3.1. *Si* $f\in L^1([a,b])$*, alors pour tout* $\alpha>0$

$$
\|{}^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\|_{L^1([a,b])}\le C\,\|f\|_{L^1([a,b])}, \tag{3.12}
$$

et

$$
\|{}^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\|_{L^1([a,b])}\le C\,\|f\|_{L^1([a,b])}, \tag{3.13}
$$

où $C=\dfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Preuve 3.2. *soit* $f\in L^1([a,b])$*, alors*

$$
\begin{aligned}
\|{}^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\|_{L^1([a,b])} &= \int_a^b \left|{}^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(x)\right|\psi'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\left|\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)\psi'(t)dt\right|\psi'(x)\,dx \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\left|f(t)\right|\psi'(t)\psi'(x)\,dt\,dx,
\end{aligned}
$$

en appliquant le Théorème de Fubini, on déduit

$$\|^{\psi}\, \mathcal{I}^{\alpha}_{a^+} f\, \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_t^b (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} |f(t)| \psi'(x)\psi'(t)\, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_t^b (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} \psi'(x)\psi'(t)\, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha} \Big]_t^b \right) \psi'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, (\psi(b)-\psi(t))^{\alpha} \psi'(t)\, dt,$$

En se basant sur la propriété (0.4) *de la fonction Gamma et sur la décroissance de la fonction* $t \to (\psi(b)-\psi(t))^{\alpha}$, *on a*

$$\|^{\psi}\, \mathcal{I}^{\alpha}_{a^+} f\, \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)| \psi'(t) dt$$

$$= \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel f \parallel_{L^1([a,b])} .$$

De manière similaire, pour $f \in L^1([a,b])$ *on a*

$$\|^{\psi}\, \mathcal{I}^{\alpha}_{b^-} f\, \|_{L^1([a,b])} = \int_a^b \Big|^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{b^-} f(x) \Big| \psi'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \Big| \int_x^b (\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1} f(t) \psi'(t) dt \Big| \psi'(x)\, dx$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_x^b (\psi(b)-\psi(t))^{\alpha-1} \Big| f(t) \Big| \psi'(t)\psi'(x)\, dt\, dx,$$

le Théorème de Fubini, donne

$$\|^{\psi}\, \mathcal{I}^{\alpha}_{b^-} f\, \|_{L^1([a,b])} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1} |f(t)| \psi'(x)\psi'(t)\, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \int_a^t (\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1} \psi'(x)\psi'(t)\, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)| \left(\frac{1}{\alpha} \Big[(\psi(t)-\psi(x))^{\alpha} \Big]_a^t \right) \psi'(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(t)|\, (\psi(t)-\psi(a))^{\alpha} \psi'(t)\, dt,$$

et de la propriété (0.4) *de la fonction Gamma et la croissance de la fonction* $t \to (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha}$*, on aboutit à*

$$\|^{\psi}\, \mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f \,\|_{L^1([a,b])} \leq \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(t)|\psi'(t)dt$$

$$= \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \,\|\, f \,\|_{L^1([a,b])} \,.$$

Remarque 2. *D'après la propriété* (3.12) *et* (3.13)*, si* $f \in L^1([a,b])$*, alors pour tout* $\alpha > 0$

$$^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f \in L^1([a,b]) \quad et \quad ^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f \in L^1([a,b])\,,$$

ce qui établit que les opérateurs d'intégration fractionnaire $^{\psi}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}$ *et* $^{\psi}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}$ *sont bien définis sur* $L^1([a,b])$*, pour tout* $\alpha > 0$.

3.3 Inégalités H-H via l'intégral fractionnaire Psi-Hilfer pour les fonctions $h-$convexes

Dans ce cas aussi on peut considérer trois types d'inégalités H-H sur l'intervalle $[a,b]$:

1. **premier sens :** faisant intervenir des intégrations de a vers b et inversement.
2. **second sens :** faisant intervenir des intégrations de a vers $\frac{a+b}{2}$ et de b vers $\frac{a+b}{2}$.
3. **troisième sens :** faisant intervenir des intégrations de $\frac{a+b}{2}$ vers a et de $\frac{a+b}{2}$ vers b.

On rappelle l'inégalité (2.15) établie, au lemme (2.2) dans le chapitre précédent, pour h une B-fonction et f h-convexe.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[f(x)+f(a+b-x)\right] \leq 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[f(b)+f(a)\right]. \tag{3.14}$$

3.3.1 Inégalités de H-H au premier sens

Théoréme 3.2. *Soit h une B-fonction. Si f est h-convexe et integrable sur $[a,b]$, alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\,\left(\psi(b)-\psi(a)\right)^{\alpha}}\,\left[{}^{\psi}\mathcal{I}_{(a)^+}^{\alpha}\mathcal{F}(b) + {}^{\psi}\mathcal{I}_{(b)^-}^{\alpha}\mathcal{F}(a)\right] \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\left[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)\right], \tag{3.15}$$

où $\mathcal{F}(t) = f(t) + f(a+b-t)$

Démonstration. En multipliant (3.14) par $\frac{(\psi(b)-\psi(t))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)$ et en intégrant sur $t \in [a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_a^b \frac{\left(\psi(b)-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &\leq \int_a^b h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{\left(\psi(b)-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\mathcal{F}(t)\,dt\right]\\ &\leq \int_a^b 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{\left(\psi(b)-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,\left[f(b)+f(a)\right],\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \le h\left(\tfrac{1}{2}\right)\,{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)^+}\mathcal{F}(b) \le 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\tfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]\,. \tag{3.16}$$

En multipliant (3.14) par $\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)$ et en intégrant sur $t\in[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&\le \int_a^b h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\mathcal{F}(t)\,dt\right]\\
&\le \int_a^b 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,\left[f(b)+f(a)\right],
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \le h\left(\tfrac{1}{2}\right)\,{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(b)^-}\mathcal{F}(a) \le 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\tfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]\,. \tag{3.17}$$

Additionnons (3.16) et (3.17) pour obtenir

$$2\,\frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \le h\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)^+}\mathcal{F}(b)+{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(b)^-}\mathcal{F}(a)\right] \le 4\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\tfrac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]\,,$$

en multipliant par $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\,h\left(\frac{1}{2}\right)(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}$ on obtient le résultat désiré (3.15). $\square$

3.3.1.1 Cas particuliers pour la fonction ψ

Dépendant de la fonction ψ, les résultats suivants sont obtenus sous l'hypothèse du Théorème (3.2).

1. En posant $\psi(t)=t$, nous obtenons l'inégalité de Hermite-Hadamard (2.17) via les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville .

2. Pour $\psi(t)=t$ et $\alpha=1$, nous aurons l'inégalité de Hermite-Hadamard (2.20) (via l'intégrale de Riemann).

3. Si $\psi(t)=\ln(t)$, il résulte l'inégalité de Hermite-Hadamard via les opérateurs fractionnaires de Hadamard

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\;(\ln(b)-\ln(a))^{\alpha}}\left[H^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(a)+H^{\alpha}_{a^+}\mathcal{F}(b)\right] \le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.18}$$

4. Avec $\psi(t)=\frac{t^{\rho}}{\rho}$, il s'en suit l'inégalité de Hermite-Hadamard via les opérateurs fractionnaires de Katugompola d'ordre $\alpha>0$ et de parametre $\rho>0$

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}K^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(a)+{}^{\rho}\,K^{\alpha}_{a^+}\mathcal{F}(b)\right] \le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.19}$$

3.3.2 Inégalités de H-H au deuxième sens

Théoréme 3.3. *Soit h une B-fonction. Si f est h-convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}} \left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)+}\mathcal{F}(\frac{a+b}{2}) +{}^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha}_{(b)-}\mathcal{F}(\frac{a+b}{2})\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(b)+f(a)], \tag{3.20}$$

Preuve 3.3. *En multipliant* (3.14) *par* $\frac{\left(\psi(t)-\psi(\frac{a+b}{2})\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)$ *et en intégrant sur* $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{\left(\psi(t)-\psi(\frac{a+b}{2})\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{\left(\psi(t)-\psi(\frac{a+b}{2})\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)\mathcal{F}(t)\, dt\right] \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} 2\, h^2\left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{\left(\psi(t)-\psi(\frac{a+b}{2})\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)\; [f(b)+f(a)],
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right) {}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)+}\mathcal{F}(\tfrac{a+b}{2}) \leq 2\, h^2\left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} [\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]. \tag{3.21}$$

En multipliant (3.14) *par* $\frac{\left(\psi(\frac{a+b}{2})-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)$ *et en intégrant sur* $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{\left(\psi(\frac{a+b}{2})-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{\left(\psi(\frac{a+b}{2})-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)\mathcal{F}(t)\, dt\right] \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} 2\, h^2\left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{\left(\psi(\frac{a+b}{2})-\psi(t)\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \psi'(t)\; [f(b)+f(a)],
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right) {}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(b)-}\mathcal{F}(\tfrac{a+b}{2}) \leq 2\, h^2\left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} [\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]. \tag{3.22}$$

Additionnons (3.21) et (3.22) pour obtenir

$$2\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right) \left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)+}\mathcal{F}(\tfrac{a+b}{2}) + {}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(b)-}\mathcal{F}(\tfrac{a+b}{2})\right] \leq 4\, h^2\left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} [\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)].$$

en multipliant par $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\,h\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}$ *on obtient le résultat désiré* (3.20).

3.3.2.1 Cas particuliers pour la fonction ψ

Dépendant de la fonction ψ, les résultats suivants sont obtenus sous l'hypothèse du Théorème (3.3).

1. En posant $\psi(t) = t$, nous obtenons l'inégalité de Hermite-Hadamard au second sens (2.18) via les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville .

2. Pour $\psi(t) = t$ et $\alpha = 1$, nous aurons l'inégalité de Hermite-Hadamard (2.20) (via l'intégral de Riemann).

3. Si $\psi(t) = \ln(t)$, il résulte l'inégalité de Hermite-Hadamard via les opérateurs fractionnaires de Hadamard

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\ln(b)-\ln(a))^{\alpha}} \left[H^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(\frac{a+b}{2}) + H^{\alpha}_{a^+}\mathcal{F}(\frac{a+b}{2})\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(b)+f(a)]\,. \tag{3.23}$$

4. Avec $\psi(t) = \frac{t^{\rho}}{\rho}$, il s'en suit l'inégalité de Hermite-Hadamard via les opérateurs fractionnaires de Katugompola d'ordre $\alpha > 0$ et de parametre $\rho > 0$

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}} \left[{}^{\rho}K^{\alpha}_{b^-}\mathcal{F}(\frac{a+b}{2}) +^{\rho} K^{\alpha}_{a^+}\mathcal{F}(\frac{a+b}{2})\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(b)+f(a)]\,. \tag{3.24}$$

3.3.3 Inégalités de H-H au troisième sens

Théoréme 3.4. *Soit h une B-fonction. Si f est h-convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité de Hermite-Hadamard suivante est vérifiée*

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}} \left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}\mathcal{F}(b) +^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}\mathcal{F}(a)\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(b)+f(a)]\,, \tag{3.25}$$

Preuve 3.4. *En multipliant* (3.14) *par* $\frac{(\psi(b)-\psi(t))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)$ *et en intégrant sur* $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{(\psi(b)-\psi(t))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{(\psi(b)-\psi(t))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\mathcal{F}(t)\,dt\right] \\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{(\psi(b)-\psi(t))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,[f(b)+f(a)]\,,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\,{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}\mathcal{F}(b) \leq 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]\,. \tag{3.26}$$

En multipliant (3.14) *par* $\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)$ *et en intégrant sur* $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\mathcal{F}(t)\,dt\right]\\
&\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\psi'(t)\,[f(b)+f(a)],
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\,{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}\mathcal{F}(a) \leq 2\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)]. \tag{3.27}$$

Additionnons (3.26) et (3.27) pour obtenir

$$2\,\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,\mathfrak{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}\mathcal{F}(b) + {}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}\mathcal{F}(a)\right] \leq 4\,h^2\left(\tfrac{1}{2}\right)\,\frac{\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,[\mathfrak{f}(b)+\mathfrak{f}(a)].$$

en multipliant par $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\,h\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\psi(b)-\psi(a)}{2}\right)^{\alpha}}$ *on obtient le résultat désiré* (3.25).

3.3.3.1 Cas particuliers pour la fonction ψ

Dépendant de la fonction ψ, les résultats suivants sont obtenus sous l'hypothèse du Théorème (3.4).

1. En posant $\psi(t) = t$, nous obtenons l'inégalité de Hermite-Hadamard (2.19) via les opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville .

2. Pour $\psi(t) = t$ et $\alpha = 1$, nous aurons l'inégalité de Hermite-Hadamard (2.20) (via l'intégral de Riemann).

3. Si $\psi(t) = \ln(t)$, il résulte l'inégalité de Hermite-Hadamard via les opérateurs fractionnaires de Hadamard

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\ln(b)-\ln(a))^{\alpha}}\left[H^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}\mathcal{F}(a) + H^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}\mathcal{F}(b)\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(b)+f(a)]. \tag{3.28}$$

4. Avec $\psi(t) = \frac{t^{\rho}}{\rho}$, il s'en suit l'inégalité de Hermite-Hadamard via les opérateurs fractionnaires de Katugompola d'ordre $\alpha > 0$ et de parametre $\rho > 0$

$$\frac{1}{2\,h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}K^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^-}\mathcal{F}(a) +{}^{\rho} K^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})^+}\mathcal{F}(b)\right] \leq h\left(\frac{1}{2}\right)[f(b)+f(a)]. \tag{3.29}$$

3.4 Inégalités H-H pour des cas particuliers de convexité

Dans les résultats établis dans la section précédente pour les fonctions $h-$convexes, on va considérer des valeurs spécifiques pour $h(t)$. Cela va engendrer des inégalités H-H pour types spécifiques de convexité.

3.4.1 Inégalités H-H pour les fonctions convexes

En prenant $h(t) = t$ dans (3.15), (3.20) et (3.25), on obtient les résultats suivants

Corollaire 3.1. *Si f est convexe sur $[a, b]$, alors les inégalités de Hermite-Hadamard suivantes sont vérifiées*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}\left[{}^\psi\mathcal{I}^\alpha_{(a)+}\mathcal{F}(b) +^\psi \mathcal{I}^\alpha_{(b)-}\mathcal{F}(a)\right] \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}. \tag{3.30}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}\left[{}^\psi\mathcal{I}^\alpha_{(a)+}\mathcal{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) +^\psi \mathcal{I}^\alpha_{(b)-}\mathcal{F}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}. \tag{3.31}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}\left[{}^\psi\mathcal{I}^\alpha_{(\frac{a+b}{2})+}\mathcal{F}(b) +^\psi \mathcal{I}^\alpha_{(\frac{a+b}{2})-}\mathcal{F}(a)\right] \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}. \tag{3.32}$$

Remarque 3.2. *Pour $\alpha = 1$ les deux opérateurs de Psi-Hilfer se confondent et les trois inégalités du corollaire précédent se réduisent à l'inégalité suivante*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{\psi(b)-\psi(a)}\int_a^b f(t)\,\psi'(t)\,dt \leq \frac{f(b)+f(a)}{2} \tag{3.33}$$

3.4.2 Inégalités H-H pour les fonctions $s-$convexes

En prenant $h(t) = t^s$, $s \in (0, 1]$, dans (3.15), (3.20) et (3.25), on obtient les résultats suivants

Corollaire 3.2. *Si f est s-convexe sur $[a, b]$ avec $s \in (0, 1]$, alors les inégalités de Hermite-Hadamard suivantes sont vérifiées*

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}\left[{}^\psi\mathcal{I}^\alpha_{(a)+}\mathcal{F}(b) +^\psi \mathcal{I}^\alpha_{(b)-}\mathcal{F}(a)\right] \leq \frac{f(b)+f(a)}{2^s}. \tag{3.34}$$

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}\left[{}^\psi\mathcal{I}^\alpha_{(a)+}\mathcal{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) +^\psi \mathcal{I}^\alpha_{(b)-}\mathcal{F}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{f(b)+f(a)}{2^s}. \tag{3.35}$$

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}\left[{}^\psi\mathcal{I}^\alpha_{(\frac{a+b}{2})+}\mathcal{F}(b) +^\psi \mathcal{I}^\alpha_{(\frac{a+b}{2})-}\mathcal{F}(a)\right] \leq \frac{f(b)+f(a)}{2^s}. \tag{3.36}$$

Remarque 3.3. *Pour $\alpha = 1$ les deux opérateurs de Psi-Hilfer se confondent et les trois inégalités du corollaire précédent se réduisent à l'inégalité suivante*

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{\psi(b)-\psi(a)}\int_a^b f(t)\,\psi'(t)\,dt \leq \frac{f(b)+f(a)}{2^s}. \tag{3.37}$$

3.4.3 Inégalités H-H pour les $P-$fonctions

En prenant $h(t) = 1$, dans (3.15), (3.20) et (3.25), on obtient les résultats suivants

Corollaire 3.3. *Si f est une p-fonction sur $[a, b]$ avec $s \in (0, 1]$, alors les inégalités de Hermite-Hadamard suivantes sont vérifiées*

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)+}\mathcal{F}(b) +^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha}_{(b)-}\mathcal{F}(a)\right] \le f(b)+f(a). \tag{3.38}$$

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(a)+}\mathcal{F}\left(\frac{a+b}{2}\right) +^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha}_{(b)-}\mathcal{F}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \le f(b)+f(a). \tag{3.39}$$

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}\left[{}^{\psi}\mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})+}\mathcal{F}(b) +^{\psi} \mathcal{I}^{\alpha}_{(\frac{a+b}{2})-}\mathcal{F}(a)\right] \le f(b)+f(a). \tag{3.40}$$

Remarque 3.4. *Pour $\alpha = 1$ les deux opérateurs de Psi-Hilfer se confondent et les trois inégalités du corollaire précédent se réduisent à l'inégalité suivante*

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{\psi(b)-\psi(a)}\int_a^b f(t)\,\psi'(t)\,dt \le f(b)+f(a). \tag{3.41}$$

Conclusion

À travers cette étude, nous étudions des inégalités intégrales de Hermite-Hadamard dans un cadre généralisé de calcul fractionnaire, qui est celui de l'intégration par rapport à une autre fonction ψ.

En outre la notion de $h-$convexité combinée à celle de $B-$fonction fournit un outil puissant pour mettre en évidence les liens simplifiés entre différents types de convexité et estimations d'intégrales.

La discussion selon les cas particuliers de $\psi(t)$ combinée à celle des valeurs particulières de $h(t)$ offre d'importants résultats variés et liés aux inégalités de Hermite-Hadamard.

Un travail analogue peut être fait pour d'autres types d'inégalités, en particulier celle de trapezoid et celle de midpoint qui sont étroitement liée aux inégalités de Hermite-Hadamard.

Bibliographie

[1] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, Journal de mathématiques pures et appliquées, (1893), 171-216.

[2] Ch Hermite, *Sur deux limites d'une intégrale définie*, Mathesis, 3(1), (1883), 1-82.

[3] O. Almutairi, *Generalization of Hermite-Hadamard type inequalities and their applications*, PhD thesis, Ph. D. Thesis, Universiti Putra Malaysia, Malaysia, (2020).

[4] F. Chen, *A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions*, Journal of Applied Mathematics, (2013).

[5] O. Almutairi, A. Kilicman, *Generalized fejer-Hermite-Hadamard type via generalized* $(h-m)-$*convexity on fractal sets and applications*, Chaos, Solitons et Fractals, 147 (2021), 110938.

[6] S.S. Dragomir, *Hermite-hadamard type inequalities for generalized Riemann-Liouville fractional integrals of* $h-$*convex functions*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2019).

[7] R. Bertrand, *Espaces de Lebesgue* $-$ *Convexité*, École polytechnique, Palaiseau cedex - France, (2016). https ://bremy.perso.math.cnrs.fr/MAT311-2016-SlidesAmphi9-EspacesDeLebesgue.pdf

[8] S. Varosanec, *On h-convexity*, J. Math. Anal. Appl, 326 (2007), 303-311. https :// doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.02.086.

[9] W. W. Breckner, *Stetigkeitsaussagen f¨ur eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen*, Pupl. Inst. Math, 23 (1978), 13-20.

[10] S. S. Dragomir, J.Pecaric, L. E. Persson, *Some inequalities of Hadamard type*, Soochow J. Math, 21 (1995), 335-341.

[11] E. A. Magnus, W. Oberhettinger and F. Tricomi , *Higher transcendental functions*, Voll.III,Krieger Pub ,Melbourne, Florida, (1981), 1-15.

[12] B. Benaissa, N. Azzouz, H. Budak, *Hermite-Hadamard type inequalities for new conditions on h-convex functions via* ψ*-Hilfer integral operators*, Analysis and Mathematical Physics, (2024) 14-35. https ://doi.org/10.1007/s13324-024-00893-3

[13] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim, *On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions*, Journal of Mathematical inequalities, 2(3) (2008), 335-341.https :// jmi.ele-math.com/02-30/On-some-Hadamard-type-inequalities-for-h-convex-functions

[14] S. S. Dragomir, S. Fitzpatrik, *The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense*, Demonstration Math., 32 (4) (1999), 687-696.

[15] K. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, john wiley and Sons Inc, New York, (1993).

[16] M.Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz, N. Basak, *Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities*, Math. Compu. Modelling., 57 (2013), 2403-2407.

[17]M.Z. Sarikaya, H. Yildirim, *On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. Miskolc Math.Notes, 17 (2016), 1049-1059.*

[18] N. Azzouz, B. Benaissa, H. Budak, On generalized ψ-conformable calculus : Properties and inequalities*, Filomat 38 :25 (2024), 8755-8772.*
https ://doi.org/10.2298/FIL2425755A

[19] M. Jleli, B. Samet, On Hermite-Hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function*, J. Nonlinear Sci. Appl, 9 (2016), 1252-1260.*