RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
«Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
BOUMAZA Messaouda

Sous L'intitulé :

Introduction aux variétés différentielles

Soutenu publiquement le 11 / 06 / 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr. BENIA Kheireddine	MCA	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mr. MENAD Bendehiba	MCA	Ecole Normale Supérieure de Mostaganem	Examinateur
Mr. DERKAOUI Rafik	MCA	Ecole Normale Supérieure d'Oran-AMMOUR Ahmed	Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Au nom d'Allah le clément et miséricordieux ;
Premièrement, je tiens particulièrement à remercier **ALLAH** le Tout Puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a accordé durant toutes ces longues années.
Je remercie mon directeur de recherche **Dr.DERKAOUI Rafik**, pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils et ses encouragements.
Je remercie les membres du jury : **Dr.MENAD Bendehiba** et **Dr.BENIA Kheireddine** qui ont accepté de participer au jury de soutenance.
Aussi, mes remerciements s'adressent-ils à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous les membres du département des Mathématiques.
Je remercier en particulier **Dr.DIEB Abdelrazek** pour ses encouragements continus.

Dédicace

Tout les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tout simplement que : je dédie ce travail ;

À

Mes chers **parents** pour leur soutien, leur patience et leurs encouragements durant mon parcours universitaire.

À

Mon cher beau frère **Ahmed**, et mes chères belles soeurs.

À

Tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom **BOUMAZA**.

À

Mes très chers Amis.

À

Tous professeurs
qu'ils soient du primaire, du secondaire ou du supérieur.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Le 10 juin 1854, **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866) donna son fameux ≪ Habilitationsvortrag ≫ au colloque de la faculté de Philosophie de Gottingen. Son discours lors d'une conférence inaugurale intitulé ≪ Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ≫ est souvent considéré comme le plus important de l'histoire de la géométrie différentielle. **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) était dans l'assistance, à l'âge de 77 ans, et est dit avoir été très impressionné par son ancien étudiant.

En Mathématique, la géométrie différentielle est l'application des outils du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. Les objets d'étude de base sont les variétés différentielles, ensembles ayant une régularité suffisante pour envisager la notion de dérivation, et les fonctions définies sur ces variétés.
La géométrie différentielle trouve sa principale application physique dans la théorie de la relativité générale où elle permet une modélisation d'une courbure de l'espace-temps.
La géométrie riemannienne s'est fortement développée durant la seconde moitié du XXe siècle. Mais les premiers travaux dans ce domaine se confondent avec la naissance du concept de variété différentielle. Les idées révolutionnaires de **Riemann** sont une généralisation directe de la géométrie différentielle des surfaces de **Gauss** en n dimensions. Plus tard cela conduit à une définition exacte du concept moderne d'une variété riemannienne abstraite.

Chaque variété lisse admet une métrique Riemannienne, ce qui aide souvent à résoudre des problèmes de topologie différentielle. il sert également de niveau d'entrée pour la structure plus compliquée des variétés pseudo-Riemanniennes, qui (en quatre dimensions) sont les principaux objets de la théorie de la relativité générale. D'autres généralisations de la géométrie Riemannienne incluent la géométrie de **Finsler**.

Il traite d'un large éventail de géométries dont les propriétés métriques varient d'un point à l'autre, y compris les types standard de géométrie non Euclidienne .

Il existe une analogie étroite de la géométrie différentielle avec la structure mathématique des défauts dans les cristaux réguliers. Les dislocations et les divulgations produisent des torsions et des courbures.

Ces nouvelles idées ont menées directement à la géométrie non euclidienne et à la relativité générale par exemple.

Notre travail s'articule autour de trois points essentiels :

Le premier chapitre est consacré au rappel des notions de base essentielles à la compréhension on introduira les notions fondamentales de la géométrie différentielle et de la topologie différentielle, nous définissons les espaces topologiques, la topologie séparée, la topologie produit, le voisinage et l'homéomorphisme, les applications linéaires continues sur des espaces vectoriels normés et les théorèmes fondamentales du calcul différentiel.
Le deuxième chapitre constitue le premier pas du travail où nous développons avec beaucoup de détails les notions essentielles qui consistent à l'étudie les variétés différentielles, nous définissons la notion de variété différentiable (Variété topologique, Carte sur une variété topologique, Atlas sur une variété topologique), la notion d'espace tangent à une variété différentiable en un point donné, champs de vecteurs, le crochet de Lie de deux champs de vecteurs, transformation d'un champs de vecteurs d'une variété à une autre variété, Espace cotangent-Fibré cotangent, et l'application pull-back.

Le dernier chapitre est une introduction à l'algèbre tensorielle, où nous définissons la notion de tenseurs, champs tensoriels, les n-formes, les champs de n-formes, l'algèbre extérieur et les notions de tenseurs sur une variété différentielle.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Espaces topologiques

Définition 1.1.1. *[1]Une topologie sur un ensemble X est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ (l'ensemble des sous-ensembles de X) qui vérifie les propriétés suivantes :*

i) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$

ii) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$

iii) La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$

- □ *Un espace topologique est un couple $(X, \mathcal{T})$ où X est un ensemble et $\mathcal{T}$ une topologie sur X.*
- □ *Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les ouverts de X.*
- □ *Un fermé de $(X, \mathcal{T})$ est une partie de X dont le complémentaire de X est un ouvert de $(X, \mathcal{T})$.*
- □ *Une base $\mathscr{B}$ pour une topologie $\mathcal{T}$ est une collection d'ouverts de $\mathcal{T}$ telle que tout ouvert $\mathscr{O} \in \mathcal{T}$ peut s'écrire comme une réunion d'éléments $\mathscr{O}_i \in \mathscr{B}$, $i \in I$: $\mathscr{O} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{O}_i$.*

Exemple 1.1. *Sur un ensemble X il existe toujours deux topologies "extrêmes", la topologie discrète $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ et la topologie grossière $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$. Pour la topologie discrète, toute partie de X est à la fois ouverte et fermée, pour la topologie grossière, les fermés sont $\emptyset$ et X.*

Exemple 1.2. *Un ensemble à deux éléments $X = \{x, y\}$ peut être muni de quatre topologies différentes :*

$$\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}, \ \ \mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X), \ \ \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{x\}, X\}, \ \ \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{y\}, X\},$$

les fermés de $\mathcal{T}_1$ sont les éléments de $\mathcal{T}_2$ et inversement.

Exemple 1.3. *Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble formé de $\emptyset, \mathbb{R}$ et des intervalles de la forme $]a, b[$, n'est pas une topologie, car la propriété (iii) n'est pas vérifiée. En revanche, l'ensemble formé de $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ et des réunions quelconques d'intervalles de la forme $]a, b[$ est bien une topologie sur $\mathbb{R}$. On l'appelle **topologie usuelle** sur $\mathbb{R}$ et on la note par $\mathcal{T}_u$.*

1.1.1 Topologie induite

Définition 1.1.2. *Soient $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathscr{A}$ une partie de X. On vérifie immédiatement que l'ensemble*

$$\mathcal{T}_{\mathscr{A}} := \{\mathscr{O} \cap \mathscr{A}\ , \mathscr{O} \in \mathcal{T}\},$$

*est une topologie sur $\mathscr{A}$. On l'appelle **topologie induite** sur $\mathscr{A}$ par $\mathcal{T}$*

Remarque 1.1.1. *Les ouverts de la topologie induite sur $\mathscr{A}$ par la topologie de X sont donc les intersections des ouverts de X avec $\mathscr{A}$.*
Par passage au complémentaire, on vérifie facilement que les fermés de $\mathscr{A}$ sont aussi les intersections des fermés de $\mathcal{T}$ avec $\mathscr{A}$.

Exemple 1.4. *L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert de $[0,2]$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$, car $[0,1[=]-1,1[\cap[0,2]$ et $]-1,1[\in \mathcal{T}_u$. Notons que $[0,1[$ est aussi un fermé de $[-1,1[$, muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$, car $[0,1[= [0,4] \cap [-1,1[$ avec $[0,4]$ fermé de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$.*

1.1.2 Topologie produit

Le produit de deux espaces topologiques est naturellement un espace topologique.

Définition 1.1.3. *Soit $(X_i,\mathcal{T}_i)_{i\in I}$, une famille d'espaces topologiques, et soit X le produit cartésien des X_i. La topologie produit sur X est la topologie sur X ayant le moins d'ouverts et telle que toutes les projections $p_i : X \longrightarrow X_i$ sont continues. Les ouverts élémentaires de la topologie produit sont les ensembles :*

$$\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i),$$

où J est une partie finie de I et U_i est un élément de $\mathcal{T}_i$ (autrement dit, un ouvert de X_i). Tout ouvert s'écrit comme réunion d'ouverts élémentaires.

Démonstration.

i) Puisque $\emptyset = \prod_{i\in I} \emptyset$ et $X = \prod_{i\in I} X_i$ donc $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

ii) Un ouvert est de la forme $\bigcup_{i=(i_1,..,i_n)\in I} U_{i_1} \times ... \times U_{i_n}$ où I est une famille de multi-indices quelconque, or :

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i\in I} U_{i_1} \times ... \times U_{i_n}\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} V_{j_1} \times ... \times V_{j_n}\right) &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J} \Big((U_{i_1} \times ... \times U_{i_n}) \cap (V_{j_1} \times ... \times V_{j_n})\Big)\\ &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (U_{i_1} \cap V_{j_1}) \times ... \times (U_{i_n} \cap V_{j_n}),\end{aligned}$$

et $U_{i_k} \cap V_{j_k}$ est un ouvert de X_k.

iii) Par définition de la topologie produit.

□

Exemple 1.5. *La topologie produit de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, avec chacun des facteurs $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ muni de sa topologie usuelle, est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^{n+m}$.*

1.1.3 Topologie quotient

Définition 1.1.4. *Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X notons $p : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique. La topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ est telle que : $u \subset X/\mathcal{R}$ est ouvert si $p^{-1}(u)$ est un ouvert de X.*

Exemple 1.6. *La loi $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

1.1.4 Voisinages

Définition 1.1.5. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A et B deux parties de X. On dit que B est un voisinage de A lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$ tel que*

$$A \subset \mathcal{O} \subset B.$$

• *Si $A = \{x\}$, on dit simplement que B est un voisinage de x :*

$$\exists \mathcal{O} \in \mathcal{T} : x \in \mathcal{O} \subset B.$$

• *On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x,*

$$\mathcal{V}(x) = \{B \in X \ \ / \ \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T}; x \in \mathcal{O} \subset B\}.$$

Remarque 1.1.2. *Une partie A de X est un ouvert si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points.*

1.1.5 Espace séparé

[2]Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit séparé, si pour tout points distincts X et y de X, il existe des voisinages disjoints V_x et V_y de x et y respectivement :

$$\forall \underset{x \neq y}{x, y} \in X, \ \exists V_x \in \mathcal{V}(x), \ \exists V_y \in \mathcal{V}(y) \ \ / \ V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Exemples :

1) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ est séparé.

2) $X = \{0, 1\}$, la topologie $\{\emptyset, X, \{0\}\}$ est non séparée, puisque le seul ouvert contenant 1 est X et $0 \in X$.

1.1.6 Continuité et homéomorphismes

Définition 1.1.6. *Une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est dite continue si l'image réciproque d'un ouvert de Y est un ouvert de X.*
Si φ est une bijection entre deux espaces topologiques telle que φ et φ^{-1} soient continues, alors φ est dite un homéomorphisme et les deux espaces sont homéomorphes.

Proposition 1.1.1. *Soient X, Y deux espaces topologiques tels que X est homéomorphe à Y et Y est séparé. Alors X est séparé.*

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme et $x_1, x_2 \in X$, tel que $x_1 \neq x_2$.
Alors $f(x_1), f(x_2) \in Y$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Par la condition de séparabilité, il existe deux ouverts v_1, v_2 de Y tels que

$$f(x_1) \in v_1, \text{ et } f(x_2) \in v_2, \text{ et } v_1 \cap v_2 = \emptyset \Rightarrow x_1 \in f^{-1}(v_1),\ x_2 \in f^{-1}(v_2)$$
$$\Rightarrow f^{-1}(v_1) \cap f^{-1}(v_2) = f^{-1}(v_1 \cap v_2) = \emptyset.$$

D'où X est séparé. □

1.1.7 Espace métrique

Définition 1.1.7. *Si E est un ensemble, une application*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que $\forall x, y, z \in E$ *:*

1) $d(x,y) \geq 0$ *et* $[d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$.

2) $d(x,y) = d(y,x)$.

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Est dite une distance et fait de l'ensemble E un espace métrique, qu'on notera (E,d).

Proposition 1.1.2. *Tout espace métrique est séparé.*

Démonstration. Soit (X,d) un espace métrique, et $x, y \in X$, $x \neq y$.
On pose $0 < \frac{d(x,y)}{2} = r$ et $u = B(x,r)$, $v = B(y,r)$ et supposons que $z \in U \cap V$, on a alors :
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r = d(x,y)$ ce qui est une contradiction, donc $U \cap V = \emptyset$ et X est séparé. □

Sur un espace métrique (E,d), une boule ouverte de centre x, $x \in E$ et de rayon $\varepsilon > 0$ est définie par :

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in E \ /\ d(x,y) < \varepsilon\}.$$

La collection des sous-ensembles de E obtenues en considérant toutes les réunions de boules ouvertes, définit une topologie sur E.
Sur l'espace métrique (E,d), la suite $\{x_n\}$ est dite suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N} :\ n, m \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

L'espace est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

1.1.8 Espace vectoriel normé

Norme

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur E une application

$$\begin{aligned} \|\,.\,\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|\, x \,\|, \end{aligned}$$

qui vérifie

1) $\forall x \in E : \parallel x \parallel = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \parallel \lambda x \parallel = \mid \lambda \mid \parallel x \parallel.$

3) $\forall x, y \in E : \parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel.$

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n).
Soit E un espace vectoriel normé, l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) = \parallel x - y \parallel, \end{aligned}$$

est une distance sur E, on l'appelle distance induite par la norme.

Exemples

Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$:
Pour tout $x = (x_1, ..x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\parallel x \parallel_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid , \qquad \parallel x \parallel_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^2} , \qquad \parallel x \parallel_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$$

Espace de Banach

Définition 1.1.8. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance induite par la norme.*

1.2 Applications différentiables

1.2.1 Applications linéaires continues

Rappels

Soient $(E, \parallel . \parallel_E)$,$(F, \parallel . \parallel_F)$ et $(G, \parallel . \parallel_G)$ des espaces vectoriels normés.
Une application linéaire continue $u : E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si :

$$\exists k \geq 0,\ \forall x \in E : \parallel u(x) \parallel_F \leq k \parallel x \parallel_E. \text{ (i.e si elle est continue en } 0_E \text{)}$$

Cas particulier, si la dimension de E est finie et si $u : E \longrightarrow F$ est linéaire alors u est continue.
Une application bilinéaire $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ est continue si et seulement si

$$\exists k \geq 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in F : \parallel \varphi(x,y) \parallel_G \leq k \parallel x \parallel_E \parallel y \parallel_F.$$

Cas particulier, si les dimensions de E et F sont finies, alors toute application bilinéaire de $E \times F \longrightarrow G$ est continue.

Proposition 1.2.1. *Soit $u \in (E,F)$, les proprietés suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists M \geq 0 ; \forall x \in E : \parallel u(x) \parallel_F \leq M \parallel x \parallel_E.$

2. *u est continue sur E.*

3. *u est continue en 0.*

4. *u est bornée sur la boule d'unité.*

5. *u est bornée sur la sphère d'unité.*

Démonstration. il suffit de prouver les implications cycliques entre les propriétés.
(1) $\Longrightarrow$ (2) :
Par la linéarité de u, on a $u(y)-u(x)=u(y-x)$ donc, $\forall(x,y)\in E^2$, $\|u(y)-u(x)\|_F \le k\|y-x\|_E$.
Donc u est lipschitzienne alors continue .
(2) $\Longrightarrow$ (3) : trivial.
(3) $\Longrightarrow$ (4) : Puisque u est continue en 0, on en déduit l'existence d'un certain $\eta>0$ tel que $\|u(x)\|_F \le 1$ pour tout $x\in \bar{B}_E(0,\eta)$. Or $x\in \bar{B}_E(0,\eta)$ si seulement si $\eta^{-1}\ x \in \bar{B}_E\ (0,1)$, par linéarité de u, on conclut que $\|u(x)\|_F \le \eta^{-1}$ pour tout $x\in \bar{B}_E\ (0,1)$.
Donc u est bornée sur la boule unité .
(4) $\Longrightarrow$ (5)trivial .
(5) $\Longrightarrow$ (1)Notons M une borne de u restreinte à la sphère d'unité.
En utilisant la linéarité de u et le fait que u est bornée par M sur la sphère unité, on obtient donc :

$$\|u(x)\|_F = \|x\|_E\ \|u(\tfrac{x}{\|x\|_E})\|_F \le M\ \|x\|_E$$

□

1.2.2 Différentielle

Définition 1.2.1. *Soient $(E,\|\,.\,\|_E)$ et $(F,\|\,.\,\|_F)$ deux espaces de Banach, et soit U un ouvert non vide de E.*
Une application $f:U\subset E\longrightarrow F$ est dite différentiable en $a\in U$ s'il existe une application linéaire continue $L\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que

$$\underset{x\to a}{Lim}\frac{\|\ f(x)-f(a)-L(x-a)\ \|_F}{\|\ x-a\ \|_E}=0.$$

En posant $x-a=h$ on obtient

$$\underset{\substack{h\to 0_E\\ h\neq 0_E}}{Lim}\frac{\|\ f(a+h)-f(a)-L(h)\ \|_F}{\|\ h\ \|_E}=0.$$

• *L'application L est unique, elle est appelée différentielle de f en a qui noter d_af ou $\Big(df\Big)(a)$.*
• *On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $x\in U$.*
Dans ce cas, on appelle différentielle de f l'application

$$\begin{aligned} df : U &\longrightarrow \mathscr{L}(E,F)\\ x &\longmapsto d_xf. \end{aligned}$$

Si de plus, df est continue on dit que f est de classe C^1.

Remarque 1.2.1. *Une application différentiable est nécessairement continue.*

Exemples

1) Toute application constante est différentiable, de différentielle nulle.

2) Si $f:E\longrightarrow F$ (E et F deux e.v.n de Banach) est une application linéaire continue, alors f est différentiable et on a, pour tout $a\in E$: $d_af=f'$.

3) Si $g : E \times E \longrightarrow F$ est une application bilinéaire continue, alors g est différentiable et on a, pour tout $x_1, x_2, h_1, h_2 \in E$

$$\Big(d_{(x_1,x_2)}g\Big)(h_1, h_2) = g(x_1, h_2) + g(h_1, x_2).$$

4) Toute application affine continue

$$\begin{aligned} A : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto A(x) = b + L(x). \end{aligned}$$

où $b \in F$ et $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue, est différentiable, et on a pour tout $a \in E$; $d_a A = L$.

Proposition 1.2.2. *Soient E, F, G des espaces de Banach.*

i) Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : V \subset E \longrightarrow F$ sont différentiables respectivement sur les ouverts U et V d'un même espace E. Alors leur somme $f + g$ est différentiable sur $U \cap V$ et on a, pour tout $x \in U \cap V$

$$d_x(f + g) = d_x f + d_x g.$$

D'autre part, quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable et on a, pour tout $x \in U$

$$d_x(\lambda f) = \lambda d_x f.$$

ii) Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est différentiable en un point $x \in U$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ est différentiable en un point $y = f(x) \in V$, alors $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ est différentiable en x et on a

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f.$$

iii) Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (U un ouvert de E) deux application différentiables au point $a \in U$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f.g : U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longrightarrow (f.g)(x) := f(x)g(x), \end{aligned}$$

est différentiable en a et on a :

$$d_a(f.g) = g(a).d_a f + f(a).d_a g.$$

iv) Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application différentiable au point $a \in U$. Si $f(a) \neq 0$, alors l'application $\frac{1}{f}$ est définie dans un voisinage de a et est différentiable en a :

$$d_a(\frac{1}{f}) = \frac{-1}{f^2(a)} d_a f.$$

1.2.3 Applications différentiables en dimension finie

On s'intéresse ici au cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$.
Une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ est déterminée par ses composantes $(f_i)_{i=1,\ldots m}$.
Lorsqu'elles existent, les différentielles partielle des composantes sont les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$d_j f_i : h_j \longrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j, \qquad i \in [1, m] \;\; et \;\; j \in [1, n].$$

Matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne de f en a est la matrice des dérivées partielles :

$$J_af = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.3. *Si f est différentiable en a, alors la matrice de $d_af \in \mathscr{L}(E,F)$ dans les bases canoniques est la matrice Jacobienne J_af.*

Remarque 1.2.2. *f est de classe C^1 sur U si et seulement si la matrice Jacobienne existe et est continue sur U.*

1.2.4 Difféomorphisme

Soient U, V deux ouverts (non vides) d'espaces de Banach E et F, respectivement.

Définition 1.2.2. *On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme de U sur V si et seulement si*

1) f est une bijection.

2) f est de classe C^1 sur U.

3) f^{-1} est de classe C^1 sur V.

Proposition 1.2.4. *Si $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme, alors en tout point de U sa différentielle est un isomorphisme de E sur F et la différentielle de f^{-1} est liée à celle de f par la formule*

$$d_yf^{-1} = \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)^{-1}, \text{ pour tout } y \in V.$$

1.2.5 Théorème d'inversion locale

Si $f : U \longrightarrow V$ est de classe C^1, et si $a \in U$ et tel que d_af soit un isomorphisme de E sur F, alors il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction f/U_a soit un difféomorphisme de U_a vers V_b.

1.2.6 Théorème d'inversion globale

Soit $f : U \longrightarrow F$ une application de classe C^1 avec U un ouvert non vide. Alors f est un difféomorphisme de U vers $f(U)$ si et seulement si f est injective et sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme de E sur F.

Remarque 1.2.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application injective et de classe C^1. Alors f est un difféomorphisme si et seulement si le déterminant de sa matrice Jacobienne ne s'annule pas sur U.*

1.2.7 Théorème des fonctions implicites

Le théorème des fonctions implicites concerne la résolution d'équations non-linéaires de la forme $f(x,y) = 0$, et doit son nom au fait que, sous certaines hypothèses on peut étirer y comme fonction de x : on dit que $f(x,y) = 0$ définit implicitement y, ou encore y comme fonction implicite de x.

Théorème 1.2.1. ***(Des fonctions implicites)***
Soit f une fonction de classe C^k définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tel que $f(a,b) = 0$. On suppose que la matrice

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\leq i,j\leq q}$$

est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert U de (a,b) dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^p$ et une fonction $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^k tels que, pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

1.2.8 Applications différentiables d'ordre supérieur

Soient E et F deux espaces de Banach et $f : U \subset E \longrightarrow F$ où U est un ouvert de E, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On dit que

i) f est n-fois différentiable en $x \in U$, si elle est différentiable dans un voisinage ouvert U_x de x et sa différentielle

$$df : U_x \longrightarrow \mathscr{L}(E,F) \quad \text{est } (n-1) \text{ fois différentiable en } x.$$

ii) f est n-fois différentiable dans U si elle est n-fois différentiable en tout point de U.

iii) f est de classe C^n si et seulement si sa différentielle est de classe C^{n-1}.

iv) f est de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout $n \geq 1$.

Exemple

Les applications linéaires continues sont de classe C^∞.

CHAPITRE 2

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

En termes simples, ce sont des espaces qui, localement ressemblent à un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et sur lequel on peut faire du calcul.
Les exemples les plus familiers, mis à part les espaces euclidiens eux-mêmes, sont les plans lisses, les courbes telles que les cercles et les paraboles, et les surfaces lisses telles que les sphères, paraboloïdes, ellipsoïdes et hyperboloïdes. Les variétés les plus simples sont les variétés topologiques, qui sont des espaces topologiques avec certaines propriétés qui codent ce que nous voulons dire sur le faite qu'ils "ressemblent localement " à $\mathbb{R}^n$.
Cependant, de nombreuses applications importantes de variétés impliquent le calcul. Par exemple, les applications de la théorie des variétés à la géométrie impliquent des propriétés telles que le volume et la courbure. Généralement, les volumes sont calculés par intégration, et les courbures sont calculées par différenciation, donc pour étendre ces idées à des variétés nécessiterait certains moyens de donner un sens à l'intégration et à la différenciation sur une variété.
L'application à la mécanique classique impliquent la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires sur les variétés, et les applications à la relativité générale (la théorie de la gravitation) impliquent la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles.

2.1 Notions de base sur les variétés

2.1.1 Variétés topologiques

Définition 2.1.1. *[9]Soit M un espace topologique. On dit que M est une variété topologique de dimension n ou un n-variété topologique s'il possède les propriétés suivantes :*

- *M **est séparé** .*
- *M **est à base dénombrable :** il existe une base dénombrable pour la topologie de M.*
- *M **est localement euclidien de dimension** n : chaque point de M possède un voisinage qui est homéomorphe à un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
  La troisième propriété signifie, plus précisément, que pour tout $p \in M$ nous pouvons trouver
  - □ *Un ouvert $U \subseteq M$ contenant p,*
  - □ *Un ouvert $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, et*

□ *Un homéomorphisme* $\varphi : U \longrightarrow \widehat{U}$.

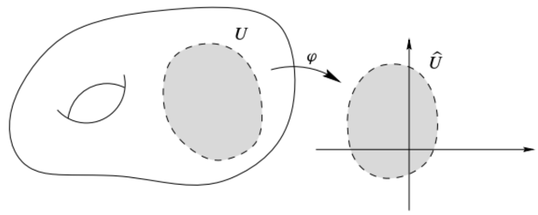

FIGURE 2.1 – Variété topologique

Si M est une variété topologique, nous abrégions souvent la dimension de M comme $dimM$. Officieusement, on écrit parfois «Soit M^n une variété» comme raccourci pour «Soit M^n une variété de dimension n». L'exposant n ne fait pas partie du nom de la variété, et n'est généralement pas inclus dans la notation après la première occurrence. Il est important de noter que chaque variété topologique a, par définition, une dimension spécifique et bien définie.

Remarque 2.1.1. *En pratique, les propriétés (i) et (ii) sont généralement facile à vérifier, en particulier pour les espaces qui sont construits à partir d'autres variétés, parce que les deux propriétés sont héritées par des sous-espaces et des produits finis). En particulier, il s'ensuit que chaque sous-ensemble ouvert d'une variété topologique est lui-même une n-variété topologique (avec la topologie induite, bien sûr).*

2.1.2 Cartes de cordonnées

Soit M une n-variété topologique, une carte de cordonnées sur M (où simplement carte sur M) est un couple (U,φ) où U est un ouvert de M et $\varphi : U \to \widehat{U}$ est un homéomorphisme de U dans un ouvert $\widehat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Par la définition d'une variété topologique, tout point $p \in M$ est contenu dans le domaine de quelque cartes (U,φ). Si $\varphi(p) = 0$, on dit que la carte est centrée en p.

Soit(U,φ) une carte, on appelle U le domaine de cordonnées, où un voisinage de cordonnées de tout ses points. L'application φ est appelée application de cordonnées (locale), et les fonctions composante $(x^1,x^2,...,x^n)$ de φ définit par $\varphi(p) = \big(x^1(p),x^2(p),...,x^n(p)\big)$. Sont appelées cordonnées locale sur U.

Remarque 2.1.2. *Une variété topologique de dimension n est de classe C^k si les homéomorphismes φ sont de classe C^k, $k \geq 1$.*

2.1.3 Exemples de variétés topologiques

Exemple 2.1. *(**Graphes de fonctions continues**).*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction continue. Le graphe de f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ définit par

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U \ et \ y = f(x)\},$$

avec la topologie induite, soit $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui définit la projection sur la première composante, et soit $\varphi : \Gamma(f) \longrightarrow U$ la restriction de π_1 sur $\Gamma(f)$:

$$\varphi(x,y) = x\ , \quad (x,y) \in \Gamma(f).$$

Puisque φ est la restriction d'une fonction continue, elle est continue, et c'est un homéomorphisme car son inverse $\varphi^{-1} = (x, f(x))$ est continue. D'où $\Gamma(f)$ est une variété topologique de dimension n. En faite, $\Gamma(f)$ est homéomorphe à U lui même, et $(\Gamma(f), \varphi)$ est une carte de cordonnées globales, appelée cordonnées du graphe.
La même observation est appliquée à tout sous-ensemble de R^{n+k} définie en mettons n'importe quel k des cordonnées (pas nécessairement le dernier k) égale à quelques fonctions continues de l'autre n, qui est restreinte à se trouver dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.2. *(**Les sphéres**).*
Pour tout entier $n \geq 0$, la sphère d'unité $\mathbb{S}^n$ est séparé et à base dénombrable car c'est un sous espace topologique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour montrer qu'il est localement Euclidien, pour tout indice $i = 1, ..., n+1$ soit U_i^+ un sous espace de $\mathbb{R}^{n+1}$, où la i^{me} cordonnées est positive :

$$U_i^+ = \{(x^1, ..., x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i > 0\}.$$

Similaire-ment U_i^- est l'ensemble où $x^i < 0$.
Soit $f : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$f(u) = \sqrt{1 - |\, u\,|^2}.$$

Donc pour tout $i = 1, ..., n+1$, il est facile de vérifier que $U_i^+ \cap \mathbb{S}^n$ définit le graphe de cette fonction

$$x^i = f(x^1, ..., \widehat{x^i}, ..., x^{n+1}),$$

où le chapeau indique que x^i est enlevé. Similaire-ment, $U_i^- \cap \mathbb{S}^n$ définit le graphe de

$$x^i = -f(x^1, ..., \widehat{x^i}, ..., x^{n+1}),$$

Donc, tout sous ensemble $U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n$ est localement euclidien de dimension n, et les applications $\varphi : U_i^{\pm} \cap \mathbb{S}^n \to \mathbb{B}^n$ définis par

$$\varphi_i^{\pm}(x^1, ..., x^{n+1}) = (x^1, ..., \widehat{x^i}, ..., x^{n+1}),$$

sont des cordonnées de graphe pour $\mathbb{S}^n$. Puisque tout point de $\mathbb{S}^n$ est dans le domaine d'au moins une de ces $2n+2$ cartes, $\mathbb{S}^n$ est une n−variété topologique.

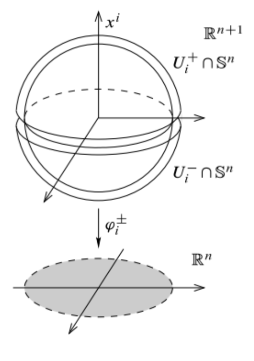

Figure 2.2 – Cartes de $\mathbb{S}^n$

Afin de donner un sens aux dérivés des fonctions à valeurs réelles, courbes ou application entre variétés, nous devons introduire un nouveau type de variétés appelé une variété lisse ou différentiable. Elle sera une variété topologique avec une structure supplémentaire en plus de sa topologie, qui nous permettra de décider quelles fonctions vers ou depuis la variété sont lisses.

2.1.4 Variétés différentiables

La définition sera basée sur le calcul des application entre les espaces Euclidien, commencent par revoir quelques terminologies de base à propos de ce genre d'application. Si U et V sont des ouverts d'espaces Euclidien $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, respectivement, une fonction $F : U \to V$ est dite **lisse** (où **de classe** C^∞, ou **infiniment différentiable**) si toutes ses fonctions composantes possèdent des dérivées partielles continues de tout les ordres. Si de plus F est bijective et son application inverse est continue, elle est appelée **difféomorphisme**.
En particulier, un difféomorphisme est un homéomorphisme.
Pour voir quelle structure supplémentaire sur une variété topologique peut être appropriée pour discerner quelle application est lisse, considérons une n−variété topologique arbitraire M.
Tout point de M est dans un domaine d'une carte $\varphi : U \to \widehat{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Une définition plausible d'une fonction différentiable sur M sera de dire que $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable si est seulement si la fonction composée $f \circ \varphi^{-1} : \widehat{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable au sens du calcul habituel. Mais ceci aura un sens seulement si cette propriété est indépendante du choix de la carte. Pour garantir cette indépendance, on va restreindre notre attention sur les " cartes lisses". Puisque la licité n'est pas une propriété d'homéomorphisme invariant, la manière de faire ceci est de considérer la collection de toutes les cartes comme une sorte de structure sur M.
Avec cette motivation en tête, nous pourrons décrire les détails de cette construction.

Définition 2.1.2. *(**Changement de cartes**).*
Soit M une n-variété topologique.
*Soient $(U,\varphi),(V,\psi)$ deux cartes telles que $U \cap V \neq \emptyset$, l'application de composition $\psi \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ est appelée **changement de cartes de** φ **vers** ψ . C'est une composition d'homéomorphismes, et devient elle même un homéomorphisme.*

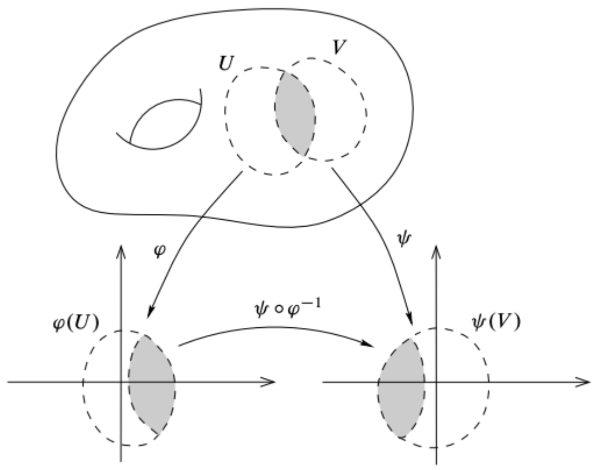

FIGURE 2.3 – Changement de cartes

*Deux cartes $(U,\varphi),(V,\psi)$ sont dites **compatible** si, soit $U \cap V \neq \emptyset$ ou le changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme. Puisque $\varphi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, la différentiabilité de cette application peut être interprétée dans le sens ordinaire en ayant des dérivées partielles continues de tout les ordres.*

Définition 2.1.3. *(**Atlas sur** M).*
*On définit un **atlas pour** M en étant la collection des cartes dont leurs domaines de définition recouvrent M,*

$$\mathscr{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I} .$$

Exemple 2.3. *$\mathbb{R}^n$ est un espace topologique séparé, on prend $U = \mathbb{R}^n$, et $\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$, alors $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ est un atlas de dimension n et de classe C^∞.*
Puisque $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme, et $Id_{\mathbb{R}^n} o(Id_{\mathbb{R}^n})^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$ de classe C^∞.

Exemple 2.4. *Soit $\mathbb{R}$ une variété topologique, en effet $\mathbb{R}$ est séparé, et l'application identité*

$$Id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x,$$

est un homéomorphisme, quelque soit $U =]-\infty, 1[$ et $V =]0, +\infty[$, on définit

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \varphi(U) \\ x &\longmapsto \varphi(x) = \exp(x) \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} \psi : V &\longrightarrow \psi(V) \\ x &\longmapsto \psi(x) = x^2 \end{aligned},$$

alors

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \varphi(U) &\longrightarrow U \\ y &\longmapsto \ln(y) \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} \psi^{-1} : \psi(V) &\longrightarrow V \\ y &\longmapsto \sqrt{y} \end{aligned},$$

on a : $U \cap V \neq \emptyset$ car $\frac{1}{2} \in U$ et $\frac{1}{2} \in V$ et $(U \cup V) = \mathbb{R}$, φ et ψ sont continues et φ^{-1}, ψ^{-1} sont aussi continues, elles sont bijectives (surjectives par construction et injectives par définition) donc φ et ψ sont des homéomorphismes.
$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (\ln(x))^2$ est bijective et de classe C^1 et $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \exp(\sqrt{x})$ est de classe C^1 donc $\psi o \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme.
Alors la famille $\Big\{(]0, +\infty[, x^2); (]-\infty, 1[, \exp(x))\Big\}$ est un atlas sur $\mathbb{R}$.

*Un atlas $\mathscr{A}$ est appelée **atlas lisse** si toutes les cartes de $\mathscr{A}$ sont **compatible** deux à deux.*
Pour montrer qu'un atlas est lisse, on aura besoin seulement de vérifié que tout changement de cartes $\psi \circ \varphi^{-1}$ est lisse pour toutes cartes $(U, \varphi), (V, \psi)$ de $\mathscr{A}$, une fois avoir prouvé ceci, on déduit que $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme car son inverse $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ est l'une des changements de cartes qu'on a déjà vérifié la licité. Alternativement, étant donné deux cartes particulière $(U, \varphi), (V, \psi)$, il est souvent plus facile de montrer qu'elles sont compatibles en vérifiant que $\psi \circ \varphi^{-1}$ est lisse et est injective avec un Jacobien non nul en tout point.
On pourrait choisir de définir une structure lisse comme une classe d'équivalence d'atlas lisses avec une relation d'équivalence appropriée. Cependant, il est plus direct de poser les définitions suivantes

2.1.5 Atlas compatibles

Définition 2.1.4. *Soit M une variété différentiable, soit A et B deux atlas de dimension n et de classe C^K sur M. A et B sont dit atlas compatibles sur M si*

i) $\forall (U, \varphi) \in A$ *et* $(V, \psi) \in B$: $U \cap V \neq \emptyset$ *et* $\varphi \circ \psi^{-1}$ *est un C^k–difféomorphisme.*

ii) $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$ *est C^k–difféomorphisme.*

iii) $\varphi \circ \psi^{-1}$ *et* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *sont C^k– différentiables (Puisque $\varphi \circ \psi^{-1}$ est bijective).*

Notons $\mathcal{ATL}(M)$ l'ensemble des atlas de dimension n et de classe C^k sur M, $k \geq 1$.

Définition 2.1.5. *On définit la relation suivante*

$$\forall A, B \in \mathcal{ATL}(M) : \quad A\ \mathcal{R}e\ B \Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont compatibles.}$$

$\mathcal{R}e$ est bien une relation d'équivalence.

Démonstration. 1. $\mathcal{R}e$ est réflèxive :
Soit $A \in \mathcal{A}TL(M)$ et $(U,\varphi) \in A$.
Puisque $U \cap U = U$ alors $U \cap U \neq \emptyset$, et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$, $\varphi o \varphi^{-1} = Id_U$ est un C^k-difféomorphisme alors $A\ \mathcal{R}e\ A$.

2. $\mathcal{R}e$ est symétrique :
Soit $A, B \in \mathcal{A}TL(M)$ et $(U,\varphi) \in A$ et $(V,\psi) \in B$.
On suppose que A et B sont compatibles alors $A\ \mathcal{R}eB$, alors $\varphi \circ \psi^{-1}$ est un C^k-difféomorphisme donc il est bijective est sa réciproque $(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} = \psi o \varphi^{-1}$ est aussi un C^k- difféomorphisme. D'où $B\ \mathcal{R}e\ A$.

3. $\mathcal{R}e$ est transitive :
Soit $A, B, C \in \mathcal{A}TL(M)$ et $(U,\varphi) \in A$ et $(V,\psi) \in B$, $(W,\phi) \in C$.
On suppose que $A\mathcal{R}eB$ et $B\mathcal{R}eC$ on a alors : $\varphi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \phi^{-1}$ sont des C^k-difféomorphismes, et puisque $\varphi \circ \phi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \phi^{-1}$ alors $\varphi \circ \phi^{-1}$ est aussi un C^k-difféomorphisme.
D'où A et C sont compatibles i.e $A\ \mathcal{R}e\ C$.
On déduit que $\mathcal{R}e$ est une relation d'équivalence.

□

L'ensemble des classes d'équivalence :

$$\mathcal{A}TL(M)/\mathcal{R}e = \left\{\mathring{A},\ \ A \in \mathcal{A}TL(M)\right\},$$

tel que

$$\mathring{A} = \{B \in \mathcal{A}TL(M)\ /\ A\ \mathcal{R}e\ B\}$$

Définition 2.1.6. *(**Atlas maximal**).*
*Un atlas $\mathscr{A}$ sur M est **maximal** s'il n'est pas contenu dans un autre atlas lisse plus large (i.e $\mathscr{A}$ est la réunion de tous les atlas appartenant à la même classe d'équivalence).*
Ceci revient à dire que toutes carte est compatible avec toutes carte de $\mathscr{A}$ est déjà en $\mathscr{A}$.

Définition 2.1.7. *(**Variété différentiable**).*
Soit M une variété topologique, une structure lisse sur M est un atlas lisse maximal.
*Une **variété lisse** est un couple $(M,\mathscr{A})$ où M une variété topologique et $\mathscr{A}$ est une structure lisse sur M.*
*On mentionnera simplement "M et une variété lisse", les structures lisses sont aussi appelées **structure différentiable** ou **structure** C^∞.*

Remarque 2.1.3. *Il n'est pas toujours possible de trouver une structure lisse sur une variété topologique donnée, il existe des variétés topologiques qui n'admettent aucune structure lisse (le premier exemple est une variété topologique compacte de dimension 10 trouvée en 1960 par **Michel Kervaire**).*

Exemple 2.5. *(**Deux atlas non-compatibles**).*
Prenons l'atlas du premier exemple $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$.
$(\mathbb{R}, \{(\mathbb{R},\varphi)\})$ *est une variété différentiable de dimension* 1 *de classe C^∞, où*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi(x) = x^3,\end{aligned}$$

φ est bien un homeomorphisme. en effet, φ est bijective, continue et

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi^{-1}(x) =^3 \sqrt{x}.\end{aligned}$$

φ^{-1} est bien continue.
$(\mathbb{R},\varphi)$ est un atlas sur $\mathbb{R}$.
La question qui se pose, ***est ce que ces deux atlas sont compatibles?***
On a

$$\begin{aligned}\varphi\circ Id_{\mathbb{R}}^{-1}:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\varphi\circ Id_{\mathbb{R}}^{-1}(x)=\varphi(x)=x^3\end{aligned}$$

qui est C^∞ différentiable.

$$\begin{aligned}Id_{\mathbb{R}}\circ\varphi^{-1}:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto Id_{\mathbb{R}}\circ\varphi^{-1}(x)=^3\sqrt{3}\end{aligned}$$

qui n'est pas différentiable en 0, $(\varphi^{-1})'(x)=\dfrac{1}{3.^3\sqrt{x^2}}$.
D'où les deux atlas $(\mathbb{R},Id)$ et $(\mathbb{R},\varphi)$ ne sont pas compatibles.

Exemple 2.6. *(**Variétés différentielles de dimension 1**).*

1. ***les courbes, les droites, les graphes de fonctions continues, les cercles, les segments****.*
   Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue. et $\Gamma_f=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$ et de l'atlas $\mathscr{A}=\{\Gamma_f,p_1/\Gamma_f\}$ où p_1 définit la projection canonique sur le premier facteur, est une variété différentielle de dimension n. en effet

   $$\begin{aligned}p_1/\Gamma_f:\ \Gamma_f&\longrightarrow\mathbb{R}\\ (x,f(x))&\longmapsto p_1(x,f(x))=x,\end{aligned}$$

   est un homéomorphisme.

2. *Le cercle d'unité $\mathbb{S}^1=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\Big\}\subset\mathbb{R}^2$ est une variété différentiable de dimension 1 et et de classe C^∞ avec l'atlas $\mathscr{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in[1,4]}$.*
   Considérons les ouverts :

   $$\begin{aligned}U_1&=\Big\{(x,y)\in S^1;\ y>0\Big\},\\ U_2&=\Big\{(x,y)\in S^1;\ y<0\Big\},\\ U_3&=\Big\{(x,y)\in S^1;\ x>0\Big\},\\ U_4&=\Big\{(x,y)\in S^1;\ x<0\Big\}.\end{aligned}$$

   Et les applications suivantes :

   $$\begin{aligned}\varphi_1:U_1\subset S^1&\longrightarrow\varphi_1(U_1)\subset\mathbb{R},\\ (x,y)&\longmapsto\varphi_1(x,y)=x.\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\varphi_2:U_2\subset S^1&\longrightarrow\varphi_2(U_2)\\ (x,y)&\longmapsto\varphi_2(x,y)=x.\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\varphi_3:U_3\subset S^1&\longrightarrow\varphi_3(U_3)\\ (x,y)&\longmapsto\varphi_3(x,y)=y.\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\varphi_4:U_4\subset S^1&\longrightarrow\varphi_4(U_4)\\ (x,y)&\longmapsto\varphi_4(x,y)=y.\end{aligned}$$

   i) *Les φ_i sont surjectives par construction.*
   ii) *φ_1 est injective car :*

   $$\forall\,(x,y),(x',y')\in U_1:\ \varphi_1\,(x,y)=\varphi_1\,(x',y')\implies x=x'$$

   on a :

   $$\left\{\begin{array}{l}(x,y)\in U_1\subset S^1\\ (x',y')\in U_1\subset S^1\end{array}\right.\implies\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2=1;\ y>0.\\ x'^2+y'^2=1;\ y'>0.\end{array}\right.$$

   puisque $x=x'$ alors $y^2-y'^2=0$, avec $y',y>0$, d'où $y=y'$

iii) φ_1 *est continue (évident), et*

$$\varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R} \longrightarrow U_1$$
$$x \longmapsto \varphi_1^{-1}(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) = \varphi_1(U_1) \quad ; \; x \in]-1,1[$$

φ_1^{-1} *continue car ses fonctions composantes sont continues.*

iv) *On a* $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$, $U_2 \cap U_4 \neq \emptyset$ *et* $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$,

$$\varphi_1 o \varphi_3^{-1} : \varphi_3(U_1 \cap U_3) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_3)$$
$$x \longmapsto \varphi_1 o \varphi_3^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

D'où $\varphi_1 o \varphi_3^{-1}$ *est un difféomorphisme.*

Exemple 2.7. *(* ***Variétés de dimension 2****).*
la sphère $S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$ *une variété différentiable de dimension* 2 *et de classe* C^∞.

Considérons les ouverts $U_N = S^2 \backslash N$ *et* $U_S = S^2 \backslash S$ *telle que :* $N = (0,0,1)$ *et* $S = (0,0,-1)$. *L'application :* $\varphi_N : U_N \longrightarrow \varphi_N(U_N) \subset \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\varphi_N(x,y,z) = \left(\tfrac{x}{1-z}, \tfrac{y}{1-z}\right),$$

est continue sur U_N *car ses composantes sont continues sur* U_N, *de plus* φ_N *est bijective (surjective par construction et injective par définition), son application inverse est donnée par*

$$\varphi_N^{-1}(x_1,x_2) = \left(\tfrac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \tfrac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \tfrac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}\right),$$

est aussi continue car ses composantes sont continues, donc φ_N *est un homéomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *sur* U_N *L'application :* $\varphi_S : U_S \longrightarrow \varphi_S(U_S) \subset \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\varphi_S(x,y,z) = \left(\tfrac{x}{1+z}, \tfrac{y}{1+z}\right),$$

est aussi un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$*sur* U_S, *l'inverse pour expression*

$$\varphi_S^{-1}(x,y) = \left(\tfrac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \tfrac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \tfrac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}\right)$$

l'application de changement de cartes

$$\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N(x,y) = \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{y}{x^2+y^2}\right),$$

qui est clairement de classe C^∞, *donc* $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ *est un atlas sur* S^2.

Exemple 2.8. *(****Variété de dimension*** n*).*

1) $\mathbb{R}^n$ *muni de la topologie usuelle et de l'atlas à une seule carte* $\mathscr{A} = \{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ *est une variété différentiable de dimension n.*

2) *Tout* $\mathbb{R}-$ *espace vectoriel E de dimension n est une variété différentiable de même dimension : tout isomorphisme* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définit un atlas* (E, φ). *De même tout ouvert* $U \subset E$ *de l'espace vectoriel est également une variété différentiable, l'atlas étant* (U, φ).

Proposition 2.1.1. *Soit M une variété différentiable de dimension n, munie de l'atlas $\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$.*
Soit U est un ouvert de M, alors U est une variété différentiable de dimension n, avec l'atlas

$$\mathscr{A}' = \left\{\left(\left(U_i \cap U\right),\ \varphi_i \Big/ (U_i \cap U)\right)\right\}_{i\in I}$$

Démonstration. $\left\{\left(U_i \cap U\right)\right\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert,

$$\underset{i\in I}{\cup}(U_i \cap U) = (\underset{i\in I}{\cup} U_i) \cap U = M \cap U = U.$$

$$\varphi_i \Big/ (U_i \cap U):\ U_i \cap U \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U) \subset \mathbb{R}^n,$$

est un homéomorphisme.
Soit $\left((U_i \cap U),\ \varphi_i \Big/ (U_i \cap U)\right)$ et $\left((U_j \cap U), \varphi_j \Big/ (U_j \cap U)\right)$ deux cartes telles que $(U_i \cap U) \cap (U_j \cap U) \neq \emptyset$, on pose

$$T = (U_i \cap U) \cap (U_j \cap U),$$

$$\varphi_j \Big/ (U_j \cap U)\ \circ \varphi_i^{-1} \Big/ (U_i \cap U):\ \varphi_i(T) \longrightarrow \varphi_j(T),$$

est un C^∞–difféomorphisme. □

Exemple 2.9. *L'ensemble des matrices inversibles :*

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R})\ /\ \det(A) \neq 0\}$$

muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^{n^2}$ est une variété différentiable de dimension n^2 car :

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &= \det{}^{-1}\left(]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\right) \\ &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\} \end{aligned},$$

tel que :

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A, \end{aligned}$$

$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *est un ouvert dans* $\mathbb{R}$, det *est continue, on a alors* $GL(n, \mathbb{R})$ *est un ouvert.*

2.1.6 Sous-variétés différentiables

Définition 2.1.8. *Soit M une variété différentiable de dimension n et de classe C^k avec $(k \geq 1)$. soit p un entier naturel inférieur ou égal à n $(p \leq n)$, et soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow M$ une application qui vérifie la propriété suivante Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, une carte locale (V, φ) au point $y = f(x)$ telle que $f(U) \subset V$ et $\varphi o f$ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(V) \cap \mathbb{R}^p$, en identifiant $\mathbb{R}^p$ au sous-espace $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 2.10. *(**Sous-variétés**)*

1. *L'exemple "canonique" de sous-variété différentiable de dimension m de $\mathbb{R}^n$ est donc, d'aprés la définition, le sous-espace $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.*

2. *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$*, soit*
$$S_\lambda = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\right\},$$
considérons $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*
$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \lambda,$$
alors F *est de classe* C^1, $JacF(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ *et*
$$S_\lambda = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ F(x_1, x_2, x_3) = 0\ \right\},$$
si $\lambda \neq 0$, $rang(JacF(x_1, x_2, x_3)) = 1$ *(le maximum possible) car sinon* x_1, x_2, x_3 *seraient tous nuls (ce qui est impossible car* $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda \neq 0$ *), comme :*
$$(0,0,0) \notin S_\lambda, \forall a \in S_\lambda :\ rangJacF(a) = 1$$
et donc S_λ *est une sous-variété différentiable de* $\mathbb{R}^3$ *de dimension* 2 *.*

2.1.7 Variétés orientables

Définition 2.1.9. *Soit* M *une variété différentiable. On dit que* M *est orientable lorsqu'il existe un atlas (compatible avec la structure différentielle de* M*) tel que les jacobiens des changements de cartes sont positifs.*

2.1.8 Variété produit

Proposition 2.1.2. *Soient* (M_1, A_1), (M_2, A_2) *deux variétés de classe* C^∞*, munies de deux atlas* A_1 *et* A_2 *de dimension* n_1, n_2 *respectivement, alors le produit* $A_1 \times A_2$ *donné par :*
$$A_1 \times A_2 = \left\{(U_i \times U_j, \varphi_i \times \psi_j) \backslash\ (U_i, \varphi_i) \in A_1,\ (U_j, \psi_j) \in A_2\right\},$$
où,
$$\begin{aligned} \varphi_i \times \psi_j : U_i \times U_j &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \psi_j(U_j) \\ (x, y) &\longmapsto (\varphi_i(x), \psi_j(y)), \end{aligned}$$
est un atlas sur $M_1 \times M_2$ *de dimension* $n_1 + n_2$ *et de classe* C^∞.

Alors La variété $(M_1 \times M_2, A_1 \times A_2)$ *est dite variété produit de* M_1 *et* M_2.

Démonstration. $M_1 \times M_2 = (\underset{i \in I}{\cup} U_i) \times (\underset{j \in J}{\cup} U_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (U_i \times U_j)$
$$\begin{aligned} \varphi_i \times \psi_j : U_i \times U_j &\longrightarrow \varphi_i(U_i) \times \psi_j(U_j), \\ (x, y) &\longmapsto (\varphi_i(x), \psi_j(y)), \end{aligned}$$
est un homéomorphisme.
Les fonctions de transitions sont définit par
$$(\varphi_i \times \varphi_j) \circ (\varphi_\alpha \circ \psi_\beta)^{-1} = (\varphi_i \circ \varphi_\alpha^{-1}) \times (\psi_j \circ \psi_\beta^{-1}).$$
□

Proposition 2.1.3. □ *Si* M_1 *et* M_2 *sont deux variétés de classe* C^∞*, les projections canoniques* $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ *et* $\pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ *sont de classe* C^∞.

□ *Soit* M_1, M_2 *et* M_3 *sont trois variétés, alors l'application* $f : M_3 \longrightarrow M_1 \times M_2$ *est de classe* C^∞ *si et seulement si* $\pi_1 \circ f$ *et* $\pi_2 \circ f$ *sont de classe* C^∞, $f = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$.

2.1.9 Applications différentiables entre deux variétés différentiables

Définition 2.1.10. *Soit (M,A), et (N,B) deux variétés différentiables de dimension n et m respectivement et de classe C^k, C^p, respectivement, soit*

$$\begin{aligned} f : (M,A) &\longrightarrow (N,B) \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

f est dite application C^r–différentiable si $\forall(U,\varphi) \in A$ et $\forall(V,\psi) \in B$:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V),$$

est C^r–différentiable.

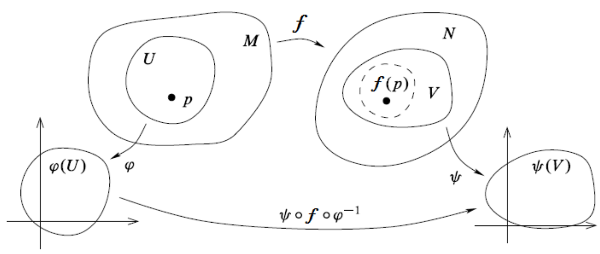

Figure 2.4 – Application différentiable entre deux variétés

Remarque 2.1.4. *On note par $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions C^∞–différentiables sur M ;*
$C^\infty(M) = \{f \ , \ f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* $C^\infty\}$

Définition 2.1.11. *Soient M, N deux variétés différentiables.*
L'application $f : M \longrightarrow N$ est dite C^k–difféomorphisme, $k \geq 1$ si

i) f est bijective.

ii) f est C^k–différentiable.

iii) f^{-1} est C^k–différentiable.

2.2 Notion d'espace tangent à une variété différentiable en un point

2.2.1 Courbes tracées sur une variété différentiable

Définition 2.2.1. *Soit M une variété différentiable de classe C^k et de dimension n, $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un atlas sur M et soit $x \in M$ et*

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t), \quad (I \textit{ centré en } 0) \end{aligned}$$

une courbe de classe C^k sur M, passante par le point x, $\gamma(0) = x$.

Notons par $C(M,x)$ l'ensemble des courbes de classe C^k sur M, passantes par x :

$$C(M,x) = \Big\{\gamma / \ \ \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M, \textit{ de classe } C^k, \ \gamma(0) = x \Big\}.$$

On définit sur $C(M,x)$ la relation suivante :

$$\forall \gamma, \gamma' \in C(M,x); \quad \gamma \mathfrak{Re} \gamma' \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in A : \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0},$$

on dit que les deux courbes γ, γ' sont tangentes au point x.

Proposition 2.2.1. *$\mathfrak{Re}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. 1) $\mathfrak{Re}$ est réflèxive,
$\forall \gamma \in C(M,x) : \gamma \ \mathfrak{Re} \ \gamma$, puisque $x \in M$ alors il existe une carte (U,φ) tel-que $x \in U$ et

$$\frac{d}{dt}(\varphi o \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi o \gamma)_{t=0}.$$

2) $\mathfrak{Re}$ est symétrique
Soit $\gamma, \gamma' \in C(M,x) : \gamma \ \mathfrak{Re} \ \gamma' \Longrightarrow \gamma' \ \mathfrak{Re} \ \gamma$ car

$$\begin{aligned} \gamma R \gamma' &\Longleftrightarrow \exists (U,\varphi), \ x \in U \textit{ et } \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0}. \\ &\Longrightarrow \exists (U,\varphi), \ x \in U \textit{ et } \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0}. \\ &\Longrightarrow \gamma' \mathfrak{Re} \gamma. \end{aligned}$$

3) $\mathfrak{Re}$ est transitive
Soient $\gamma, \gamma', \gamma'' \in C(M,x)$, alors $\gamma(0) = \gamma'(0) = \gamma''(0) = x$ et $\gamma, \gamma', \gamma''$ sont des C^k−difféomorphismes:

$$(\gamma \mathfrak{Re} \gamma' \textit{et } \gamma' \mathfrak{Re} \gamma'') \Longrightarrow \gamma \mathfrak{Re} \gamma'' \text{ i.e : } \overset{?}{\exists} (W,\phi), \ x \in W \text{ et } \frac{d}{dt}(\phi o \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi o \gamma'')_{t=0}.$$

On a :

$$\gamma \mathfrak{Re} \gamma' \Longrightarrow \exists (U,\varphi), \ x \in U \text{ et } \tfrac{d}{dt}(\varphi o \gamma)_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\varphi o \gamma')_{t=0},$$

$$\gamma' \mathfrak{Re} \ \gamma'' \Longrightarrow \exists (V,\psi), \ x \in V \text{ et } \tfrac{d}{dt}(\psi o \gamma')_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\psi o \gamma'')_{t=0},$$

$x \in U$ et $x \in V$ alors $x \in U \cap V$, et

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} &= \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0}.\\
&= \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma')_{t=0}.\\
&= D_{\psi(\gamma'(0))}(\varphi \circ \psi^{-1})(\tfrac{d}{dt}(\psi \circ \gamma')_{t=0}).\\
&= D_{\psi(\gamma'(0))}(\varphi \circ \psi^{-1})(\tfrac{d}{dt}(\psi \circ \gamma'')_{t=0}).\\
&= D_{\psi(\gamma''(0))}(\varphi \circ \psi^{-1})(\tfrac{d}{dt}(\psi \circ \gamma'')_{t=0}).\\
&= \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma'')_{t=0}.
\end{aligned}$$

on trouve $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma'')_{t=0}$, avec $x \in U \cap V$, donc il suffit de prendre $W = U \cap V$ et $\phi = \varphi / U \cap V$. □

2.2.2 Espace tangent

Définition 2.2.2. *Un vecteur tangent à M en x est une classe d'équivalence de courbes tangentes en x.*
L'espace tangent à M en x, noté T_xM, est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x, défini par

$$\begin{aligned}
T_xM &= C(M,x)/\mathfrak{Re}.\\
T_xM &= \{\mathring{\gamma} \ / \ \gamma \in C(M,x)\}.\\
&= \left\{\mathring{\gamma} \ / \ \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M;\ C^k - \textit{difféomorphisme et } \gamma(0) = x \right\}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1. $\mathring{\gamma} = [\gamma]$.

Proposition 2.2.2. *(**Structure d'espace vectoriel sur un espace tangent**.)*
Pour tout $x \in M$, $\exists\,(U,\varphi) \in A$ tel-que $x \in (U,\varphi)$, considérons l'application

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_x : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\
\mathring{\gamma} = [\gamma] &\longmapsto \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0}
\end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}_x$ est bien définie :
Soit $\mathring{\gamma} = [\gamma] \in T_xM$ et $\mathring{\gamma}' = [\gamma'] \in T_xM$ telles que

$$[\gamma] = [\gamma'],$$

montrons que $\tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tilde{\varphi}_x([\gamma'])$.
On a $[\gamma] = [\gamma']$ donc $\gamma \mathfrak{Re} \gamma'$ alors $\exists (V,\psi), x \in V$ et $\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma')_{t=0}$,

$$\begin{aligned}
x \in U \cap V &\Longrightarrow \tfrac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma')_{t=0}.\\
&\Longrightarrow D_{\varphi(\gamma(0))}(\psi \circ \varphi^{-1})(\tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0}) = D_{\varphi(\gamma'(0))=\varphi(\gamma(0))}(\psi \circ \varphi^{-1})(\tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0}).\\
&\Longrightarrow \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{t=0} = \tfrac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma')_{t=0}. \qquad (\psi \circ \varphi^{-1} \textit{est un difféomorphisme})\\
&\Longrightarrow \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tilde{\varphi}_x([\gamma']).
\end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}_x$ est injective

$$\forall\, [\gamma], [\gamma'] \in T_xM : \quad \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tilde{\varphi}_x([\gamma']) \Longrightarrow [\gamma] = [\gamma'].$$

On a $\tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tilde{\varphi}_x([\gamma'])$ *implique* $\frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma')_{t=0}$, *donc* $\gamma R \gamma'$, *i.e* $[\gamma]=[\gamma']$.

$\tilde{\varphi}_x$ *est surjective*

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \exists \gamma \in C(M,x),\ y = \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma)_{t=0}$$

$\varphi\circ\gamma$ *est de classe* C^k, *donc* $\varphi\circ\gamma$ *est développable en* 0,

$$\begin{aligned} \varphi\circ\gamma(t) &= \varphi\circ\gamma(0) + \tfrac{t}{1!}\tfrac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma)_{t=0}. \\ \varphi(\gamma(t)) &= \varphi(x) + ty. \\ \gamma(t) &= \varphi^{-1}(\varphi(x)+ty). \end{aligned}$$

γ *est bien de classe* C^k, *car*

$$\forall (V,\psi) \in A : psi\circ\gamma\circ Id = \psi\circ\gamma,$$

est de classe C^k *puisque* $\psi\circ\gamma(t) = \psi\circ\varphi^{-1}(\varphi(x)+ty)$ *car* ($\psi\circ\varphi^{-1}$ *est* C^k*−difféomorphisme et* φ *est* C^∞*−difféomorphisme). D'où* $\tilde{\varphi}_x$ *est bijective.*

On munit T_xM *d'une loi interne* $+_{T_xM}$ *et d'une loi externe* $._{T_xM}$ *qui rend* $\tilde{\varphi}_x$ *une application linéaire.*

Soit $\gamma,\gamma' \in C(M,x)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x([\gamma] +_{T_xM} [\gamma']) &= \tilde{\varphi}_x([\gamma]) +_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_x([\gamma']). \\ \tilde{\varphi}_x(\lambda ._{T_xM} [\gamma]) &= \lambda ._{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}_x([\gamma]). \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^n, +_{\mathbb{R}^n}, ._{\mathbb{R}^n})$ *est un* $\mathbb{R}$*−espace vectoriel, donc* $\tilde{\varphi}_x$ *est bijective*

$$\begin{aligned} [\gamma] +_{T_xM} [\gamma'] &= \tilde{\varphi}_x^{-1}(\tilde{\varphi}_x([\gamma]) + \tilde{\varphi}_x([\gamma'])). \\ \lambda ._{T_xM} [\gamma] &= \tilde{\varphi}_x^{-1}(\lambda . \tilde{\varphi}_x([\gamma])). \end{aligned}$$

On a $[\gamma],[\gamma'] \in T_xM$, *posant* $[\gamma] = X_n$ *et* $[\gamma'] = Y_n$,

$$\begin{aligned} X_n + Y_n &= \tilde{\varphi}_x^{-1}(\tilde{\varphi}_x(X_n) + \tilde{\varphi}_x(Y_n)). \\ \lambda . X_n &= \tilde{\varphi}_x^{-1}(\lambda . \tilde{\varphi}_x(X_n)). \end{aligned}$$

Alors $(T_xM, +_{T_xM}, ._{T_xM})$ *est* $\mathbb{R}$*−espace vectoriel de dimension n.*

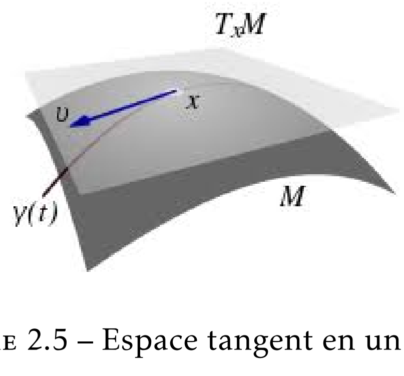

FIGURE 2.5 – Espace tangent en un point x

Remarque 2.2.2. *Soit* $\tilde{\varphi}_x$ *est un isomorphisme de* T_xM *dans* $\mathbb{R}^n$ *considérons* $\{e_i\}_{i=1,n}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *alors* $\left\{\tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)\right\}_{i=\overline{1,n}}$ *est une base de* T_xM *on la note par*

$$\tfrac{\delta}{\delta x_i}|_x = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i) \quad \textit{ou encore} \quad \delta_i|_x = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i).$$

Pour $\varphi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les cordonnées locales de $\varphi(x)$ où $(U, \varphi) \in A$ et $x \in U$.

Remarque 2.2.3. *Si E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n, alors pour tout $x \in E$, on a*

$$T_x E \simeq E,$$

puisque $T_x E \simeq \mathbb{R}^n$ et $E \simeq \mathbb{R}^n$, c'est à dire

$$\begin{matrix} T_x E \simeq \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \simeq E \end{matrix} \Longrightarrow T_x E \simeq E.$$

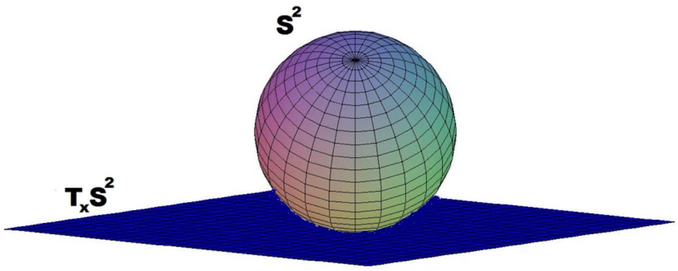

Figure 2.6 – Espace tangent en un point x de M

2.2.3 Fibré tangent

Définition 2.2.3. *Soit M une variété différentiable de classe C^k, et de dimension n, et soit A un atlas sur M, On appelle espace fibré tangent à M, l'ensemble $\bigcup_{x \in M} T_x M$ noté par*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

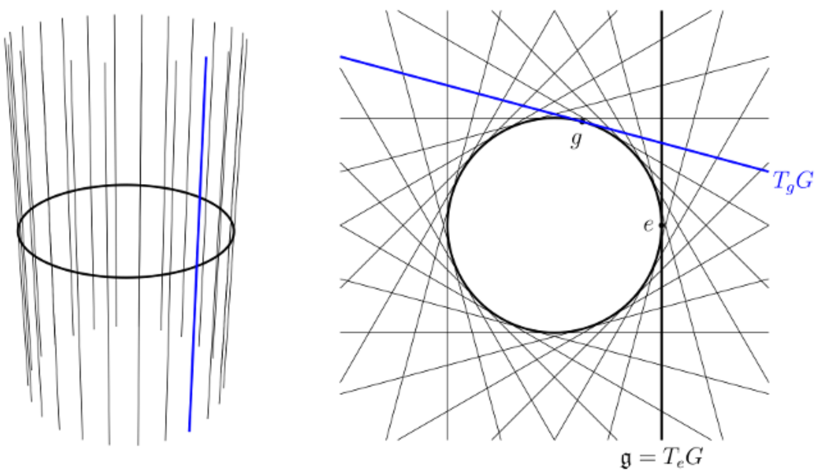

Figure 2.7 – Fibré tangent

Proposition 2.2.3. *TM est une variété différentiable.*

Démonstration. Considérons la surjection

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ \varphi &\longmapsto \pi(\varphi) = x, \end{aligned}$$

on a $\varphi \in TM$ alors il existe $x \in M$ tel-que $\varphi \in T_xM$. On munit TM de la topologie qui rend π continue.

1) TM **est un espace topologique :**

$i)$ $\emptyset = \pi^{-1}(\emptyset)$ est un ouvert de TM, car $\emptyset$ est un ouvert de M, et $TM = \pi^{-1}(M)$ est un ouvert de TM puisque M est un ouvert de M.

$ii)$ Soient $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$ deux ouverts de TM, il existe alors U_1et U_2 deux ouverts de M tel-que :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 = \pi^{-1}(U_1) \quad \text{et} &\quad \tilde{U}_2 = \pi^{-1}(U_2), \\ \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 &= \pi^{-1}(U_1) \cap \pi^{-1}(U_2), \\ &= \pi^{-1}(U_1 \cap U_2), \end{aligned}$$

qui est un ouvert de TM puisque $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de M.

$iii)$ Soit $\left\{\widetilde{U_i}\right\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts de TM, il existe alors $\{U_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts de M tel-que $\widetilde{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$.

Ainsi $\underset{i\in I}{\cup} \widetilde{U_i} = \underset{i\in I}{\cup} \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}(\underset{i\in I}{\cup} U_i)$, qui est un ouvert de TM, car $\underset{i\in I}{\cup} U_i$ est un ouvert dans M.

2) TM **est séparé :**

Soient $V, W \in TM$, il existe alors $x, y \in M$ tel-que, $V \in T_xM$ et $W \in T_yM$.

Puisque M séparé, alors il existe U_x un voisinage ouvert contenant x et U_y un voisinage ouvert contenant y, tel-que $U_x \cap U_y = \emptyset$

$\pi^{-1}(U_x) \cap \pi^{-1}(U_y) = \pi^{-1}\left(U_x \cap U_y\right) = \pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, de plus, $V \in \pi^{-1}(U_x)$ car $\pi(V) = x \in U_x$ et $W \in \pi^{-1}(U_y)$ car $\pi(W) = y \in U_y$.

3) **Carte sur** TM **:**

Soit (U, φ) une carte de l'atlas A de M considérons :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \subset TM &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ V &\longmapsto \tilde{\varphi}(V) = \left(\varphi(\pi(V)), \tilde{\varphi}_{\pi(V)}\left(V_{\pi(V)}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{\pi(V)} : T_{\pi(V)}M \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ isomorphisme}$$

$$\varphi : U \subset M \longrightarrow \varphi(U) \text{ homéomorphisme}$$

$\tilde{\varphi}$ est bien définie, puisque $\varphi o \pi$ est une application bien définie et $\tilde{\varphi}_{\pi(V)}$ est bien définie.

$\tilde{\varphi}$ est bijective, considérons l'application

$$\begin{aligned} g : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y) = \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y) \end{aligned}$$

($x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$et $y \in \mathbb{R}^n$) alors $\varphi^{-1}(x) \in U \subset M$ donc $\tilde{\varphi}_{\varphi^{-1}(x)} : T_{\varphi^{-1}(x)}M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ d'où

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_{\varphi^{-1}(x)}M \\ y &\longmapsto \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y) \end{aligned}$$

tel-que $\pi\left(\tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y)\right) = \varphi^{-1}(x)$.

On montre maintenant que $\tilde{\varphi} o g = g o \tilde{\varphi} = Id$,

$$\begin{array}{rl} \tilde{\varphi} o g : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \longmapsto (\tilde{\varphi} o g)(x,y) = (x,y) \end{array},$$

car :

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi} o g)(x,y) &= \tilde{\varphi}(g(x,y)) \\ &= \tilde{\varphi}\left(\tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y)\right) \\ &= \left(\varphi(\varphi^{-1}(x)\right), \tilde{\varphi}_{\varphi^{-1}(x)}(\tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y)) = (x,y) \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{array}{rl} g o \tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) & \longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ V & \longmapsto g o \tilde{\varphi}(V) = V \end{array},$$

car :

$$\begin{aligned} g o \tilde{\varphi}(V) &= g(\tilde{\varphi}(V)) \\ &= g(\varphi(\pi(V)), \tilde{\varphi}_{\pi(V)}\left(V_{\pi(V)}\right)). \\ &= \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(\varphi(\pi(V)))}(\tilde{\varphi}_{\pi(V)}\left(V_{\pi(V)}\right)). \\ &= V. \end{aligned}$$

4) **Fonction de transition :**

Soit (U,φ) et (V,ψ) deux cartes dans A, tel-que $U \cap V \neq \varnothing$, donc $\left(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi}\right)$ et $\left(\pi^{-1}(V), \tilde{\psi}\right)$ deux cartes dans B (B atlas de TM) tel-que : $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ On a

$$\tilde{\psi} o \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) \longrightarrow \tilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right),$$

tel-que

$$\tilde{\varphi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \tilde{\varphi}\left(\pi^{-1}(U \cap V)\right) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n,$$

et

$$\tilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)\right) = \tilde{\psi}\left(\pi^{-1}(U \cap V)\right) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n.$$

Soient x dans $\varphi(U \cap V)$ et y dans $\mathbb{R}^n$ on a alors $\tilde{\varphi}^{-1}(x,y) = \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y)$, donc

$$\left(\tilde{\psi} o \tilde{\varphi}^{-1}\right)(x,y) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}^{-1}(x,y)) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y)) = \left(\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right), \tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)}(\tilde{\varphi}^{-1}(y))\right),$$

avec

$$\left(\tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)} o \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}\right)(y) = \tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)}\left(\tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(y)\right),$$

et

$$\begin{array}{rl} \tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)} : T_{\varphi^{-1}(x)}M & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [\eta] & \longmapsto \tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)}([\eta]) = \frac{d}{dt}(\psi o \eta)_{t=0} \end{array},$$

de plus on a :

$$\begin{array}{rl} \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)} : \mathbb{R}^n & \longrightarrow T_{\varphi^{-1}(x)}M \\ z & \longmapsto \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}(z) = [\gamma] \end{array}$$

tel-que $\gamma(t) = \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) + tz\right)$ et $\gamma(0) = \varphi^{-1}(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)} o \tilde{\varphi}^{-1}_{\varphi^{-1}(x)}\right)(y) &= \tilde{\psi}_{\varphi^{-1}(x)}([\gamma]) \\ &= \tfrac{d}{dt}(\psi o \gamma)_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}\left((\psi o \varphi^{-1})(x+ty)\right)_{t=0} \\ &= \left(D_x(\psi o \varphi^{-1}\right))y = \left(D\left(\psi o \varphi^{-1}\right)\right)(x)(y) \end{aligned},$$

donc $\psi o \varphi^{-1}$ est de classe C^k alors $D\left(\psi o \varphi^{-1}\right)$ est de classe C^{k-1} $\square$

Proposition 2.2.4. *Le fibré tangent $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$, d'une variété différentiable de classe C^k et de dimension n est une variété différentiable de classe C^{k-1} et de dimension $2n$.*

2.2.4 Applications linéaires tangentes

Définition 2.2.4. *Soient (M,A) et (N,B) deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement et de classe C^k.*
Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable de classe C^r, soit $x \in M$; on appelle application linéaire tangente à f en x et on note d_xf ou d_*f, l'application

$$\begin{aligned} d_xf : T_xM &\longrightarrow T_{f(x)}N \\ [\gamma] &\longmapsto (d_xf)([\gamma]) = [fo\gamma]. \end{aligned}$$

Étude de linéairité de d_xf :

Puisque $x \in M$ et $f(x) \in N$ alors il existe une carte locale $(U,\varphi) \in A$ tel que $x \in U$ et $(V,\psi) \in B$ avec $f(x) \in V$, de plus $fo\gamma \in C(N, f(x))$ car $(fo\gamma)(0) = f(x)$ car $\gamma(0) = x$; et $fo\gamma$ est de classe C^r.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [\gamma] &\longmapsto \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tfrac{d}{dt}(\varphi o\gamma)_{t=0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{f(x)} : T_{f(x)}N &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [\eta] &\longmapsto \tilde{\psi}_{f(x)}([\eta]) = \tfrac{d}{dt}(\psi o\eta)_{t=0} \end{aligned}$$

On a $(d_xf)([\gamma]) = [fo\gamma]$ de plus $\tilde{\psi}_{f(x)}$ est une application, donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_{f(x)}((d_xf)([\gamma])) &= \tilde{\psi}_{f(x)}([fo\gamma]) \\
\tilde{\psi}_{f(x)}((d_xf)([\gamma])) &= \tfrac{d}{dt}(\psi o(fo\gamma))_{t=0} \\
\tilde{\psi}_{f(x)}((d_xf)([\gamma])) &= \tfrac{d}{dt}\left(\psi ofo\varphi^{-1}o\varphi o\gamma\right)_{t=0} \\
\tilde{\psi}_{f(x)}((d_xf)([\gamma])) &= (D_{\varphi(\gamma(0))}(\psi ofo\varphi^{-1}))\left(\tfrac{d}{dt}(\varphi o\gamma)_{t=0}\right) \\
\tilde{\psi}_{f(x)}((d_xf)([\gamma])) &= (D_{\varphi(x)}(\psi ofo\varphi^{-1}))(\tilde{\varphi}_x([\gamma]))
\end{aligned}$$

puisque $\tilde{\psi}_{f(x)}$ bijective, on trouve

$$\begin{aligned}
(d_xf)([\gamma]) &= \left(\tilde{\psi}^{-1}_{f(x)}oD_{\varphi(x)}(\psi ofo\varphi^{-1})o\tilde{\varphi}_x\right)([\gamma]) \\
d_xf &= \tilde{\psi}^{-1}_{f(x)}oD_{\varphi(x)}(\psi ofo\varphi^{-1})o\tilde{\varphi}_x
\end{aligned}$$

d_xf est bien linéaire, puisque c'est la composition de trois application linéaires.

Définition 2.2.5. *M et N étant deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ alors*

1. *f est dite une immersion de classe C^k si f est de classe C^k et d_xf est injective.*

2. *f est dite une submersion de classe C^k si f est de classe C^k et d_xf est surjective.*

2.3 Notion de champs de vecteurs

Définition 2.3.1. *Soit (M, A) une variété C^{∞}–diférentiable et de dimension n, muni d'un atlas A et soit TM $(M, \pi, \mathbb{R}^n)$ le fibré tangent à M, on appelle section de TM toute application*

$$X : M \longrightarrow TM,$$

vérifiant $\pi o X = Id_M$, c'est à dire pour tout point $x \in M$ on associe $X_x \in T_xM$ une telle section de classe C^{∞}, sera appelée champ de vecteurs sur M.

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto X(x) = X_x \in T_xM, \end{aligned}$$

tel-que $(\pi o X)(x) = \pi(X_x) = x$, où

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ V \in T_xM &\longmapsto \pi(V) = x. \end{aligned}$$

Pour toute carte (U, φ) contenant x, on associe n vecteurs tangent à M en x $\left\{\frac{\delta}{\delta x_1}_{|x}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x_n}_{|x}\right\}$ qui forme une base de T_xM.

X_x étant un vecteur tangent à M en x, il existe alors n scalaires (réels) $\left\{X_x^i\right\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, tel-que

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} X_x^i \frac{\delta}{\delta x_i}_{|x},$$

considérons l'application suivante

$$\begin{aligned} X^i : U \subset M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto X^i(x) = X_x^i \end{aligned}, \qquad \forall i = \overline{1,\ n}.$$

Ainsi donc, tout champ de vecteurs X sur l'ouvert U, s'écrit sous forme : $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\delta}{\delta x_i}$, on peut aussi écrire, en utilisant la convention d'Einstein : $X = X^i \frac{\delta}{\delta x_i}$.

Ainsi X est C^{∞}–différentiable, si par rapport à une carte (U, φ) les composantes X^i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont C^{∞}–différentiables sur l'ouvert de la carte locale

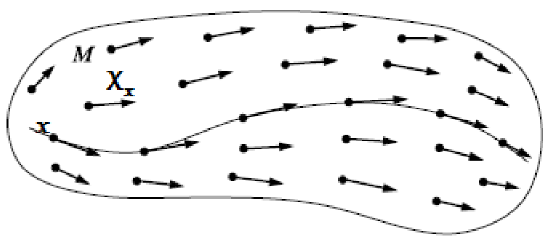

FIGURE 2.8 – Espace tangent en un point x

Exemple 2.11. 1) *Considérons pour tout $i = \overline{1,\ n}$ et par rapport à une carte (U, φ) de l'atlas de M.*

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta x_i} : U \subset M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto \frac{\delta}{\delta x_i}(x) = \frac{\delta}{\delta x_i}_{|x} = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)\end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^n$ *désigne la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*, alors* $\frac{\delta}{\delta x_i}$ *est bien un champ de vecteurs sur* U*.*

$$\left(\pi o \frac{\delta}{\delta x_i}\right)(x) = \pi\left(\frac{\delta}{\delta x_{i\,|x}}\right) = x = Id_M(x).$$

On appelle $\left\{\frac{\delta}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x_n}\right\}$ *repère locale par rapport à la carte* (U, φ)*.*

2) *Champs de vecteurs sur les sphères*
i\ Sur $S^1 = \{\exp(it)\}$*, tout champ de vecteurs est de la forme* $X_t = f(t)\frac{d}{dt}$*, avec* $f \in C^\infty(S^1)$*.*
ii\ Sur $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$*, tout champ de vecteurs est de la forme*

$$X_{(x,y,z)} = f(x,y,z)\frac{\delta}{\delta x} + g(x,y,z)\frac{\delta}{\delta y} + h(x,y,z)\frac{\delta}{\delta z},$$

avec $f, g, h \in C^\infty(S^2)$*, telles que*

$$xf(x,y,z) + yg(x,y,z) + zh(x,y,z) = 0.$$

Remarque 2.3.1. *On note* $\chi(M)$ *l'ensemble des champs de vecteurs sur* M*.*

2.3.1 Structure algèbrique sur $\chi(M)$

Structure d'espace vectoriel

$(\chi(M), +, .)$ est un $\mathbb{R}$–Espace vectoriel pour la loi interne

$$\begin{aligned} + : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longmapsto X + Y,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} X + Y : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto (X+Y)(x) = X_x + Y_x \in T_xM.\end{aligned}$$

Et la loi externe

$$\begin{aligned} . : \mathbb{R} \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (\lambda, X) &\longmapsto \lambda.X,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda.X : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto (\lambda.X)(x) = \lambda.X_x.\end{aligned}$$

Structure de $C^\infty(M)$-module

Considérons $C^\infty(M)$, l'ensemble des fonctions différentiables de classe C^∞ sur M, alors $(C^\infty(M), +, .)$ est un anneau commutatif unitaire, pour les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} + : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, g) &\longmapsto f + g,\end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} f + g : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} . : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, g) &\longmapsto f.g,\end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} f.g : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f.g)(x) = f(x)g(x)\ .\end{aligned}$$

A présent, on muni $\chi(M)$ des deux lois suivantes :

$$\begin{aligned} + : \chi(M)\times\chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\longmapsto X+Y, \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} X+Y : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto (X+Y)_x = X_x + Y_x. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} . : C^\infty(M)\times\chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (f,X) &\longmapsto f.X, \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} f.X : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto (f.X)_x = f(x).X_x. \end{aligned}$$

Alors $(\chi(M),+,.)$ est un $C^\infty(M)$-module (i.e $\chi(M)$ est un espace vectoriel sur $C^\infty(M)$).

Structure d'algèbre de Lie sur $\chi(M)$

Rappelons qu'une structure d'algèbre sur un ensemble non-vide E, est la donnée de trois lois de composition notée, $"+"$, $"."$ et $"T"$ telle que $"+"$ et $"T"$ soient internes et $"."$ soient externe, vérifiant les conditions suivantes

1) $(E,+,.)$ est un $\mathbb{k}$−espace vectoriel, ($\mathbb{k}$ étant un corps commutatif).

2) L'application

$$\begin{aligned} T : E\times E &\longrightarrow E \\ (x,y) &\longmapsto T(x,y) \end{aligned},$$

est $\daleth$−bilinéaire.

Afin de construire une structure d'algèbre sur $\chi(M)$, on introduit l'opérateur de dérivation associe à un champ de vecteurs.

2.3.2 Opérateur de dérivation associe à un champ de vecteurs

Soit (M,A) étant une variété C^∞−différentiable de dimension n, pour tout champ de vecteurs X sur M on associe l'application de $C^\infty(M)$ dans lui même noté ∂_X est définie par

$$\begin{aligned} \partial_X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto (\partial_X f), \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} (\partial_X f) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\partial_X f)(x) = \partial_{X_x} f = \tfrac{d}{dt}(f o \gamma)_{|t=0}, \end{aligned}$$

telle-que $X_x = [\gamma]$ où $\gamma \in C(M,x)$.

Notons que si $X_x = [\gamma] = [\gamma']$ alors $\gamma \mathfrak{Rc} \gamma'$, donc

$$\frac{d}{dt}(\psi o \gamma)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\psi o \gamma')_{|t=0}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(f o \gamma)_{t=0} &= \tfrac{d}{dt}\left(f o \psi^{-1} o \psi o \gamma\right)_{t=0}. \\ &= \left(D_{\psi(x)}\left(f o \psi^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{d}{dt}(\psi o \gamma)_{t=0}\right). \\ &= D_{\psi(x)}\left(f o \psi^{-1}\right)\left(\tfrac{d}{dt}(\psi o \gamma')_{t=0}\right). \\ &= \tfrac{d}{dt}(f o \gamma')_{|t=0}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.1. *Soit X un champ de vecteurs sur M, alors ∂_X est une dérivation de $C^\infty(M)$, c'est à dire*

1) ∂_X est $\mathbb{R}$−linéaire.

2) ∂_X vérifie la relation de Leibniz :

$$\partial_X(f.g) = \partial_X f.g + f\partial_X g; \forall f,g \in C^\infty(M).$$

Démonstration. Soit $X \in \chi(x)$,

$$\begin{aligned} \partial_X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \partial_X(f), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \partial_X(f) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\partial_X f)(x) = \partial_{X_x} f = \tfrac{d}{dt}(f o \gamma)_{t=0}, \end{aligned}$$

telle que $[\gamma] = X_x$ et $\gamma \in C(M,x)$.

1) ∂_X est $\mathbb{R}$–linéaire :

i) $\forall f,g \in C^\infty(M)$, et pour tout $x \in M$ on a

$$(\partial_X(f+g))(x) = \partial_{X_x}(f+g) = \frac{d}{dt}((f+g) o \gamma)_{t=0}$$

de plus on a

$$((f+g) o \gamma)(t) = (f+g)(\gamma(t)) = f(\gamma(t)) + g(\gamma(t)) = (f o \gamma)(t) + (g o \gamma)(t),$$

alors

$$\begin{aligned} (\partial_X(f+g))(x) &= \tfrac{d}{dt}((f o \gamma) + (g o \gamma))_{t=0}. \\ &= \tfrac{d}{dt}(f o \gamma)_{t=0} + \tfrac{d}{dt}(g o \gamma)_{t=0}. \\ &= \partial_{X_x} f + \partial_{X_x} g. \\ &= (\partial_X f)(x) + (\partial_X g)(x). \\ &= (\partial_X f + \partial_X f)(x). \end{aligned}$$

ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$ et $x \in M$, on a

$$\begin{aligned} (\partial_X(\alpha f))(x) &= \partial_{X_x}(\alpha f). \\ &= \tfrac{d}{dt}(\alpha f o \gamma)_{t=0}. \\ &= \tfrac{d}{dt}(\alpha (f o \gamma))_{t=0}. \\ &= \alpha \tfrac{d}{dt}(f o \gamma)_{t=0}. \\ &= \alpha \partial_{X_x} f. \\ &= \alpha (\partial_X f)(x). \\ &= (\alpha \partial_X f)(x). \end{aligned}$$

donc

$$\partial_X(\alpha f) = \alpha \partial_X f \text{ ou } \partial_{X_x}(\alpha f) = \alpha \partial_{X_x} f.$$

2) Montrons maintenant la deuxième condition.

Soient $f,g \in C^\infty(M)$ et $x \in M$,

$$(\partial_X(f.g))(x) = \partial_{X_x}(f.g) = \frac{d}{dt}((f.g) o \gamma)_{t=0},$$

on a

$$\begin{aligned} ((f.g) o \gamma)(t) &= (f.g)(\gamma(t)). \\ &= f(\gamma(t)).g(\gamma(t)). \\ &= (f o \gamma)(t).(g o \gamma)(t). \\ &= ((f o \gamma).(g o \gamma))(t). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}(\partial_X(f.g))(x) &= \tfrac{d}{dt}((fo\gamma).(go\gamma))_{t=0}.\\ &= \left(\tfrac{d}{dt}(fo\gamma)_{t=0}\right).(go\gamma)_{t=0} + (fo\gamma)_{t=0}.\left(\tfrac{d}{dt}(go\gamma)_{t=0}\right).\\ &= \partial_{X_x} f.g(x) + f(x).\partial_{X_x} g.\\ &= (\partial_X f)(x).g(x) + f(x).(\partial_X g)(x).\\ &= ((\partial_X f).g)(x) + (f.(\partial_X g))(x).\\ &= ((\partial_X f).g + f.(\partial_X g))(x).\end{aligned}$$

donc

$$\partial_X(f.g) = \partial_X f.g + f.\partial_X g.$$

Alors ∂_X est un opérateur de dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$.

Remarque 2.3.2. 1) *De la démonstration précédente on déduit que pour tout vecteur tangent à M en x, $X_x \in T_xM$, l'application*

$$\begin{aligned}\partial_{X_x} : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \partial_{X_x} f = \tfrac{d}{dt}(fo\gamma)_{t=0},\end{aligned}$$

où $[\gamma] = X_x$, est un opérateur de dérivation en x.

2) *Réciproquement, il est facile de voir que toute dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ définit un champ de vecteur. En effet, soit $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un opérateur de dérivation, soit $x \in M$, il existe alors une carte locale (U, φ) contenant x, considérons, pour tout $i = \overline{1,n}$ les fonctions :*

$$\begin{aligned}f_i : U &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto f_i(x) = x_i\end{aligned},$$

où $\varphi(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les cordonnées locales dans la carte (U, φ).
Notons que f_i sont de classe C^∞ sur U, puisque pour toute carte (V, ψ) de l'atlas de M contenant x

$$\begin{aligned}I_d o f_i o \psi^{-1} : \psi(U\cap V) &\xrightarrow{\psi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}\\ \psi(y) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) &\longmapsto y \longmapsto f_i(y) = y_i,\end{aligned}$$

ainsi Df_i est aussi C^∞, considérons l'application

$$\begin{aligned}X : U \subset M &\longrightarrow TM\\ x &\longmapsto X_x = \sum_{i=1}^{n} Df_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}_{|x} \in T_xM,\end{aligned}$$

où $\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x} = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$, et

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_x : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ [\gamma] = X_x &\longmapsto \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tfrac{d}{dt}(fo\gamma)_{t=0},\end{aligned}$$

X est bien un champ de vecteurs sur U, puisque $Df_i \in C^\infty(U)$ et $(\pi o X)(x) = x$.
Ainsi un champ de vecteurs on peut le voir comme un opérateur de dérivation $X \equiv \partial_X$ tel que

$$\begin{aligned}X : M &\longrightarrow TM\\ x &\longmapsto X_x \in T_xM,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M)\\ f &\longmapsto X(f),\end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned}X(f) : M &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto (Xf)(x) = \tfrac{d}{dt}(fo\gamma)_{t=0}.\end{aligned}$$

□

2.3.3 Opérateur de dérivation associé au repère local

Soit $x \in M$, il existe alors une carte $(U,\varphi) \in A$ et contenant x.
Rappelons que $\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x} = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$ où $\{e_i\}_{i=1}^n$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x : T_xM &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X_x = [\gamma] &\longmapsto \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \tfrac{d}{dt}(\varphi o \gamma)_{t=0}, \end{aligned}$$

cherchons

$$\begin{aligned} \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f\right)(x) = \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}} f. \end{aligned}$$

Soit $f \in C^\infty(M)$, calculons $\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}} f$;

$$\left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f\right)(x) = \frac{d}{dt}(f o \gamma)_{t=0},$$

avec $[\gamma] = \frac{\partial}{\partial x_i}_{|x} = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$ et $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)$, car

$$\tilde{\varphi}_x([\gamma]) = z \quad \text{donc} \quad \gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tz),$$

et on a $\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x} = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i)$ donc $\tilde{\varphi}_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}\right) = e_i$, par conséquence

$$\begin{aligned} \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f\right)(x) &= \tfrac{d}{dt}\left(\left(f o \varphi^{-1}\right)(\varphi(x) + te_i)\right)_{t=0}. \\ &= \left(D_{\varphi(x)}\left(f o \varphi^{-1}\right)\right)\left(\tfrac{d}{dt}(\varphi(x) + te_i)\right)_{t=0}. \\ &= \left(D_{\varphi(x)}\left(f o \varphi^{-1}\right)\right)(e_i). \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(f o \varphi^{-1}\right)\right)_{\varphi(x)} .\delta_i^j. \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(f o \varphi^{-1}\right)\right)_{(\varphi(x))\ \delta_{ij}}. \\ &= \left(\tfrac{\partial\left(f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i} o \varphi\right)(x). \end{aligned}$$

alors

$$\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(f) = \left(\frac{\partial\left(f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right) o \varphi. \tag{2.1}$$

Proposition 2.3.2. 1) *Soit X, Y dans $\chi(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, donc : $\partial_{X+Y} f = \partial_X f + \partial_Y f$.*
2) *Soit X dans $\chi(M)$ et $f \in C^\infty(M)$ alors pour toute $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\partial_{\lambda X} f = \lambda \partial_X f$.*
3) *Soit $X \in \chi(M)$,et $f, g \in C^\infty(M)$ on a alors $\partial_{gX} f = g \partial_X f$.*
4) *Soit $X, Y \in \chi(M)$, $\partial_X = \partial_Y$ alors $X = Y$.*
5) *soit $f \in C^\infty(M)$ alors, f est constante si et seulement si $\partial_X f = 0$ pour tout $X \in \chi(M)$*

Démonstration. 1) Soit $X, Y \in \chi(M)$ et $f \in C^{\infty}(M)$, montrons que pour tout $x \in M$

$$(\partial_{X+Y} f)(x) = (\partial_X f + \partial_Y f)(x),$$

on a

$$(\partial_{X+Y} f)(x) = \partial_{(X+Y)_x} f = \frac{d}{dt}(fo\eta)_{t=0},$$

où $[\eta] = (X+Y)_x$, posons $[\gamma] = X_x$ et $[\delta] = Y_x$ alors

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \varphi^{-1}(\varphi(x) + tz) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\tilde{\varphi}_x(X_x)).\\
&= \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\tilde{\varphi}_x(X+Y)_x).\\
&= \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\tilde{\varphi}_x(X_x + Y_x)).\\
&= \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\tilde{\varphi}_x(X_x) + \tilde{\varphi}_x(Y_x)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\partial_{X+Y} f)(x) &= \frac{d}{dt}\left(fo\varphi^{-1}\right)(\varphi(x) + t(\tilde{\varphi}_x(X_x) + \tilde{\varphi}_x(Y_x))_{t=0}.\\
&= \left(D_{\varphi(x)}\left(fo\varphi^{-1}\right)\right)(\tilde{\varphi}_x(X_x) + \tilde{\varphi}_x(Y_x)).\\
&= \left(D_{\varphi(x)}\left(fo\varphi^{-1}\right)\right)(\tilde{\varphi}_x(X_x)) + D_{\varphi(x)}\left(fo\varphi^{-1}\right)(\tilde{\varphi}_x(Y_x)).\\
&= \left(D_{\varphi(x)}\left(fo\varphi^{-1}\right)\right)\left(\frac{d}{dt}(\varphi o\gamma)_{t=0}\right) + \left(D_{\varphi(x)}\left(fo\varphi^{-1}\right)\right)\left(\frac{d}{dt}(\varphi o\delta)_{t=0}\right)\\
&= \frac{d}{dt}(fo\gamma)_{t=0} + \frac{d}{dt}(fo\delta)_{t=0}.\\
&= \partial_{X_x} f + \partial_{Y_x} f.\\
&= (\partial_X f)(x) + (\partial_Y f)(x).\\
&= (\partial_X f + \partial_Y f)(x).
\end{aligned}$$

Alors ;

$$\partial_{X+Y} f = \partial_X f + \partial_Y f.$$

La deuxième et troisième sont intuitives.

4) Soit $X, Y \in \chi(M)$ tel que $\partial_X = \partial_Y$, montrons que $X = Y$.

On a $X, Y \in \chi(M)$ donc

$$X = X^i \frac{\delta}{\delta x_i} \text{ et } Y = Y^i \frac{\delta}{\delta x_i},$$

c'est à dire $X_x = X_x^i \frac{\delta}{\delta x_i}_{|x}$, $Y_x = Y_x^i \frac{\delta}{\delta x_i}_{|x}$, tel-que $x \in (U, \varphi) \in A$.

On a $\partial_X = \partial_Y$ i.e

$$\forall f \in C^{\infty}(M) : \partial_X f = \partial_Y f,$$

donc

$$\partial_{\sum_{i=1}^{n} X_x^i \frac{\delta}{\delta x_i}_{|x}} f = \partial_{\sum_{i=1}^{n} Y_x^i \frac{\delta}{\delta x_i}_{|x}} f,$$

d'après les propriétés de l'opérateur de dérivation on trouve :

$$\sum_{i=1}^{n} X_x^i \partial_{\frac{\delta}{\delta x_i}_{|x}} f = \sum_{i=1}^{n} Y_x^i \partial_{\frac{\delta}{\delta x_i}_{|x}} f,$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_x^i - Y_x^i\right)\partial_{\frac{\delta}{\delta x_i}|x} f = 0,$$

en utilisant (2.1), on trouve

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_x^i - Y_x^i\right)\partial_{\frac{\delta}{\delta x_i}}\left(f o \varphi^{-1}\right)_{|\varphi(x)} = 0.$$

En particulier, pour les fonctions de cordonnées $f_j; j = \overline{1,n}$ (C^∞ – différentiable)

$$\begin{aligned} f_j : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_j(x), \end{aligned}$$

on déduit

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_x^i - Y_x^i\right)\partial_{\frac{\delta}{\delta x_i}}\left(f_j o \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} = 0,$$

et on a

$$\begin{aligned} f_j o \varphi^{-1} : \varphi(U) &\xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f_j} \mathbb{R} \\ \varphi(x) &\longmapsto x \longmapsto x_j, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_x^i - Y_x^i\right)\frac{\delta x_j}{\delta x_i}_{\varphi(x)} = 0,$$

cela conduit à

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_x^i - Y_x^i\right)\delta_i^j = 0,$$

donc

$$X_x^j = Y_x^j; \forall j = \overline{1,n}$$

On a alors

$$X_x = Y_x.$$

5) Soit $f \in C^\infty(M)$, tel-que $f =$ constante

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lambda. \end{aligned}$$

Soit $x \in (U,\varphi) \in A$, on a $X_x = X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}$.
Calculons $\partial_{X_x} f$

$$\begin{aligned} \partial_{X_x} f &= \partial_{X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}} f. \\ &= X_x^i \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}} f. \\ &= X_x^i \frac{\delta}{\delta x_i}\left(f o \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)}. \\ &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement
On pose $\partial_{X_x} f = 0$ et montrons que $f \equiv$ constantE.

Soit $X \in \chi(M)$, tel-que $\partial_X f = 0$, en particulier $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a alors

$$\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}_{|x}} f = 0,$$

donc

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left(f o\varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} f o\varphi^{-1} : \varphi(U) &\xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ \varphi(x) &\longmapsto x \longmapsto \left(f o\varphi^{-1}\right)(\varphi(x)) = f(x), \end{aligned}$$

alors puisque $\frac{\delta}{\delta x_i}\left(f o\varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)} = 0$, f est constante. □

2.4 Connexions

Il s'est avéré qu'il est plus facile de définir une connexion d'abord comme une façon de différentialiser les sections de fibré vectoriel. La définition est faite pour capturer les propriétés essentielles des opérateurs de dérivation directionnelle Euclidienne et tangentielle ($\bar{\nabla}$ and ∇^+) qu'on a définit ci dessous.(On vérifiera plus tard que ces opérateurs sont des connexions). Après avoir définit les connexions dans ce cadre général, On adoptera la définition dans le cas d'un champs de vecteurs tout au long d'une courbe.
Soit $\pi : E \longrightarrow M$ un champ de vecteurs sur une variété lisse M, et on note $\Gamma(E)$ l'espace des sections lisses de E.
Une connexion dans E est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\nabla_X Y$ est linéaire sur $C^\infty(M)$ dans X : pour tout $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ et $X_1, X_2 \in \chi(M)$,

$$\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y,$$

(ii) $\nabla_X Y$ est linéaire sur $\mathbb{R}$ dans Y : pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$,

$$\nabla_X(a_1 Y_1 + a_2 Y_2) = a_1 \nabla_X Y_1 + a_2 \nabla_X Y_2,$$

(iii) ∇ satisfait la loi de produit suivante : pour tout $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y,$$

Le symbole ∇ est lu 'del' ou 'nabla' et $\nabla_X Y$ est dit **la dérivée covariante de Y dans la direction de X**. Il existe plusieurs types de connexions qui sont utiles dans différentes circonstances. Le type de connexion qu'on vient de définir ici est souvent appelée **une connexion de Koszul** afin de la distinguer des autres types. Puisque nous n'avons aucun besoin de définir les autres types de connexion dans cet ouvrage, on fera référence à la connexion de Koszul simplement par une connexion.
Bien qu'une connexion est définit par son action sur les sections globales, qui découle de la définition qu'elle est enfaite un opérateur locale.

2.5 Crochet de Lie ou produit de Lie de deux champs de vecteurs

Définition 2.5.1. *Soit X, $Y \in \chi(M)$, on note*

$$[X,Y] = XY - YX.$$

appelé ***commutateur*** *ou* ***crochet de Lie*** *des deux champs de vecteurs.*

Proposition 2.5.1. *Soit X, $Y \in \chi(M)$, l'application définie par*

$$\begin{aligned} \partial_{[X,Y]} : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \partial_{[X,Y]}(f) = (\partial_X o \partial_Y - \partial_Y o \partial_X)(f), \end{aligned}$$

$\partial_{[X,Y]}$ est une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ car
1) $\partial_{[X,Y]}$ est bien $\mathbb{R}$–linéaire.
2) $\partial_{[X,Y]}$ vérifie la relation de Leibniz.

Démonstration. pour tout $f, g \in C^\infty(M)$ on a :

$$\begin{aligned} \partial_{[X,Y]}(f.g) &= (\partial_X o \partial_Y - \partial_Y o \partial_X)(f.g). \\ &= \partial_X(\partial_Y(f.g)) - \partial_Y(\partial_X(f.g)). \\ &= \partial_X((\partial_Y f).g + f.(\partial_Y g)) - \partial_Y((\partial_X f).g + f.(\partial_X g)). \\ &= \partial_X((\partial_Y f).g) + \partial_X(f.(\partial_Y g)) - \partial_Y((\partial_X f).g) - \partial_Y(f.(\partial_X g)). \\ &= (\partial_X \partial_Y f) g + \partial_Y f \partial_X g + \partial_X f \partial_Y g + f \partial_X \partial_Y g - (\partial_Y \partial_X f).g \\ &\qquad - \partial_X f \partial_Y g - \partial_Y f \partial_X g - f \partial_Y \partial_X g. \\ &= (\partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f).g + f(\partial_X \partial_Y g - \partial_Y \partial_X g). \\ &= \left(\partial_{[X,Y]} f\right).g + f\left(\partial_{[X,Y]} g\right). \end{aligned}$$

Donc $\partial_{[X,Y]}$ étant un opérateur de dérivation, on peut donc le voir comme un champ de vecteurs du M,

$$\partial_{[X,Y]} \equiv [X,Y] \text{ et on note } [X,Y] = XY - YX.$$

On peut donc muni $\chi(x)$ d'une autre loi interne, qu'on montra $[,]$, tel-que

$$\begin{aligned} [,] : \chi(x) \times \chi(x) &\longrightarrow \chi(x) \\ (X,Y) &\longmapsto [X,Y] \equiv \partial_{[X,Y]}, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \partial_{[X,Y]} : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \partial_{[X,Y]} f = (\partial_X o \partial_Y - \partial_Y o \partial_X) f, \end{aligned}$$

et nous appellerons crochet de Lie ou produit de Lie de X et Y, le champ de vecteurs $[X,Y]$.

D'aprés les propriétés précédentes on déduit que le crochet de Lie est une application $\mathbb{R}$–bilinéaire, car pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et X_1, X_2, $Y \in \chi(x)$

$$\begin{aligned} [\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] &= \partial_{[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y]}. \\ &= \partial_{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2} o \partial_Y + \partial_Y o \partial_{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2}. \\ &= \left(\alpha_1 \partial_{X_1} + \alpha_2 \partial_{X_2}\right) o \partial_Y - \partial_Y \left(\alpha_1 \partial_{X_1} + \alpha_2 \partial_{X_2}\right). \\ &= \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]. \end{aligned}$$

Et pour tout Y_1, Y_2 et X dans $\chi(x)$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2],$$

ainsi donc $(\chi(x), +, ., [,])$ est une algèbre réelle.

De plus, un calcul simple montre que le crochet de Lie est antisymétrique c'est à dire,

$$[X,Y] = -[Y,X]$$

et vérifie l'identité de Jacobien c'est à dire pour tout $X,Y,Z \in \chi(x)$ on a

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

L'algèbre $(\chi(x),+,.,[,])$ est alors une algèbre de Lie (c'est à dire une algèbre dont la deuxième loi interne est antisymétrique et vérifie l'identité du Jacobien). □

Proposition 2.5.2. *Soit X,Y dans $\chi(x)$*

1) *Pour tout f,g dans $C^\infty(M)$ on a*

$$[fX,gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

2) $\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0;\qquad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$

Démonstration. 1) Soit X,Y dans $\chi(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\partial_{[fX,gY]} &= \partial_{fX} o \partial_{gY} - \partial_{gY} o \partial_{fX}.\\
&= f\partial_X(g\partial_Y) - g\partial_Y(f\partial X).\\
&= f(\partial_X g\partial_Y + g\partial_X o\partial_Y) - g(f\partial_Y o\partial_X + \partial_Y f\partial_X).\\
&= fg\partial_{[X,Y]} + f\partial_X g\partial_Y - g\partial_Y f\partial_X.\\
&= fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X.
\end{aligned}$$

2) On a $\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \partial_{\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]}$, montrons que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ c'est à dire $\partial_{\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]}(f) = 0$; $\forall f \in C^\infty(M)$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_{\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]}(f) &= \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} o \partial_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)(f) - \left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_j}} o \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)(f).\\
&= \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f\right) - \partial_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f\right).\\
&= \partial_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\left(\frac{\partial\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_j}\right)o\varphi\right) - \partial_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\left(\frac{\partial\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right)o\varphi\right).
\end{aligned}$$

On pose

$$g_j = \left(\left(\frac{\partial\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_j}\right)o\varphi\right) \quad \text{et} \quad g_i = \left(\left(\frac{\partial\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right)o\varphi\right),$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_{\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]}(f) &= \left(\frac{\partial\left(g_j o\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right)o\varphi - \left(\frac{\partial\left(g_i o\varphi^{-1}\right)}{\partial x_j}\right)o\varphi.\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_j}o\varphi o\varphi^{-1}\right)\right)o\varphi - \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}o\varphi o\varphi^{-1}\right)\right)o\varphi.\\
&= \left(\frac{\partial^2\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2\left(fo\varphi^{-1}\right)}{\partial x_j\partial x_i}\right)o\varphi.\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarque 2.5.1. *La condition de Cauchy Schwartz, puisque $fo\varphi^{-1} \in C^{\infty}(M)$, cette condition nous informe que*

$$\frac{\partial^2 (fo\varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 (fo\varphi^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

□

Expression du crochet de Lie en cordonnées locales

Proposition 2.5.3. *Soit $X, Y \in \chi(M)$, alors $[X,Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j$.*

Démonstration. Soit $X, Y \in \chi(M)$, posons $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, alors

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left[X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right]. \\
&= X^i Y^j \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] + X^i \frac{\partial}{\partial x_i} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} - Y^j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial x_i} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} - Y^j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

On remplaçons i par j, on obtient

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - Y^j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \\
&= \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

On a $[X,Y] \in \chi(M)$ c'est à dire $[X,Y] = [X,Y]^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $[X,Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j$. □

Exemple 2.12. *Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les champs de vecteurs définis par*

$$E_1 = f \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$E_2 = f \frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2} \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

où $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ désigne le repère locale, et $f = 1 + m\left(x^2 + y^2\right)$ et $l, m \in \mathbb{R}$, on trouve

$$\begin{aligned}
[E_1, E_3] &= \left[f \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \\
&= \left[f \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right] - \left[\frac{ly}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \\
&= f \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right] + f.0.1 - 1.0.f - \frac{l}{2}\left(y.1 \left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right] + f.0\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et $[E_2, E_3] = 0.$ *, de plus*

$$\begin{aligned}[E_1, E_2] &= \left[f\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ly}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \; f\frac{\partial}{\partial y} + \frac{lx}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right]. \\ &= \left[f\frac{\partial}{\partial x}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] + \frac{l}{2}\left[f\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}\right] - \frac{l}{2}\left[y\frac{\partial}{\partial z}, f\frac{\partial}{\partial y}\right] - \frac{l^2}{4}\left[y\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial z}\right].\end{aligned}$$

Et on a

$$\left[f\tfrac{\partial}{\partial x}, f\tfrac{\partial}{\partial y}\right] = 2mf\left(x\tfrac{\partial}{\partial y} - y\tfrac{\partial}{\partial x}\right).$$

$$\left[f\tfrac{\partial}{\partial x}, x\tfrac{\partial}{\partial z}\right] = f\tfrac{\partial}{\partial z}.$$

$$\left[y\tfrac{\partial}{\partial z}, f\tfrac{\partial}{\partial y}\right] = -f\tfrac{\partial}{\partial z}.$$

$$\left[y\tfrac{\partial}{\partial z}, x\tfrac{\partial}{\partial z}\right] = 0.$$

Donc

$$[E_1, E_2] = 2mf\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) + lf\frac{\partial}{\partial z}.$$

2.5.1 Transformation d'un champ de vecteurs d'une variété à une variété

Proposition 2.5.4. *Soient (M,A) et (N,B) deux variétés différentielles de dimension respectivement m et n et soit $f : M \longrightarrow N$ un C^∞–difféomorphisme. Alors l'application notée f_* définie par :*

$$\begin{aligned} f_* : \chi(M) &\longrightarrow \chi(N) \\ X &\longmapsto f_*(X), \end{aligned} \qquad \textit{tel-que} \qquad \begin{aligned} f_*(X) : N &\longrightarrow TN \\ y &\longmapsto (f_*X)_y = \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)\left(X_{f^{-1}(y)}\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_{f^{-1}(y)}f : T_{f^{-1}(y)}M &\longrightarrow TN \\ X_{f^{-1}(y)} &\longmapsto \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)\left(X_{f^{-1}(y)}\right), \end{aligned}$$

transforme tout champ de vecteurs X sur M, en un champ de vecteurs f_*X sur N, de plus f_* est compatible avec le crochet de Lie, c'est à dire

$$\forall X,Y \in \chi(M),\ f_*[X,Y] = [f_*X,\ f_*Y].$$

Proposition 2.5.5. 1) *f_*X est une section de TN. En effet*

$$(\pi o f_*X)(y) = \pi\left((f_*X)_y\right) = y,$$

car

$$\begin{aligned} \pi : TN &\longrightarrow N \\ S \in T_yN &\longmapsto \pi(S) = y. \end{aligned}$$

2) *f_*X est un C^∞–difféomorphisme, car pour tout champs de vecteurs X, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ le repère locale de M, et $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j=\overline{1,n}}$ le repère locale de N, avec (U,φ) étant une carte de A et (V,ψ) une carte de B tel que*

$$\frac{\partial}{\partial x_{i\,x}} = \tilde{\varphi}_x^{-1}(e_i) \qquad \textit{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y_{i\,y}} = \tilde{\psi}_y^{-1}\left(u_j\right),$$

où $\{e_i\}_{i=\overline{1,m}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, et $\left\{u_j\right\}_{j=\overline{1,n}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on a

$$
\begin{aligned}
(f_*X)_y &= \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)\left(X_{f^{-1}(y)}\right).\\
&= \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)\left(X^i_{f^{-1}(y)}\frac{\partial}{\partial x_i}_{f^{-1}(y)}\right).\\
&= X^i_{f^{-1}(y)}\left(d_{f^{-1}(y)}f\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}_{f^{-1}(y)}\right), \qquad\qquad car\ X^i_{f^{-1}(y)} \in \mathbb{R}.\\
&= X^i_{f^{-1}(y)}\left(\tilde{\psi}^{-1}_{f(f^{-1}(y))} o D_{\varphi(f^{-1}(y))}\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right) o \tilde{\varphi}_{f^{-1}(y)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}_{f^{-1}(y)}\right).\\
&= X^i_{f^{-1}(y)}\left(\tilde{\psi}^{-1}_y (D_{\varphi(f^{-1}(y))}\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right))(e_i)\right).\\
&= X^i_{f^{-1}(y)}\left(\tilde{\psi}^{-1}_y\left(\left(\frac{\partial\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right)^j_{\varphi(f^{-1}(y))} U_j\right)\right).\\
&= X^i_{f^{-1}(y)}\left(\frac{\partial\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right)_{(\varphi o f^{-1})(y)} .\tilde{\psi}^{-1}_y\left(U_j\right).\\
&= \left(X^i o f^{-1}\right)(y).\left(\frac{\partial\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\right)\left(\varphi o f^{-1}\right)(y)\,\frac{\partial}{\partial y_j}_y.\\
(f_*X)_y &= \left(\left(\left(X^i o f^{-1}\right).\frac{\partial\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i} o\left(\varphi o f^{-1}\right)\right)\frac{\partial}{\partial y_j}\right)(y).
\end{aligned}
$$

alors

$$(f_*X)^j_y = \left(\left(X^i o f^{-1}\right).\frac{\partial\left(\psi o f o \varphi^{-1}\right)}{\partial x_i} o\left(\varphi o f^{-1}\right)\right)(y).$$

Et on a $X^i o f^{-1} : N \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* C^∞*−différentiable et* $\psi o f o \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$ *est* C^∞*−différentiable,* $\varphi o f^{-1} : N \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tel-que* $Id_{\mathbb{R}^m} o\left(\varphi o f^{-1}\right) o \psi^{-1}$ *est* C^∞*−différentiable.*
Alors, f_*X *est bien* C^∞*−différentiable puisque* $(f_*X)^j$ *sont* C^∞*−différentiable pour tout* $j = \overline{1,n}$.

3) *maintenant, on montre que* $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$ *pour tout* X, Y *dans* $\chi(M)$.

Soit $X \in \chi(M)$*, donc* $f_*X \in \chi(M)$*, on peut donc le voir comme une dérivation c'est à dire*

$$
\begin{aligned}
f_*X \equiv \partial_{f_*X} : C^\infty(N) &\longrightarrow C^\infty(N)\\
h &\longmapsto \partial_{f_*X}h,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\partial_{f_*X}h : N &\longrightarrow \mathbb{R}\\
y &\longmapsto \left(\partial_{f_*X}h\right)(y),
\end{aligned}
$$

tel-que

$$\left(\partial_{f_*X}h\right)(y) = \partial_{(f_*X)_y}h = \frac{d}{dt}(h\ o\ courbe)_{t=0}.$$

On a $(f_*X)_y = \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)\left(X_{f^{-1}(y)}\right)$.

Posons $X_{f^{-1}(y)} = [\gamma]$ *tel que* $\gamma \in C\left(M, f^{-1}(y)\right)$, *donc* $(f_*X)_y = \left(d_{f^{-1}(y)}f\right)([\gamma]) = [f o \gamma]$, *alors*

$$\begin{aligned}\left(\partial_{f_*X}h\right)(y) &= \tfrac{d}{dt}(h\ o\ (f o \gamma))_{t=0}.\\ &= \tfrac{d}{dt}((h\ o\ f) o \gamma)_{t=0}\ \text{avec}\ [\gamma] = X_{f^{-1}(y)}.\\ &= \partial_{X_{f^{-1}(y)}}(h\ o\ f).\\ &= (\partial_X(h\ o\ f))\left(f^{-1}(y)\right),\end{aligned}$$

on trouve

$$\left(\partial_{f_*X}h\right) = (\partial_X(h\ o\ f)) o f^{-1}.$$

Soit $h \in C^\infty(N)$, *alors*

$$\begin{aligned}\partial_{[f_*X,\ f_*Y]}h &= \left(\partial_{f_*X} o \partial_{f_*Y}\right)(h) - \left(\partial_{f_*Y} o \partial_{f_*X}\right)(h).\\ &= \partial_{f_*X}\left(\partial_Y(hof) o f^{-1}\right) - \partial_{f_*Y}\left(\partial_X(hof) o f^{-1}\right).\end{aligned}$$

On pose $\partial_Y(hof) o f^{-1} = g$ *et* $\partial_X(hof) o f^{-1} = Q$, *on obtient alors*

$$\begin{aligned}\partial_{[f_*X,\ f_*Y]}h &= \partial_{f_*X}g - \partial_{f_*Y}Q.\\ &= (\partial_X(gof)) o f^{-1} - (\partial_Y(Qof)) o f^{-1}.\\ &= (\partial_X(gof) - \partial_Y(Qof)) o f^{-1}.\\ &= \left(\partial_X\left(\partial_Y(hof) o f^{-1} o f\right) - \partial_Y\left(\partial_X(hof) o f^{-1} o f\right)\right) o f^{-1}.\\ &= ((\partial_X\partial_Y)(hof) - (\partial_Y\partial_X)(hof)) o f^{-1}.\\ &= \left(\partial_{[X,Y]}(hof)\right) o f^{-1} = \partial_{f_*[X,Y]}(h),\end{aligned}$$

Alors $\partial_{[f_*X, f_*Y]} = \partial_{f_*[X,Y]}$.

Proposition 2.5.6. *Soit* M, N, L *trois variétés différentiables et soit* $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow L$ *deux application* C^∞*–difféomorphisme, alors*

1) $(gof)_* = g_* o f_*$.

2) f_* *est bijective et on a* :$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Démonstration. On a $g \circ f : M \longrightarrow L$ une application C^∞-difféomorphisme, et

$$\begin{aligned}(g \circ f)_* : \chi(M) &\to \chi(L)\\ X &\longmapsto (g \circ f)_* X,\end{aligned}$$

avec $(g \circ f)_* X \equiv \partial_{(g \circ f)_* X}$.

Soit $h \in C^\infty(L)$

$$\begin{aligned}\partial_{(g \circ f)_* X}h &= [\partial_X(h \circ (g \circ f))] \circ (g \circ f)^{-1}.\\ &= \left([\partial_X((h \circ g) \circ f)] \circ f^{-1} \circ\right) g^{-1}.\\ &= \left(\partial_{f_*X}(h \circ g)\right) \circ g^{-1}.\\ &= \partial_{g_*(f_*X)}h.\\ &= \partial_{(g_* \circ f_*)X}h,\end{aligned}$$

alors $(g \circ f)_* X = (g_* \circ f_*) X$, c'est a dire $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

2) On applique la proposition précédente pour $g = f^{-1}$.

On a $\left(f \circ f^{-1}\right)_* = f_* \circ \left(f^{-1}\right)_*$ et tel-que $f \circ f^{-1} : N \to N$,

$\left(f^{-1}\circ f\right)_* = \left(f^{-1}\right)_* \circ f_*$ tel-que $f^{-1}\circ f : M \to M$.

Puisque $f\circ f^{-1} = Id_N$ et $f^{-1}\circ f = Id_M$.
On déduit que $f_*\circ (f^{-1})_* = (Id_N)_*$ et $(f^{-1})_*\circ f_* = (Id_M)_*$ tel que $f_*\circ (f^{-1})_* : \chi(N) \to \chi(M)$ et $(f^{-1})_*\circ f_* : \chi(M) \to \chi(N)$, et

$$\begin{aligned}(Id_N)_* : \chi(M) &\to \chi(N)\\ Y &\longmapsto (Id_N)_* Y \equiv \partial_{(Id_N)_* Y},\end{aligned}$$

alors pour tout h on trouve $\partial_{(Id_N)_* Y} h = (\partial_Y (h\circ Id_N))\circ Id_N = \partial_Y h$.
Donc $\partial_{(Id_N)_* Y} = \partial_Y$ c'est à dire $(Id_N)_* Y = Y$, alors $(Id_N)_* = Id_{\chi(N)}$.

De même $(Id_M)_* = Id_{\chi(M)}$, Donc f_* est bijective et on a

$$f_*^{-1} = \left(f^{-1}\right)_*.$$

□

2.6 Espace cotangent et fibré cotangent

Définition 2.6.1. *On définit maintenant le dual de l'espace tangent à une variété.*

Soit (M, A) une variété C^∞−différentiable de dimension n muni d'un atlas A.
Une premiére forme (ou covecteur) en $x \in M$ est une forme linéaire sur T_xM c'est à dire une application linéaire

$$\begin{aligned}\omega_x : T_xM &\to \mathbb{R}\\ X_x &\mapsto \omega_x(X_x),\end{aligned}$$

l'espace cotangent à M en x, noté T_x^*M est l'espace vectoriel des 1-formes en x c'est l l'espace vectoriel dual de T_xM c'est à dire :

$$T_x^*M = (T_xM)^*,$$

et on a

$$\dim T_x^*M = \dim T_xM = n,$$

cherchons alors une base de l éspace cotangent T_x^*M.

Soit (u, φ) une carte de l'atlas A de M contenant x et considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_x : T_xM &\to \mathbb{R}^n\\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma)_{|t=0}.\end{aligned}$$

On peut donc considérer l'application transposée de $\tilde{\varphi}_x$ qu'on notera : $\tilde{\varphi}_x^*$, définie par

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_x^* : (\mathbb{R}^n)^* &\to T_x^*M\\ \theta &\mapsto \tilde{\varphi}_x^*(\theta) = \theta\circ\tilde{\varphi}_x.\end{aligned}$$

Notons que $\tilde{\varphi}_x^*$ est aussi un isomorphisme.
Désignons par $\left\{e_i^*\right\}_{i=1}^n$ la base duale de la base canonique $\{e_i\}_{i=1}^n$, Ainsi $\left\{\tilde{\varphi}_x^*\left(e_i^*\right)\right\}_{i=1}^n$ forme une base de T_x^*M.

Posons pour tout $i = \overline{1, n}$:

$$dx^i_{|x} = \tilde{\varphi}_x^*((e_i)^*),$$

on a alors $\left\{dx^i_{|x}\right\}_{i=1}^n$ est la base duale de la base $\left\{\frac{\partial}{\partial xi}_{|x}\right\}$ de T_xM, car

$$\begin{aligned}\left(dx^i_{|x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial xj}_{|x}\right) &= \tilde{\varphi}^*_x\left((e_i)^*\right)\left(\frac{\partial}{\partial xj}_{|x}\right).\\ &= \left((e_i)^* \circ \tilde{\varphi}_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial xj}_{|x}\right).\\ &= (e_i)^*\left(\tilde{\varphi}_x\left(\frac{\partial}{\partial xj}_{|x}\right)\right).\\ &= (e_i)^*\left(e_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi ; dans cette base toute 1-forme de T^*_xM s'écrit

$$\omega_x = \omega_{i_x} dx^i_{|x},$$

où

$$\omega_{i_x} = \omega_x\left(\frac{\partial}{\partial xi}_{|x}\right),$$

Notons que tout vecteurs de T_xM s'écrit

$$X_n = X^i_x \frac{\partial}{\partial xi}_{|x},$$

où

$$X^i_x = dx^i_{|x}\left(X_n\right).$$

Définition 2.6.2. *Le fibré cotangent d'une variété différentielle M noté T^*M est l'ensemble*

$$T^*M = \bigcup_{x\in M} T^*_xM.$$

Définition 2.6.3. *Considérons la surjection*

$$\begin{aligned}\bar{\pi} : T^*M &\to M\\ \omega \in T^*_xM &\mapsto \bar{\pi}(\omega) = x.\end{aligned}$$

Le fibré cotangent T^*M est muni d'une topologie naturelle c'est à dire on munit T^*M de la topologie qui rend $\bar{\pi}$ continue, on a alors :

Proposition 2.6.1. *Soit (U, φ) une carte de l'atlas de M, considérons l'application*

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : \bar{\pi}^{-1}(U) &\to \varphi(U) \times (\mathbb{R}^n)^*\\ \omega &\mapsto \bar{\varphi}(\omega) = \left(\varphi(\bar{\pi}(\omega)), (\tilde{\varphi}^*)^{-1}_{\bar{\pi}(\omega)}(\omega)\right).\end{aligned}$$

Alors $\left(\bar{\pi}^{-1}(u), \bar{\varphi}\right)$ est une carte de T^*M de plus ces cartes définissent une structure de variétés C^∞–différentiable et de dimension $2n$ sur T^*M.

2.6.1 Champs de 1-formes sur une variété différentiable

Soit (M,A) une variété différentiable de dimension n et T^*M l'éspace fibré cotangent de M.

Définition 2.6.4. *On appelle champ de 1-formes différentielles sur M toute section de classe C^∞ de l'espace fibré cotangent de M*

$$\omega : M \to T^*M$$
$$x \mapsto \omega(x) = \omega_x \in T_x^*M$$

C^∞–différentiable et $\bar{\pi} \circ \omega = id$.

On note $\Omega^1(M)$ ou encore $\chi^*(M)$; l'ensemble des champs de 1-formes différentielles sur M.
Soit maintenant $\omega \in \Omega^1(M)$ et $x \in M$ il existe alors une carte locale (U,φ) de l'atlas de M contenant x, ainsi $\omega_x = \omega_{i_x} dx^i_{|x}$ où $\left\{dx^i_{|x}\right\}$ désigne la base dual de la base$\left\{\frac{\partial}{\partial xi}_{|x}\right\}_{i=1}^n$ dans la carte (U,φ).

Considérons alors les n fonctions définies par :

$$\omega_i : U \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \omega_i(x) = \omega_{ix}, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Ainsi donc, tout champ de 1-forme ω sur l'ouvert U s'écrit sous la forme : $\omega = \omega_i dx^i$.
Ainsi, ω est C^∞–différentiable par rapport à une carte (U,φ) car les composantes ω_i, $i = 1,\dots,n$ sont de classe C^∞ sur l'ouvert U.

Exemple 2.13. *Considérant pour tout $i = 1,\dots,n$ et par rapport a la carte (U,φ) de l'atlas A de M :*

$$dx^i : U \subset M \to T^*M$$
$$x \to dx^i(x) = dx^i_{|x} = \tilde{\varphi}_x^*((e_i)^*),$$

où $\{(e_i)^*\}_{i=1}^n$ désigne la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors dx^i est bien une 1-forme sur U. On appelle $\left\{dx^1, dx^2,\dots,dx^n\right\}$ le corepère local par rapport à la carte $(U,\ \varphi)$.

2.6.2 Structure algébrique sur $\Omega^1(M)$

Proposition 2.6.2. 1) ***structure d'espace vectoriel :***
$\Omega^1(M,+,\cdot)$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour la loi interne :*

$$+ : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$
$$(\omega,\eta) \longmapsto \omega + \eta,$$

où

$$\omega + \eta : M \longrightarrow T^*M$$
$$x \longmapsto (\omega + \eta)(x) = \omega_x + \eta_x,$$

et la loi externe :

$$\cdot \ \ \mathbb{R} \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$$
$$(\lambda,\omega) \ \longmapsto \lambda \cdot \omega,$$

où

$$\lambda \cdot \omega : M \longrightarrow T^*M$$
$$x \longmapsto (\lambda\omega)(x) = \lambda\omega_x.$$

Remarque 2.6.1. *On a $\bar{\pi} \circ (\omega, \eta) = \bar{\pi} \circ (\lambda\omega) = id$ et $\omega + \eta$ et $\lambda\omega$ sont C^∞–différentiable.*

2) ***Structure de*** $C^\infty(M)$***_module*** :
A présent on munit $\Omega^1(M)$ des deux lois suivante :

$$\begin{aligned} + : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega + \eta, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \omega + \eta : M &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto (\omega + \eta)(x) = \omega_x + \eta_x, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \cdot \ : \ C^\infty(M) \times \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ (f, \omega) &\longmapsto f \cdot \omega, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f \cdot \omega : M &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto (f \cdot \omega)(x) = f_{(x)} \cdot \omega_x, \end{aligned}$$

alors $\left(\Omega^1(M), +, \cdot\right)$ est un $C^\infty(M)$-module.

Remarque 2.6.2. *Un champ de 1-formes peut être vu comme une application $C^\infty(M)$ linéaire sur $\chi(M)$.*

Soit $\omega \in \Omega^1(M)$, considérons l'application notée ω et définie par :

$$\begin{aligned} \omega : \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \omega(X), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \omega(X) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\omega(X))(x) = \omega_x X. \end{aligned}$$

Il est claire que ω et $C^\infty(M)$-linéaire, c'est à dire

$$\omega(X + Y) = \omega(X) + \omega(Y); \ \ \forall X, Y \in \chi(M)$$

et

$$\omega(fX) = f\omega(X); \ \forall X \in \chi(M); \ \ \forall f \in C^\infty(M)$$

2.7 Application Pull Back (ou image réciproque)

Définition 2.7.1. *Soit M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement et soit $f : M \to N$ une application C^∞–différentiable.*

On appelle application pull-back associée à f, ou l'image réciproque de f notée f^*, l'application :

$$\begin{aligned} f^* : \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ \omega &\longmapsto f^*(\omega), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f^*(\omega) : M &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto (f^*\omega)_x = \omega_{f(x)} \circ d_x f, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_{f(x)} \circ d_x f : T_x M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X_x &\longmapsto \left(\omega_{f(x)} \circ d_x f\right)(X_x) = \omega_{f(x)}(d_x f(X_x)), \end{aligned}$$

f^* transforme un champ de 1-formes sur N en champ de 1-formes sur M, il est clair que f^* est $\mathbb{R}$-linéaire.

Proposition 2.7.1. *Soit M, N, G trois variétés différentiables et soient $f : M \to N$ et $g : N \to G$ deux applications C^∞–différentiable on a alors*

1) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

2) si $f : M \to N$ et un C^∞–difféomorphisme, alors f^* est bijective et on a : $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$.

Démonstration. 1) On a $g \circ f : M \to G$ alors

$$\begin{aligned}(g \circ f)^* : \Omega^1(G) &\longrightarrow \Omega^1(M)\\ \omega &\longmapsto (g \circ f)^*(\omega)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(\omega) : M &\longrightarrow T^*M\\ x &\longmapsto ((g \circ f)^* \omega)_x,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}((g \circ f)^* \omega)_x &= \omega_{(g\circ f)(x)} \circ d_x(g \circ f).\\ &= \omega_{g(f(x))} \circ (d_{f(x)}g \circ d_x f).\\ &= \omega_{g(f(x))} \circ \left(d_{f(x)}g \circ d_x f\right).\\ &= \left(\omega_{g(f(x))} o d_{f(x)}g\right) \circ d_x f.\\ &= (g^*\omega)_{f(x)} \circ d_x f.\\ &= (f^*(g^*\omega))_x.\\ &= ((f^* \circ g^*)(\omega))_x,\end{aligned}$$

alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

2) On a

$$\begin{aligned}\left(f^{-1} \circ f\right)^* &= id_M^* &&\text{et} && (f \circ f^{-1})^* = id_N^*.\\ f^* \circ \left(f^{-1}\right)^* &= id_M^* &&\text{et} && (f^{-1})^* \circ f^* = id_N^*.\end{aligned}$$

tel-que

$$\begin{aligned}id_M^* : \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^1(M)\\ \omega &\longmapsto id_M^*(\omega).\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}id_M^*(\omega) : M &\longrightarrow T^*M\\ x &\longmapsto \left(id_M^*\omega\right)_x,\end{aligned}$$

alors $\left(id_M^*\omega\right)_x = \omega_x \circ d_x id_M = \omega_n$.

De plus

$$\begin{aligned}id_{\Omega^1(M)} : \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^1(M)\\ \omega &\longmapsto id_{\Omega^1(M)}(\omega),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}id_{\Omega^1(M)}(\omega) : M &\longrightarrow T^*M\\ x &\longmapsto \omega_x,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}d_x id_M : T_xM &\longrightarrow T_xM\\ [\gamma] &\longmapsto (d_x id_M)([\gamma]),\end{aligned}$$

tel-que $(d_x id_M)([\gamma]\ ) = [id \circ \gamma] = [\gamma]$ c'est à dire f^* est bijective, alors $(f^*)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^*$. □

Remarque 2.7.1. *Nous pourrons définir l'application Pull-Back pour les fonctions $C^{\infty}-$différentiables comme*

Si $f : M \to N$ est une application $C^{\infty}-$différentiable, on définie l'application notée f^*, par la formule :

$$\begin{aligned} f^* : C^{\infty}(N) &\longrightarrow C^{\infty}(M) \\ h &\longmapsto f^*(h) = h \circ f. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\omega \in \Omega^1(N)$ et pour tout $h \in C^{\infty}(N)$ on a

$$f^*(h\omega) = f^*(h) f^*\omega = (h \circ f) f^*\omega.$$

Soit $x \in M$

$$\begin{aligned} (f^*(h\omega))_x = (h\omega)_{f(x)} \circ d_x f &= \Big(h(f(x))\, \omega_{f(x)}\Big) \circ d_x f. \\ &= h(f(x))\Big(\omega_{f(x)} \circ d_x f\Big). \\ &= (h \circ f)_x (f^*\omega)_x. \\ &= ((h \circ f)(f^*\omega))_x. \\ &= (f^*(h) f^*\omega)_x, \end{aligned}$$

donc : $\quad f^*(h\omega) = f^*(h) f^*\omega = (h \circ f) f^*\omega.$

CHAPITRE 3

TENSEURS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

3.1 Rappel sur les tenseurs

Définition 3.1.1. *Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension $\boldsymbol{n}$, un tenseur d'ordre $\boldsymbol{p}$ est une application $\boldsymbol{p}-linaire$ de $\mathbb{V}^p$ dans $\mathbb{R}$.*
Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre p. La $\boldsymbol{p}$ linéarité du tenseur $\boldsymbol{T}$ signifie que son application à $\boldsymbol{p}$ vecteur est linéaire par rapport à chacun de ses arguments.

$$T(.....,x_k+x_{k'},....)=T(.....,x_k,.....)+T(......,x_{k'},....),\qquad \forall k\in[1,...p]\,.$$
$$T(.....,\lambda x_k,....)=\lambda T(.....,x_k,.....),\qquad \forall k\in[1,...p]\,,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

3.1.1 Composantes d'un tenseur

Soit **T** un tenseur d'ordre **p** et soient **p**-vecteurs $\{V_1,V_2,....,V_p\}$ donnés par leurs composantes contravariantes sur une base $\{e_i\}$

$$V_1=(V_1)^{i_1}e_{i_1}\ \ ;......;\ \ V_p=(V_p)^{i_p}e_{i_p}.$$

L'application **T** à ces **p**-vecteurs conduit au nombre réel :

$$T(V_1,V_2,....,V_p)=T((V_1)^{i_1}e_{i_1},......,(V_p)^{i_p}e_{i_p})=T(e_{i_1},......,e_{i_p})(V_1)^{i_1}.......(V_p)^{i_p}.$$

3.1.2 Composantes covariantes d'un tenseur

On appelle composantes covariantes du tenseur **T** d'ordre **p** les $\mathbf{n}^p$ nombres notés $T_{i_1......i_p}$ obtenue par l'application de **T** à **p** vecteurs de bases :

$$T_{i_1......i_p}=T(e_{i_1},......,e_{i_p}).$$

3.1.3 Tenseurs euclidiens particuliers

Tenseur métrique

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 .
Un tenseur métrique noté G est le tenseur du second ordre défini par :

$$\{x,y\}\in\mathbb{V}^2\longrightarrow G(x,y)=x.y\in\mathbb{R}$$

Tenseur d'orientation

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 .
On appelle tenseur d'orientation le tenseur d'ordre 3, noté H défini par :

$$\{x,y,z\} \in \mathbb{V}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V} \longrightarrow H(x,y,z) = [x,y,z] \in \mathbb{R}$$

Théorème 3.1.1. *L'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel .*

Démonstration. Muni des deux opérations, l'ensemble des tenseurs d'ordre p satisfait les axiomes de définition d'un espace vectoriel avec l'élément neutre de l'addition, le tenseur nul d'ordre p noté 0 défini par :

$$0(x_1,....,x_p) = 0 \quad , \forall \left\{x_1,....,x_p\right\}.$$

L'élément neutre de la multiplication est le scalaire 1 . □

Dans le but de définir une base de l'espace vectoriels des tenseurs d'ordre p, on définit une nouvelle opération entre vecteurs

3.1.4 Produit tensoriel de deux vecteur

Définition 3.1.2. *On appelle produit tensoriel de deux vecteur V et W, le tenseur du second ordre noté $V\otimes W$ défini par :*

$$(x,y) \in \mathbb{V}^2 \longrightarrow (V\otimes W)(x,y) = (V.x)(W.y) \in \mathbb{R}.$$

En exprimant les vecteurs x et y sur la base $\{e_i\}$.

Définition 3.1.3. ***Produit tensoriel de deux formes :***
Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions respective p et q .
Notons E^* et F^* leurs espaces vectoriels dual .
Pour $f \in E^*$ et $g \in F^*$ on définit l'application suivante

$$\begin{aligned} f\otimes g : & E\times F \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto (f\otimes g)(x,y) = f(x).g(y) \end{aligned}$$

Si $\{e^1,....,e^p\}$ une base de E^* et $\{f^1,....,f^q\}$ une base de F^* , alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E\times F$ admet une base pour les p.q éléments : $\{e^i\otimes f^j\}$.
En effet, il suffit de montrer que la famille

$$\{e^i\otimes f^j\}_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \quad \textit{est libre}$$

Démonstration. Puisque la dimension de l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E\times F$ est **p.q** (i.e $\dim_{L_2}(E\times F,\mathbb{R}) = \dim E.\dim F$), et $card\{e^i\otimes f^j\}_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} = p.q$.
Soit alors $\alpha_{ij}; i = 1,...p, j = 1,...q$ des réels, vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij}e^i\otimes f^j = 0.$$

Considérons $\{e_1,....,e_p\}$ une base de E, telle que $e^i(e_k) = \delta^i_k$(i.e $\{e^i\}_{i=1}^p$ est la base duale de $\{e_k\}_{k=1}^p$) et $\{f_1,....,f_p\}$ une base de F, telle que $f^j(f_l) = \delta^j_l$ pour tout $j,l \in \{1,...,q\}$.
On a alors

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij}.(e^i\otimes f^j)(e_k,f_l) = 0 \ , \ \text{d'où} \ \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij}.e^i(e_k).f^j(f_l) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\alpha_{ij}.\delta^i_k.\delta^j_l = 0.$$

On a donc $\alpha_{kl} = 0$ Pour tout $k \in \{1,...,p\}$ et $l \in \{1,...,q\}$, d'où la famille $\{e^i\otimes f^j\}_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ est bien libre . □

3.1.5 Notation-Définition

Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E\times F$ est noté $E^*\otimes F^*$ et appelé **Produit tensoriel de** E^* **et** F^* .
Tout élément $T \in E^*\otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij}e^i\otimes f^j$.
Nous savons d'autre part que tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^*, c'est à dire comme élément de E^{**}. En effet, en dimension finie on a $E \simeq E^{**}$ par l'isomorphisme défini par

$$\begin{aligned} i :E &\longrightarrow E^{**}\\ x &\longmapsto i(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{R}\\ &\qquad\qquad l \longmapsto (i(x))(l) = l(x). \end{aligned}$$

- i est bien linéaire (puisque $l \in E^*$)
- i est injective : en effet, supposons que $i(x) = 0$ pour tout $x \in E$ on a alors, $(i(x))(l) = 0$ pour tout $l \in E^*$. Soit maintenant $\{e_i\}_{i=1,...p}$ une base de E, et soit $\{e^i\}_{i=1,...p}$ sa base duale.

Ainsi, on peut écrire : $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_ie_i$.
On a alors, $(i(x))(l) = l(x) = 0$, d'où $l(\sum\limits_{i=1}^{p} x_ie_i) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{p} x_il(e_i) = 0$.
En particulier, pour $l = e^j; j = 1,...,p$:
$\sum\limits_{i=1}^{p} x_ie^j(e_i) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\delta^j_i = 0 \Rightarrow x_j = 0; j = 1,...,p$, Ainsi $x = 0_E$.
Nous pouvons donc appliquer le schéma de construction du produit tensoriel à E^* et F^* afin de définir le produit tensoriel $E\otimes F \simeq E^{**}\otimes F^{**}$.
Une base de $E\otimes F$ est alors $\{e_i\otimes f_j\}_{i=1,..p \quad j=1,...q}$ où $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases de E et F .
Soient $x \in E$ et $y \in F$, $x\otimes y \in E\otimes F \simeq E^{**}\otimes F^{**} := L_2(E^*\times F^*,\mathbb{R})$ ainsi :

$$\begin{aligned} x\otimes y :E^*\times F^* &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (l,h) &\longmapsto (x\otimes y)(l,h) = (i(x))(l).(i(y))(h)\\ &\qquad (x\otimes y)(l,h) = l(x).h(y). \end{aligned}$$

Nous avons alors les règles algébriques suivantes, si $x,x_1,x_2 \in E$, $y,y_1,y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$x\otimes(y_1+y_2) = x\otimes y_1 + x\otimes y_2\ .$$
$$(x_1+x_2)\otimes y = x_1\otimes y + x_2\otimes y\ .$$
$$(\lambda x)\otimes y = x\otimes(\lambda y) = \lambda(x\otimes y)\ .$$

Montrons la première règle :
Soit $l \in E^*$ et $h \in F^*$:

$$\begin{aligned}(x\otimes(y_1+y_2))(l,h) =& l(x).h(y_1+y_2).\\ =& l(x)[h(y_1)+h(y_2)].\\ =& l(x).h(y_1)+l(x).h(y_2).\\ =& (x\otimes y_1)(l,h)+(x\otimes y_2)(l,h).\\ =& (x\otimes y_1+x\otimes y_2)(l,h).\end{aligned}$$

D'où , $x\otimes(y_1+y_2) = x\otimes y_1 + x\otimes y_2$.
De la même manière on montrera les autres règles .

3.1.6 Les types de tenseurs

Nous pouvons itérer le processus de tensorialisation et définir ainsi $E\otimes E\otimes....\otimes E\otimes F\otimes....\otimes F$. Pour la suite, nous particulariserons F en prenant $F = E^*$.
Nous obtenons alors $\underbrace{E\otimes E\otimes E\otimes....\otimes E}_{s-fois}\otimes\underbrace{E^*\otimes....\otimes E^*}_{r-fois}$ un tel élément s'écrit :

$$T = T^{i_1.i_2....i_s}_{j_1.j_2...j_r} e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes....\otimes e_{i_s}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes....\otimes e^{j_r}.$$

On l'appelle **tenseur de type (s,r)**. Nous dirons que les coefficients $T^{i_1.i_2....i_s}_{j_1.j_2...j_r}$ sont les cordonnées du T dans la base $\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes....\otimes e_{i_s}\otimes e^{j_1}\otimes e^{j_2}\otimes....\otimes e^{j_r}\}$

Convention

Un tenseur de type $(0,0)$ est par convention un élément de $\mathbb{R}$ (un scalaire).

Remarque 3.1.1. ◊ *Un tenseur de type* $(1,0)$ *est un vecteur de E, et un tenseur de type* $(0,1)$ *est une forme de* E^*.
◊ *Un tenseur de type* $(0,r)$ *est dit tenseur r-fois covariant (ou tenseur covariant), et un tenseur de type* $(s,0)$ *est dit tenseur s-fois contravariant (ou tenseur contravariant).*

Définition 3.1.4. *Un tenseur s-fois contravariant (i.e de type* $(s,0)$ *)* $T = T^{i_1.i_2....i_s} e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes....\otimes e_{i_s}$ *est dit symétrique (resp antisymétrique) si*

$$T^{i_1.i_2....i_s} = T^{i_{\sigma(1)}.i_{\sigma(2)}....i_{\sigma(s)}} \text{ resp } (T^{i_1.i_2....i_s} = (-1)^{signo\sigma} T^{i_{\sigma(1)}.i_{\sigma(2)}....i_{\sigma(s}} \quad \forall\sigma\in\mathfrak{S}_s)$$

où $\mathfrak{S}_s$ *désigne le groupe de permutations de l'ensemble* $\{1,...s\}$ *(i.e les bijections de* $\{1,...s\}$ *dans* $\{1,...s\}$.
Cette définition s'applique aussi pour les tenseurs r-fois covariant (i.e des tenseurs de type $(0,r)$ *).*

Exemple 3.1. *Soit un tenseur de type (0,2), on a alors :*
$T = T_{i_1 i_2} e^{i_1}\otimes e^{i_2}$
T est symétrique si $T_{i_1 i_2} = T_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}}$ *pour tout* $\sigma\in\mathfrak{S}_2$*, or* $= \{Id, \tau_{12}\}$ *où* τ_{12} *est la transposition définie par* $\tau_{12}(1) = 2$ *et* $\tau_{12}(2) = 1$.
Ainsi T est symétrique si : $\begin{cases} T_{i_1 i_2} = T_{i_1 i_2} \\ T_{i_1 i_2} = T_{i_2 i_1}\end{cases}$

3.1.7 Opérations sur les tenseurs

Produit tensoriel

Le produit tensoriel du tenseur S de type (q,p) :

$$S = S^{k_1.k_2....k_q}_{l_1.l_2...l_p} e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes .... \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes e^{l_2} \otimes .... \otimes e^{l_p}.$$

Avec le tenseur de type(s,r) :

$$T = T^{i_1.i_2....i_s}_{j_1.j_2...j_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes .... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes .... \otimes e^{j_r},$$

est le tenseur :

$$S \otimes T = S^{k_1.k_2....k_q}_{l_1.l_2...l_p} T^{i_1.i_2....i_s}_{j_1.j_2...j_r} e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes .... \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes .... \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes e^{l_2} \otimes .... \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes .... \otimes e^{j_r}$$

Qui est un tenseur de type $(q+s, p+r)$.

Contraction

La contraction d'un tenseur consiste à sommer l'un de ses indices hauts avec l'un de ses indices bas, la contraction fait passer d'un tenseur de type (s,r) à un tenseur de type $(s-1, r-1)$.
Plus précisément, soit

$$T = T^{i_1.i_2....i_s}_{j_1.j_2...j_r} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes .... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes .... \otimes e^{j_r} \quad \text{un tenseur de type } (s,r).$$

Et soit $i_1 \leq i_l \leq i_s$ et $j_1 \leq j_k \leq j_r$.
On appelle contraction de T et on note le tenseur de type $(s-1, r-1)$ défini par :

$$C^{i_l}_{j_k}(T) = \sum T^{i_1....m....i_s}_{j_1....m...j_r} e_{i_1} \otimes .... \otimes e_{i_{l-1}} \otimes e_{i_{l+1}} .... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} .... \otimes e^{j_{k-1}} \otimes e^{j_{k+1}} \otimes .... \otimes e^{j_r}$$

la position m définie la position de i_l et j_k .

Exemple 3.2. *Soit T un tenseur de type $(1,1)$. Alors C^1_1 est le tenseur de type $(0,0)$ défini par :* $C^1_1(T) = \sum\limits_m T^m_m$ *où* $T = T^i_j e_i \otimes e^j$.
En particulier, si $\alpha \in E^*$ et $x \in E$, alors $\alpha \otimes x$ est un tenseur de type $(1,1)$, et on a :

$$\begin{aligned} C^1_1(\alpha \otimes x) &= C^1_1(\alpha_i e^i \otimes x^j e_j) \\ &= C^1_1((\alpha_i x^j) e^i \otimes e_j) \\ &= \sum_m \alpha_m x^m = \alpha(x) \end{aligned}$$

Puisque $\alpha(x) = (\alpha_i e^i)(x^j)e^j) = \alpha_i x^j e^i(e_j) = \alpha_i x^j \delta^i_j = \alpha_i x^i$.
$C^1_1(\alpha \otimes x) = \alpha(x)$

Exemple 3.3. *Soit T un tenseur de type $(2,3)$ déterminer $C^1_3 T$.*
On a $T = T^{ij}_{klm} e_i \otimes e_j \otimes e^k \otimes e^l \otimes e^m$. Ainsi $C^1_3 T$ est un tenseur de type $(1,2)$ défini par :

$$C^1_3(T) = \sum_s T^{ij}_{klm} e_j \otimes e^k \otimes e^l$$

Première utilisation du produit tensoriel

On va montrer que $E \otimes E^*$ s'identifie canoniquement, en dimension finie à $\mathfrak{L}(E)$, l'espace vectoriel des endomorphismes de E .
En effet, tout élément $M = M^i_j e_i e^j \in E \otimes E^*$ s'identifie à l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto (M^i_j v^j) e_i \end{aligned}$$

C'est à dire, tout simplement, que M^i_j est la matrice associée à cet endomorphisme dans la base $\{e_i\}$ de E .
Réciproquement, tout endomorphisme $M \in \mathcal{L}(E)$ se met sous forme d'une matrice (M^i_j) dans la base $\{e_i\}$, et donne l'élément $(M^i_j) e_i e^j \in E \otimes E^*$ dans cette identification.
Il est claire que cette identification est indépendante du choix de la base $\{e_i\}$ de E .

Seconde utilisation du produit tensoriel : l'algèbre extérieure

La seconde utilisation du produit tensoriel va consister à définir **l'espace $\wedge^r E^*$ des r-formes multilinéaires antisymétriques sur E** . Pour cela, considérons l'espace vectoriel :

$$\otimes^r E^* = \underbrace{E^* \otimes \ldots . \otimes E^*}_{r-fois}$$

Et posons $\wedge^r E^*$ le sous-espace vectoriel de $\otimes^r E^*$ des éléments complètement antisymétriques.
Définissons alors le produit extérieur, qu'on notera $\wedge$:

$$\begin{aligned} \wedge : \wedge^r E^* \times \wedge^s E^* &\longrightarrow \wedge^{r+s} E^* \\ (w, \eta) &\longmapsto w \wedge \eta \end{aligned}$$

Pour :
$(w \wedge \eta)(x_1, \ldots., x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{sign(\sigma)} w(x_{\sigma(1)}, \ldots . x_{\sigma(r)}).\eta(x_{\sigma(r+1)}, \ldots x_{\sigma(r+s)}) \quad \forall x_1, \ldots . x_{r+s} \in E.$

Convention

On pose par convention $\wedge^0 E^* = \mathbb{R}$.

Remarques et commentaires

♦ On a $\wedge^1 E^* = E$.
♦ $\wedge^2 E^* = S_2^-(E) :=$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques (ou alternées) sur E .
Si $\{e_1, \ldots e_n\}$ est une base de E, E étant de dimension n, alors $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2}\}_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}$ est une base de $\wedge^2 E^*$, où $\{e_1, \ldots e_n\}$ est la base duale de E^* et

$$(e^{i_1} \wedge e^{i_2})(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & e^{i_1}(x_2) \\ e^{i_2}(x_1) & e^{i_2}(x_2) \end{vmatrix}$$

En effet, on sait que $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2}\}_{i_1, i_2 = 1, \ldots, n}$ est une base de $\otimes^2 E^* = E^* \otimes E^*$.
Ainsi pour $T \in \wedge^2 E^* \underset{s.e.v}{\subset} \otimes^2 E^*$, on a $T = T_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2}$, et comme T est antisymétrique, on aura $T_{i_1 i_2} = -T_{i_2 i_1}$.

D'où :

$T = \sum\limits_{i_1,i_2} T_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2} = \sum\limits_{i_1<i_2} T_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2} + \sum\limits_{i_1>i_2} T_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2} + \sum\limits_{i_1,i_1} T_{i_1 i_1} e^{i_1} \otimes e^{i_1}$

$$T = \sum_{i_1<i_2} T_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2} - \sum_{i_2<i_1} T_{i_2 i_1} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \qquad (T_{i_1 i_1} = 0)$$

$$T = \sum_{i_1<i_2} T_{i_1 i_2} e^{i_1} \otimes e^{i_2} - \sum_{i_1<i_2} T_{i_1 i_2} e^{i_{1=2}} \otimes e^{i_1}$$

$$T = \sum_{i_1<i_2} T_{i_1 i_2} (e^{i_1} \otimes e^{i_2} - e^{i_{1=2}} \otimes e^{i_1})$$

Ainsi $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2}\}_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}$ est une famille génératrice de $\wedge^2 E^*$.

De plus, $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2}\}_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}$ est une famille libre.

En effet, soient $\{\alpha_{i_1 i_2}\}_{i_1<i_2}$ des réels, tel que $\sum\limits_{i_1<i_2} \alpha_{i_1 i_2} e^{i_1} \wedge e^{i_2} = 0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i_1<i_2} \alpha_{i_1 i_2} (e^{i_1} \wedge e^{i_2})(e_k, e_l) = 0 \quad &\Rightarrow \sum_{i_1<i_2} \alpha_{i_1 i_2} (e^{i_1} \otimes e^{i_2} - e^{i_2} \otimes e^{i_1})(e_k, e_l) = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i_1<i_2} \alpha_{i_1 i_2} [(e^{i_1} \otimes e^{i_2})(e_k, e_l) - (e^{i_2} \otimes e^{i_1})(e_k, e_l)] = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i_1<i_2} \alpha_{i_1 i_2} [e^{i_1}(e_k).e^{i_2}(e_l) - e^{i_2}(e_k).e^{i_1}(e_l)] = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i_1<i_2} \alpha_{i_1 i_2} [\delta_k^{i_1} \delta_l^{i_2} - \delta_k^{i_2} \delta_l^{i_1}] = 0 \\
&\overset{k<l}{\Rightarrow} \quad \alpha_{kl} = 0
\end{aligned}$$

On a alors $\{e^{i_1} \wedge e^{i_2}\}_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}$ est bien une base de $\wedge^2 E^*$, de plus $dim \wedge^2 E^* = \dfrac{n^2 - n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!}$.

De façon générale, on a $dim \wedge^r E^* = C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ où $r \leq n$ et $n = dimE$ (Notons que $\wedge^r E^* = \{0\}$ si $r > n = dimE$).

$\{e^{i_1} \wedge ..... \wedge e^{i_r}\}_{1 \leq i_1 < .... < i_r \leq n}$ est une base de $\wedge^r E^*$.

Propriétés 3.1.1. *i)* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ *pour* $\alpha \in \wedge^r E^*$ *et* $\beta \in \wedge^s E^*$.

ii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

iii) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = (\alpha_1 \wedge \beta) + (\alpha_2 \wedge \beta)$.

iv) $\lambda(\alpha \wedge \beta) = (\lambda\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (\lambda\beta) \qquad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Algèbre extérieure

Considérons l'espace vectoriel :

$$\begin{aligned}
\wedge E^* &= \wedge^0 E^* \oplus \wedge^1 E^* \oplus ...... \oplus \wedge^n E^* \qquad ; n = dimE. \\
&= \wedge^0 E^* \times \wedge^1 E^* \times ...... \times \wedge^n E^*.
\end{aligned}$$

Alors, le produit extérieur donne à $\wedge E^*$ une structure d'algèbre. C'est l'algèbre extérieure sur E^*.

3.1.8 Tenseurs sur une variété

Soit $(M,\mathcal{A})$ une variété différentielle de dimension n.

Définition 3.1.5. *Pour tout $x \in M$, définissons l'espace vectoriel :*

$$T_x^{(s,r)}M = \underbrace{T_xM \otimes ...... \otimes T_xM}_{s-fois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes ..... \otimes T_x^*M}_{r-fois}$$

Un élément $T_x \in T_x^{(s,r)}M$ est un tenseur de type (s,r) au dessus de x (ou en x).
Si (U,φ) est une carte locale contenant x, dans les cordonnées $(x_1,...,x_n)$, T s'écrit :

$$T_x = T^{i_1 i_2 .... i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i_1|_x}} \otimes .... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s|_x}} \otimes dx^{j_1}_{|_x} \otimes ...... \otimes dx^{j_r}_{|_x}$$

Puisque $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i\,|_x}\right\}_i$ est une base de T_xM et $\left\{dx^j_{|_x}\right\}_j$ est une base de T_x^*M .

Cas particuliers

▹ Un élément de $T_x^{(1,0)}M = T_xM$ est un vecteur tangent à M en x .
▹Un élément de $T_x^{(0,1)}M = T_x^*M$ est un covecteur (une 1-forme).

Champs de tenseurs

Nous pouvons donc considérer la variété différentielle :

$$T^{(s,r)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(s,r)}M$$

Qu'on appelle **fibré des tenseurs de type (s,r)**. Ainsi, un champ de tenseurs de type (s,r) sur M, est une section C^∞-différentiable du fibré $T^{(s,r)}M$:

$$\begin{aligned} T : M &\longrightarrow T^{(s,r)}M \\ x &\longrightarrow T_x \in T_x^{(s,r)}M = \underbrace{T_xM \otimes ...... \otimes T_xM}_{s-fois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes ..... \otimes T_x^*M}_{r-fois} \end{aligned}$$

T s'écrit donc localement :

$$T = T^{i_1 i_2 .... i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes .... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes ...... \otimes dx^{j_r}$$

Où $T^{i_1 i_2 .... i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r}$ sont des fonctions $C^\infty(U)$ avec (U,φ) est une carte locale de cordonnées $\{x_1,...x_n\}$.

Cas particuliers

1) Un champ de tenseurs de type $(1,0)$ est un champ de vecteurs sur M .

2) Un champ de tenseurs de type $(0,1)$ est un champ de 1-forme différentielle sur M.

3) Un champ de tenseurs de type $(0,0)$ n'est rien d'autre qu'une fonction C^∞ sur M.

Notation

On désigne par $\mathcal{F}^{(s,r)}(M)$ l'ensemble des champs de tenseur M.
On a alors : $\mathcal{F}^{(1,0)}(M) = \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{F}^{(0,1)}(M) = \Omega^1(M)(= \mathfrak{X}^*(M))$ et $\mathcal{F}^{(0,0)}(M) = C^\infty(M)$.

Commentaires

Globalement, il est facile de vérifier qu'un champ de tenseurs de type (s,r) peut être vu comme une application $C^\infty(M)$-multilinéaire sur : $\underbrace{\Omega^1(M)\times....\times\Omega^1(M)}_{s-fois}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r-fois}$ à valeurs dans $C^\infty(M)$.

i) Si ω est un champ de tenseurs de type $(0,1)$, alors on peut le voir comme une application $C^\infty(M)$-linéaire sur $\mathfrak{X}^*(M)$, noté ω :

$$\begin{aligned}\omega : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M)\\ X &\longmapsto \omega(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}\\ &\qquad\qquad x \mapsto (\omega(x))(x) = \omega_x(X_x).\end{aligned}$$

ii) Si X est un champ de tenseurs de type $(1,0)$, on peut donc le représenter comme une application $C^\infty(M)$-linéaire sur $\Omega^1(M)$:

$$\begin{aligned}\omega : \Omega^1(M) &\longrightarrow C^\infty(M)\\ \theta &\longmapsto X(\theta) = \theta(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}\\ &\qquad\qquad x \mapsto (\theta(x))(x) = \theta_x(X_x).\end{aligned}$$

iii) Si $A : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r-fois} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ est une application $C^\infty(M)$-multilinéaire, alors A induit un champ de tenseurs de type $(1,r)$:

$$\begin{aligned}\bar{A} : \Omega^1(M)\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r-fois} &\longrightarrow C^\infty(M)\\ (\omega, X_1,...,X_r) &\longmapsto \bar{A} = A(\omega, X_1,...,X_r) = \omega(A(X_1,...,X_r)).\end{aligned}$$

3.1.9 Produit tensoriel de deux tenseurs sur M

Soient $A \in \mathcal{F}^{(s,r)}(M)$ et $B \in \mathcal{F}^{(s',r')}(M)$, on définit le produit tensoriel de A et B par :

$$\begin{aligned}A\otimes B : \underbrace{\Omega^1(M)\times...\Omega^1(M)}_{s+s'}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r+r'} &\longrightarrow C^\infty(M)\\ (\theta^1,...,\theta^{s+s'}, X_1,...,X_{r+r'}) &\longmapsto A(\theta^1,...,\theta^s, X_1,...,X_r).B(\theta^{s+1},...,\theta^{s+s'}, X_{r+1},...,X_{r+r'})\end{aligned}$$

$A\otimes B \in \mathcal{F}^{(s+s',r+r')}(M)$. si $r' = s' = 0$ alors B est une fonction $f \in C^\infty(M)$, et on pose :
$A\otimes f = f\otimes A = f.A$.
Ainsi, si A est de type $(0,0)$, on retrouve le produit usuel des fonctions $C^\infty(M)$.
Il est claire que : $(fA + gA')\otimes B = fA\otimes B + gA'\otimes B$ pour tout $f,g \in C^\infty(M)$ et $B \in \mathcal{F}^{(s',r')}(M)$.

1. Le produit tensoriel est associatif : $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$.

2. Le produit tensoriel n'est pas commutatif ,par exemple, en cordonnées locales $(x_1,...x_n)$ on a $dx^1, dx^2 \in \mathcal{F}^{(0,1)}(M)$ et :

$$(dx^1\otimes dx^2)\left(\frac{\partial x}{\partial x_1},\frac{\partial x}{\partial x_2}\right) = dx^1\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right).dx^2\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right) = 1,$$
$$(dx^2\otimes dx^1)\left(\frac{\partial x}{\partial x_1},\frac{\partial x}{\partial x_2}\right) = dx^2\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right).dx^1\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right) = 0.$$

   Ainsi $dx^1\otimes dx^2 \neq dx^2\otimes dx^1$.

3. $A\in\mathcal{F}^{(s,0)}(M)$ et $B\in\mathcal{F}^{(0,r)}(M)$, alors $\quad A\otimes B = B\otimes A$.

3.1.10 Application pull-back sur les champs de tenseurs

Soient M,N deux variétés différentiables, et soit $f : M \longrightarrow N$ un C^∞-difféomorphisme, il est possible de définir l'application pull-back pour les champs de tenseurs, qu'on notera f^* :

$$f^* : \mathcal{F}^{(s,r)}(N) \longrightarrow \mathcal{F}^{(s,r)}(M)$$
$$T \longmapsto f^*T,$$

tel que :

$$f^*T : \underbrace{\Omega^1(M)\times...\Omega^1(M)}_{s-fois}\times\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r-fois} \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$(\theta^1,...,\theta^s,X_1,...,X_r)\longmapsto f^*T(\theta^1,...,\theta^s,X_1,...,X_r)$$

$$f^*T(\theta^1,...,\theta^s,X_1,...,X_r) = T\Big((f^{-1})^*\theta^1,...,(f^{-1})^*\theta^s, f_*X_1,...,f_*X_r\Big)$$

3.2 Connexions sur le fibré tangent

Pour la géométrie Riemannienne ou pseudo-Riemannienne, notre préoccupation principale est les connexions sur le fibré tangent, donc pour le reste du chapitre on se concentrera sur ce cas. Une connexion sur le fibré tangent est souvent appelée **une connexion sur** M. (Les termes de connexions affine et connexion linéaire sont aussi parfois utilisés dans ce contexte, mais il existe un léger désaccord sur la définition précise de ces termes, donc on les évitera.)
Supposons M est une variété lisse avec ou sans bords. Parla définition que nous venons de donner une connexion dans TM est une application

$$\nabla : \chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$$

qui satisfait les propriétés $(i)-(iii)$. Bien que la définition d'une connexion rassemble la caractérisation d'un champ de tenseurs de type $(1,2)$ donner par le lemme de caractérisation de tenseurs, une connexion dans TM n'est pas un champ de tenseurs car elle n'est pas linéaire sur $C^\infty(M)$ pour sa seconde composante, mais par contre satisfait la loi du produit.
Pour le calcul, on aura besoin d'examiner comment apparaissent les connexion en terme de bases locales . Soit (E_i) une base locale lisse de TM sur un ouvert $U\subseteq M$.
Pour tout choix d'indices i et j, on peut étendre le champ de vecteurs $\nabla_{E_i}E_j$ en terme de la même base :

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Puisque i, j et k prennent les valeurs de 1 à $n = dim M$, ceci définit n^3 fonctions lisses $\Gamma_{ij}^k : U \longrightarrow \mathbb{R}$, appelées les coefficients de connexion de ∇ en respectant la base donnée. La proposition suivante montre que la connexion est complètement déterminée sur U par les coefficients de connexion.

3.3 Formes différentielles

Définition 3.3.1. *Soit M une variété différentielle de dimension n*
Une $\boldsymbol{r}$-forme différentielle (ou $\boldsymbol{r}$-forme) sur M est un champ de tenseurs de type $(0,\boldsymbol{r})$ complètement antisymétrique. On notera $\Omega^{\boldsymbol{r}}(M)$ l'espace vectoriel des $\boldsymbol{r}$-formes sur M.
Pour $r = 0$, on a $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.
Pour $r = 1$, on retrouve les $1-$formes différentielles.
Pour $r > n$, on a $\Omega^r(M) = \{0\}$.
Une $\boldsymbol{r}$-forme différentielle est donc une application $C^\infty(M)$-multilinéaire antisymétrique de $\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r-fois}$ dans $C^\infty(M)$.

3.3.1 Expression locale

Soit à présent ω une r-forme différentielle, i.e ω est un champs de tenseurs de type $(0,r)$ complètement antisymétrique :

$$\omega : M \longrightarrow T^{(0,r)}M = \bigcup_{x\in M} T_x^{(0,r)}M$$
$$x \longmapsto \omega_x \in T_x^{(0,r)}M = \underbrace{T_x^*M\otimes...\otimes T_x^*M}_{r-fois}$$

$\omega_x \in \underbrace{T_x^*M\otimes...\otimes T_x^*M}_{r-fois}$ et comme ω_x est antisymétrique, on peut dire que $\omega_x \in \wedge^r T_x^*M$.

D'autre part, soit (U,ϕ) une carte locale contenante x, $\left\{dx^i_{|_x}\right\}_{i=0}^n$ est alors une base de T_x^*M.

Ainsi, $\left\{dx^{i_1}_{|_x}\wedge...dx^{i_r}_{|_x}\right\}_{1\leq i_1<..<i_2\leq n}$ forme une base de $\wedge^r T_x^*M$.

Notons que :
$dx^{i_1}_{|_x}\wedge...dx^{i_r}_{|_x} = \sum_{\sigma\in\sigma_r}\varepsilon(\sigma)\, dx^{i_1}_{|_x}\wedge...dx^{i_r}_{|_x}$.
On a alors

$$\omega_x = \sum_{1\leq i_1<..<i_2\leq n}\omega_{i_1...i_r,x}\, dx^{i_1}_{|_x}\wedge...dx^{i_r}_{|_x}$$

Posons :

$$\omega_{i_1...i_r} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \omega_{i_1...i_r}(x) = \omega_{i_1...i_r,x}$$

$\omega_{i_1...i_r}\in C^\infty(U)$, On peut écrire :

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<..<i_2\leq n}\omega_{i_1...i_r}\, dx^{i_1}\wedge...dx^{i_r}$$

3.3.2 Produit extérieur

Pour $\omega\in\Omega^r(M)$ et $\eta\in\Omega^s(M)$, On peut définir le produit extérieur $\omega\wedge\eta\in\Omega^{s+r}$ par la formule :

$$(\omega\wedge\eta)(X_1,..,X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\sigma_{r+s}}\varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma_1}...X_{\sigma_r}).\eta(X_{\sigma_{r+1}}...X_{\sigma_{r+s}})$$

Considérons l'espace vectoriel :

$$\begin{aligned}\Omega^*(M) &= \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus ... \oplus \Omega^n(M) \qquad ; n = dimM \\ &= \Omega^0(M) \times \Omega^1(M) \times ... \times \Omega^n(M)\end{aligned}$$

Alors, le produit extérieur donne à $\Omega^*(M)$ une structure d'algèbre .Il a la propriété de commutativité : $\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega \qquad ; \forall \omega \in \Omega^r(M), \forall \eta \in \Omega^s(M)$.

3.3.3 Fibré des formes différentielles

Jusqu'à présent, nous avons défini les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles et les champs de tenseurs comme des sections de fibrés. Nous pouvons faire de même pour les r-formes différentielles sur M.
Pour tout $x \in M$, posons $\wedge^r T_x^* M$ l'espace vectoriel des r-formes multilinéaires antisymétriques sur $T_x M$.
Définissons alors la variété :

$$\wedge^r T^* M = \bigcup_{x \in M} \wedge^r T_x^* M$$

appelée **fibré des r-formes différentielles**. Alors toute r-forme différentielle est une section C^∞ de ce fibré.

$$\begin{aligned}\omega : M &\longrightarrow \wedge^r T^* M \\ x &\longmapsto \omega_x \in \wedge^r T_x^* M.\end{aligned}$$

$$\omega_x : \underbrace{T_x M \times ... \times T_x M}_{r-fois} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , r\text{-multilinéaire et antisymétrique .}$$

3.3.4 Application pull-back des formes différentielles

Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une application C^∞-différentiable, On peut donc définir l'application pull-back sur les r-formes différentiables par :

$$\begin{aligned}f^* : \Omega^r(N) &\longrightarrow \Omega^r(M) \\ \omega &\longmapsto f^*\omega :\longrightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times .... \times \mathfrak{X}(M)}_{r-fois} \longrightarrow C^\infty(M) \\ &\qquad\qquad (X_1, ..., X_r) \longmapsto (f^*\omega)(X_1, ..., X_r)\end{aligned}$$

tel que :

$$(f^*\omega)(X_1, ..., X_r) = \omega\Big(f_* X_1, ..., f_* X_r\Big)$$

Pour $r = 1$, On retrouve la définition déjà donnée du pull-back sur les 1-formes différentielles.

3.3.5 Différentielle

Définition 3.3.2. *On définit la différentielle d sur $\Omega^r(M)$ par*

$$\begin{aligned} d : \Omega^r(M) &\longrightarrow \Omega^{r+1}(M) \\ \omega &\longmapsto d\omega :\longrightarrow \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{r+1-fois} \longrightarrow C^\infty(M) \end{aligned}$$

tel que :

$$(d\omega)(X_0,X_1,...,X_r) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\Big(\omega(X_0,X_1,..\overset{i}{\underset{\circ}{\vee}}..,X_r)\Big)+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\Big([X_i,X_j],X_0,X_1,..\overset{i}{\underset{\circ}{\vee}}..\overset{j}{\underset{\circ}{\vee}}..,X_r\Big)$$

Avec $d\Omega^0(M) = C^\infty(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ la différentielle sur les fonctions déjà définie $\Big((df)(X) = X(f)\Big)$.

$\overset{i}{\underset{\circ}{\vee}}$ *signifie que l'on met X_i dans les arguments de ω.*

Exemple 3.4. *Lorsque $r = 1$.*

$$\begin{aligned} d : \Omega^1(M) &\longrightarrow \Omega^2(M) \\ \omega &\longmapsto d\omega : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ &\qquad (X_0,X_1) \longmapsto \Big(d\omega\Big)(X_0,X_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_0,X_1) &= (-1)^0X_0\Big(\omega(X_1)\Big)+(-1)^1X_1\Big(\omega(X_0)\Big)+(-1)^{0+1}\omega\Big([X_1,X_1]\Big) \\ &= X_0\Big(\omega(X_1)\Big)-X_1\Big(\omega(X_0)\Big)-\omega\Big([X_0,X_1]\Big) \end{aligned}$$

Propriétés 3.3.1.

i. *Il est facile, en utilisant l'identité de Jacobi de vérifier que : $d^2 = 0$.*

ii. *On a aussi l'importante relation (le faite que d une antidérivation de l'algèbre $\Omega^*(M)$) :*

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^r\omega\wedge d\eta \qquad\qquad , \omega\in\Omega^*(M)\ .$$

iii. *Dans une carte locale (U,φ), de cordonnées $(x_1,...x_n)$ sur M, si :*

$$\omega = \sum_{i_1<...<i_r}\omega_{i_1...i_r}dx^{i_1}\wedge...dx^{i_r}\ .$$

Alors :

$$d\omega = \sum_{i_1<...<i_r}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\omega_{i_1...i_r}\right)dx^{i_1}\wedge...dx^{i_r}\ .$$

iv. *Si M et N sont deux variétés différentiables, et si $f : M \longrightarrow N$ est une application C^∞-différentiable alors, pour toute forme différentielle $\omega\in\Omega^*(M)$, nous avons :*
$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$
C'est à dire que f^* et d commutent .Notons que d'un coté il s'agit de la différentielle sur M, et de l'autre de la différentielle sur N .

3.4 Produit extérieur

Définition 3.4.1. *Soit M une variété de dimension n, et Soit X un champ de vecteur sur M . On appelle produit intérieur sur les formes différentielles, et on note i_X l'application :*

$$\begin{aligned} i_X : \Omega^r(M) &\longrightarrow \Omega^{r-1}(M) \\ \omega &\longmapsto i_X\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times....\times\mathfrak{X}(M)}_{(r-1)-fois} \longrightarrow C^\infty(M) \\ &\qquad (X_1,...,X_{r-1}) \longmapsto (i_X\omega)\Big(X_1,...,X_{r-1}\Big) = \omega\Big(X, X_1,...,X_{r-1}\Big) \end{aligned}$$

C'est à dire que X prend la place du premier argument dans ω.
Sur les fonctions on pose $i_X f = 0$.

Propriétés 3.4.1. *Pour $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^s(M)$, on a :*
$i_X(\omega\wedge\eta) = (i_X\omega)\wedge\eta + (-1)^r\omega\wedge i_X\eta$ et $(i_X)^2 = 0$. (C'est à dire que i_X est une anti dérivation sur $\Omega^*(M)$)

3.5 Dérivée de Lie

On veut maintenant généraliser le fait qu'un champ de vecteurs X soit une dérivation sur $C^\infty(M)$, en étant cette dérivation aux tenseurs et aux formes. Cette dérivation portera le nom de dérivée de lie dans la direction X et sera notée L_X.
Elle ne modifiera pas le type du tenseur au quel elle s'applique.
Il existe plusieurs approche possible est algébrique : on se donne des règles de calcul qui permettent d'atteindre tous les tenseurs et toutes les formes. La seconde est analytique : on se donne l'expression de cette dérivée dans des cordonnées locales.
Enfin, la dernière est géométrique : on réinterprète ce qui signifie géométriquement la dérivée sur les fonctions et on généralise aux tenseurs et aux formes.

3.5.1 Approche algèbrique

- Sur les fonctions, on pose :
  $L_X f = X(f) = (df)(X)$, pour $f \in C^\infty(M)$.
- Sur les champs de vecteurs, on pose :
  $L_X Y = [X,Y]$ pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Pour définir L_X sur les tenseurs, on se donne les règles suivantes :

i. $L_X(T\otimes S) = T\otimes L_X S + L_X T\otimes S$.

ii. L_X commute avec la contraction des tenseurs.

iii. L_X est linéaire sur $\mathbb{R}$.

iv. $L_{X+Y} = L_X + L_Y$ et $L_{fX} = fL_X$.

Ces règles nous assurent que L_X est bien définie sur tout tenseur.
En effet, un tenseur quelconque est une somme finie de produits tensoriel de vecteurs et de 1-formes (de champs de vecteurs et de 1-formes différentielles).
Ainsi, si nous connaissons L_X sur les vecteurs (ce qui est le cas) et les 1-formes alors la

linéarité et la première règle nous donnent L_X sur ce tenseur .
Soit alors $\alpha \in \Omega^1(M)$, calculons $L_x\alpha$:
Pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la première règle donne :

$$L_X(\alpha \otimes Y) = L_X\alpha \otimes Y + \alpha \otimes L_X Y$$

Appliquons alors l'opération de la contraction C_1^1, notons que $\alpha \otimes Y$ est un tenseur de type $(1,1)$:

$$C_1^1\Big(L_X(\alpha \otimes Y)\Big) = C_1^1\Big((L_X\alpha) \otimes Y\Big) + C_1^1\Big(\alpha \otimes (L_X Y)\Big) \ \text{, } C_1^1 \text{ est bien définie.}$$

Utilisons la seconde règle au premier membre :

$$L_X\Big(C_1^1(\alpha \otimes Y)\Big) = C_1^1\Big((L_X\alpha) \otimes Y\Big) + C_1^1\Big(\alpha \otimes (L_X Y)\Big)$$

On a alors, puisque $C_1^1(\alpha \otimes Y) = \alpha(Y)$:

$$L_X(\alpha \otimes Y) = (L_X\alpha)(Y) + \alpha(L_X Y).$$

C'est à dire :

$$X\Big(\alpha(Y)\Big) = (L_X\alpha)(Y) + \alpha\Big([X,Y]\Big).$$

On a alors :

$$(L_X\alpha)(Y) = X\Big(\alpha(Y)\Big) - \alpha\Big([X,Y]\Big) \quad ; \alpha \in \Omega^1(M)$$

Exemple 3.5. *Calculer $L_X g$, pour $g \in \mathcal{F}^{(0,2)}(M)$, i.e un tenseur de type $(0,2)$.*
Soit alors $g \in \mathcal{F}^{(0,2)}(M)$, on a alors localement :
$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ où $g_{ij} \in C^\infty(U)$; (U,φ) une carte locale de cordonnées $(x_1, ... x_n)$ et $\left\{dx^i\right\}_{i=1}^n$ le repère locale .

$$\begin{aligned}
L_X g &= L_X(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) \\
&= L_X\Big(g_{ij} \otimes (dx^i \otimes dx^j)\Big) \\
&= L_X g_{ij}.(dx^i \otimes dx^j) + g_{ij}\Big[L_X dx^i \otimes dx^j + dx^i \otimes L_X dx^j\Big]
\end{aligned}$$

Soient maintenant $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

$$
\begin{aligned}
(L_X g)(Y,Z) &= (L_X g_{ij})\left(dx^i \otimes dx^j\right)(Y,Z) + g_{ij}\left[\left(L_x dx^i\right)(Y).dx^j(Z) + dx^i(Y)\left(L_X dx^j\right)(Z)\right]. \\
&= X(g_{ij})\left(dx^i \otimes dx^j\right)(Y,Z) + g_{ij}\left[\left(X\left((dx^i)(Y)\right) - \left((dx^i[X,Y]\right)dx^j(Z) + dx^i(Y)\left(X\left((dx^j)(Z)\right)\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - dx^j\left([X,Z]\right)\right)\right]. \\
&= X(g_{ij})\left(dx^i \otimes dx^j\right)(Y,Z) + g_{ij}\left[X\left((dx^i)(Y)\right)dx^j(Z) + dx^i(Y).X\left(dx^j(Z)\right)\right] \\
&\qquad - gij\left[\left(dx^i \otimes dx^j\right)\left([X,Y],Z\right) + \left(dx^i \otimes dx^j\right)\left(Y,[X,Z]\right)\right]. \\
&= X(g_{ij})\left(dx^i \otimes dx^j\right)(Y,Z) + g_{ij}X\left(dx^i(Y).dx^j(Z)\right) - \underbrace{g_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j\right)}_{g}\left([X,Y],Z\right) \\
&\qquad - \underbrace{g_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j\right)}_{g}\left(Y,[X,Z]\right). \\
&= X(g_{ij})\left(dx^i \otimes dx^j\right)(Y,Z) + g_{ij}X\left(\left(dx^i \otimes dx^j\right)(Y,Z)\right) - g\left([X,Y]\right) - g\left(Y,[X,Z]\right). \\
&= X\left(\underbrace{g_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j\right)}_{g}(Y,Z)\right) - g\left([X,Y],Z\right) - g\left(Y,[X,Z]\right). \\
&= X\left(g(Y,Z)\right) - g\left([X,Y],Z\right) - g\left(Y,[X,Z]\right).
\end{aligned}
$$

$\left(L_X g\right)(Y,Z) = X\left(g(Y,Z)\right) - g\left([X,Y],Z\right) - g\left(Y,[X,Z],\right)$.*Pour tout* $g \in \mathcal{F}^{(0,2)}(M)$.

Propriétés 3.5.1. *Soit* X *un champ de vecteurs sur* M*, on a :*

1) $L_X = i_X d + d i_X$ *sur* $\Omega^r(M)$.

2) $L_X d = d L_X$.

3) $\left[L_X, i_X\right] = {}^{i}[X,Y]$ *, pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

4) $L_{[X,Y]} = \left[L_X, L_Y\right]$ *, pour tous* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3.5.2 Expression en cordonnées locales de la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs de type (s,r)

Posons $X = X^m \dfrac{\partial}{\partial x_m}$ et soit T un tenseur de type (s,r) :

$$T = T^{k_1 \dots k_s}_{l_1 \dots l_r} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \otimes \dots. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{k_s}} \otimes dx^{l_1} \otimes \dots. \otimes dx^{l_r} \ .$$

$L_X T$ est alors un tenseur de type (s,r) (puisque T est de type (s,r)) .
Ainsi,

$$L_X T = \Big(L_X T\Big)^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots . j_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots. \otimes dx^{j_r} \ .$$

Calculons $\Big(L_X T\Big)^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots . j_r}$, notons que :

$$\Big(L_X T\Big)^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots . j_r} = (L_X T)\Big(dx^{i_1}, \dots ., dx^{i_s}, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots ., \frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big) \ .$$

Tout d'abord on a :

$$\begin{aligned} L_X T &= L_X\Big(T^{k_1 \dots k_s}_{l_1 \dots l_r} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \otimes \dots. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{k_s}} \otimes dx^{l_1} \otimes \dots. \otimes dx^{l_r}\Big). \\ &= \Big(L_X T^{k_1 \dots k_s}_{l_1 \dots l_r}\Big) \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \otimes \dots. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{k_s}} \otimes dx^{l_1} \otimes \dots. \otimes dx^{l_r} + T^{k_1 \dots k_s}_{l_1 \dots l_r} \left[\begin{array}{l} \Big(L_X\Big(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \otimes \dots. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big)\Big) \otimes dx^{l_1} \otimes \dots. \otimes dx^{l_r} \\ +\Big(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \otimes \dots. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big) \otimes L_X\Big(dx^{l_1} \otimes \dots. \otimes dx^{l_r}\Big) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Appliquons à $L_X T$, $\Big(dx^{i_1},....,dx^{i_s},\dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}},....,\dfrac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big)$. On a alors :

$$\Big(L_X T\Big)\Big(dx^{i_1},....,dx^{i_s},\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},....,\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big)=X\Big(T^{k_1...k_s}_{l_1...l_r}\Big)\delta^{i_1}_{k_1}...\delta^{i_s}_{k_s}.\delta^{l_1}_{j_1}...\delta^{l_r}_{j_r}+$$
$$+T^{k_1...k_s}_{l_1...l_r}\left[\begin{array}{l}\Big(L_X\Big(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\otimes....\otimes\frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big)\Big)\Big(dx^{i_1},....,dx^{i_s}\Big).\delta^{l_1}_{j_1}...\delta^{l_r}_{j_r}\\ +\delta^{i_1}_{k_1}...\delta^{i_s}_{k_s}.\Big(L_X\Big(dx^{l_1}\otimes...\otimes dx^{l_r}\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},....,\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big)\end{array}\right].$$

$$=X\Big(T^{i_1...i_s}_{j_1....j_r}\Big)+T^{k_1...k_s}_{j_1...j_r}\Big(L_X\Big(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\otimes....\otimes\frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big)\Big)\Big(dx^{i_1},....,dx^{i_s}\Big)+$$
$$T^{i_1...i_s}_{l_1....l_r}\Big(L_X\Big(dx^{l_1},....,dx^{l_r}\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},....,\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big).$$

$$=X^m\frac{\partial}{\partial x_m}T^{i_1...i_s}_{j_1....j_r}+T^{k_1...k_s}_{j_1....j_r}\left[\begin{array}{l}\Big(\Big(L_X\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big)\otimes...\otimes\frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big)\Big(dx^{i_1},...,dx^{i_s}\Big)+\\ ...+\Big(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\otimes...\otimes\Big(L_X\frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big)\Big)\Big(dx^{i_1},...,dx^{i_s}\Big)\end{array}\right]$$
$$+T^{i_1...i_s}_{l_1....l_r}\left[\begin{array}{l}\Big(\Big(L_X dx^{l_1}\Big)\otimes...\otimes dx^{l_r}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},...,\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big)+...\\ ...+\Big(dx^{l_1}\otimes...\otimes\Big(L_X dx^{l_r}\Big)\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},...,\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big)\end{array}\right].$$

$$=X^m\frac{\partial}{\partial x_m}T^{i_1...i_s}_{j_1....j_r}+T^{k_1...k_s}_{j_1....j_r}\left[\begin{array}{l}\Big(L_X\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big)(dx^{i_1}).\sigma^{i_1}_{k_2}...\sigma^{i_s}_{k_s}+...\\ +\sigma^{i_1}_{k_1}...\sigma^{i_{s-1}}_{k_{s-1}}.\Big(L_X\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big)(dx^{i_s})\end{array}\right]+$$
$$+T^{i_1...i_s}_{l_1...l_r}\left[\begin{array}{l}\Big(L_X dx^{l_1}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big).\sigma^{l_2}_{j_2}...\sigma^{l_r}_{j_r}+...\\ ...+\sigma^{l_1}_{j_1}...\sigma^{l_{r-1}}_{j_{r-1}}\Big(L_X dx^{l_r}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big)\end{array}\right].$$

$$=X^m\frac{\partial}{\partial x_m}T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}+T^{k_1 i_2...i_s}_{j_1...j_r}\Big(L_X\frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big)^{i_1}+...+T^{i_1...i_{s-1}k_s}_{j_1...j_r}\Big(L_X\frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\Big)^{i_s}+$$
$$+T^{l_1...l_s}_{l_1 j_2...j_r}\Big(L_X dx^{l_1}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big)+...+T^{l_1...l_s}_{j_1...j_{r-1}l_r}\Big(L_X dx^{l_r}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big).$$

D'autre part on a :

$$\Big(L_X \frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big)^{i_1} = \Big[X, \frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big]^{i_1}.$$
$$= \Big[X^m \frac{\partial}{\partial x_m}, \frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big]^{i_1}.$$
$$= -\Big[\frac{\partial}{\partial x_{k_1}} X^m, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big]^{i_1}.$$
$$= -\frac{\partial X^{i_1}}{\partial x_{k_1}}.$$

d'où $$\boxed{\Big(L_X \frac{\partial}{\partial x_{k_1}}\Big)^{i_1} = -\frac{\partial X^{i_1}}{\partial x_{k_1}}}$$

et $$\Big(L_X dx^{l_1}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big) = X\Big(dx^{l_1}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big)\Big) + dx^{l_1}\Big(\Big[X, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big]\Big).$$
$$= -\Big[X, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big]^{l_1}.$$
$$= \frac{\partial X^{l_1}}{\partial x_{j_1}}.$$

d'où $$\boxed{\Big(L_X dx^{l_1}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\Big) = \frac{\partial X^{l_1}}{\partial x_{j_1}}}$$

$$\Big(L_X T\Big)\Big(dx^{i_1}, ..., dx^{i_s}, \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\Big) = X^m \frac{\partial}{\partial x_m}.T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots . j_r} - T^{k_1 i_2 \dots i_s}_{j_1 \dots . j_r} \frac{\partial X^{i_1}}{\partial x_{k_1}} - \dots - T^{i_1 \dots i_{s-1}}_{j_1 \dots . j_r} \frac{\partial X^{i_s}}{\partial x_{k_s}}$$
$$+ T^{i_1 \dots i_s}_{l_1 j_2 \dots . j_r} \frac{\partial X^{l_1}}{\partial x_{j_1}} + \dots + T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 j_2 \dots . j_{r-1}} \frac{\partial X^{l_r}}{\partial x_{j_r}}.$$

On a alors :

$$\boxed{\Big(L_X T\Big)^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} = X^m \frac{\partial}{\partial x_m}.T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_r} - \sum_{p=1}^{s} T^{i_1 .. i_{p-1}, i_{p+1} .. i_s}_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial X^{i_p}}{\partial x_l} + \sum_{p=1}^{r} T^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_{p_1}, j_{p+1} .. j_r} \frac{\partial X^l}{\partial x_{j_p}}} \quad (3.1)$$

De façon plus générale :
Soit T un tenseur de type (s, r) et soit X un champ de vecteurs sur M. On a alors :

$$\Big(L_X T\Big)(\theta^1, ..., \theta^s, V_1, ... V_r) = X\Big(T\Big(\theta^1, ..., \theta^s, V_1, ..., V_r\Big)\Big) - \sum_{p=1}^{s} T\Big(\theta^1, ..., L_X \theta^p, ..., \theta^s, V_1, ..., V_r\Big)$$
$$+ \sum_{p=1}^{s} T\Big(\theta^1, ..., \theta^s, V_1, ..., L_X V^p, ..., V_r\Big).$$

Pour tout $\theta^1, ..., \theta^s \in \Omega^1(M)$ et $V_1, ..., V_r \in \mathcal{X}(M)$.

Proposition 3.5.1. *Soit M une variété différentiable, et soit X un champ de vecteurs sur M et φ_t le groupe à un paramètre induit par X .*
Pour tout tenseur T de type (s,r) sur M, on a :
$\left(L_X T\right)_x = \dfrac{d}{dt}_{|_{t=0}} \left(\varphi_t^* T\right)_x$ *où* $x \in M$

Remarque 3.5.1. *Pour $T \in \mathcal{F}^{(1,0)}(M)$, i.e lorsque T est un champ de vecteurs sur M, on retrouve l'expression du crochet de Lie, en fonction du groupe local à un paramètre induit par X .*
i.e $\left(L_X Y\right)_x = [X,Y]_x = -\dfrac{d}{dt}_{|_{t=0}} \left((\varphi_t)_* Y\right)_x.$

Conclusion

Ce travail vise à éclairer les concepts fondamentaux de la géométrie différentielle et des tenseurs, avec un accent particulier sur la structure des variétés différentielles, ceci constitue une introduction fondamentale au concept de la géométrie riemannienne en tant qu'outil Mathématique puissant qui peut être utilisé un pont pour comprendre et élargir les concepts dans le cadre des espaces métriques, ce qui en fait une base pour tout chercheur souhaitant se plonger dans des applications physiques ou mathématiques modernes qui s'appuient sur la géométrie riemannienne(relativité générale, géométrie différentielle contemporaine, théorie des champs).

Résumé

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la géométrie différentielle. il s'agit dans un premier temps de présenter quelques objets de la géométrie différentielle : variétés différentiables qui sont des espaces localement similaires à l'espace euclidien, on introduit ensuite les champs de vecteurs et les formes différentielles.
Dans le dexiéme temps de ce travail est consacrée à la notion de tenseur, un objet Mathématique qui généralise les scalaires, les vecteurs et les formes. les tenseurs jouent un rôle fondamental en géométrie différentielle et en physique.
Enfin, ces concepts constituent une introduction à la géométrie riemannienne en tant qu'outil Mathématique puissant utilisé dans des applications physiques ou Mathématiques.

Mots clés : Espace Topologique, Variétés Topologiques, Variétés Différentielles, Espace Tangent, Tenseurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alain Bouvier, Michel George et François Le Lionnais, Dictionnaire des mathématiques, PUF, 1979.

[2] W. Batat : Cours géometrie, poste graduation, magister, ENPO 2016-2017.

[3] W.M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, New York : Academic Press, (1975).

[4] N,Bourbaki . Topologie Générale . Paris . Hermann . 1971.

[5] M.BERGER-B.GOSTIAUX. Géométrie différentielle : variétés,courbes et surfaces.PUF 1992.

[6] David B. Gauld, « Nearness - a better approach to topology », Math. Chronicle, vol. 7, nos 1-2, 1978, p. 80-90.

[7] R. Derkaoui : Mémoire de diplôme d'études, magister, poste graduation ENPO 2017-2018.

[8] G. Calvaruso, A. Zaeim, On the symmetries of the Lorentzian oscillator group, Collect. Math. 68 : 51. doi :10.1007/s13348-016-0173-3, (2017).

[9] John. M Lee. Riemannian Manifolds, Introduction to curvature. 1997,Springer.

[10] M. GOZE - A. BOUYAKOUB. Sur les algèbres de Lie munie d'uneforme symplectique. Rendiconti Seminario Facoltà Scienze. UniversitàCalgiari Vol. 37 Fasc. 57 1(1987) 86-97.

[11] M. GOZE - Y. KHAKIMDJANOV Nilpotent Lie algebras.KluwerAca-demic Publishers. Dordreicht / Boston / London (1996).

[12] Jacques Lafontaine - Éditeur PUG - Librairie Decitre.

[13] Jacques Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles [détail des éditions]

[14] K. D. Joshi, Introduction to General Topology, New Age International, 2004 (1re éd. 1983)

[15] Laurent Schwartz, Théorie des ensembles et topologie, vol. 1, Hermann, 1991 (ISBN 2705661611, OCLC 757664001), p. 162.

[16] J.F.ADAMS. Vector fields on spheres. Ann. of Maths. (1962).

[17] M.BERGER-B.GOSTIAUX. Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces. PUF 1992.

[18] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, New York : Academic Press, (1983).