RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques»

Option :
«Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles»

Présenté Par :
Belhadj Mehdi Nourhane

Sous L'intitulé :

L'existence de solutions pour certaines équations différentielles à plusieurs dérivées

Soutenu publiquement le 23 / 06/ 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr HAMDI CHERIF Mountassir	MCA	ESGEE d'Oran	Président
Mr BEDDANI Hamid	MCA	ESGEE d'Oran	Examinateur
Mr BEDDANI Moustafa	MCA	ENS de Mostaganem	Encadrant
Mr BENIA Kheireddine	MCA	Univ. Ibn Khaldoun - Tiaret	Co-Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Louange à Dieu, Seigneur de l’univers, qui m’a comblé de ses bienfaits, m’a guidé tout au long de mes années d’études, et m’a accordé la volonté, la patience et le courage nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadrant, **Monsieur BEDDANI Moustafa**, pour ses précieux conseils, sa disponibilité, ainsi que pour le temps et l’attention qu’il m’a consacrés tout au long de ce mémoire.

J’adresse également mes sincères remerciements à **Monsieur HAMDI CHERIF Mountassir**, qui m’a fait l’honneur de présider le jury, ainsi qu’à **Monsieur BEDDANI Hamid**, pour l’intérêt qu’il a porté à ce travail en tant qu’examinateur.

Mes remerciements vont aussi à **Monsieur BENIA Kheireddine**, **Chef du Département de Mathématiques de l’Université Ibn Khaldoun – Tiaret**, pour son accompagnement, son encadrement pédagogique et le soutien qu’il n’a cessé d’apporter tout au long de cette formation.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, et en particulier ma famille, mes enseignants et mes camarades, pour leur appui moral et leurs encouragements constants.

Dédicace

À mes parents, pour leur amour et leur soutien sans limites.

À mes amis les plus proches, pour les moments partagés, les sourires, et les silences compris.

Et surtout, à ma tante Sakina pour sa tendresse, et sa présence qui m’a toujours réchauffé le cœur.

ملخص

في هذه المذكرة، تطرقنا إلى دراسة وجود حلول لبعض أنواع المعادلات التفاضلية باستعمال المشتقات الكسرية من نوع ريمان–ليوفيل (Riemann–Liouville) ومشتقة هيلفر (Hilfer). وقد اعتمدنا على مفاهيم أساسية من الحساب الكسري، مع توظيف أدوات تحليلية مثل مبرهنة باناش للنقطة الثابتة لإثبات وجود ووحدانية الحلول. يشكل هذا العمل مساهمة نظرية في فهم سلوك المعادلات التفاضلية الكسرية ذات الشروط الحدية.

Abstract

In this thesis, we studied the existence of solutions for certain types of differential equations using Riemann–Liouville fractional derivatives and the Hilfer derivative. The work is based on fundamental concepts from fractional calculus and employs analytical tools such as Banach's Fixed Point Theorem to demonstrate the existence and uniqueness of solutions. This study provides a theoretical contribution to the analysis of boundary value problems involving fractional differential equations.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l’existence de solutions pour certains types d’équations différentielles en utilisant les dérivées fractionnaires de Riemann–Liouville et la dérivée de Hilfer. Le travail repose sur les concepts fondamentaux du calcul fractionnaire et utilise des outils analytiques tels que le théorème du point fixe de Banach pour démontrer l’existence et l’unicité des solutions. Cette étude constitue une contribution théorique à l’analyse des équations différentielles fractionnaires avec conditions aux limites.

Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail :
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$: Ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels strictement positifs.
- $\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$: Ensemble des entiers naturels strictement positifs (i.e. $\mathbb{N} \setminus \{0\}$).
- $\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes.

Espaces fonctionnels :
- $C([a,b])$: Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.
- $C_0([a,b]) \equiv C([a,b])$: (notation équivalente) Espace des fonctions continues sur $[a,b]$.
- $AC([a,b])$: Espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.
  On a :

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists\, \varphi \in L^1([a,b]) \text{ tel que } f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad \text{pour p.p. } x \in [a,b].$$

Fonctions et opérateurs spéciaux :
- $\Gamma(\cdot)$: Fonction Gamma.
- I_a^α : Intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
- $B(\cdot,\cdot)$: Fonction Bêta.
- ${}^{\mathrm{RL}}D_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.
- ${}^{\mathrm{C}}D_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.

Abréviations :
- R-L : Riemann–Liouville.

Introduction Générale

Le calcul fractionnaire est un domaine de recherche et de développement intensif. Il s'agit d'une théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire, qui unifie et généralise les notions classiques de différentiation d'ordre entier et d'intégration répétée. Ce domaine trouve de nombreuses applications en ingénierie [7], en physique [5], en chimie [2], ainsi qu'en biologie [14].

Historiquement, l'idée d'une dérivation non entière a été évoquée dès le XVII$^{\text{e}}$ siècle par Leibniz, qui introduisit le symbole $\frac{d^n y}{dx^n}$ pour désigner la dérivée d'ordre n. Cette notation, bien que classique aujourd'hui, souleva des questions fondamentales à l'époque. Guillaume de l'Hôpital demanda alors : « Que se passerait-il si $n = \frac{1}{2}$? ». En réponse, Leibniz écrivait en 1695 : « Ainsi il s'ensuit que $d^{1/2}(x)$ sera égal à $x^2\sqrt{dx : x}$. Un paradoxe apparent dont on tirera un jour d'utiles conséquences. » Ces réflexions ont marqué le point de départ d'un domaine qui a connu une évolution progressive, enrichie par les travaux de grands mathématiciens tels que Euler, Lagrange, Liouville, Riemann, Grunwald et Letnikov.

Au fil du temps, plusieurs définitions rigoureuses des dérivées fractionnaires ont été proposées, chacune adaptée à un contexte spécifique. La dérivée de Riemann–Liouville constitue l'une des formulations les plus anciennes et repose sur une extension de l'intégrale multiple à un ordre réel. Plus récemment, la dérivée de Caputo a gagné en popularité dans les modèles physiques car elle permet l'utilisation de conditions initiales classiques. Quant à la dérivée de Hilfer, elle offre un compromis entre les deux précédentes en interpolant entre leurs structures, ce qui lui confère une grande souplesse dans l'étude de systèmes complexes et dynamiques.

Ces approches variées ont permis de mieux comprendre et modéliser un large éventail de phénomènes, en particulier à travers les équations différentielles fractionnaires non linéaires. C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent mémoire, qui a pour objectif d'étudier l'existence de solutions pour certains problèmes différentiels d'ordre fractionnaire.

Le but de ce mémoire est de présenter des résultats d'existence relatifs à certains problèmes différentiels non linéaires d'ordre fractionnaire. Il est structuré en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, intitulé « Préliminaires », nous rassemblons quelques définitions, notations et outils de base concernant le calcul fractionnaire, notamment les fonctions spéciales (fonction Gamma d'Euler et fonction Bêta), ainsi que les différentes approches des opérateurs fractionnaires (intégration et dérivation). Le chapitre se termine par la présentation de quelques théorèmes de points fixes.

Dans le second chapitre, nous étudions un problème aux limites faisant intervenir quatre dérivées fractionnaires de Riemann–Liouville.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles séquentielles impliquant la dérivée de Hilfer.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction au calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions et théorèmes importants que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire [4] [12] [19]. On désigne par $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues définies sur l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles muni de la norme suivante

$$\|x\|_C = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Soit $p > 1$, on note $L^p([a,b]), p > 1$ l'espace des fonctions p intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles, défini par :

$$L^p([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } \|f\|_p < \infty\},$$

dont la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 Fonction Gamma

Définition 1.2.1. *Soit x un nombre réal strictement positif, on définie la fonction gamma par l'expression suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt.$$

Propriété 1.1. *La fonction gamma vérifie les axiomes suivants*

- *Pour un entier positif n,*

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \textit{(Relation avec la factorielle)}.$$

- *Pour $x > 0$, on a*

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad \textit{(Formule de récurrence)}.$$

- *Nous avaons*

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Démonstration. Démontrons la formule $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier positif n,

Nous savons que $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$.

En utilisant la démonstration par récurrence on trouve

- Cas de base : Pour $n = 1$, la proposition est bien vérifiée, en effet $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1 = 0!$.
- Supposons que $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour un entier $k \geq 1$. Alors

$$\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k) = k \cdot (k-1)! = k!.$$

Donc $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

Maintenant montrons la formule de récurrence $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ On sait que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Par Intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \\ &= z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = z \cdot \Gamma(z).\end{aligned}$$

Vérifions que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Par définition de la fonction Gamma on a $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$ et
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt$.

En utilisant le Changement de variable $t = u^2$ on obtient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{u}e^{-u^2} \cdot 2u\,du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$

Donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

□

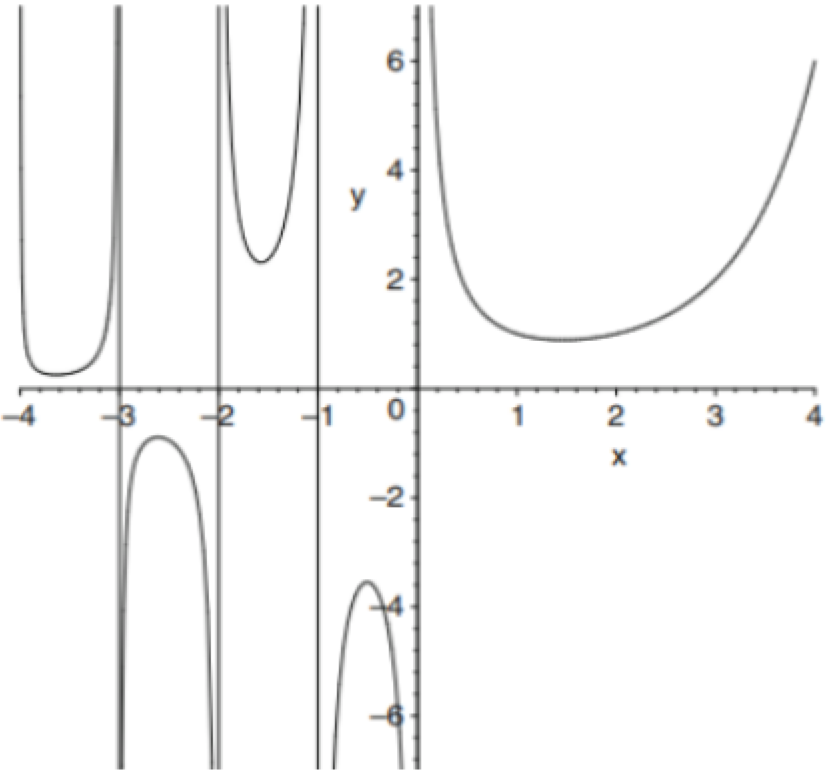

FIGURE 1.1 – graphe de fonction $\Gamma(z)$

1.2.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.2. *Soient* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^*$, *on définie* ***la fonction Bêta*** *par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Propriété 1.2. *La fonction Bêta vérifie les propriétés suivantes :*

- $B(x, y) = B(y, x), \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$
- $yB(x+1, y) = xB(x, y+1), \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$
- $B(1, 1) = 1$ *et* $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

Démonstration. Montrons que $B(x, y) = B(y, x)$, nous avons $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. En échangeant x et y, on obtient facilement le résultat. La preuve de deuxième axiome se fait de même analogue que le premièr. Finalement, le calcul de $B(1, 1)$ et $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ repose totalement sur valeurs de $\Gamma(1)$ et $\Gamma(\frac{1}{2})$ en utilisant la relation $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. □

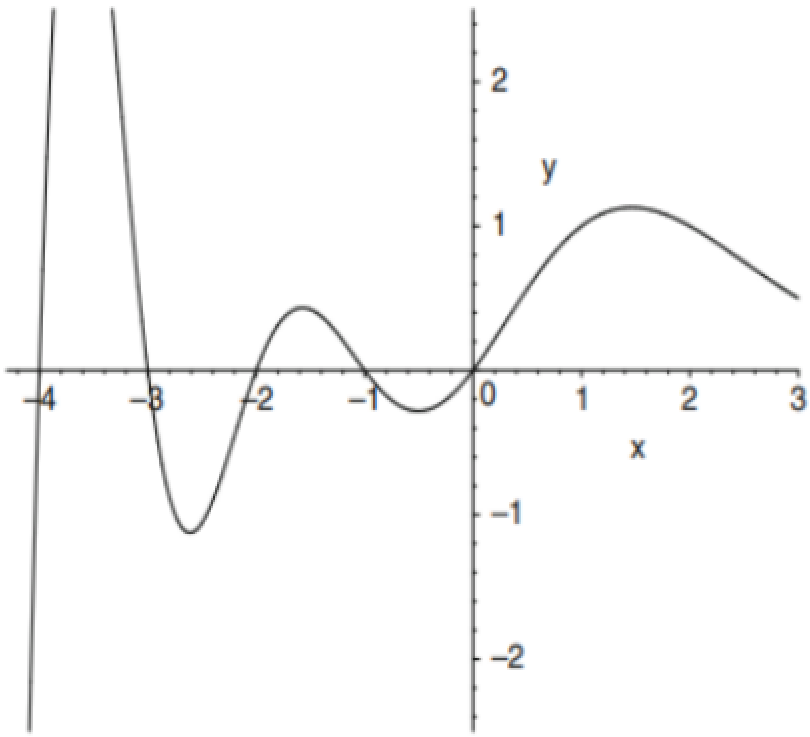

FIGURE 1.2 – graphe de fonction β(x, y)

1.2.3 Relation avec la fonction Gamma

Propriété 1.3. *La fonction bêta est liée à la fonction gamma par la formule suivante :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{y-1}d\tau\right) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\tau^{y-1}e^{-(t+\tau)}dtd\tau. \end{aligned}$$

Utilisons le changement de coordonnées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} u = t+\tau, \\ v = t/(t+\tau), \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} t = uv, \\ \tau = u(1-v), \end{array} \right.$$

Donc,

$$\frac{\partial(z,\tau)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u,$$

alors,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} (uv)^{\mathrm{x}-1}(u(1-v))^{y-1}e^{-u}|-u|dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^{+\infty} u^{\mathrm{x}+y-1}v^{\mathrm{x}-1}(1-v)^{y-1}e^{-u}dudv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\mathrm{x}+y-1}du\right)\left(\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\right) \\
&= \Gamma(x+y)B(x,y).
\end{aligned}$$

Ce qui entraine que $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ où $\Gamma(x+y) \neq 0$. Si x, y sont des entiers naturels, on obtient :

$$B(x,y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}.$$

□

1.3 Outils d'analyse fonctionnelle

Soient E, F deux espaces de Banach, on désigne par $C(E,F)$ l'espace de toutes les fonctions $f : E \to F$ continues.

1.3.1 Théorème d'Arzela-Ascoli

Soit M un sous ensemble de $C(E,F)$.

1.On dit que M est équicontinue en $u \in E$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|f(u) - f(v)\|_F < \epsilon,$$

et ceci pour tout $f \in M$ et pour tout $v \in E$ vérifiant :

$$\|u - v\|_E < \eta.$$

2. On dit que M est équicontinue sur E, si M est équicontinue en tout $u \in E$. En particulier, si $E = [a, b]$ et $F = \mathbb{R}$. On dit que $M \in C(E, F)$ est équicontinue sur E si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f \in M, \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$.
On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq C \quad \forall f \in M.$$

Théorème 1.3.1. *Soit M une partie de $C([a, b])$ muni de la norme de la convergence uniforme.*
M est relativement compact dans $C([a, b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.

Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur. On dit que :

1. A est compact si l'image par A de tout borné de E est relativement compact (c'est-à-dire que son adhérence est compact) dans F.
2. A est complètement continu s'il est continu et compact.

Théorème 1.3.2 (Théorème d'Arzela-Ascoli généralisé)**.** *Dans l'espace de Banach. Soient E un espace de Banach compact et F un espace de Banach quelconque. Une partie M de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si :*

- *M est équicontinue sur E.*
- *M uniformément borné.*
- *$M(x) = \{f(x)/f \in M\}$ est relativement compact dans F,*

1.3.2 Principe des applications contractantes

Soit E un espace Banach. On dit qu'une application.
$T : E \longrightarrow E$ est contractante, s'il existe $0 < K < 1$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times E : \|T(x) - T(y)\|_E \leqslant K\|x - y\|_E.$$

1.4 Intégrale et dérivée fractionnaire

1.4.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale

$$I^{(1)} = \int_a^t f(\tau)d\tau \tag{1.1}$$

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau)d\tau. \tag{1.2}$$

D'après le théorème du Fubini, on trouve ;

$$I^{(2)}f(t) = \frac{1}{1!}\int_a^t (t-\tau)^{2-1} f(\tau)d\tau. \tag{1.3}$$

En répétant la même opération n fois, on obtient

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \dots \cdot \int_a^{t_{m-1}} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

pour tout entier n. Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$. Riemann rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non-enters, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit. Soit $f \in L^1\,[a, +\infty\,[, a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f de borne inférieure a est définie par

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau,\ a < t < +\infty, \tag{1.4}$$

et on a : $I_{a_+}^0 f(t) = f(t)$ (i.e. $I_{a_+}^0$ est l'opérateur identité).

Remarque 1.4.1. Par un changement de variable $s = t - \tau$, on remarque que $I_{a_+}^{\alpha}$ peut être ecrit sous la forme suivante :

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s)ds, \tag{1.5}$$

Intégrales fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. On pose $f(t) = (t-a)^{\beta}, t > a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > -1$:

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta} d\tau.$$

En utilisant le changement de variable $\tau = a + (t-a)s$ où s varie de 0 à 1 et la fonction Bêta, on obtient

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a_+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t-a-(t-a)s]^{\alpha-1}[s(t-a)]^{\beta}(t-a)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta}\beta(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc,

$$I^{\alpha}_{a_+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{1.6}$$

Pour $a = 0$, on a

$$I^{\alpha}_{0_+} t^{\beta} = I^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \tag{1.7}$$

2. La fonction constante $f(t) = C$

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a_+} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} C d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{-(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha} \right]_a^t \\ &= \frac{C}{\alpha\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}. \end{aligned}$$

D'où,

$$I^{\alpha}_{a_+} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}. \tag{1.8}$$

Propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L

Théorème 1.4.1. *Si $f \in L^1[a,b]$ et $\alpha > 0$ alors $I^{\alpha}_{a+}f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a :*

$$I^{\alpha}_{a+}f \in L^1[a,b].$$

Démonstration. Soit $f \in L^1[a,b]$; on a :

$$I^{\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

avec $-\infty \leqslant a < t < +\infty$
tel que :

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 < u \leqslant b-a \\ 0, \quad u \in \mathbb{R}-(0,b-a) \end{cases}$$

et

$$\mathrm{h(u)} = \begin{cases} f(u), \quad a \leqslant u \leqslant b \\ 0, \quad u \in \mathbb{R}-[a,b] \end{cases}$$

comme $g, h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $I^{\alpha}_{a+}f \in L^1[a,b]$. □

Théorème 1.4.2. *Pour $f \in L^1[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivant :*

$$I^{\alpha}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)(t) = I^{\alpha+\beta}_{a+}f(t),$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Démonstration. Soit $f \in L^1[a,b], \alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(I^{\beta}_{a+}f\right)(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right]d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left[\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right]d\tau. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.2. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $h_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$*

$$I^{\alpha}_{a+}f(t) = \int_a^t h_{\alpha}(t-\tau)f(\tau)d\tau = \left(h_{\alpha} * f\right)(t).$$

Propriété 1.4. *L'opérateur* I_{a+}^{α} *est linéaire.*

Démonstration. En effet, si f et g sont deux fonctions telles que $I_{a+}^{\alpha} f$ et $I_{a+}^{\alpha} g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels arbitraires, on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha}\left(c_1 f + c_2 g\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(c_1 f + c_2 g\right)(\tau) d\tau \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ &= c_1 I_{a+}^{\alpha} f(t) + c_2 I_{a+}^{\alpha} g(t). \end{aligned}$$

□

Propriété 1.5. *Soit* $f \in C([a,b))$. *Alors on a*
1. $\frac{d}{dt}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(t) = \left(I_{a+}^{\alpha-1} f\right)(t), \quad \alpha > 1.$
2. $\lim_{\alpha \to 0+}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t), \quad \alpha > 0.$

Preuve : Appliquons règle de dérivation de Leibniz (**??**) *nous obtenons*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau\right) \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha-1+1)} \int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t (t-\tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau = \left(I_{a+}^{\alpha-1} f\right)(t). \end{aligned}$$

2. Pour la dernière identité, comme $f \in C([a,b))$, *nous avons*

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

D'après la relation (1.5) *on peut écrire :*

$$I_{a+}^{\alpha} 1 = \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \longrightarrow 1.$$

quand $\alpha \longrightarrow 0^+$*. Donc pour un certain* $\delta > 0$*, on aura*

$$\left| I^{\alpha}_{a_+} f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right| \tag{1.9}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \tag{1.11}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \tag{1.12}$$

D'une part, on a f *est continue sur* $[a, b]$ *alors,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, \tau \in [a, b] : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \epsilon.$$

Ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \epsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\epsilon \delta^{\alpha}}{\alpha}. \tag{1.13}$$

D'autre part,

$$\int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \tag{1.14}$$

$$\leq 2 \sup_{\xi \in [a,t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \forall t \in [a, b] \tag{1.15}$$

$$= 2M \left(\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} \right), \forall t \in [a, b], \tag{1.16}$$

où $M = \sup_{\xi \in [a,t]} |f(\xi)|$.
Une combinaison de (1.9) *et* (1.13) *et* (1.14) *nous donne :*

$$\left| I^{\alpha}_{a_+} f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| \leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\epsilon \delta^{\alpha} + 2M \left((t-a)^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[\epsilon \delta^{\alpha} + 2M \left((t-a)^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right) \right],$$

faisons tendre α *vers* 0^+*, on obtient :*

$$\left| I^{\alpha}_{a_+} f(t) - 1 f(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \forall \epsilon > 0,$$

ce qui montre que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} I^{\alpha}_{a_+} f(t) - f(t) = 0.$$

Les lemmes suivants fournissent quelques propriétés de $I^{\alpha}_{a^+}$. Les preuves peuvent être trouvées dans [25].

Lemme 1. *Pour $\alpha > 0$, $I^{\alpha}_{a^+}$ envoie $C[a,b]$ dans $C[a,b]$.*

Lemme 2. *Soit $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$. Alors $I^{\alpha}_{a^+}$ est borné de $C_\gamma[a,b]$ dans $C_\gamma[a,b]$.*

Lemme 3. *Soit $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$. Si $\gamma \leq \alpha$, Alors $I^{\alpha}_{a^+}$ est borné de $C_\gamma[a,b]$ dans $C[a,b]$.*

Lemme 4. *Soit $0 \leq \gamma < 1$ et $f \in C_\gamma[a,b]$. Alors*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(a) = \lim_{x \to a^+} I^{\alpha}_{a^+} f(x) = 0,\ 0 \leq \gamma < \alpha.$$

Démonstration. Notez que d'après le lemme 3, $I^{\alpha}_{a^+}\ f \in C_\gamma[a,b]$. Puisque $f \in C_\gamma[a,b]$ Alors $(x-a)^\gamma f(x)$ est continue sur $[a,b]$, il existe $M > 0$ telle que

$$|(x-a)^\gamma f(x)| < M, \quad x \in [a,b].$$

Donc

$$|I^{\alpha}_{a^+} f(x)| < M[I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{-\gamma}].$$

Par le lemme

$$|I^{\alpha}_{a^+} f(x)| < M \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)} (x-a)^{\alpha-\gamma}.$$

Puisque $\alpha > \gamma$, le membre de droite $\to 0$ comme $x \to a^+$. □

1.4.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit $f \in L^1\,[a,+\infty\,[, a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*_+, n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$$D^{\alpha}_{a_+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.17}$$

$$= D^n I^{n-\alpha}_{a_+} f(t), \tag{1.18}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$.
On a en particulier

1. $D^0_{a+}f(t) = D^1 I^1_{a+} f(t) = f(t)$ $\big(D^0_{a+}$ est l'opérateur identité).
2. Pour $\alpha = n$ où n est un entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre n.

$$D^n_{a+}f(t) = D^{n+1} I^{n+1-n}_{a+} f(t) = D^{n+1} I^1_{a+} f(t) = D^n f(t).$$

Lemme 5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha$, alors*

$$D^\alpha_{a+} = D^n I^{n-\alpha}_{a+}.$$

Démonstration. L'hypothèse sur n implique que $n \geq [\alpha] + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D^n I^{n-\alpha}_{a+} &= \left(D^{[\alpha]+1} D^{n-[\alpha]-1}\right) \left(I^{n-[\alpha]-1}_{a+} I^{[\alpha]+1-\alpha}_{a+}\right) \\ &= D^{[\alpha]+1} \left(D^{n-[\alpha]-1} I^{n-[\alpha]-1}_{a+}\right) I^{[\alpha]+1-\alpha}_{a+} \\ &= D^{[\alpha]+1} I^{[\alpha]+1-\alpha}_{a+} = D^\alpha_{a+}, \end{aligned}$$

car $D^{n-[\alpha]-1} I^{n-[\alpha]-1}_{a+} = I.$ □

Théorème 1.4.3. *Soit f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann- Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors*

$$D^\alpha_{a+}\left(c_1 f(t) + c_2 g(t)\right) = c_1 D^\alpha_{a+} f(t) + c_2 D^\alpha_{a+} g(t).$$

Lemme 6. *Soit $0 < \alpha < 1$, on a alors*

$$[D^\alpha_{a^+}(t-a)^{\alpha-1}](x) = 0.$$

Lemme 7. *Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1(a,b)$, pour $x \in [a,b]$, on a les propriétés suivantes*

$$(I^\alpha_{a^+} I^\beta_{a^+} f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a^+} f)(x),$$

et

$$(D^\alpha_{a^+} I^\alpha_{a^+} f)(x) = f(x).$$

En particulier, si $f \in C_\gamma[a,b]$ ou $f \in C[a,b]$, alors ces égalités restent valable.

1.4.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ d'une fonction $f \in L^1([a,+\infty))$ est donnée par

$$^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx, \qquad (1.19)$$

avec $n - 1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo

Notation 1. *On note que l'operateur D^n, $n \in \mathbb{N}$ est la différentiabilité d'ordre entier n i.e :*

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Lemme 8. *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^cD^\alpha f(t)$ existe, alors :*

$$ {}^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t). \tag{1.20}$$

Lemme 9. *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction telle que ${}^cD^\alpha f(t)$ existe, on alors*

$$\begin{aligned}
&\lim_{a \to n} {}^cD^a f(t) = f^{(\pi)}(t), \ \textit{et} \\
&\lim_{a \to n-1} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Démonstration. On utilise l'intégration par partie on trouve

$$\begin{aligned}
{}^cD^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(- f^{(n)}(x) \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t -f^{n+1}(x) \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha} dx \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(f^{(n)}(0) t^{n-\alpha} + \int_0^t f^{(n+1)}(x)(t-x)^{n-\alpha} dx \right).
\end{aligned}$$

En prenant la limite pour $\alpha \to n$ et $\alpha \to n-1$, respectivement, on a

$$\lim_{\alpha \to n} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n)}(0) + f^{(n)}(x) \Big|_{x=0}^{t} = f^{(n)}(t),$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to n-1} {}^cD^\alpha f(t) &= \left(f^{(n)}(0)t + f^{(n)}(x)(t-x) \right) \Big|_{x=0}^{t} - \int_0^t -f^{(n)}(x) dx \\
&= f^{(n-1)}(x) \Big|_{x=0}^{t} \\
&= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.4.3. *Pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on a*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \to n} D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t) \ \textit{et} \\
&\lim_{\alpha \to n-1} D^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t).
\end{aligned}$$

1.4.4 Dérivée fractionnaire de Hilfer

La dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre $0 < \alpha < 1$, et de type $0 \leq \beta \leq 1$, de la fonction $f(.)$ est définie par :

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} f(x) = (I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} D(I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} f))(x).$$

Ou

$$D = \frac{d}{dx}$$

La dérivée fractionnaire de Hilfer est considéré comme un interpolateur entre le Riemann-Liouville et Caputo, puis les remarques suivantes peuvent être présentées pour montrer la relation avec les opérateurs Caputo et Riemann-Liouville.

Remarque 1.4.4.
(i) L'opérateur $D_{a^+}^{\alpha,\beta}$ récrit également comme suit

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} = I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} D I_{a^+}^{(1-\beta)(1-\alpha)} = I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} D_{a^+}^{\gamma}, \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta.$$

(ii) Si $\beta = 0$, on aura la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :

$$D_{a^+}^{\alpha} = D_{a^+}^{\alpha,0}.$$

(iii) Si $\beta = 1$, on aura la dérivée fractionnaire de Caputo :

$${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} = I_{a^+}^{(1-\alpha)} D.$$

1.5 Théorème de Point Fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques.

Théorème de l'application contractante

Soient (M, d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application, On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que, pour tout x, y de M, on a

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y). \tag{1.21}$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.
Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 1.5.1. *Théorème du point fixe de Banach (1922)*
Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus,

$$\text{si } x_0 \in M \text{ et } x_n = T(x_{n-1}), \text{ on a} \tag{1.22}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ et } d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \quad n \geq 1, \tag{1.23}$$

x étant le point fixe de T.

Remarque 1.5.1. *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contractante) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe. En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de $T^?$ et grâce à l'unicité $T(x) = x$ e résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.*

Remarque 1.5.2. *Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant : Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : B \to M$ telle que*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in B \text{ et } k < 1, \tag{1.24}$$

où

$$B = \{x \in M, d(x, z) < \varepsilon\} \quad z \in M \text{ et } \varepsilon > 0. \tag{1.25}$$

Si $d(z, T(z)) < \varepsilon(1-k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

1.6 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

[9] Soit E un espace de Banach, et soit K un sous-ensemble fermé, convexe et non vide de E.
Soient A et B deux opérateurs de K dans E tels que :

(1) A est un opérateur complètement continu (i.e., continu et compact),

(2) B est une contraction, c'est-à-dire qu'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que

$$\|B(x) - B(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in K,$$

(3) Pour tout $x \in K$, on a $A(x) + B(x) \in K$.

Alors, l'opérateur $T = A + B$ a un point fixe dans K, c'est-à-dire qu'il existe $x \in K$ tel que

$$T(x) = A(x) + B(x) = x.$$

Chapitre 2

Problème aux Limites d'une Equation Differentielle Avec 4 Dérivées Fractionnaire de RL

2.1 Proposition du probléme

Dans ce chapitre, on traitera l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle de la forme suivante : [17]

$$\begin{cases} (\lambda D^{\alpha} + (1-\lambda)D^{\beta})x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in (0, T), \\ x(0) = 0, \quad \mu D^{\gamma_1} x(T) + (1-\mu) D^{\gamma_2} x(T) = \gamma_3, \end{cases} \tag{1.1}$$

où D^{ϕ} désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\phi \in \{\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2\}$, avec $1 < \alpha, \beta < 2$ et $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \alpha - \beta$, $\gamma_3 \in \mathbb{R}$ sont des constantes données, $0 < \lambda \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, et $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction continue.

2.1 Préliminaires

Dans cette partie, nous présentons quelques définitions, lemmes, propriétés et notations que nous utiliserons plus tard. Pour plus de détails, veuillez consulter [1][6][17].

Lemme 10. *[1] [17] Soit $\alpha > 0$ et $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$. Alors l'équation différentielle fractionnaire*

$$D^{\alpha} y(t) = 0$$

admet une solution unique de la forme

$$y(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et où n est l'entier tel que $n - 1 < \alpha < n$.

Lemme 11. *[1] [17] Soit $\alpha > 0$. Alors, pour toute fonction $y \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, on a*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} y(t) = y(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $n - 1 < \alpha < n$.

Pour simplifier les notations, nous introduisons la constante

$$\Lambda = \frac{\mu\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(n-\mu)}{\Gamma(\alpha-\mu)\, \Gamma(n)},$$

$$= \frac{(1-\mu)\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(n-\mu)}{\Gamma(\alpha-\mu)\, \Gamma(n)}.$$

Lemme 12. *[1] [17] Soit $f : (0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $0 < \alpha < 1$. Alors, l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$D^\alpha x(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \quad x(0) = 0, \tag{2.1}$$

est équivalente à l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Preuve 2.1. *Supposons que $x \in C(0, T]$ satisfait l'équation différentielle fractionnaire :*

$$D^\alpha x(t) = f(t), \quad x(0) = 0.$$

Rappelons que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ est définie comme :

$$D^\alpha x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right).$$

En appliquant l'opérateur I^α (l'intégrale fractionnaire d'ordre γ) aux deux membres de l'équation $D^\alpha x(t) = f(t)$, et en utilisant la propriété suivante de l'inversion :

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad \textit{avec } n = \lceil \alpha \rceil = 1,$$

et puisque $x(0) = 0$, on a :

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t).$$

Donc,

$$x(t) = I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Réciproquement, supposons que :

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

Alors, en utilisant la propriété $D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$, on obtient :

$$D^\alpha x(t) = D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t),$$

ce qui confirme que $x(t)$ satisfait bien l'équation différentielle fractionnaire donnée avec la condition initiale $x(0) = 0$.

Ainsi, les deux formulations sont équivalentes.

□

2.2 Formulation intégrale

Dans le lemme suivant, nous allons donner une forme intégrale du problème (1.1).

Lemme 13. *Le problème (1.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} x(t) \quad &= \frac{\lambda-1}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds \\ &+ t^{\alpha-1}\Bigg[\frac{1}{\Lambda}\Bigg(\gamma_3 - \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_1-1}x(s)\,ds \\ &\quad - \frac{\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_1)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_1-1}f(s,x(s))\,ds \\ &\quad - \frac{(1-\mu)(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_2-1}x(s)\,ds \\ &\quad - \frac{1-\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_2-1}f(s,x(s))\,ds\Bigg)\Bigg], \quad t\in[0,T]. \end{aligned}$$

Démonstration. À partir de la première équation du problème (1.1), on a :

$$D^\alpha x(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda}D^\beta x(t) + \frac{1}{\lambda}f(t,x(t)), \quad t\in J=[0,T]. \tag{2.3}$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville d'ordre α des deux côtés, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) = &\frac{\lambda-1}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds + C_1t^{\alpha-1} + C_2t^{\alpha-2}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Puisque $1<\alpha<2$, la première condition au bord implique que $C_2=0$, donc :

$$\begin{aligned} x(t) = &\frac{\lambda-1}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s)\,ds \\ &+ \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds + C_1t^{\alpha-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En appliquant la dérivée fractionnaire de Riemann–Liouville d'ordre $\psi \in \{\gamma_1, \gamma_2\}$, avec $0 < \psi < \alpha - \beta$, à cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} D^{\psi} x(t) = & \frac{\lambda - 1}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\psi)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-\psi-1} x(s)\,ds \\ & + \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\psi)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\psi-1} f(s,x(s))\,ds + C_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\psi)} t^{\alpha-\psi-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

En remplaçant ψ successivement par γ_1 et γ_2, et en utilisant la deuxième condition , on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_1-1} x(s)\,ds \\ & + \frac{\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_1-1} f(s,x(s))\,ds + \frac{\mu\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma_1)} T^{\alpha-\gamma_1-1} C_1 \\ & + \frac{(1-\mu)(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_2-1} x(s)\,ds \\ & + \frac{1-\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_2-1} f(s,x(s))\,ds + \frac{(1-\mu)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\gamma_2)} T^{\alpha-\gamma_2-1} C_1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En regroupant les termes contenant C_1, on déduit :

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{1}{\delta} \Bigg[& \gamma_3 - \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_1-1} x(s)\,ds \\ & - \frac{\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_1-1} f(s,x(s))\,ds \\ & - \frac{(1-\mu)(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_2-1} x(s)\,ds \\ & - \frac{1-\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_2-1} f(s,x(s))\,ds \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En remplaçant cette expression de C_1 dans l'équation (2.5) obtenue précédemment pour $x(t)$, on obtient l'équation intégrale souhaitée. La réciproque peut être prouvée par un calcul direct. Cela conclut la démonstration. □

2.3 Résultat d'existence et d'unicité

Dans ce suit, nous présentons les résultats d'existence et d'unicité pour la solution du problème (1.1).

Soit $C([0,T],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme usuelle :

$$\|x\| := \sup_{t\in[0,T]} |x(t)|.$$

On note que le problème aux limites (1.1)peut être transformé en un problème de point fixe. Pour cela, nous définissons l'opérateur $\mathcal{F} : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} F_x(t) \leq \sup_{t\in J} \Bigg\{ & \frac{\lambda-1}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} x(s)\,ds \\ & + \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))\,ds \\ & + \frac{t^{\alpha-1}}{\Lambda}\Bigg[\quad \gamma_3 - \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_1-1} x(s)\,ds \\ & \quad - \frac{\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_1-1} f(s,x(s))\,ds \\ & \quad - \frac{(1-\mu)(\lambda-1)}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_2-1} x(s)\,ds \\ & \quad - \frac{1-\mu}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_2-1} f(s,x(s))\,ds \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Où la constante $\Lambda \neq 0$ est définie par l'équation (2.1). On observe que le problème de valeur au bord admet une solution si et seulement si le problème de point fixe associé $x = Fx$ possède un point fixe.

Pour des raisons de commodité de calcul, nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{T^{\alpha-\beta}|\lambda-1|}{\lambda\,\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{T^{2\alpha-\beta-\gamma_1-1}\,\mu|\lambda-1|}{\lambda\,\delta\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1+1)} + \frac{T^{2\alpha-\beta-\gamma_2-1}\,(1-\mu)|\lambda-1|}{\lambda\,\delta\,\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2+1)} \\ \Omega_2 &= \frac{T^{\alpha}}{\lambda\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{2\alpha-\gamma_1-1}\,\mu}{\lambda\,\delta\,\Gamma(\alpha-\gamma_1+1)} + \frac{T^{2\alpha-\gamma_2-1}\,(1-\mu)}{\lambda\,\delta\,\Gamma(\alpha-\gamma_2+1)}. \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1. *Supposons que $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue et qu'elle vérifie l'hypothèse suivante :*

(H1) Il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|, \quad \forall t \in [0,T],\, \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Alors, si

$$L\Omega_2 + \Omega_1 < 1$$

le problème (1.1) admet une unique solution dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

Démonstration. Posons $\sup_{t\in J}|f(t,0)| = N < \infty$, et choisissons

$$R \geq \frac{\Lambda N\Omega_2 + |\gamma_3|T^{\alpha-1}}{\Lambda(1 - L\Omega_2 - \Omega_1)}, \tag{3.5}$$

où Λ est donnée par (11).

Comme première étape, montrons que $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$, où $B_R = \{x \in \mathcal{C} : \|x\| \leq R\}$. Pour tout $x \in B_R$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}x(t)| \leq \sup_{t\in J} \Bigg[& \frac{\lambda-1}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}|x(s)|\,ds + \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|\,ds \\
& + \frac{t^{\alpha-1}}{\Lambda}\Bigg(|\gamma_3| + \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_1-1}|x(s)|\,ds \\
& - \frac{\mu}{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_1-1}|f(s,x(s))|\,ds \\
& - \frac{(1-\mu)(\lambda-1)}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_2-1}|x(s)|\,ds \\
& + \frac{1-\mu}{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_2-1}|f(s,x(s))|\,ds \Bigg)\Bigg] \\
\leq {} & (L\|x\| + N)\Bigg[\frac{T^\alpha}{\lambda\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^{\alpha-\gamma_1-1}\mu}{\lambda\Lambda\Gamma(\alpha-\gamma_1+1)} \\
& + \frac{T^{\alpha-\gamma_2-1}(1-\mu)}{\lambda\Lambda\Gamma(\alpha-\gamma_2+1)} \Bigg] \\
& + \|x\| \Bigg[\frac{T^{\alpha-\beta}(\lambda-1)}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{T^{\alpha-\beta-\gamma_1}\mu(\lambda-1)}{\lambda\Lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1+1)} \\
& + \frac{T^{\alpha-\beta-\gamma_2}(1-\mu)(\lambda-1)}{\lambda\Lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2+1)} \Bigg] \\
& + \frac{|\gamma_3|T^{\alpha-1}}{\Lambda} \\
= {} & (L\Omega_2 + \Omega_1)R + N\Omega_2 + \frac{|\gamma_3|T^{\alpha-1}}{\Lambda} \leq R.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Cela signifie que $\|\mathcal{F}x\| \leq R$, ce qui implique que $\mathcal{F}(B_R) \subset B_R$.
Ensuite, soient $x, y \in \mathcal{C}$. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}x(t) - \mathcal{F}y(t)| &\leq \frac{|\lambda - 1|}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-1} |x-y| \, ds \\
&+ \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,x) - f(s,y)| \, ds \\
&+ \frac{t^{\alpha-1}}{\Lambda} \bigg[\frac{\mu|\lambda-1|}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_1-1} |x-y| \, ds \\
&+ \frac{\mu}{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma_1)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_1-1} |f(s,x) - f(s,y)| \, ds \bigg] \\
&+ \frac{(1-\mu)|\lambda-1|}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-\gamma_2-1} |x-y| \, ds \\
&+ \frac{1-\mu}{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma_2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\gamma_2-1} |f(s,x) - f(s,y)| \, ds \\
&\leq \|x-y\| \bigg[L \bigg(\frac{T^\alpha}{\lambda\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\mu T^{\alpha-\gamma_1}}{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma_1+1)} \\
&+ \frac{(1-\mu)T^{\alpha-\gamma_2}}{\lambda\Gamma(\alpha-\gamma_2+1)} \bigg) + |\lambda-1| \bigg(\frac{T^{\alpha-\beta}}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta+1)} \\
&+ \frac{\mu T^{\alpha-\beta-\gamma_1}}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_1+1)} + \frac{(1-\mu)T^{\alpha-\beta-\gamma_2}}{\lambda\Gamma(\alpha-\beta-\gamma_2+1)} \bigg) \bigg]
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\| \leq (\Omega_2 + \Omega_1) \|x-y\|.$$

Puisque

$$(\Omega_2 + \Omega_1 < 1),$$

alors $\mathcal{F}$ est une contraction.
Par le théorème du point fixe de Banach, $\mathcal{F}$ admet un unique point fixe dans $C([0,T], \mathbb{R})$, qui est la solution unique du problème (1.1).

□

Chapitre 3

Problèmes aux limites d'une équation différentielle fractionnaire séquentielle incluant la dérivée de Hilfer

3.1 Proposition du probléme

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour le problème aux limites suivant : [18]

$$\begin{cases} {}^{H}D_{\psi}^{\alpha,\beta}x(t) + k^{H}\,D_{\psi}^{\alpha-1,\beta}x(t) = f(t,x(t)), & t \in [a,b], \\ x(a) = 0, \\ x(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_a^{\eta_i} \psi'(s)\,x(s)\,ds + \sum_{j=1}^{m} \theta_j x(\xi_j), \end{cases} \tag{3.1}$$

ici, ${}^{H}D_{\psi}^{\alpha,\beta}$ désigne ψ dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α, avec $1 < \alpha < 2$, et de paramètre β, avec $0 \leq \beta \leq 1$, $k \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $a \geq 0$, $\mu_i, \theta_j \in \mathbb{R}$, $\eta_i, \xi_j \in (a,b)$, pour $i = 1,2,\ldots,n$ et $j = 1,2,\ldots,m$, et ψ est une fonction positive et croissante sur (a,b), admettant une dérivée continue $\psi'(t)$ sur (a,b).

Nous utilisons des théorèmes de point fixe dans un espace de Banach approprié pour établir des résultats d'existence.

3.2 Préliminaires

Nous introduisons tout d'abord quelques définitions et lemmes concernant ce chapitre.

Nous notons par $AC^n([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois absolument continues, donné par

$$AC^n([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\ ;\ f^{(n-1)} \in AC([a,b],\mathbb{R})\}.$$

Rappelons qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{N}(y_j - x_j) \leq \delta \implies \sum_{j=1}^{N} |f(y_j) - f(x_j)| \leq \varepsilon,$$

pour toute famille d'intervalles disjoints (x_j, y_j), $1 \leq j \leq N$, dans $[a,b]$. Une fonction f appartient à $AC([a,b])$ si, et seulement si, elle est presque partout différentiable (au sens de Lebesgue) avec une dérivée $g = f'$ appartenant à $L^1([a,b])$, vérifiant

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\,dt \quad \text{pour tout } a \leq x < y \leq b.$$

Définition 3.1.1. *[1][18] Soit (a,b), avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$, un intervalle fini ou infini de la demi-droite $(0,\infty)$ et $\alpha > 0$. De plus, soit $\psi(t)$ une fonction positive, croissante sur $(a,b]$, ayant une dérivée continue $\psi'(t)$ sur (a,b). Le ψ intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville d'une fonction f par rapport à une autre fonction ψ sur $[a,b]$ est définie par*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t > a > 0, \tag{3.2}$$

où $\Gamma(\cdot)$ représente la fonction Gamma.

Définition 3.1.2. *[1][18] Soit $n-1 < \alpha < n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $[a,b]$ un intervalle tel que $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et $f, \psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telles que ψ soit croissante et $\psi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Le ψ dérivée fractionnaire de Hilfer d'une fonction f d'ordre α et de type $0 \leq \beta \leq 1$ est définie par :*

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d^n}{dt^n} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t) \right) = I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} D_{a+}^{\gamma;\psi} f(t), \tag{3.3}$$

où $n = [\alpha]+1$ (avec $[\alpha]$ la partie entière de α), et $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$.

Lemme 14. *[1][18] Soient $\alpha, \rho > 0$. Alors, on a la propriété de semi-groupe suivante :*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} I_{a+}^{\rho;\psi} f(t) = I_{a+}^{\alpha+\rho;\psi} f(t), \quad t > a. \tag{3.4}$$

Nous présentons ensuite l'intégrale et les dérivées fractionnaires ψ d'une fonction puissance.

Proposition 3.1. *[1][8][18] Soient $\alpha \geq 0$, $\upsilon > 0$ et $t > a$. Alors, l'intégrale et la dérivée fractionnaires ψ d'une fonction puissance sont données par :*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} (\psi(s)-\psi(a))^{\upsilon-1}(t) = \frac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\upsilon+\alpha)} (\psi(t)-\psi(a))^{\upsilon+\alpha-1}. \tag{3.5}$$

$$^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} (\psi(s)-\psi(a))^{\upsilon-1}(t) = \frac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\upsilon-\alpha)} (\psi(t)-\psi(a))^{\upsilon-\alpha-1}, \quad n-1 < \alpha < n,\ \upsilon > n. \tag{3.6}$$

Lemme 15. *[8][18] Si $f \in C^n(J,\mathbb{R})$, $n-1 < \alpha < n$, $0 \leq \beta \leq 1$ et $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$, alors :*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} \left({}^{H}D_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f \right)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} \nabla_{\psi}^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a), \tag{3.7}$$

pour tout $t \in J$, où :

$$\nabla_{\psi}^{[n]} f(t) := \frac{1}{\psi'(t)} \frac{d^n}{dt^n} f(t).$$

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

Le lemme auxiliaire suivant, concernant une variante linéaire du problème (3.1), joue un rôle fondamental dans l'établissement des résultats d'existence et d'unicité.

Lemme 16. *Soient $a \geq 0$, $1 < \alpha < 2$, $0 \leq \beta \leq 1$, et $\gamma = \alpha + 2\beta - \alpha\beta$ des constantes données.*

On note :

$$\Lambda := (\psi(b) - \psi(a))^{\gamma-1} - \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\psi(\eta_i) - \psi(a))^{\gamma} - \sum_{j=1}^{m} \theta_j(\psi(\xi_j) - \psi(a))^{\gamma-1} \neq 0.$$

pour une fonction $h \in C([a,b],\mathbb{R})$, la solution unique du problème fractionnaire linéaire séquentiel de Hilfer :

$$\left({}^{H}D^{\alpha,\beta} + k\,{}^{H}D^{\alpha-1,\beta;\psi}\right) x(t) = h(t), \quad t \in [a,b], \tag{3.8}$$

avec conditions :

$$x(a) = 0, \quad x(b) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_a^{\eta_i} \psi'(s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \theta_j x(\xi_j),$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
x(t) = {} & I_{a+}^{\alpha;\psi}\left(a + h(t) - k\int_a^t \psi'(s)x(s)\,ds\right) \\
& + \frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_a^{\eta_i} \psi'(s) I_{a+}^{\alpha;\psi}\,(a + h(s))\,ds \\
& - k\sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_a^{\eta_i} \psi'(s) \int_a^{s} \psi'(u)x(u)\,du\,ds \\
& - k\sum_{j=1}^{m} \theta_j \int_a^{\xi_j} \psi'(s)x(s)\,ds \\
& + \sum_{j=1}^{m} \theta_j I_{a+}^{\alpha;\psi}\left(h(\xi_j) + k\int_a^b \psi'(s)x(s)\,ds - I_{a+}^{\alpha;\psi}\,(h(b))\right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Preuve 3.1. *En appliquant l'opérateur* $I_{(}^{\alpha;\psi}a+)$ *des deux côtés de l'équation (3.8), il existe des réels* c_0 *et* c_1 *tels que :*

$$x(t) = c_0(\psi(t) - \psi(a))^{-(2-\alpha)(1-\beta)}\Gamma(1 - (2 - \alpha)(1 - \beta))$$

$$+ c_1(\psi(t) - \psi(a))^{1-(2-\alpha)(1-\beta)}\Gamma(2 - (2 - \alpha)(1 - \beta)).$$

On a également :

$$- k \int_a^t \psi'(s)x(s)ds + I_{\alpha;\psi}(a + h(t))$$

$$= c_0(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-2}\Gamma(\gamma - 1) + c_1(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}\Gamma(\gamma),$$

puisque $(1 - \beta)(2 - \alpha) = 2 - \gamma$.

À partir de la condition $x(a) = 0$*, on obtient* $c_0 = 0$*. Ainsi :*

$$x(t) = c_1\frac{(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} - k \int_a^t \psi'(s)x(s)\, ds + I_{a+}^{\alpha;\psi}\left(h(t)\right), \quad t \in [a, b]. \quad (3.10)$$

En utilisant la condition $x(b) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_a^{\eta_i} \psi'(s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{m} \theta_j x(\xi_j)$*, on obtient :*

$$c_1 = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Lambda}\Bigg[h - k\sum_{i=1}^{n}\mu_i\int_a^{\eta_i}\psi'(s)\int_a^s\psi'(u)x(u)duds$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\int_a^{\eta_i}\psi'(s)I_{a+}^{\alpha;\psi}h(s)ds$$

$$-k\sum_{j=1}^{m}\theta_j\int_a^{\xi_j}\psi'(s)x(s)ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\theta_j I_{a+}^{\alpha;\psi}h(\xi_j))$$

$$+k\int_a^b\psi'(s)x(s)ds - I_{a+}^{\alpha;\psi}(h(b))\Bigg]. \quad (3.11)$$

En substituant la valeur de c_1 *dans l'expression de* $x(t)$*, on obtient la solution (3.9).*

Le fait que la fonction x(t) définie ci-dessus constitue une solution du problème de la valeur au bord peut être établi par un calcul direct.

Remarque 3.2.1. *Si* $\psi(t) = t$ *et* $\beta = 0$*, alors (3.8) se réduit à*

$$\left({}^{RL}D^{\alpha} + k^{H}D^{\alpha-1}\right)x(t) = h(t),$$

qui est l'équation différentielle fractionnaire de Riemann–Liouville, où

$${}^{RL}D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{1-\alpha}x(s)\,ds.$$

Si $\psi(t) = \log t$ *et* $\beta = 0$*, alors (3.8) est transformée en l'équation différentielle fractionnaire de Hadamard de la forme :*

$$\left({}^{Had}D^{\alpha} + k^{Had}D^{\alpha-1}\right)x(t) = h(t),$$

où

$${}^{Had}D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{t}{dt}\int_a^t (\log t - \log s)^{1-\alpha}\frac{x(s)}{s}\,ds.$$

Ensuite, nous définissons un opérateur

$$A : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$$

par

$$\begin{aligned}(Ax)(t) = {} & I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t,x(t)) \\ & - k\int_a^t \psi'(s)x(s)ds + \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-1}}{\Lambda}\Bigg[\\ & - k\sum_{i=1}^{n}\mu_i\int_a^{\eta_i}\psi'(s)\int_a^s \psi'(u)x(u)du\,ds \\ & + \sum_{i=1}^{n}\mu_i\int_a^{\eta_i}\psi'(s)I_{a+}^{\alpha;\psi} f(s,x(s))ds \\ & - k\sum_{j=1}^{m}\theta_j\int_a^{\xi_j}\psi'(s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{m}\theta_j I_{a+}^{\alpha;\psi} f(\xi_j,x(\xi_j)) \\ & + k\int_a^b \psi'(s)x(s)ds - I_{a+}^{\alpha;\psi} f(b,x(b))\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La continuité de f implique que A est bien défini, et les points fixes de l'équation $x = Ax$ sont des solutions de l'équation intégrale (3.11).

Par la suite, nous utilisons les abréviations suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{|\Lambda|}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \\ & + \sum_{j=1}^{m}|\theta_j|\frac{(\psi(\xi_j)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg], \end{aligned} \tag{3.13}$$

et

$$\begin{aligned}\Omega_1 = {} & |k|(\psi(b)-\psi(a)) + \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{\gamma-1}}{|\Lambda|}\Bigg[\frac{1}{2}|k|\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|(\psi(\eta_i)-\psi(a))^2 \\ & + |k|\sum_{j=1}^{m}|\theta_j|(\psi(\xi_j)-\psi(a)) + |k|(\psi(b)-\psi(a))\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant les théorèmes classiques des points fixes, nous établissons dans les sections suivantes l'existence, ainsi que l'existence et l'unicité, de la solution pour le problème aux limites (3.1).

Dans notre premier résultat, nous prouvons l'existence d'une solution unique du problème (3.1), en nous basant sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.2.1. *Supposons que :*

(H1) Il existe une constante finie $L > 0$ telle que, pour tout $t \in [a, b]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Alors, le problème séquentiel de la valeur au bord fractionnaire ψ-Hilfer (3) admet une solution unique sur $[a, b]$ à condition que

$$L\Omega + \Omega_1 < 1.$$

Démonstration. À l'aide de l'opérateur A défini, nous transformons le problème aux limites fractionnaire ψ-Hilfer (3) en un problème de point fixe $x = Ax$. En appliquant le principe du point fixe de Banach, nous allons montrer que A admet un point fixe unique.

$$\sup_{t \in [a,b]} |f(t, 0, 0)| = M < \infty,$$

et choisissons $r > 0$ tel que :

$$r \geq \frac{M\Omega}{1 - L\Omega - \Omega_1}.$$

Définissons :

$$B_r = \{x \in C([a, b], \mathbb{R}) : \|x\| \leq r\}.$$

Nous montrons que $A(B_r) \subset B_r$. Pour tout $x \in B_r$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t)| \leq I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(t, x(t))| + |k| \int_a^t \psi'(s)|x(s)|ds \\
&+ (\psi(b) - \psi(a))^{\gamma-1}|\Lambda| \Bigg[|k| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \int_a^{\eta_i} \psi'(s) \int_a^s \psi'(u)|x(u)|duds \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \int_a^{\eta_i} \psi'(s) I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(s, x(s))|ds \\
&+ |k| \sum_{j=1}^{m} |\theta_j| \int_a^{\xi_j} \psi'(s)|x(s)|ds \\
&+ \sum_{j=1}^{m} |\theta_j| I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(\xi_j, x(\xi_j))| \\
&+ |k| \int_a^b \psi'(s)|x(s)|ds + I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(b, x(b))| \Bigg].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En utilisant la condition de Lipschitz et en majorant chaque terme, on obtient :

$$\begin{aligned}|(Ax)(t)| &\leq C_1(L\|x\| + M) + C_2\|x\| \\ &\leq (Lr + M)\Omega + \Omega_1 r \leq r,\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 regroupent les constantes provenant des intégrales et des conditions données. Ainsi $\|Ax\| \leq r$, ce qui implique que $A(B_r) \subset B_r$. Ensuite, montrons que A est une contraction. Pour $x, y \in C([a,b], \mathbb{R})$ et $t \in [a,b]$, nous avons :

$$\begin{aligned}|(Ax)(t) - (Ay)(t)| \leq{}& I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| + |k| \int_a^t \psi'(s)|x(s) - y(s)|ds \\ &+ (\psi(b) - \psi(a))^{\gamma-1}|\Lambda| \Bigg[|k| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \int_a^{\eta_i} \psi'(s) \int_a^s \psi'(u)|x(u) \\ &- y(u)|duds \\ &+ \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \int_a^{\eta_i} \psi'(s) I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\ &+ |k| \sum_{j=1}^{m} |\theta_j| \int_a^{\xi_j} \psi'(s)|x(s) - y(s)|ds \\ &+ \sum_{j=1}^{m} |\theta_j| I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(\xi_j, x(\xi_j)) - f(\xi_j, y(\xi_j))| \\ &+ |k| \int_a^b \psi'(s)|x(s) - y(s)|ds + I_{a+}^{\alpha;\psi}|f(b,x(b)) - f(b,y(b))| \Bigg].\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|Ax - Ay\| \leq (L\Omega + \Omega_1)\|x - y\|.$$

Comme $L\Omega + \Omega_1 < 1$, A est une contraction. Par conséquent, par le principe du point fixe de Banach, A admet un point fixe unique. Celui-ci est évidemment la solution unique du problème aux limites fractionnaire ψ-Hilfer (3).
Par conséquent, d'après le principe du point fixe de Banach, nous en déduisons que A admet un point fixe. Il s'agit évidemment de la solution unique du problème aux limites fractionnaire séquentiel ψ-Hilfer (3). La démonstration est achevée.

Le prochain résultat d'existence est basé sur un théorème classique de point fixe dû à Krasnosel'ski. □

Théorème 3.2.2. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :*

(H2) $|f(t,x)| \leq \varphi(t)$ *pour tout* $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}$, *avec* $\varphi \in C([a,b], \mathbb{R}^+)$.
Alors, le problème aux limites fractionnaire séquentiel de type ψ*-Hilfer admet au moins une solution sur* $[a,b]$, *pourvu que* $\Omega_1 < 1$

Démonstration. Soit l'ensemble suivant défini dans $C([a,b],\mathbb{R})$:

$$B_\rho = \{x \in C([a,b],\mathbb{R}) \mid \|x\| \leq \rho\},$$

où $\rho > 0$ est choisi tel que :

$$\rho \geq \frac{\|\varphi\|\,\Omega}{1-\Omega_1}.$$

On introduit deux opérateurs A_1 et A_2 définis sur B_ρ :

- A_1 représente la partie non linéaire liée à la fonction f.
- A_2 regroupe les termes linéaires provenant des conditions aux bords et du paramètre k.

Pour tous $x, y \in B_\rho$, on a l'inégalité suivante :

$$\|A_1x + A_2y\| \leq \|\varphi\|\,\Omega + \Omega_1\rho \leq \rho,$$

ce qui montre que $A_1x + A_2y \in B_\rho$, donc la combinaison des deux opérateurs reste dans l'ensemble B_ρ.

Par ailleurs, comme $\Omega_1 < 1$, on vérifie que A_2 est un opérateur contractant :

$$\|A_2x - A_2y\| \leq \Omega_1\|x-y\|.$$

La continuité de A_1 sur B_ρ découle de la continuité de la fonction f. Pour établir la compacité de A_1, on applique le théorème d'Arzelà–Ascoli. Il suffit de montrer que l'ensemble $A_1(B_\rho)$ est uniformément borné et équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in [a,b]$ avec $t_1 < t_2$. On estime :

$$\begin{aligned}
|(A_1x)(t_2) - (A_1x)(t_1)| \leq{}& \frac{\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha+1)}\left[2(\psi(t_2)-\psi(t_1))^\alpha\right. \\
&+ \left.|(\psi(t_2)-\psi(a))^\alpha - (\psi(t_1)-\psi(a))^\alpha|\right] \\
&+ \frac{\|\varphi\|}{|\Lambda|}\left|(\psi(t_2)-\psi(a))^{\gamma-1} - (\psi(t_1)-\psi(a))^{\gamma-1}\right| \cdot \Bigg[\\
&\sum_{i=1}^{n}|\mu_i|\frac{(\psi(\eta_i)-\psi(a))^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \sum_{j=1}^{m}|\theta_j|\frac{(\psi(\xi_j)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{(\psi(b)-\psi(a))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Bigg].
\end{aligned}$$

Cette estimation tend vers zéro lorsque $t_2 - t_1 \to 0$, et elle est indépendante de x. On en déduit que l'ensemble $A_1(B_\rho)$ est équicontinu.

Ainsi, $A_1(B_\rho)$ est relativement compact, et d'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, l'opérateur A_1 est compact sur B_ρ.

Finalement, en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselski[9] , on conclut que le problème (3.1) admet au moins une solution sur $[a, b]$. $\square$

3.3 Exemple

Considérons le problème aux limites suivant pour une équation différentielle fractionnaire séquentielle de type ψ-Hilfer avec conditions aux limites intégrales multipoints :

$$\begin{cases} {}^{HD}D_t^{\frac{3}{2},\frac{4}{5};\psi}x(t) + \frac{1}{250}\,{}^{HD}D_t^{\frac{1}{2},\frac{4}{5};\psi}x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right], \\ x\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \\ x\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{1}{11}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} g(s)x(s)\,ds + \frac{3}{22}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} g(s)x(s)\,ds \\ \quad +\frac{5}{33}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{9}{4}} g(s)x(s)\,ds + \frac{7}{44}x\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{9}{55}x\left(\frac{5}{4}\right) \\ \quad +\frac{13}{66}x\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{15}{77}x\left(\frac{5}{2}\right). \end{cases}$$

où $g(s) = \dfrac{se^s}{s+2}$ et $\psi(t) = t^2 e^t$.

Cas (i)

Si :

$$f(t, x) = \frac{8e^{\frac{1-4t}{5(4t+79)^2}}\,(x^2 + 2|x|)}{1 + |x|} + \frac{1}{4},$$

alors f satisfait la condition de Lipschitz :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{1}{2000}|x - y|,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right]$.

Donc, avec $L\Omega + \Omega_1 < 1$, la solution est unique.

Cas (ii)

Si :

$$f(t,x) = M\cos^2\left(\frac{t}{2} - 3t + 1\right) \cdot \frac{1}{x^2+3} + \frac{4}{4t+119} \cdot \sin\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right) + \frac{1}{2},$$

alors $|f(t,x)|$ est bornée par :

$$|f(t,x)| \leq |M| + \frac{4}{4t+119} + \frac{1}{2} := \varphi(t),$$

ce qui satisfait la condition (H2) du Théorème 2.

Si $M = 0$, alors :

$$f(t,x) = \frac{4}{4t+119} \cdot \sin\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right) + \frac{1}{2},$$

et f satisfait la condition de Lipschitz avec $L = \dfrac{1}{30}$, mais $L\Omega + \Omega_1 > 1$, donc le Théorème 1 n'est pas applicable.

Conclusion

L'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire représente aujourd'hui un champ théorique en pleine expansion, à la fois riche et complexe. Au cours de ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux aspects liés à l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles fractionnaires, en nous appuyant notamment sur les dérivées de Riemann–Liouville, de Caputo et de Hilfer.

Ce travail s'inscrit dans une logique à la fois théorique et appliquée. En effet, les opérateurs fractionnaires permettent de mieux modéliser certains phénomènes physiques et techniques où interviennent des effets de mémoire ou de non-localité, difficilement exprimables avec les dérivées classiques. Bien que le cadre théorique étudié soit exigeant, les résultats obtenus montrent clairement l'intérêt de ces outils dans la formulation et la résolution de problèmes mathématiques concrets.

Lors de la réalisation de ce mémoire, certaines difficultés ont été rencontrées, notamment dans la manipulation des définitions multiples des dérivées fractionnaires et la maîtrise des conditions nécessaires à l'application des théorèmes de point fixe. Néanmoins, cela n'a en rien diminué l'intérêt de cette étude, bien au contraire, cela a permis de renforcer notre compréhension du sujet.

Nous avons pu appliquer des méthodes d'analyse fonctionnelle et des techniques issues des théorèmes de point fixe pour justifier rigoureusement la validité des solutions sous certaines hypothèses. Le travail effectué nous a permis non seulement de mettre en œuvre les outils mathématiques acquis au cours de notre parcours, mais aussi de développer un esprit de rigueur dans l'approche des problèmes abstraits.

Enfin, ce mémoire ouvre plusieurs pistes de recherche futures. Il serait intéressant d'étendre l'étude à des équations fractionnaires avec des conditions initiales non locales, ou encore d'explorer la résolution numérique de ces équations dans des contextes plus complexes. La combinaison des approches analytiques et numériques pourrait aboutir à des modèles plus performants et mieux adaptés aux réalités du terrain, notamment en physique, en ingénierie, voire en biologie.

Bibliographie

[1] A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[2] A. Atangana and D. Baleanu, *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel : Theory and application to heat transfer model*, Thermal Science, vol. 20, no. 2, pp. 763–769, 2016.

[3] B. C. Dhage, S. K. Ntouyas, Existence results for boundary value problems for fractional hybrid differential inclusions, Topol. Method Nonlinear. Anal., 44 (2014), 229–238. https ://doi.org/10.12775/TMNA.2014.044

[4] C.-G.-J. Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. I - VIII, Chelsea Publishing Co., 1969

[5] G. M. Zaslavsky, "Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport," *Physics Reports*, vol. 371, no. 6, pp. 461–580, 2002.

[6] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[7] I. Podlubny, *Fractional-order systems and* $PI^{\lambda}D^{\mu}$*-controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 1, pp. 208–214, 1999.

[8] J. Vanterler da C. Sousa et E. Capelas de Oliveira, *Sur la dérivée fractionnaire de Hilfer-*ψ, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 60, pp. 72–91, 2018.

[9] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[10] PODLUBNY, Igor.Fractional Differential Equations,United States : Academic Press

[11] Phuangthong, N. ; Ntouyas, S.K. ; Tariboon, J. ; Nonlaopon, K. Nonlocal sequential boundary value problems for Hilfer type fractional integro-differential equations and inclusions. Mathematics 2021, 9, 615.

[12] R.Gorenáo,F-Mainardi,Fractional calculs : integral and differntial aquations of fractional. order, Spring Verlag, Wien(1997)

[13] R. Khalil, M. A. Horani, A. Yousef, M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, J. Comput. Appl. Math., 264 (2014), 65–70. https ://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002 order, Spring Verlag, Wien(1997)

[14] R. L. Magin, "Fractional calculus in bioengineering : A review," *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 32, no. 1, pp. 1–104, 2004.

[15] Saengthong, W. ; Thailert, E. ; Ntouyas, S.K. Existence and uniqueness of solutions for system of Hilfer–Hadamard sequential fractional differential equations with two point boundary conditions. Adv. Differ. Equ. 2019, 2019, 525.

[16] S.Djebali, L.Górniewicz and A.Ouahab : Solution Sets for differential Eqution and Inclusions, De Gayter.2013.

[17] S. Niyom, S. K. Ntouyas, S. Laoprasittichok, and J. Tariboon, *Boundary value problems with four orders of Riemann-Liouville fractional derivatives*, Advances in Difference Equations, vol. 2016, article 165, 2016.

[18] Sitho, S., Ntouyas, S.K., Samadi, A., and Tariboon, J. *Boundary Value Problems for ψ-Hilfer Type Sequential Fractional Differential Equations and Inclusions with Integral Multi-Point Boundary Conditions*. Mathematics, 2021, 9, 1001.

[19] T. Abdeljawad, On conformable fractional calculus, J. Comput. Appl. Math., 279 (2015), 57–66. https ://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016

[20] Y.Zhou,basic theory of fractional diffrential Equations