



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Présenter en vue de l'obtention du diplôme de master

Spécialité :

« Mathématiques »

Option :

« Analyse fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :

Guernoug Fadhila
Mokhtari Amira

Sous L'intitulé :

L'application de la méthode des éléments fini aux EDP fractionnaires

à Tiaret devant le jury composé de :

Mr. BENIA kheiriddine

Mme. BOUAZZA zoubida

Mme. SABIT souhila

MCB Université de Tiaret

MCA Université de Tiaret

MCB Université de Tiaret

Encadreur

Présidente

Examinatrice

Année universitaire : 2024/2025

REMERCIEMENTS



Avant tout, on remercie "*Allah*" tout puissant pour la volonté et la patience qu'Il nous a données afin d'accomplir ce travail.

Un grand remerciement à notre encadreur "**BENIA Kheiriddine**" pour sa patience, ses remarques, ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance, ainsi que pour ses encouragements.

Nous remercions également les membres du jury :

- **Mme. Sabit souhila**
- **Mme. bouazza zoubida**

pour avoir accepté l'évaluation de ce travail et pour tous leurs commentaires et critiques.

Nous remercions également toute l'équipe administrative du département de Mathématiques à l'Université de Tiaret, ainsi que toute la promotion Mathématiques de **Analyse Fonctionnelle Et Application 2024--2025**.

Guernoug Fadhila & Mokhtari Amira



Dédicace



★ Dédicace ★

Je dédie ce modeste travail avant tout à mes chers parents
qui m'ont apporté un soutien moral et matériel.

Je souhaite que Dieu m'aide à leur apporter
bonheur et satisfaction.

À ma chère sur, à mes frères, à mon grand-père
et à ma grand-mère.

À tous les membres de ma famille et à mes proches.

Et à mes amis, je leur souhaite réussite et bonheur.



♡ **Amira** ♡

ملخص

يتناول هذا العمل موضوع الحساب الكسري بوصفه أداة رياضية متقدمة تُستخدم في نمذجة الظواهر الفيزيائية المعقدة، لاسيما تلك التي تُظهر تأثيرات الذاكرة أو الانتشار غير العادي. ويهدف إلى الجمع بين التحليل النظري والتقنيات العددية الحديثة، مع التركيز على تطبيق طرق مثل العناصر المحددة لحل المعادلات التفاضلية الكسرية بكفاءة.

Abstract

This thesis focuses on fractional calculus as an advanced mathematical tool for modeling complex physical phenomena, particularly those exhibiting memory effects or anomalous diffusion. It aims to integrate theoretical analysis with modern numerical techniques, emphasizing the application of methods such as the finite element method to efficiently solve fractional differential equations.

Résumé

Ce mémoire porte sur le calcul fractionnaire en tant qu'outil mathématique avancé pour modéliser des phénomènes physiques complexes, notamment ceux présentant des effets de mémoire ou de diffusion anormale. Il vise à combiner l'analyse théorique avec des techniques numériques modernes, en mettant l'accent sur l'application de méthodes comme les éléments finis pour résoudre efficacement les équations différentielles fractionnaires.

Table des matières

Introduction	1
1 Équations	3
1.1 Fonctions spéciales	4
1.1.1 Fonction Gamma	4
1.1.2 Fonction Bêta	8
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler	10
1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	12
1.3 Dérivées fractionnaires	15
1.3.1 Au sens de Riemann-Liouville	15
1.3.2 Au sens de Caputo	15
1.4 Transformation de Laplace	17
1.4.1 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo	18
1.5 Transformation de Fourier	19
1.6 Schéma de différences finies	20
2 Problème d'évolution unidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire	22
2.1 Étude de l'équation d'onde fractionnaire	23
2.1.1 Position du problème	23
2.1.2 Résolution analytique	24
2.1.3 Méthode des éléments finis (EF)	27
2.2 Exemples Numériques avec Python	39
2.2.1 Exemple 1 : Comparaison Spatiale ($h = 0.1$ vs $h = 0.05$)	39
2.2.2 Exemple 2 : Effet du Pas de Temps	41

2.2.3	Exemple 3 : Validation Exacte	43
3	Mise en œuvre du modèle numérique	45
3.1	Mise en œuvre du modèle numérique	46
3.1.1	Méthode discrète totale de Crank- Nicolson/ Galerkin(CNG)	46
3.1.2	Mise en œuvre du schéma CNG entièrement discret	48
	Conclusion	54
	Aperçu historique sur quelques figures scientifiques	55
	Bibliographie	57

Introduction

Le calcul fractionnaire est un domaine moderne et en plein essor des mathématiques, visant à généraliser les notions de dérivation et d'intégration aux ordres réels ou complexes, au-delà des ordres entiers classiques. Cette extension naturelle permet de modéliser avec plus de précision des phénomènes physiques complexes, notamment ceux qui caractérisent par des effets de mémoire ou une diffusion anormale. Bien que ses origines remontent au XVIIème siècle avec des figures telles que Leibniz et Liouville, ce n'est que ces dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu un véritable essor, grâce aux avancées technologiques et au développement des outils numériques.

Ces dernières années, le calcul fractionnaire a vu ses applications se multiplier dans des domaines variés tels que l'ingénierie, la physique, la biologie et la finance. Les méthodes numériques ont ainsi permis l'étude concrète de modèles plus réalistes et complexes.

Parallèlement, l'analyse numérique s'est imposée comme un outil fondamental pour l'approximation des solutions d'équations différentielles. La théorie de l'approximation a offert un cadre mathématique rigoureux pour la conception de méthodes numériques performantes, notamment celles basées sur les éléments finis et les schémas implicites.

Les équations aux dérivées partielles fractionnaires (EDP fractionnaires) représentent une généralisation naturelle des équations classiques, où les dérivées entières sont remplacées par des dérivées d'ordre fractionnaire. Leur résolution nécessite une approche double, à la fois analytique et numérique, ce qui en fait un sujet riche et multidisciplinaire.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres principaux, répartis comme suit :

Chapitre 1 : Il présente les fondements théoriques du calcul fractionnaire à travers les fonctions spéciales Gamma et Bêta, les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires selon Riemann-Liouville et Caputo. On y introduit également des outils mathématiques

importants tels que les transformées de Laplace et de Fourier, la fonction de Mittag-Leffler, ainsi qu'un premier aperçu de la discrétisation numérique.

Chapitre 2 : Ce chapitre étudie un problème évolutif unidimensionnel modélisé par une équation d'onde fractionnaire en temps, sous conditions aux limites de Dirichlet. À l'aide des transformées de Laplace et de Fourier, une solution exacte est obtenue. Une méthode numérique basée sur les éléments finis est ensuite développée pour approcher cette solution, accompagnée d'exemples numériques validant l'efficacité de l'approche.

Chapitre 3 : Il se concentre sur la résolution numérique d'un système issu d'une discrétisation selon la méthode de Galerkin linéaire. Le problème est réduit à un système différentiel non linéaire en temps, auquel on applique une méthode de linéarisation de type Picard, suivie d'une discrétisation temporelle par le schéma de Crank-Nicolson. Cette approche permet une résolution efficace et stable du problème considéré.

Équations

Sommaire

1.1 Fonctions spéciales	4
1.1.1 Fonction Gamma	4
1.1.2 Fonction Bêta	8
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler	10
1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	12
1.3 Dérivées fractionnaires	15
1.3.1 Au sens de Riemann-Liouville	15
1.3.2 Au sens de Caputo	15
1.4 Transformation de Laplace	17
1.4.1 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo	18
1.5 Transformation de Fourier	19
1.6 Schéma de différences finies	20

Introduction

Ce chapitre pose les bases du calcul fractionnaire en présentant les fonctions spéciales Gamma et Bêta, les intégrales et dérivées fractionnaires selon Riemann-Liouville et Caputo, ainsi que des outils comme les transformations de Laplace et de Fourier. Il introduit aussi brièvement la fonction de Mittag-Leffler et les premières notions de discrétisation numérique utiles pour la suite du travail.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Histoire et Découverte de la Fonction Gamma

La fonction Gamma trouve ses origines au XVIIIe siècle avec les travaux de plusieurs mathématiciens. En 1729, Christian Goldbach adresse une lettre à Leonhard Euler lui suggérant d'étendre la notion de factorielle aux réels non entiers. Euler relève le défi et propose une forme intégrale qui est aujourd'hui la définition canonique :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(z) > 0$$

En 1809, Adrien-Marie Legendre introduit la notation actuelle (Γ) et étudie ses propriétés. Plus tard, Cauchy approfondit son analyse, et Weierstrass en propose une représentation en série.

Au XIXe siècle, Carl Friedrich Gauss généralise la fonction aux nombres complexes dans le cadre de la théorie des fonctions analytiques. Bernhard Riemann, quant à lui, explore son lien avec la fonction zêta.

Enfin, au XXe siècle, Henri Poincaré et Edmund Landau se penchent sur son comportement asymptotique, notamment pour des valeurs élevées, consolidant son importance dans les mathématiques modernes [6].

Applications de la fonction Gamma

La fonction Gamma occupe une place centrale dans divers champs scientifiques. En mathématiques, elle facilite le calcul de certaines intégrales, notamment celles combinant des puissances et des fonctions exponentielles. En probabilités et en statistiques, elle fonde la définition de lois essentielles telles que les distributions Gamma, Khi-deux (χ^2) et Weibull (employée dans l'analyse de la fiabilité des systèmes). En physique et en ingénierie, on la retrouve dans des domaines comme la mécanique quantique, la thermodynamique ou le traitement du signal. Enfin, en théorie des nombres, elle intervient dans l'étude des fonctions spéciales, comme la fonction Bêta de Riemann, et des séries infinies [8].

Importance de la fonction gamma

La fonction gamma est l'une des fonctions spéciales les plus importantes en mathématiques en raison de ses applications vastes. Elle est utilisée pour calculer des intégrales complexes, résoudre des équations différentielles et dans des distributions de probabilité comme la **distribution gamma** [9].

Définition 1.1 [5] *La fonction Gamma, notée par le symbole $\Gamma(z)$, généralise la notion factorielle pour les nombres complexes Z . Elle est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Propriétés principales de la fonction Gamma

- Relation avec la factorielle :

Pour un entier positif n , la fonction Gamma est liée à la factorielle par la relation :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Par exemple :

$$\Gamma(4) = (4-1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$$

Preuve Montrer que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}$:

La fonction gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Pour les entiers positifs, on peut utiliser l'intégration par parties :

Posons $u = t^{n-1}$ et $dv = e^{-t} dt$.

Alors $du = (n-1)t^{n-2} dt$ et $v = -e^{-t}$.

L'intégrale devient :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = [-t^{n-1} e^{-t}]_0^{\infty} + (n-1) \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-t} dt.$$

La limite $[-t^{n-1} e^{-t}]_0^{\infty}$ est nulle car la fonction exponentielle décroît plus rapide que toute puissance de t lorsque $t \rightarrow \infty$. Donc, on a :

$$\Gamma(n) = (n-1) \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-t} dt = (n-1) \Gamma(n-1).$$

En appliquant cette relation récursivement, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1) \Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) - \dots \\ &= (n-1)(n-2) \dots (2)(1) \Gamma(1) \dots \dots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Il reste à calculer $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1.$$

En substituant $\Gamma(1) = 1$ dans l'équation de l'étape (1.1), on obtient :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Formule de récurrence La fonction Gamma satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Cette propriété est essentielle pour étendre la définition de la factorielle aux nombres nonentiers.

- Valeurs particulières :

$$\Gamma(1) = 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.1 Calcule de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

On sait que la fonction Gamma est définie, pour $\operatorname{Re}(z) > 0$, par la formule suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Calculons maintenant :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

On effectue le changement de variable :

On pose : $t = u^2$ ce qui implique : $dt = 2u du$

L'intégrale devient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} \cdot 2u du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

Ce dernier est une demi-intégrale gaussienne connue, et on a :

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Interprétation : La valeur $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ joue un rôle fondamental en mathématiques, notamment dans les domaines de la probabilité et des statistiques (par exemple dans la loi normale ou la loi du chi carré).

1.1.2 Fonction Bêta

Histoire et Découverte de la Fonction Bêta

La fonction Bêta a été découverte au XVIIIe siècle par Leonhard Euler, qui a étudié son intégrale dans différents contextes. Cependant, ce n'est qu'au XIXe siècle que Adrien-Marie Legendre a introduit la notation standard et lui a donné le nom de fonction Bêta. Au XXe siècle, la fonction Bêta a trouvé de nombreuses applications en probabilités et statistiques, notamment dans l'étude de la distribution Bêta, un modèle probabiliste fondamental en analyse des données et en statistique bayésienne [4].

Applications de la Fonction Bêta

La fonction Bêta est utilisée en analyse pour le calcul d'intégrales spéciales et intervient dans la formule de Stirling. En probabilités, elle est liée à la loi Bêta et joue un rôle important en statistique bayésienne et dans l'analyse multivariée. En physique, elle apparaît en mécanique statistique, en électromagnétisme et en physique quantique, notamment pour résoudre certaines équations. Enfin, en intelligence artificielle, elle est utilisée dans les modèles bayésiens et la régularisation des réseaux de neurones [5].

Définition 1.2 [5] La fonction bêta est définie pour deux nombres complexes x et y (avec $\operatorname{Re}(x) > 0$ et $\operatorname{Re}(y) > 0$) par l'intégrale suivante :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Proposition 1.1

1 - Symétrie : $B(x, y) = B(y, x)$.

2 - Lien avec la fonction gamma : $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, où Γ est la fonction gamma.

Preuve pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(x) > 0$, $\operatorname{Re}(y) > 0$ on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(y) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t'^{y-1} e^{-t'} dt' \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} t'^{y-1} e^{-(t+t')} dt dt'. \end{aligned}$$

En utilisant un changement de coordonnées, considérons les nouvelles coordonnées :

$$\begin{cases} u = t + t' \\ v = \frac{t}{t+t'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = uv \\ t' = u(1-v) \end{cases}.$$

Et :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} t'^{y-1} e^{-(t+t')} dt dt' &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{x-1} (u(1-v))^{y-1} e^{-u} | -u | du dv, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{x+y-1} v^{x-1} (1-v)^{y-1} e^{-u} du dv, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{x+y-1} v^{x-1} (1-v)^{y-1} e^{-u} du dv, \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{x+y-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{x-1} (1-v)^{y-1} dv \right), \\ &= \Gamma(x+y) B(x, y). \end{aligned}$$

Donc :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3 - Cas particuliers : Si x ou y est un entier, la fonction bêta peut s'exprimer en termes de factorielles.

Exemple 1.2 Si $x = n$ et $y = m$ où (n et m sont des entiers positifs), alors :

$$B(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Exemple 1.3

1. Calcule de $B(1, 2)$:

$$B(1, 2) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(1+2)} = \frac{1! \times 1!}{2!} = \frac{1}{2}.$$

2. Calcul de $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}}{1} = \pi.$$

4 - Forme trigonométrique : La fonction bêta peut également s'exprimer sous forme d'intégrale trigonométrique :

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle classique. Elle apparaît naturellement dans la solution d'équations différentielles fractionnaires.

Définition 1.3 [5] La fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

Et la fonction de Mittag-Leffler **généralisée** est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Le rôle essentiel de la fonction Mittag-Leffler est trouvé dans le calcul de la transformation inverse de

Laplace suivant :

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + b} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-bt^\alpha). \quad (1.2)$$

Propriétés 1.1 Nous distinguons les trois cas suivants :

1. Pour $\beta = 1$

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + b} \right\} = E_\alpha(-bt^\alpha). \quad (1.3)$$

2. Pour $\beta = 2$

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha + b} \right\} = t E_{\alpha,2}(-bt^\alpha). \quad (1.4)$$

3. Pour $\beta = \alpha$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + b} \right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-bt^\alpha). \quad (1.5)$$

Analyse de convergence de la série $E_\alpha(z)$:

On démontre que la série de Mittag-Leffler converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence est infini.

Preuve

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{z^k} \right| \\ &= |z| \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \right) \end{aligned}$$

Pour évaluer cette limite, on utilise l'approximation de Stirling pour $x \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

En appliquant cette approximation au quotient :

$$\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } k \rightarrow \infty$$

Ce qui donne :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = 0$$

Donc la série converge pour tout z quel que soit $\alpha > 0$.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Concept :

Les intégrales fractionnaires étendent la notion d'intégration à des ordres non entiers [1].

Elles sont définies par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0. \quad (1.6)$$

Exemple 1.4 Calcul de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ de $f(t) = t^n$

Soit $f(t) = t^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. On considère l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$ au sens de Riemann-Liouville, définie par :

$$I_a^{\frac{1}{2}}(t^n) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t - \tau)^{\frac{-1}{2}} \tau^n d\tau.$$

Posons $u = \frac{\tau}{t}$, ce qui implique que $\tau = tu$ et $d\tau = t du$. On obtient :

$$\begin{aligned} I_a^{\frac{1}{2}} t^n &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (t - tu)^{\frac{-1}{2}} (tu)^n t du, \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (t(1 - u))^{\frac{-1}{2}} t^n u^n t du, \\ &= \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1 - u)^{\frac{-1}{2}} u^n du. \end{aligned}$$

L'intégrale restante est une fonction bêta :

$$\int_0^1 (1 - u)^{\frac{-1}{2}} u^n du = B\left(n + 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n + 1) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}.$$

Donc ,

$$\begin{aligned} I_a^{\frac{1}{2}} t^n &= \frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}, \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} t^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comparaison des intégrales fractionnaires pour différents ordres α :

À la suite du calcul précédent, on peut généraliser le résultat pour un ordre $\alpha \in (0, 1)$.

Pour $f(t) = t^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$$I_a^\alpha t^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^n d\tau$$

En effectuant le changement de variable $\tau = tu$, on obtient :

$$I_a^\alpha t^n = \frac{t^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^n t du = \frac{t^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot B(n+1, \alpha)$$

En utilisant la relation entre la fonction bêta et la fonction Gamma :

$$B(n+1, \alpha) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

On obtient finalement :

$$I_a^\alpha t^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \cdot t^{n+\alpha}$$

Observation :

Lorsque α augmente, l'exposant de t augmente aussi, ce qui rend la fonction résultante plus croissante. Le coefficient multiplicatif dépend de $\Gamma(n+\alpha+1)$, ce qui influence également l'amplitude.

Exemples numériques :

Pour $n = 0$, c'est-à-dire $f(t) = 1$, on a :

Si $\alpha = 0.2$:

$$I_a^{0.2} 1 = \frac{1}{\Gamma(1.2)} \cdot t^{0.2} \approx 1,045 \cdot t^{0.2}$$

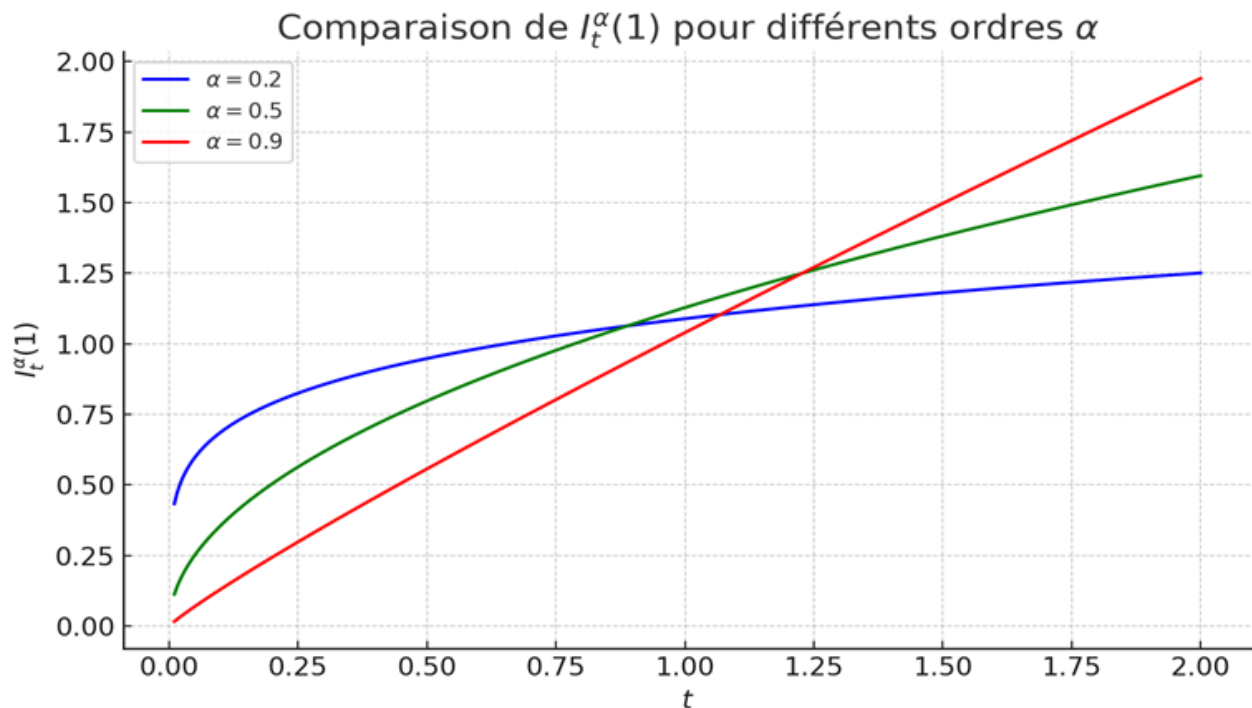
Si $\alpha = 0.5$:

$$I_a^{0.5}1 = \frac{1}{\Gamma(1.5)} \cdot t^{0.5} \approx 1,128 \cdot t^{0.5}$$

Si $\alpha = 0.9$:

$$I_a^{0.9}1 = \frac{1}{\Gamma(1.9)} \cdot t^{0.9} \approx 1,046 \cdot t^{0.9}$$

Conclusion



Remarque 1.1 On observe que plus l'ordre α est élevé, plus la croissance de l'intégrale fractionnaire $I_a^\alpha 1$ est rapide. Lorsque $\alpha \rightarrow 1$, la courbe se rapproche de la fonction linéaire t , ce qui reflète le passage progressif de l'intégrale fractionnaire vers l'intégrale classique.

Conclusion :

La comparaison des intégrales fractionnaires pour différents ordres montre clairement comment cet ordre contrôle la dynamique de la fonction transformée. Ce paramètre joue un rôle fondamental dans les modèles à mémoire ou à diffusion lente, où permet d'ajuster finement le comportement temporel du système.

1.3 Dérivées fractionnaires

1.3.1 Au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4 [2] La dérivée fractionnaire d'ordre réel $\alpha > 0$, au sens de Riemann-Liouville, d'une fonction f , est définie comme la dérivée ordinaire d'ordre n (où n est l'entier tel que $n - 1 < \alpha < n$) appliquée à l'intégrale fractionnaire d'ordre $n - \alpha$ de cette fonction.

On la note :

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [{}_a I^{n-\alpha} f(t)], \quad n - 1 < \alpha \leq n. \quad (1.7)$$

1.3.2 Au sens de Caputo

Définition 1.5 [10] La dérivée fractionnaire de Caputo, notée ${}^c D_a^\alpha f(t)$, d'ordre $\alpha > 0$ sur l'intervalle $[a, b]$, est définie par :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha f(t) &= I_a^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n - 1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Différences clés : Caputo est plus adapté aux conditions initiales classiques en physique.

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$:

On considère la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α (avec $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$) de la fonction exponentielle $f(t) = e^{\lambda t}$. Par définition, elle s'écrit comme suit :

$${}^c D_a^\alpha (e^{\lambda t}) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} (e^{\lambda \tau}) d\tau.$$

La dérivée d'ordre n de la fonction exponentielle est donnée par :

$$\frac{d^n}{d\tau^n} (e^{\lambda \tau}) = \lambda^n e^{\lambda \tau}.$$

Donc l'expression devient :

$${}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \lambda^n e^{\lambda \tau} d\tau.$$

On développe $e^{\lambda \tau}$ en série de Taylor :

$$e^{\lambda \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \tau^k}{k!}.$$

En remplaçant dans l'intégrale :

$${}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^k d\tau.$$

On effectue le changement de variable :

$$\tau = yt \quad \text{donc} \quad d\tau = t dy.$$

Lorsque $\tau = a$, alors $y = \frac{a}{t}$; lorsque $y = 1$, $\tau = t$.

L'intégrale devient :

$$\int_{a/t}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} (yt)^k \cdot t dy = t^{k+1} \int_{a/t}^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^k dy.$$

Donc :

$${}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) = \lambda^n t^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^k dy.$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta puis la relation entre la fonction Gamma et Bêta, on arrive à :

$$\begin{aligned} {}^c D_a^\alpha(e^{\lambda t}) &= \frac{\lambda^n t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}, \\ &= \lambda^n t^{n-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+n-\alpha+1)}, \\ &= \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}(\lambda t). \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction de Mittag-Leffler, donc on a la dérivée fractionnaire au

sens de Caputo de la fonction $f(t) = e^{\lambda t}$ donnée par :

$${}^c D_a^\alpha (e^{\lambda t}) = \lambda^n t^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}(\lambda t).$$

La relation entre la dérivée au sens de Caputo et au sens de Riemann-Liouville

La relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

Théorème 1.1 [5] Soit $\alpha > 0$ avec $n - 1 < \alpha < n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^c D_a^\alpha f(t)$ et $D_a^\alpha f(t)$ existent.

Alors :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha [f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha}.$$

En particulier, $0 < \alpha < 1$, on a :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire :

Si $f^{(k)}(a) = 0$ ou $\alpha = n \in \mathbb{N}; \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \Rightarrow {}^c D_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t)$.

1.4 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace est une méthode mathématique utilisée pour convertir des équations différentielles en équations algébriques, ce qui permet de les résoudre plus facilement. Elle transforme des fonctions qui dépendent du temps en des fonctions dans le domaine complexe.

Définition 1.6 [15] soit f une fonction continue, on appelle la transformée de Laplace de f la fonction $L(f)$ ou $(F(s))$ définie par :

$$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1.8)$$

Où s est la variable de transformation.

La transformée Laplace inverse est réalisée selon la formule Fourier Mellin

$$L^{-1} \{f^*(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f^*(s) dt, t > 0, \quad (1.9)$$

Où c est un nombre fixe.

1.4.1 La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

On utilise souvent le calcul transformé de Laplace de la dérivée de Caputo. Dans la suite, nous allons présenter l'expression de cette transformée. Soit $f \in C^\infty [0, +\infty]$ et $n-1 < \alpha < n$. Prenons le cas de $\alpha = 0$ dans la dérivée de Caputo. Alors, on a :

$$\begin{aligned} L[D_a^\alpha f(t)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\theta) d\theta \right] dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \int_\theta^\infty e^{-st} (t-\theta)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\theta) dt d\theta. \end{aligned}$$

(d'après Fubini).

En faisant un changement de variable $v = t - \theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} L[D_a^\alpha f(t)](s) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(v+\theta)} v^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\theta) dv d\theta, \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-sv} \frac{v^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} dv \right) \times \left(\int_0^\infty e^{-s\theta} f^{(n)}(\theta) d\theta \right), \\ &= L \left[\frac{v^{n-1-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \right] (s) \times L[f^{(n)}] (s). \end{aligned}$$

Par utilisation de l'expression, nous obtenons :

$$L[D_a^\alpha f(t)](s) = s^{\alpha-n} L[f^{(n)}] (s).$$

On sait que :

$$L[f^{(n)}] (s) = s^n L[f] (s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 L[D_a^\alpha f(t)](s) &= s^{\alpha-n} \left[s^n L[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \right], \\
 &= s^\alpha L[f](s) - s^{\alpha-1} f(0) - s^{\alpha-2} f'(0) - \dots - s^{\alpha-n} f^{(n-1)}(0), \\
 &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

1.5 Transformation de Fourier

Transformation de sinus-Fourier fini

La transformation de Fourier sinus finie est utilisée pour résoudre des problèmes sur des intervalles finis. En particulier avec des conditions aux limites de type Dirichlet nulles, (par exemple, $u(0, t) = u(a, t) = 0$).

Définition 1.7 [13] la transformée de sinus-Fourier fini est la reformulation pratique de série sinus-Fourier dans le domaine $0 \leq x \leq L$.

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\beta_k) = \int_0^L f(x) \sin(x\beta_k) dx,$$

Et :

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\beta_k)\} = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}(\beta_k) \sin(x\beta_k),$$

Où :

$$\beta_k = \frac{k\pi}{L}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Exemple 1.5 Calcul de la transformée de Fourier sinus d'une fonction simple :

On souhaite calculer la transformée de Fourier sinus de la fonction $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0, L]$.

La formule générale de la transformée de Fourier sinus est :

$$\hat{f}_s(n) = \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{1.11}$$

En remplaçant $f(x) = x$, on obtient :

$$\hat{f}_s(n) = \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

On utilise une intégration par parties avec :

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$

$$dv = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

L'intégration par parties donne :

$$\hat{f}_s(n) = \left[-x \cdot \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

On calcule chaque terme séparément :

- Premier terme :

$$\left[-x \cdot \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = -\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) + 0 = \frac{L^2(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

car : $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

- Deuxième terme :

$$\frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \cdot \left[\frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^L = 0,$$

car : $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$.

Résultat final :

$$\hat{f}_s(n) = \frac{L^2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

1.6 Schéma de différences finies

Définition 1.8 La méthode des différences finies est une approche numérique couramment utilisée pour approximer les dérivées des fonctions. Soit $u(x)$ une fonction d'une variable réelle. Cette méthode

repose essentiellement sur les développements en série de Taylor. Le développement de Taylor au premier ordre donne :

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + o(h).$$

Formules de Taylor d'ordre 02

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u'' + o(h). \quad (1.12)$$

Dans un intervalle $[l, L]$, on considère une discrétisation régulière de pas $h = \frac{L-l}{N}$.

Plusieurs formules d'approximation des dérivées en un point x peuvent alors être établies : Approximation avant :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + o(h).$$

Approximation arriérée :

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + o(h).$$

Approximation centre :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + o(h). \quad (1.13)$$

Et si passant sur (1.12) et (1.13), nous obtenons :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

Cette formulation constitue la base des schémas numériques utilisés pour la résolution approchée des équations différentielles.

Problème d'évolution unidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire

Sommaire

2.1	Étude de l'équation d'onde fractionnaire	23
2.1.1	Position du problème	23
2.1.2	Résolution analytique	24
2.1.3	Méthode des éléments finis (EF)	27
2.2	Exemples Numériques avec Python	39
2.2.1	Exemple 1 : Comparaison Spatiale ($h = 0.1$ vs $h = 0.05$)	39
2.2.2	Exemple 2 : Effet du Pas de Temps	41
2.2.3	Exemple 3 : Validation Exacte	43

Introduction

Ce chapitre présente une étude de la solution analytique d'un problème d'évolution unidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire en temps avec des conditions aux limites de Dirichlet, obtenue à l'aide des transformées de Laplace et de Fourier. Une méthode par éléments finis est ensuite proposée pour résoudre ce problème, accompagnée d'un exemple numérique illustrant son efficacité.

2.1 Étude de l'équation d'onde fractionnaire

2.1.1 Position du problème

On considère le problème suivant :

$${}^c D_0^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), 0 < x < a, 0 < t \leq T, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.3)$$

Où $a, T > 0$, f, u_0, u_1 sont des fonction données et ${}^c D_0^\alpha u$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α définie par :

$${}^c D_0^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds. \quad (2.4)$$

(2.2) sont les conditions initiales, (2.3) sont les conditions aux limites de Dirichlet et $f(x, t)$ est un terme source.

2.1.2 Résolution analytique

Proposition 2.1 la solution analytique $u(x, t)$ du problème (2.1) - (2.3) est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} [E_{\alpha}(-\beta_k^2 t^{\alpha}) \int_0^a u_0(x) \sin(\beta_k x) dx \\ & + t E_{\alpha, \alpha}(-\beta_k^2 t^{\alpha}) \int_0^a u_1(x) \sin(\beta_k x) dx \\ & + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\beta_k^2 \tau^{\alpha}) \tilde{f}(\beta_k, t - \tau) d\tau \sin(x \beta_k)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Où :

$$\beta_k = \frac{k\pi}{a}.$$

Preuve nous appliquons la transformée de sinus-Fourier fini à l'équation (2.1), on obtient :

$$F_x({}^c D_0^{\alpha} u(x, t)) = F_x\left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right) + F_x(f(x, t)).$$

Il devient,

$${}^c D_{0+}^{\alpha} \tilde{u}(\beta_k, t) = \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx + \tilde{f}(\beta_k, t). \quad (2.6)$$

Pour calculer $\int_0^a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx$, en utilisant l'intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \Big|_0^a - \int_0^a \frac{k\pi}{a} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx \\ &= \frac{-k\pi}{a} \cos\left(\frac{k\pi}{a} x\right) u(x, t) \Big|_0^a - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \int_0^a u(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx \\ &= \frac{-k\pi}{a} \left((-1)^k u(a, t) - u(0, t)\right) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \int_0^a u(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx \\ &= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \int_0^a u(x, t) \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) dx \\ &= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \tilde{u}(\beta_k, t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nous remplaçons le résultat précédent (2.7) dans l'équation (2.6), on obtient :

$${}^c D_{0+}^{\alpha} \tilde{u}(\beta_k, t) = -(\beta_k)^2 \tilde{u}(\beta_k, t) + \tilde{f}(\beta_k, t). \quad (2.8)$$

Nous appliquons la transformation de Laplace à l'équation (2.8), en utilisant l'équation (1.8) :

$$L_t \{ {}^c D_0^\alpha + \tilde{u}(\beta_k, t) \} = -(\beta_k)^2 L_t \{ \tilde{u}(\beta_k, t) \} + L_t \{ \tilde{f}(\beta_k, t) \}.$$

D'après l'égalité (1.9), on obtient :

$$s^\alpha \tilde{u}^* - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} = -\beta_k^2 \tilde{u}^*(\beta_k, s) + \tilde{f}^*(\beta_k, s), m-1 < \alpha < m$$

Ce que implique que :

$$(s^\alpha + \beta_k^2) \tilde{u}^*(\beta_k, s) = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} + \tilde{f}^*(\beta_k, s), \quad (2.9)$$

Et on a :

$$\begin{cases} 1 < \alpha < 2 \\ \text{et} \\ m-1 < \alpha < m, \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} &= \sum_{k=0}^1 \tilde{u}^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k} \\ &= \tilde{u}(0^+) s^{\alpha-1} + \tilde{u}^{(1)}(0^+) s^{\alpha-2} \\ &= \tilde{u}_0(x) s^{\alpha-1} + \tilde{u}_1(x) s^{\alpha-2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nous remplaçons le résultat de (2.10) dans l'équation (2.9), on obtient :

$$(s^\alpha + \beta_k^2) \tilde{u}^*(\beta_k, s) = \tilde{u}_0(\beta_k) s^{\alpha-1} + \tilde{u}_1(\beta_k) s^{\alpha-2} + \tilde{f}^*(\beta_k, s)$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*(\beta_k, s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \beta_k^2)} \int_0^\alpha u_0(x) \sin(\beta_k x) dx \\ &+ \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + \beta_k^2)} \int_0^\alpha u_1(x) \sin(\beta_k x) dx + \frac{1}{(s^\alpha + \beta_k^2)} \tilde{f}^*(\beta_k, s).\end{aligned}\quad (2.11)$$

Maintenant, en appliquant la transformation inverse de Laplace (1.9) sur l'équation (2.11) :

$$\begin{aligned}L^{-1}\{\tilde{u}^*(\beta_k, s)\} &= \tilde{u}(\beta_k, t) \\ &= L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \beta_k^2)}\right\} \int_0^\alpha u_0(x) \sin(\beta_k x) dx \\ &+ L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + \beta_k^2)}\right\} \int_0^\alpha u_1(x) \sin(\beta_k x) dx + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^\alpha + \beta_k^2)} \tilde{f}^*(\beta_k, s)\right\}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

D'après l'équation (1.3), on a :

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + \beta_k^2)}\right\} = E_\alpha(-\beta_k^2 t^\alpha). \quad (2.13)$$

D'après l'équation (1.4), on a :

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha + \beta_k^2)}\right\} = t E_{\alpha,2}(-\beta_k^2 t^\alpha). \quad (2.14)$$

On pose $z^*(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_k^2}$, et d'après (1.5) nous avons :

$$L^{-1}\{z^*\} = z(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\beta_k^2 t^\alpha),$$

Et d'après le théorème de convolution, on a :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^\alpha + \beta_k^2)} \tilde{f}(\beta_k, s)\right\} = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\beta_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\beta_k, t - \tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Nous remplaçons les résultats précédents (2.13) - (2.15) dans (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\beta_k, t) &= E_\alpha(-\beta_k^2 t^\alpha) \int_0^l u_0(x) \sin(\beta_k x) dx + t E_{\alpha,2}(-\beta_k^2 t^\alpha) \int_0^l u_1(x) \sin(\beta_k x) dx \\ &+ \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\beta_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\beta_k, t - \tau) d\tau.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Finalement, on applique la transformée inverse de sinus-Fourier finie sur l'équation (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{u}(\beta_k, t)\} &= u(x, t) \\ &= \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{+\infty} \left[E_\alpha(-\beta_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_0(x) \sin(x\beta_k) dx \right. \\ &+ t E_{\alpha,2}(-\beta_k^2 t^\alpha) \int_0^a u_1(x) \sin(x\beta_k) dx \\ &+ \left. \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\beta_k^2 \tau^\alpha) \tilde{f}(\beta_k, t - \tau) d\tau \right] \sin(x\beta_k),\end{aligned}$$

Où :

$$\beta_k = \frac{k\pi}{a}.$$

2.1.3 Méthode des éléments finis (EF)

Soit Ω un domaine borné. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω , muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

Et de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)^{\frac{1}{2}}$$

Et les deux espaces

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$$

Et

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Formulation variationnelle du problème

Soit $v \in H^1(0, a)$, on multiplie l'équation (2.1) par v et on intègre sur le domaine $[0, a]$ on obtient

$$({}^c D_0^\alpha u(x, t), v(x)) + \left(\frac{-\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x) \right) = (f(x, t), v(x)) \forall v \in H^1(0, a). \quad (2.17)$$

Pour calculer $\left(\frac{-\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x) \right)$, on utilise l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x) \right) &= \int_0^a \frac{-\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \cdot v(x) dx \\ &= \left[\frac{-\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot v(x) \right]_0^a + \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx. \end{aligned}$$

on pose $v(0) = v(a) = 0$, donc

$$\left(\frac{-\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), v(x) \right) = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x) dx, \quad (2.18)$$

on remplace le résultat précédent (2.18) dans (2.17), on obtient le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} ({}^c D_0^\alpha u(x, t), v(x)) + a(u, v) = (f(x, t), v(x)) \forall v \in H_0^1(0, a) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

Où $a(u, v) = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dx$.

Problème semi-discret

Considérons l'équation d'onde fractionnaire temporelle (2.1) avec les conditions initiales (2.2) et les conditions limites (2.3). Commençons d'abord par la méthode de différence finie par rapport au variable de temps. Basé sur la définition de Caputo (2.4) pour la dérivée fractionnaire.

Premièrement, nous discrétisons le domaine temporel par :

$$t_n = n\mu, n = 1, 2, \dots, N, \mu = \frac{T}{N}, (\text{pas de maillage temporel}).$$

Donc, $t_0 = 0$ et $t_N = T$. Puis on calcule la dérivée de Caputo définie par (2.4) en point de maillage (x, t_n) , nous avons :

$$\begin{aligned} {}^c D_0^\alpha u(x, t_n) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^{t_n} (t_n - s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x, s) ds, \end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t_k) = \frac{u(x, t_{k+1}) - 2u(x, t_k) + u(x, t_{k-1}))}{\mu^2}.$$

Et

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{1-\alpha} ds &= \left[\frac{-(t_n - s)^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \\ &= \frac{1}{2-\alpha} [(t_n - t_k)^{2-\alpha} - (t_n - t_{k+1})^{2-\alpha}] \\ &= \frac{1}{2-\alpha} [(n\mu - k\mu)^{2-\alpha} - (n\mu - (k+1)\mu)^{2-\alpha}] \\ &= \frac{1}{2-\alpha} [(n-k)^{2-\alpha} \mu^{2-\alpha} - (n-(k+1))^{2-\alpha} \mu^{2-\alpha}] \\ &= \frac{\mu^{2-\alpha}}{2-\alpha} [(n-k)^{2-\alpha} - (n-(k+1))^{2-\alpha}] \end{aligned}$$

Et d'après propriétés (1.6), on a

$$(2-\alpha) \Gamma(2-\alpha) = \Gamma(3-\alpha)$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^c D_0^\alpha u(x, t_n) &= \frac{\mu^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} [(n-k)^{2-\alpha} - (n-k-1)^{2-\alpha}] \\ &\quad \times \left[\frac{u(x, t_{k+1}) - 2u(x, t_k) + u(x, t_{k-1}))}{\mu^2} \right]. \end{aligned}$$

On pose $k + 1 = j \Rightarrow k = j - 1$, nous avons :

$$\begin{cases} k = 0 & \Rightarrow j = 1 \\ k = n - 1 & \Rightarrow j = n \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} {}^c D_0^\alpha u(x, t_n) &= \frac{\mu^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^n [(n-j+1)^{2-\alpha} - (n-j)^{2-\alpha}] \\ &\quad \times [u(x, t_j) - 2u(x, t_{j-1}) + u(x, t_{j-2})] \\ &= \frac{\mu^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^n b_{n-j} \times [u(x, t_j) - 2u(x, t_{j-1}) + u(x, t_{j-2})]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Telle que : $b_{n-j} = (n-j+1)^{2-\alpha} - (n-j)^{2-\alpha} > 0$ et $b_0 = 1 > b_1 > \dots > b_n$
pour $j = 1$

$$\begin{aligned} u(x, t_{-1}) &= u(x, 0) - \mu u_t(x, 0) \\ &= u_0(x) - \mu u_1(x) \end{aligned}$$

Et pour $t = t_n$ dans (2.19), on a :

$$({}^c D_0^\alpha u(x, t_n), v(x)) + a(u, v) = (f(x, t_n), v(x)) \forall v \in H^1(0, a).$$

Soit $u(x, t_n) = u^n$ et $f(x, t_n) = f^n$, donc :

$$({}^c D_0^\alpha u^n, v) + a(u^n, v) = (f^n, v) \forall v \in H_0^1(0, a). \quad (2.21)$$

En remplaçant (2.20) dans (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^n b_{n-j} [(u^j - 2u^{j-1} + u^{j-2}, v)] + a(u^n, v) \\
&= (f^n, v) \sum_{j=1}^n b_{n-j} [((u^j, v) - 2(u^{j-1}, v) + (u^{j-2}, v))] + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) a(u^n, v) \\
&= \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) (f^n, v) b_0(u^n, v) + b_1(u^{n-1}) - b_n(u^0, v) + \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}(u^j, v) - 2b_0(u^{n-1}, v) \\
&\quad - 2 \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}(u^{j-1}, v) + b_{n-1}(u^{-1}, v) + \sum_{j=2}^n b_{n-j}(u^{j-2}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) a(u^n, v) \\
&= \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) (f^n, v). \tag{2.22}
\end{aligned}$$

On pose $I_1 = \sum_{j=0}^{n-2} b_{n-j}(u^j, v)$, en effectuant le changement $n-j = J+1 \Rightarrow J = n-j-1$, donc

$$\begin{cases} j = 0 & \Rightarrow J = n-1 \\ j = n-2 & \Rightarrow J = 1 \end{cases}$$

On pose $I_2 = \sum_{j=1}^{n-1} b_{n-j}(u^{j-1}, v)$ en effectuant le changement $n-j = J$, donc

$$\begin{cases} j = 1 & \Rightarrow J = n-1 \\ j = n-1 & \Rightarrow J = 1 \end{cases}$$

On pose $I_3 = \sum_{j=2}^n b_{n-j}(u^{j-2}, v)$ en effectuant la changement $n-j = J-1$, donc

$$\begin{cases} j = 2 & \Rightarrow J = n-1 \\ j = n & \Rightarrow J = 1 \end{cases}$$

On remplaçant ces changements dans (2.22), on obtient :

$$\begin{aligned}
& b_0 (u^n, v) + b_1 (u^{n-1}, v) - b_n (u^0, v) + \sum_{J=1}^{n-1} b_{J+1} (u^{n-J-1}, v) - 2b_0 (u^{n-1}, v) \\
& - 2 \sum_{J=1}^{n-1} b_J (u^{n-J-1}, v) + b_{n-1} (u^{-1}, v) + \sum_{J=1}^{n-1} b_{J-1} (u^{n-J-1}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) a (u^n, v) \\
& = \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) (f^n, v) + (u^n, v) + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) a (u^n, v) \\
& = \sum_{J=1}^{n-1} (-b_{J+1} + 2b_J - b_{J-1}) (u^{n-J-1}, v) \\
& + b_n (u^0, v) + (2b_0 - b_1) (u^{n-1}, v) - b_{n-1} (u^{-1}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3-\alpha) (f^n, v). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Problème discret total

Maintenant, nous discrétisons le domaine d'espace par :

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, M, h = \frac{a}{M} = x_{i+1} - x_i \quad (\text{pas de maillage d'espace}),$$

donc, $x_0 = 0$ et $x_M = a$.

Puis, on note :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} si & x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} si & x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Et

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_j-x_{j-1}} si & x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{1}{x_j-x_{j+1}} si & x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ou $j = 1, 2, \dots, M-1$

On note l'espace $V_h \subset H_0^1(0, a)$ par :

$$V_h = \left\{ v \in C(0, a) \left| v = \sum_{i=1}^{M-1} a_i \varphi_i(x), a_i \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

Donc, le problème est trouvé

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h^n \in V_h, \text{ telle que} \\ (u_h^n, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) a(u_h^n, v) = \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}) (u_h^{n-j-1}, v) \\ + (2b_0 - b_1) (u^{n-1}, v) + b_n (u^0, v) - b_{n-1} (u^{-1}, v) + \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha) (f^n, v) \forall v \in V_h \end{array} \right. \quad (2.24)$$

On a $u_h^n \in V_h$ donc $u_h^n = \sum_{l=1}^{M-1} a_l^n \varphi_l$, on prend $v = \varphi_m, m = 1, 2, \dots, M-1$, donc l'équation (2.24) équivalent à :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{M-1} a_l^n (\varphi_l, \varphi_m) + \lambda \sum_{l=1}^{M-1} a_l^n \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}) (u_h^{n-j-1}, \varphi_m) \\ &+ (2b_0 - b_1) (u^{n-1}, \varphi_m) + b_n (u^0, \varphi_m) - b_{n-1} (u^{-1}, \varphi_m) + \lambda (f^n, \varphi_m), \end{aligned}$$

Avec $\lambda = \mu^\alpha \Gamma(3 - \alpha)$

Alors, le système matriciel correspondant est :

— Pour $n = 1$, on a $u_h^1 = \sum_{l=1}^{M-1} a_l^1 \varphi_l$, donc :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{M-1} a_l^1 (\varphi_l, \varphi_m) + \lambda \sum_{l=1}^{M-1} a_l^1 \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right) &= b_1 (u^0, \varphi_m) + (2b_0 - b_1) (u^0, \varphi_m) \\ &- b_0 (u^{-1}, \varphi_m) + \lambda (f^1, \varphi_m) = (u_0, \varphi_m) + \mu (u_1, \varphi_m) + \lambda (f^1, \varphi_m). \end{aligned}$$

— Pour $m = 1$, on a :

$$\begin{aligned} &[a_1^1 (\varphi_1, \varphi_1) + a_2^1 (\varphi_2, \varphi_1) + \dots + a_{M-1}^1 (\varphi_{M-1}, \varphi_1)] \\ &+ \lambda \left[a_1^1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + a_2^1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) + \dots + a_{M-1}^1 \left(\frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \right] \\ &= (u_0, \varphi_1) + \mu (u_1, \varphi_1) + \lambda (f^1, \varphi_1). \end{aligned}$$

— Pour $m = 2$, on a :

$$\begin{aligned} &[a_1^1 (\varphi_1, \varphi_2) + a_2^1 (\varphi_2, \varphi_2) + \dots + a_{M-1}^1 (\varphi_{M-1}, \varphi_2)] \\ &+ \lambda \left[a_1^1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + a_2^1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + \dots + a_{M-1}^1 \left(\frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= (u_0, \varphi_2) + \mu (u_1, \varphi_2) + \lambda (f^1, \varphi_2) .$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

— Pour $m = M - 1$, on a :

$$\begin{aligned} & [a_1^1 (\varphi_1, \varphi_{M-1}) + a_2^1 (\varphi_2, \varphi_{M-1}) + \dots + a_{M-1}^1 (\varphi_{M-1}, \varphi_{M-1})] \\ & + \lambda \left[a_1^1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x} \right) + a_2^1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x} \right) + \dots + a_{M-1}^1 \left(\frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x} \right) \right] \\ & = (u_0, \varphi_{M-1}) + \mu (u_1, \varphi_{M-1}) + \lambda (f^1, \varphi_{M-1}) . \end{aligned}$$

Soit

$$X^n = (a_1^n, a_2^n, \dots, a_{M-1}^n)^T$$

$$F^n = ((f^n, \varphi_1), (f^n, \varphi_2), \dots, (f^n, \varphi_{M-1}))^T$$

$$K = ((u_0 + \mu u_1, \varphi_1), (u_0 + \mu u_1, \varphi_2), \dots, (u_0 + \mu u_1, \varphi_{M-1}))^T .$$

Et les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, M - 1$ sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_{M-1}, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & (\varphi_{M-1}, \varphi_2) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ (\varphi_1, \varphi_{M-1}) & (\varphi_2, \varphi_{M-1}) & (\varphi_{M-1}, \varphi_{M-1}) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$B = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{M-1}}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Alors, on obtient le système suivant :

$$AX^1 + \lambda BX^1 = \lambda F^1 + K$$

$$\Rightarrow (A + \lambda B) X^1 = \lambda F^1 + K$$

On note $C = (A + \lambda B)$, alors on a :

$$CX^1 = \lambda F^1 + K$$

Lemme 2.1 pour $i = 1, 2, \dots, M - 1$, on a :

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{h}{6} \begin{cases} 1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 4 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{h} \begin{cases} -1 & \text{si } |j - i| = 1 \\ 2 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $j = 1, 2, \dots, M - 1$

Preuve

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_i) &= \int_0^a \varphi_i(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^2 dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 dx \\ &= \frac{h}{3} + \frac{h}{3} = \frac{2}{3}h \\ (\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_0^a \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_{i+1})(x - x_i) dx \end{aligned}$$

On pose $x - x_i = t$, alors on a :

$$\begin{cases} x = x_i & \Longleftrightarrow t = 0 \\ x = x_{i+1} & \Longleftrightarrow t = h \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_{i-1}) &= \frac{-1}{h^2} \int_h^0 (x - x_i - h) (x - x_i) dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_h^0 t (t - h) dt \\ &= \left(\frac{-1}{h^2} \right) \left(\frac{-h^3}{6} \right) \\ &= \frac{h}{6} (\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_0^a \varphi_{i-1}(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \int_{x_i}^{x_{i-1}} \left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \right) \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) dx \\ &= \frac{-1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1} - h) (x - x_{i-1}) dx \end{aligned}$$

On pose $x - x_{i-1} = t$, alors on a :

$$\begin{cases} x = x_{i-1} & \Longleftrightarrow t = 0 \\ x = x_i & \Longleftrightarrow t = h \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} (\varphi_{i-1}, \varphi_i) &= \frac{-1}{h^2} \int_h^0 t (t - h) dt = \frac{h}{6} \\ (\varphi_i, \varphi_{i+2}) &= (\varphi_{i+2}, \varphi_i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_0^a \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)^2 (x) dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} dx \\
&= \frac{(x_i - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_i - x_{i+1})^2} \\
&= \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_0^a \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x) \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} (x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(x_i - x_{i+1})} \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)} dx \\
&= \frac{-1}{h}
\end{aligned}$$

Alors

$$A = h \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & & & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Et

$$B = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour calculer les vecteurs F^1 et K on utilise les formules d'intégrations numériques qui donnent une approximation des ces intégrales, par exemple on peut utiliser La formule des trapèzes

$$\int_a^b \varphi(x) dx \approx \frac{1}{2} (b - a) [\varphi(a) + \varphi(b)].$$

Donc, le système matriciel de ce problème peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \\ CX^1 = \lambda F^1 + K \\ CX^n = \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}) K1 + (2b_0 - b_1) K2 \\ \quad + b_n K3 - b_{n-1} K4 + \lambda F^n \end{cases}$$

Avec

$$K1 = ((u^{n-j-1}, \varphi_1), (u^{n-j-1}, \varphi_2), \dots, (u^{n-j-1}, \varphi_{M-1}))^T$$

$$K2 = ((u^{n-1}, \varphi_1), (u^{n-1}, \varphi_2), \dots, (u^{n-1}, \varphi_{M-1}))^T$$

$$K3 = ((u_0, \varphi_1), (u_0, \varphi_2), \dots, (u_0, \varphi_{M-1}))^T$$

$$K4 = ((u_{-1}, \varphi_1), (u_{-1}, \varphi_2), \dots, (u_{-1}, \varphi_{M-1}))^T$$

Et la matrice C est définie par

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2h}{3} + \frac{2\lambda}{h} & \frac{h}{6} - \frac{\lambda}{h} & & & & 0 \\ \frac{h}{6} - \frac{\lambda}{h} & \frac{2h}{3} + \frac{2\lambda}{h} & \frac{h}{6} - \frac{\lambda}{h} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{h}{6} - \frac{\lambda}{h} & \frac{2h}{3} + \frac{2\lambda}{h} & \frac{h}{6} - \frac{\lambda}{h} & \\ 0 & & & \frac{h}{6} - \frac{\lambda}{h} & \frac{2h}{3} + \frac{2\lambda}{h} & \end{pmatrix}$$

La matrice C est a diagonale strictement dominante donc le système admet une solution unique.

Algorithme :

Nous avons l'algorithme suivante qui permet de résoudre numériquement le problème d'évolution unidimensionnel pour une équation d'onde fractionnaire (2.1) - (2.3).

étape 0 : soient $M, N, h, \mu, \alpha, \lambda$ données.

étape 1 : déclarer les fonctions f, u_0, u_1 .

étape 2 : discrétiser le domaine d'espace et le domaine temporel.

étape 3 : calculer le deuxième membre

$$V = \sum_{j=1}^{n-1} (-b_{j+1} + 2b_j - b_{j-1}) (u^{n-j-1}, \varphi_i) + (2b_0 - b_1) (u^{n-1}, \varphi_i) \\ + b_n (u_0, \varphi_i) - b_{n-1} (u^{-1}, \varphi_i) + \lambda (f^n, \varphi_i)$$

Avec $i = 1, 2, \dots, M - 1$

étape 4 : entrer les valeurs de la matrice C .

étape 5 : calculer $X = C^{-1} * V'$

étape 6 : calculer la solution exacte U en point t_j avec $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

2.2 Exemples Numériques avec Python

2.2.1 Exemple 1 : Comparaison Spatiale ($h = 0.1$ vs $h = 0.05$)

```

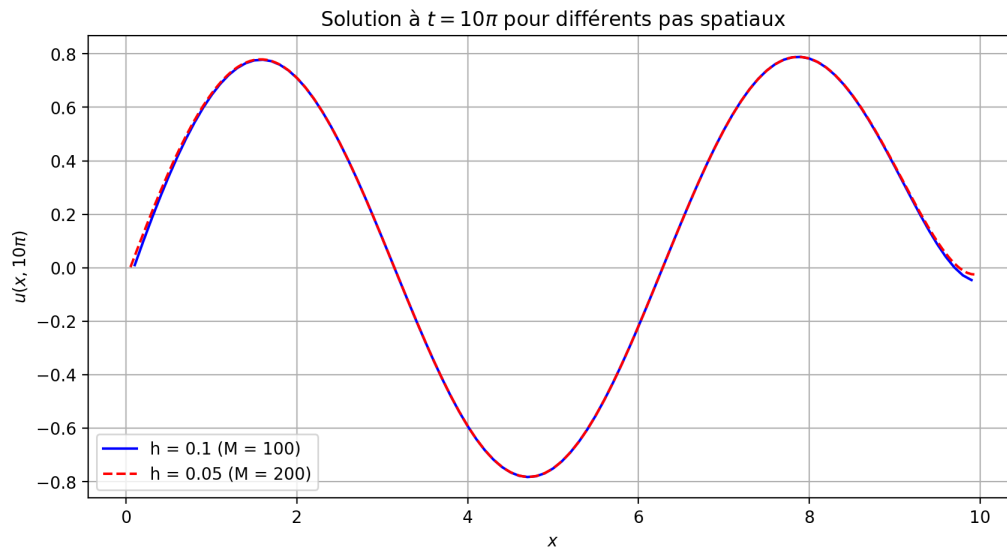
1 import numpy as np
2 from scipy.sparse import diags
3 from scipy.sparse.linalg import spsolve
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # Paramètres
7 h_coarse = 0.1
8 h_fine = 0.05
9 mu = 0.1
10 M_coarse = int(10 / h_coarse)
11 M_fine = int(10 / h_fine)
12 N = int(10 * np.pi / mu)
13
14 # Fonction pour résoudre le système
15 def solve_pde(h, M):
16     x = np.linspace(0, 10, M + 1)
```



```

17     lambda_ = np.sqrt(mu) * np.math.gamma(1.5)
18     main_diag = (2 * h / 3 + 2 * lambda_ / h) * np.ones(M - 1)
19     off_diag = (h / 6 - lambda_ / h) * np.ones(M - 2)
20     C = diags([off_diag, main_diag, off_diag], [-1, 0, 1], shape=(M - 1, M - 1))
21         .tocsr()
22     C[0, 0], C[0, 1] = 1, 0
23     C[-1, -1], C[-1, -2] = 1, 0
24     u0 = np.sin(x[1:-1])
25     K = u0 * h
26     f = np.exp(-10 * np.pi) * x[1:-1] * (10 - x[1:-1])
27     F = f * h
28     RHS = lambda_ * F + K
29     u = spsolve(C, RHS)
30     return x[1:-1], u
31
32 # Resolution et trac
33 x_coarse, u_coarse = solve_pde(h_coarse, M_coarse)
34 x_fine, u_fine = solve_pde(h_fine, M_fine)
35
36 plt.figure(figsize=(10, 5))
37 plt.plot(x_coarse, u_coarse, 'b-', label=f'h = {h_coarse} (M = {M_coarse})')
38 plt.plot(x_fine, u_fine, 'r--', label=f'h = {h_fine} (M = {M_fine})')
39 plt.xlabel('$x$'); plt.ylabel('$u(x, 10\pi)$')
40 plt.legend(); plt.grid()
41 plt.title('Solution a $t = 10\pi$ pour diff rents pas spatiaux')
42 plt.show()

```



2.2.2 Exemple 2 : Effet du Pas de Temps

Objectif : Étudier l'influence de μ sur l'évolution temporelle en $x = 5$.

```

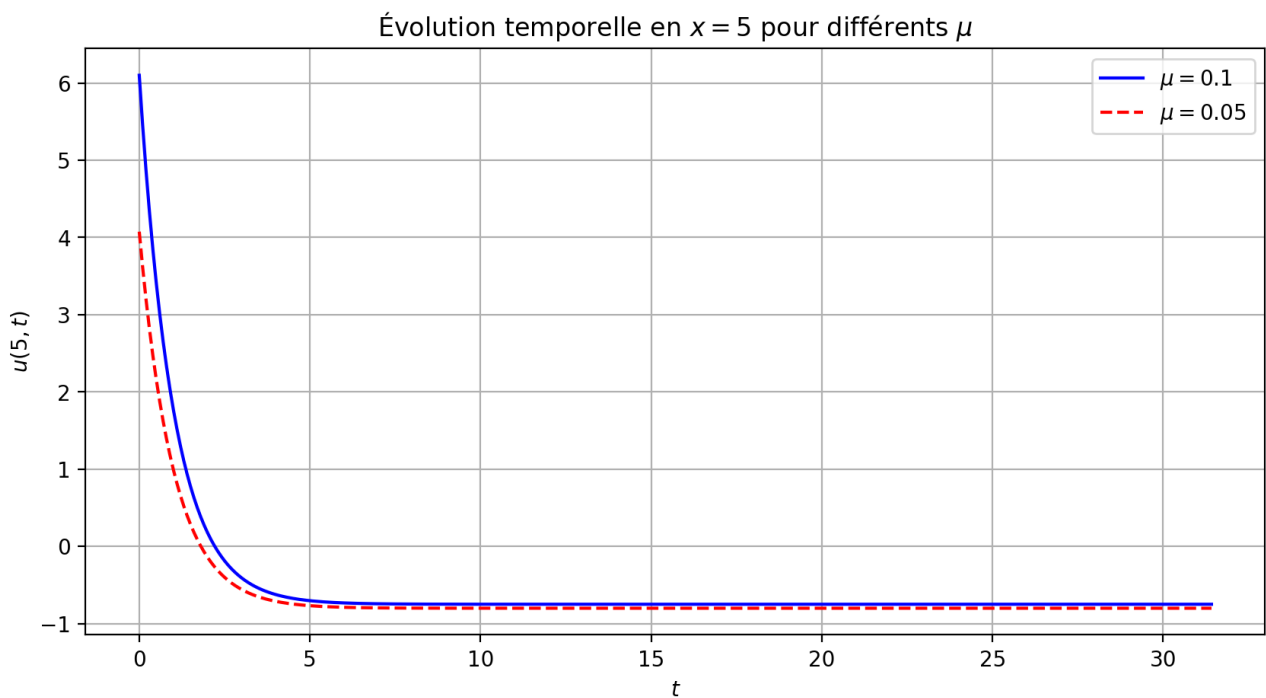
1 def solve_pde_time(h, mu, M, N):
2     x = np.linspace(0, 10, M + 1)
3     t = np.linspace(0, 10 * np.pi, N + 1)
4     lambda_ = np.sqrt(mu) * np.math.gamma(1.5)
5     main_diag = (2 * h / 3 + 2 * lambda_ / h) * np.ones(M - 1)
6     off_diag = (h / 6 - lambda_ / h) * np.ones(M - 2)
7     C = diags([off_diag, main_diag, off_diag], [-1, 0, 1], shape=(M - 1, M - 1))
8         .tocsr()
9     C[0, 0], C[0, 1] = 1, 0
10    C[-1, -1], C[-1, -2] = 1, 0
11    u0 = np.sin(x[1:-1])
12    K = u0 * h
13    u_x5 = []
14    for n in range(N + 1):
15        f = np.exp(-t[n]) * x[1:-1] * (10 - x[1:-1])
16        F = f * h
17        RHS = lambda_ * F + K
18        u = spsolve(C, RHS)

```

```

18     u_x5.append(u[np.argmin(np.abs(x[1:-1] - 5))])
19     return t, u_x5
20
21 # Paramètres
22 h = 0.1
23 mu1, mu2 = 0.1, 0.05
24 N1 = int(10 * np.pi / mu1)
25 N2 = int(10 * np.pi / mu2)
26
27 t_mu1, u_mu1 = solve_pde_time(h, mu1, M_coarse, N1)
28 t_mu2, u_mu2 = solve_pde_time(h, mu2, M_coarse, N2)
29
30 plt.figure(figsize=(10, 5))
31 plt.plot(t_mu1, u_mu1, 'b-', label=f'$\mu = {mu1}$')
32 plt.plot(t_mu2, u_mu2, 'r--', label=f'$\mu = {mu2}$')
33 plt.xlabel(r'$t$')
34 plt.ylabel(r'$u(5, t)$')
35 plt.legend(); plt.grid()
36 plt.title(r' évolution temporelle en $x = 5$ pour différents $\mu$')
37 plt.show()

```



2.2.3 Exemple 3 : Validation Exacte

Objectif : Comparer la solution numérique avec une solution exacte supposée

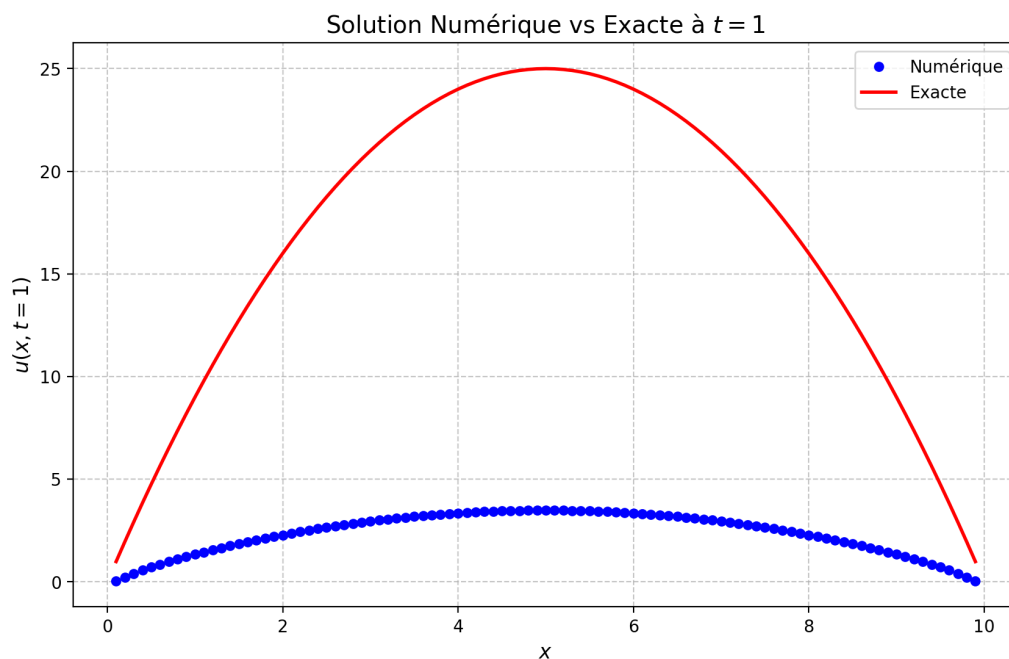
$$u_{\text{exact}}(x, t) = t^2 x(10 - x)$$

```
1 import numpy as np
2 from scipy.sparse import diags
3 from scipy.sparse.linalg import spsolve
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from scipy.special import gamma
6
7 # Paramètres
8 h = 0.1
9 mu = 0.01
10 M = int(10 / h)
11 N = int(1 / mu)
12 alpha = 0.5
13 x = np.linspace(0, 10, M+1)
14 t_final = 1.0
15
16 # Solution exacte
17 def u_exact(x, t):
18     return t**2 * x * (10 - x)
19
20 # Terme source
21 def source_term(x, t):
22     return (2 * t**(2 - alpha) / gamma(3 - alpha)) * x * (10 - x) + 2 * t**2
23
24 lambda_ = mu**alpha * gamma(2 - alpha)
25 main_diag = (2*h/3 + 2*lambda_/h) * np.ones(M-1)
26 off_diag = (h/6 - lambda_/h) * np.ones(M-2)
27 C = diags([off_diag, main_diag, off_diag], [-1, 0, 1], shape=(M-1, M-1)).tocsr()
```

```

28 C[0, 0], C[0, 1] = 1, 0
29 C[-1, -1], C[-1, -2] = 1, 0
30
31 f = source_term(x[1:-1], t_final)
32 F = f * h
33 u_num = spsolve(C, lambda_ * F)
34
35 plt.figure(figsize=(10, 6))
36 plt.plot(x[1:-1], u_num, 'bo', label='Numérique', markersize=5)
37 plt.plot(x[1:-1], u_exact(x[1:-1], t_final), 'r-', label='Exacte', linewidth=2)
38 plt.xlabel('$x$')
39 plt.ylabel('$u(x,t=1)$')
40 plt.legend()
41 plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
42 plt.title('Solution Numérique vs Exacte $t=1$')
43 plt.show()
44
45 # Erreur L2
46 error_L2 = np.sqrt(np.sum((u_num - u_exact(x[1:-1], t_final))**2) * h)
47 print(f"Erreur L2: {error_L2:.10f}")

```



Mise en œuvre du modèle numérique

Sommaire

3.1	Mise en œuvre du modèle numérique	46
3.1.1	Méthode discrète totale de Crank- Nicolson/ Galerkin(CNG)	46
3.1.2	Mise en œuvre du schéma CNG entièrement discret	48

Introduction

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode de Galerkin linéaire pour simplifier le problème dans l'espace. Cela nous donne un système d'équations différentielles en temps, de nature non linéaire. Pour le résoudre, nous appliquons une méthode de linéarisation inspirée de Picard, puis nous utilisons le schéma de Crank-Nicolson pour avancer dans le temps.

3.1 Mise en œuvre du modèle numérique

3.1.1 Méthode discrète totale de Crank- Nicolson/ Galerkin(CNG)

Dans cette partie, nous construisons un schéma numérique totalement discret pour résoudre l'équation

$$({}^c D_a^\alpha u, v) + F(u, u, v) = (f, v) \forall v \in H_0^\beta(I)$$

en combinant la méthode de Galerkin pour la discrétisation spatiale avec le schéma de Crank-Nicolson pour l'intégration en temps. Étant donné que cette équation est de nature non linéaire, une approche itérative est nécessaire. Nous faisons appel à une linéarisation inspirée de la méthode de Picard : dans l'expression de $F(., ., .)$, le premier argument est remplacé par l'itération précédente, ce qui permet de résoudre à chaque étape un problème linéaire par un solveur adapté. Considérons une partition uniforme $B_h = \{I_i; 1 \leq i \leq M\}$ de l'intervalle $I = [0, 1]$ à l'aide des nœuds x_m ($m = 0, 1, \dots, M$) tels que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$, avec un pas constant $h = \frac{1}{M}$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$ donné, on note $P_k(A)$ l'ensemble des polynômes définis sur $D \subset I$ de degré inférieur ou égal à k . À partir de cette partition, on définit l'espace d'éléments finis :

$$E_h = \left\{ v \in H_0^1(I) \cap C(\hat{I}) ; v|_{I_i} \in P_k(I_i) \forall i = 1, 2, \dots, M \right\}. \quad (3.1)$$

En posant : $E_h = \text{vect} \{ \varphi_i \} (i = 1, 2, \dots, M)$, on peut choisir $k = 1$ et

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} x - x_{m-1} & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ x_{m+1} - x & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.2)$$

De plus, soit N un entier naturel strictement positif. On définit alors le pas de temps par $\delta t = \frac{T}{N}$, ce qui permet de discrétiser l'intervalle temporel $[0, T]$ en N sous-intervalles de même longueur. Ainsi, les instants discrets sont donnés par :

$$t_n = n \delta t, \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N.$$

Pour simplifier les notations dans ce qui suit, on introduit les conventions suivantes :

$$Y^{(n)} = Y(., t_n) ; \bar{Y}^{(n)} = \frac{Y^{(n)} + Y^{(n-1)}}{2}, \quad (3.3)$$

$$\partial_t^\alpha Y^{(n)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \partial_t^* Y^{(n)} ds$$

Où

$$\partial_t^* Y^{(n)} = \frac{Y^{(n)} - Y^{(n-1)}}{\delta t}$$

pour toute fonction $Y(., .)$.

Ensuite, on introduit l'opérateur de projection de Ritz-Galerkin, noté P_h , qui permet de projeter une fonction de l'espace $H_0^1(I)$ sur l'espace discret E_h . En prenant $u_h^{(0)} = P_h u_0$ comme condition initiale projetée, on construit un schéma totalement discret combinant la méthode des éléments finis (EF) en espace avec le schéma de Crank-Nicolson (CNG) en temps. Ce schéma permet de calculer successivement les approximations $u_h^{(n)} \in E_h$ pour $n = 1, 2, \dots, N$:

$$\left(\partial_t^\alpha u_h^{(n)}, v \right) + F \left(u_h^{(n-1)}, \bar{u}_h^{(n)}, v \right) = (f^{(n)}, v) \quad \forall v \in E_h, \quad (3.4)$$

Ou, par équivalence,

$$\left(\partial_t^\alpha u_h^{(n)}, v \right) + \frac{1}{2} F \left(u_h^{(n-1)}, u_h^{(n)}, v \right) = \frac{-1}{2} F \left(u_h^{(n-1)}, u_h^{(n-1)}, v \right) + (f^{(n)}, v). \quad (3.5)$$

$$\forall v \in E_h.$$

Calculons la dérivée fractionnaire par rapport au temps en $t = t_n$. On a :

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u_h^{(n)} &= \partial_t^\alpha u_h(x, t_n) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha} \partial_t^* u_h(x, s) ds \\ &= \frac{1}{\delta t \Gamma(1-\alpha)} \sum_{l=0}^{n-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} (t_n - s)^{-\alpha} (u^{(l+1)} - u^{(l)}) ds \\ &= \frac{1}{\delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \sum_{l=0}^{n-1} (u^{(l+1)} - u^{(l)}) [(n-l)^{1-\alpha} - (n-l-1)^{1-\alpha}]. \end{aligned}$$

Posons : $b_l = (n-l)^{1-\alpha} - (n-l-1)^{1-\alpha}$ et $\omega = (\delta t)^\alpha \Gamma(2-\alpha)$. Alors,

$$\partial_t^\alpha u_h^{(n)} = \frac{1}{\omega} \sum_{l=0}^{n-1} b_l (u^{(l+1)} - u^{(l)}).$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{n-1} b_l \left(u_h^{(n)}, v \right) + \frac{\omega}{2} F \left(u_h^{(n-1)}, u_h^{(n)}, v \right) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} b_l \left(u_h^{(n-1)}, v \right) - \frac{\omega}{2} F \left(u_h^{(n-1)}, u_h^{(n-1)}, v \right) + \omega (f^{(n)}, v) \quad \forall v \in E_h. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.2 Mise en œuvre du schéma CNG entièrement discret

Cette section est dédiée à la mise en œuvre du schéma totalement discret EF/CNG mentionné précédemment, basé sur la méthode des éléments finis.

En considérant la base linéaire $\{\varphi_m (m = 0, 1, \dots, M)\}$, l'approximation $u_h(x, t)$ de la solution exacte $u(x, t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_h(x, t) = \sum_{i=0}^M u_i(t) \varphi_i(x). \quad (3.7)$$

où les fonctions $u_i(t)$ représentent les coefficients temporels à déterminer.

Dans le cadre du schéma en temps, ces fonctions sont évaluées aux instants discrets t_n , ce qui donne :

$$U_i^{(n)} = u_i(t_n), \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N.$$

Les valeurs des fonctions $\varphi_i(x)$ et de leurs dérivées premières, dont les supports contiennent le nœud x_m , sont données dans Tableau (3.1)..

i	$m-1$	m	$m+1$
$\varphi_i(x_m)$	0	1	0
$\varphi_i'(x_m)$	0	$1/h$	0

TABLE 3.1 – Valeurs des fonctions $\varphi_i(x)$ et leurs dérivées premières au nœud x_m

A l'aide de (3.2) et du Tableau (3.1), les valeurs de l'approximation u_h et de sa dérivée première par rapport à x aux nœuds x_m sont données à chaque $t \in [0, T]$ par :

$$u_h(x_m, t) = u_m(t), \quad (3.8)$$

$$u_h(x_0, t) = u_0(t), \quad (3.9)$$

$$\partial_x u_h(x_m, t) = \frac{1}{h}, \quad (3.10)$$

Pour tout $m = 0, \dots, M$.

D'après (3.7), il ressort clairement que chaque fonction φ_m n'implique que deux éléments finis. Les supports des deux fonctions φ_{m-1} et φ_m se croisent dans l'élément typique $[x_{m-1}, x_m]$, alors que toutes les autres fonctions s'annulent sur cet intervalle. Le calcul peut donc être fait en premier sur chaque élément typique $[x_{m-1}, x_m]$, pour obtenir des contributions élémentaires. Ainsi, sur $[x_{m-1}, x_m]$, l'approximation (3.7) se simplifie en :

$$u_h(x, t) = \sum_{i=m-1}^m u_i(t) \varphi_i(x). \quad (3.11)$$

En remplaçant pour u_h donnée par (3.11) dans (3.6), le schéma EF/CNG entièrement discret sur $[x_{m-1}, x_m]$ peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{n-1} b_l \sum_{i=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i v dx \right) U_i^{(n)} + \frac{\gamma\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i^{(\beta)} v' dx \right) U_i^{(n)} \\
& + \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \sum_{k=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i \varphi_k v dx \right) U_k^{(n-1)} U_i^{(n)} - \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i v dx \right) U_i^{(n)} \\
& = \sum_{l=0}^{n-1} b_l \sum_{i=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i v dx \right) U_i^{(n-1)} - \frac{\gamma\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i^{(\beta)} v' dx \right) U_i^{(n-1)} \\
& - \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \sum_{k=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i \varphi_k v dx \right) U_k^{(n-1)} U_i^{(n-1)} + \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_{x_{m-1}}^{x_m} \varphi_i v dx \right) U_i^{(n-1)} \\
& + \omega \int_{x_{m-1}}^{x_m} f^{(n)} v dx, \quad \forall v \in E_h.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour faciliter les calculs intégraux, le système de coordonnée globale pour la variable x pourrait être changé en un système local avec la variable ε en utilisant la transformation affine $\varepsilon = x - x_m$ de $[x_{m-1}, x_m]$ dans $[0, h]$. Ainsi, les fonctions φ_{m-1} et φ_m peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varphi_{m-1}(\varepsilon) \\ \varphi_m(\varepsilon) \end{cases} = \frac{1}{h} \begin{cases} h - \varepsilon \\ \varepsilon + h \end{cases}, \quad \forall \varepsilon \in [0, h] \tag{3.13}$$

Par conséquent, (3.12) devient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{n-1} b_l \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i v d\varepsilon \right) U_i^{(n)} + \frac{\gamma\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i^{(\beta)} v' d\varepsilon \right) U_i^{(n)} \\
& + \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \sum_{k=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_k v d\varepsilon \right) U_k^{(n-1)} U_i^{(n)} \\
& - \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i v d\varepsilon \right) U_i^{(n)} \\
& = \sum_{l=0}^{n-1} b_l \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i v d\varepsilon \right) U_i^{(n-1)} - \frac{\gamma\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i^{(\beta)} v' d\varepsilon \right) U_i^{(n-1)} \\
& - \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \sum_{k=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_k v d\varepsilon \right) U_k^{(n-1)} U_j^{(n-1)} \\
& + \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i v d\varepsilon \right) U_i^{(n-1)} + \omega \int_0^h f^{(n)} v d\varepsilon; \forall v \in E_h.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour les fonctions (3.13), les dérivées premières sont :

$$\begin{cases} \varphi'_{m-1}(\varepsilon) \\ \varphi'_m(\varepsilon) \end{cases} = \frac{1}{h} \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}, \quad \forall \varepsilon \in [0, h]. \quad (3.15)$$

Cependant, les dérivées fractionnaires d'ordre θ sont facilement calculées à partir de (1.7) pour obtenir :

$$\begin{cases} \varphi^{(\theta)}_{m-1}(\varepsilon) \\ \varphi^{(\theta)}_m(\varepsilon) \end{cases} = \frac{1}{h} \begin{cases} \frac{-\varepsilon^{1-\theta}}{\Gamma(2-\theta)} \\ \frac{\varepsilon^{1-\theta}}{\Gamma(2-\theta)} \end{cases}, \quad \forall \varepsilon \in [0, h]. \quad (3.16)$$

En posant : $e = \varphi_j$ dans (3.14), les contributions élémentaires de $[x_{m-1}, x_m]$ se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{n-1} b_l \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_{ij} \varphi_j d\varepsilon \right) U_i^{(n)} + \frac{\gamma\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i^{(\theta)} \varphi'_j d\varepsilon \right) U_i^{(n)} \\ & + \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \sum_{k=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_k \varphi_j d\varepsilon \right) U_k^{(n-1)} U_i^{(n)} - \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_j d\varepsilon \right) U_i^{(n)} \\ & = \sum_{l=0}^{n-1} b_l \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_j d\varepsilon \right) U_i^{(n-1)} - \frac{\gamma\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i^{(\theta)} \varphi'_j d\varepsilon \right) U_i^{(n-1)} \\ & - \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \sum_{k=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_k \varphi_j d\varepsilon \right) U_k^{(n-1)} U_i^{(n-1)} + \frac{\rho\omega}{2} \sum_{i=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_i \varphi_j d\varepsilon \right) U_i^{(n-1)} \\ & + \omega \int_0^h f^{(n)} \varphi_j d\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour : $j = m - 1, m$.

Ensuite, en définissant les coefficients matriciels pour $m = 0, 1, \dots, M - 1$ et $i, j, k = m - 1, m$

$$A_{ij}^e = \int_0^h \varphi_j \varphi_i d\varepsilon, \quad (3.18)$$

$$B_{ij}^e = \int_0^h \varphi_j^{(\theta)} \varphi'_i d\varepsilon \quad (3.19)$$

$$C_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^m \left(\int_0^h \varphi_j \varphi_k \varphi_i d\varepsilon \right) U_k^{(n-1)} \quad (3.20)$$

$$F_{ij}^e = \int_0^h f^{(n)} \varphi_i d\varepsilon f^{(n)} = f(\varepsilon, t_n). \quad (3.21)$$

Pour $i, j, k = m - 1, m$, et le vecteur $U^{(n),e} = [U_{m-1}^{(n)}, U_m^{(n)}]^T$.

Maintenant, on pose : $b = (b_0, \dots, b_l)^T$ pour réécrire le système linéaire (3.17) de manière équivalente sous la forme matricielle suivante :

$$\left[bA^e + \frac{\gamma\omega}{2}B^e + \frac{\rho\omega}{2}C^e - \frac{\rho\omega}{2}A^e \right] U^{(n),e} = \left[bA^e - \frac{\gamma\omega}{2}B^e - \frac{\rho\omega}{2}C^e - \frac{\rho\omega}{2}A^e \right] U^{(n),e} + \omega F^e \quad (3.22)$$

Les matrices élémentaires sont calculées pour trouver :

$$\begin{aligned} A^e &= \frac{h}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \\ B^e &= \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ C^e &= h \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{4} \frac{5}{12}\right) U^{(n-1),e} & \left(\frac{5}{12} \frac{11}{12}\right) U^{(n-1),e} \\ \left(\frac{5}{12} \frac{11}{12}\right) U^{(n-1),e} & \left(\frac{11}{12} \frac{15}{4}\right) U^{(n-1),e} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assemblage du système global

En considérant uniquement les coefficients diagonaux des contributions élémentaires (3.23), on obtient le système linéaire global suivant :

$$\left[bA + \frac{\gamma\omega}{2}B + \frac{\rho\omega}{2}C - \frac{\rho\omega}{2}A \right] U^{(n)} = \left[bA - \frac{\gamma\omega}{2}B - \frac{\rho\omega}{2}C - \frac{\rho\omega}{2}A \right] U^{(n-1)} + \omega F \quad (3.24)$$

Caractéristiques du système

Cette équation représente la $n^{\text{ième}}$ itération du schéma EF/CNG entièrement discrétisé appliqué au problème défini par (2.1) - (2.2). Le système résultant, donné par (3.24), se compose de $M + 1$ équations linéaires permettant de déterminer les $M + 1$ inconnues $U_i^{(n)}$ pour chaque instant t_n , avec $i = 0, 1, \dots, M$ et $n = 0, 1, \dots, N$.

Le système (3.24) met en évidence l'équilibre entre les différentes contributions issues des matrices de masse, de rigidité et de convection, dans le cadre de la discrétisation temporelle. Cette structure permet de garantir à la fois la stabilité numérique du schéma utilisé et la

précision des solutions approchées à chaque itération. Cette formulation met en évidence la nature itérative du processus de résolution tout en conservant la rigueur mathématique de l'approche numérique.

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude d'une méthode innovante pour l'évaluation des éléments finaux des dérivées fractionnaires, avec un accent particulier sur leur application aux équations d'ondes fractionnaires en dimensions un et deux. À travers une approche combinant analyse théorique et mise en œuvre numérique, nous avons abordé les défis posés par les singularités temporelles inhérentes à ces dérivées, notamment à $t = 0$, qui affectent la précision des méthodes numériques.

Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée permet d'améliorer la précision temporelle face aux singularités, tout en garantissant une stabilité numérique robuste, ce qui constitue une avancée significative pour la résolution des équations d'ondes fractionnaires. Ces travaux offrent une base solide pour des applications pratiques dans des domaines variés tels que la physique ou l'ingénierie. En guise de perspectives, nous envisageons d'approfondir cette recherche dans plusieurs directions. Premièrement, nous souhaitons analyser la performance de notre méthode sur des domaines hétérogènes, où les coefficients varient spatialement, en étudiant des équations de la forme ${}^c\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(x, y, t) = \operatorname{div}(a(x, y)\nabla u(x, y, t)) + f(x, y, t)$, avec $1 < \alpha < 2$. Deuxièmement, une extension aux équations d'onde fractionnaires en espace et en temps, telles que ${}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, y, t) = {}^c\mathcal{D}_x^\beta u(x, t) + f(x, y, t)$, pourrait être explorée pour élargir le champ d'application de notre approche. Ces investigations permettraient de mieux comprendre les comportements complexes des systèmes fractionnaires et de renforcer les outils numériques à disposition.

Aperçu historique sur quelques figures scientifiques



Leonhard Euler (1707 - 1783)

Mathématicien suisse parmi les plus prolifiques de l'histoire. Ses contributions ont profondément marqué le calcul différentiel, la théorie des graphes et les fondements de l'analyse moderne. Il est aussi à l'origine de la fonction Gamma et a posé les premières bases du calcul fractionnaire.



Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833)

Mathématicien français renommé pour ses contributions à l'analyse, à la théorie des nombres et aux fonctions spéciales. Il est à l'origine de la fonction de Legendre, utilisée dans la résolution d'équations différentielles et en physique mathématique.



Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Mathématicien allemand célèbre pour ses travaux fondamentaux en analyse et en géométrie. Il a introduit une généralisation du concept d'intégrale, qui a jeté les bases de la dérivée fractionnaire dite de Riemann–Liouville.



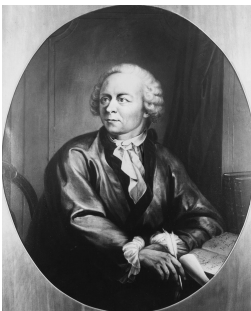
Joseph Liouville (1809 – 1882)

Mathématicien français ayant introduit les premières idées de calcul intégral d'ordre non entier. Ses travaux ont été essentiels pour la construction de la dérivée de Riemann–Liouville.



Joseph Fourier (1768 - 1830)

Mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la propagation de la chaleur. Il est l'inventeur des séries de Fourier, qui ont permis une avancée majeure dans le traitement des équations différentielles.



Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

Mathématicien et astronome français, célèbre pour ses travaux en mécanique céleste. Il a introduit la transformation de Laplace, outil fondamental pour la résolution des équations différentielles.



Michele Caputo (1927 – 2023)

Géophysicien italien ayant introduit la dérivée de Caputo, adaptée aux conditions initiales classiques. Son approche est largement utilisée dans la modélisation des systèmes physiques réels.



Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927)

Mathématicien suédois ayant joué un rôle important dans le développement de l'analyse complexe. Il a donné son nom à la fonction de Mittag-Leffler, essentielle dans la résolution des équations différentielles fractionnaires.

Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, North-Holland, 2006.
- [2] A. C. Simpson, *Numerical Methods for the Solution of Fractional Differential Equations*, PhD Thesis, University of Liverpool, 2001.
- [3] C. Bolley, *Analyse numérique*, École Centrale de Nantes, 2012.
- [4] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999.
- [5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [6] J. Havil, *Gamma, Exploring Euler's Constant*, Princeton and Oxford, 2003.
- [7] M. Caputo, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II", *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, vol. 13, pp. 529–539, 1967.
- [8] M. Godefroy, *La fonction Gamma, Théorie, histoire, bibliographie*, Gauthier-Villars, 1901.
- [9] M. M. Idrisu and K. I. Tetteh, *the Gamma Function and its Analytical Applications*, 2017.
- [10] M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Nauka, Moscow, 1979.
- [11] M. Zayernouri and G.E. Karniadakis, "Discontinuous spectral element methods for time and space-fractional advection equations", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2012.
- [12] S.B. Yuste, "Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations", *Journal of Computational Physics*, 2006.
- [13] S.B. Yuste and L. Acedo, "An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2005.

-
- [14] S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Publications, 1993.
- [15] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 1993.