RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle & équations différentielles »

Présenté Par :

Boutouiga Meriem El batoul
Djilali Abdelillah Mohamed

Sous L'intitulé :

L'étude de l'existence globale et stabilisation des solutions des problèmes d'évolutions linéaire et non linéaire.

Soutenu publiquement le 28 / 06/ 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mme. KHELIFA Hizia	M.C.B	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Président
Mr. HALLOUZ Abdelhamid	Dr	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Examinateur
Mr. BRAIKI Hocine Mohamed	M.C.B	Université Ibn Khaldoun Tiaret	Encadrant
Mr. NOURREDINE Houari	M.A.B	Université Tissemsilt	Co-encadreur

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

⋆ Nous sommes ravis d'exprimer nos plus sincères remerciements et notre profonde gratitude à Monsieur **BRAIKI HOCINE MOHAMED** pour avoir bien voulu superviser notre recherche. C'est une personne qui nous a transmis son savoir et qui a été un véritable soutien. Nous le remercions également pour son immense patience et sa confiance absolue en nous.

⋆ Nous adressons nos plus vifs remerciements et notre reconnaissance à Monsieur **HALLOUZ ABDELHAMID** pour son aide et son soutien illimités, qui ont eu un impact considérable sur la réalisation de ce mémoire. Nous le remercions aussi d'avoir eu la gentillesse de bien vouloir réviser et examiner ce travail.

⋆ Nous tenons également à exprimer nos sincères remerciements et notre gratitude à Madame **KHELIFA HIZIA** pour avoir eu la bienveillance de présider cet honorable comité, ce qui a été un grand honneur pour nous.

⋆ Nous remercions chaleureusement Monsieur **NOURREDINE HOUARI** d'avoir accepté de revoir et d'examiner ce travail.

⋆ Remerciements et notre reconnaissance s'adressent à tous les éminents professeurs du département de mathématiques de **l'Université Ibn Khaldoun de Tiaret** pour leurs efforts appréciables dans notre éducation et notre orientation.

⋆ Nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui ont contribué au succès de cette étude, de près ou de loin.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

E	:	Espace de Banach.
H	:	Espace de Hilbert .
$H^m(\Omega); H_0^1(\Omega); W^{m;p}(\Omega)$	:	Espaces de Sobolev.
$C_c^1(\Omega)$	:	Espace des fonctions continues à support compact dans Ω.
$L^p(\Omega)$	:	Espace vectoriel des fonctions de puissance p-intégrable sur Ω.
$\mathcal{L}(E)$	:	Ensemble des applications linéaires de E dans E.
$D(A)$	:	Domaine de l'opérateur A.
A	:	Opérateur linéaire .
I_d	:	Identité de matrice.
∇u	:	Gradient de u.
Δu	:	Laplacien de u.
$\langle .,. \rangle$	:	Produit scalaire.
$\hookrightarrow$	:	Injection de Sobolev.
∂^α	:	La dérivée partielle (classique) d'ordre α.

Introduction générale

Équations d'évolution : le fondement mathématique de la modélisation des phénomènes dynamiques.
Les équations d'évolution constituent l'un des piliers fondamentaux de l'analyse mathématique contemporaine, en particulier dans l'étude des systèmes dynamiques dépendants du temps. Ces équations englobent un large éventail d'équations différentielles ordinaires et partielles, et visent à décrire l'évolution de l'état d'un système donné à partir de données initiales et de conditions aux limites, conformément à des lois physiques ou abstraites.
L'idée centrale réside dans l'établissement d'une relation entre la dérivée temporelle d'une fonction inconnue et son état actuel, au moyen d'opérateurs définis sur des espaces fonctionnels appropriés, notamment les espaces de Hilbert ou de Banach. Ces équations apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques théoriques et appliqués, tels que la physique, l'ingénierie et la biologie mathématique, où elles permettent de modéliser diverses phénomènes, comme le transfert de chaleur (équation de la chaleur), la propagation des vibrations ou des ondes (équation des ondes), ainsi que des phénomènes dynamiques complexes, comme l'élasticité des plaques minces (équations de Petrovsky).
L'étude mathématique de telles équations vise à prouver l'existence, l'unicité, et la stabilité des solutions, en utilisant des outils puissants tels que la théorie des semi-groupes, les opérateurs monotones et les méthodes variationnelles. L'étude du comportement à long terme des solutions occupe également une place centrale, notamment en ce qui concerne leur stabilité, afin de comprendre les phénomènes de dissipation d'énergie ou de convergence vers l'équilibre dans les systèmes physiques.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous présentons les notions fondamentales nécessaires aux développements ultérieurs de ce travail, notamment les espaces de Lebesgue et de Sobolev.
Dans le chapitre deux on a introduire quelques théorèmes fondamentale .

1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1. [3, 11] *Soit p un élément de $[1, +\infty]$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On appelle **espace de Lebesgue**[1] et on note L^p, l'espace vectoriel des classes des fonctions f p-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable et} \ \int_\Omega |f(x)|dx < +\infty \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Henri Léon Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration.

$(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ *est un espace de* ***Banach***[2].

- *Si* $p = +\infty$, *on a :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \ \ mesurable \ \ et \ \ \exists \ C \ \ constante, \ \ telle \ \ que$$

$$|f(x)| \leq C \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega\},$$

avec la norme définie par :

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf\{C; |f(x)| \leq C \ \ p.p \ \ sur \ \ x \in \Omega\}.$$

- *Si* $p = 2$

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}.$$

Définition 1.1.2. [3]Produit scalaire
Soient F est espace vectoriel réel et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \varphi(x, y). \end{array}$$

On dit que φ est un produit scalaire sur F si :

1. *φ est bilinéaire (linéaire par rapport à la première et à la seconde variable).*
2. *φ est symétrique :*
$$\forall (x, y) \in F^2 : \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$
3. *φ est définie-positive :*
$$\begin{array}{rcl} Positive & : & \forall x \in F : \varphi(x, x) \geq 0. \\ Définie & : & \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0. \end{array}$$

Notation : *On note le produit scalaire $\varphi(x, y)$ par (x, y) ou $\langle x, y\rangle$.*

$^{<<}$ L'espace $L^2(\Omega)$ avec la norme induite par ce produit scalaire est un espace de **Hilbert**.$^{>>}$

2. Stefan Banach (1892 - 1945) est un mathématicien polonais.

1.1.1 Propriétés élémentaires

Propriétés 1.1.1. [3]Inégalité de Cauchy-Schwartz
Soient f *et* $g \in L^2(\Omega)$, *on a :*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}.$$

Théorème 1.1.1. [3] Inégalité de Hölder :
Soient $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *où* p' *c'est l'exposant conjugué de* p *i.e.*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Alors $fg \in L^1$ *et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

L'un des résultats les plus significatifs de l'inégalité de Hölder est le suivant.

Corollaire 1.1.1. [3]
Soient $f_1, f_2, ..., f_k$ *des fonctions où* $f_i \in L^{p_i}$, $1 \leq i \leq k$ *avec*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit $f_1, f_2, ..., f_k$ *appartient à* $L^p(\Omega)$ *de plus on a*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Théorème 1.1.2. [3]Inégalité de Young :

$$\forall a \geq 0,\ \forall b \geq 0 \qquad ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{p'}\, b^{p'}.$$

1.2 Espace Sobolev

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Les dérivées faibles (cas particulier)

Définition 1.2.1. [1]
Soit v une fonction localement intégrable sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On définit la dérivée faible $\omega_i^\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$, telle que $\omega_i^\alpha = \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_i}$, $i \in \mathbb{N}$ et

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega \omega_i^\alpha(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\partial^\alpha \phi(x)dx.$$

1.2.2 L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2.2. [1, 5]
Soit $p \in [1, \infty]$et m est un entier positif, l'espace de Sobolev[3] $W^{m,p}(\Omega)$ défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) ; \omega^\alpha \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

où ω^α est une dérivée faible au sens des distributions.
On le munit de la norme :

$$\|v\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\omega^\alpha\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*L'espace $W^{m,p}$ est un espace de **Banach**.*

1. *Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ ou $(H^m(\Omega))$ est défini par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) ;\ \omega^\alpha \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\right\},$$

et muni de la norme suivante :

$$\|v\|_{H^m} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\omega^\alpha\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. *Pour p=2 et m=1, l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) ;\ \omega_i = \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

et de la norme

$$\|v\|_{H^1} = (\langle v, v\rangle_{H^1})^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Serguei Lvovitch Sobolev (1908-1989),mathématicien et physicien atomique russe de l'époque sovié-tique.

1.2.3 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.2.3. [5] *Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$.
La norme dans $H_0^1(\Omega)$ est :

$$\|v\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

1.2.4 Les normes équivalentes dans l'espace Sobolev

- L'espace $W^{1,p}$ est équipé de la norme

  $$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

  ou parfois, si $1 < p < \infty$, avec la norme équivalente $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$.
  L'espace H^1 est équipé du produit scalaire

  $$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v')$$

  et de la norme associée

  $$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

- L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est équipé de la norme

  $$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p,$$

  ou parfois avec la norme équivalente

  $$\left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p} \quad (si\ 1 \leq p < \infty).$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est équipé du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Le norme associé

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2}$$

est équivalent à la norme $W^{1,2}$ (voir [3]).

1.2.5 La trace

Théorème 1.2.1. [5]
Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne et $1 \leq p \leq +\infty$.
Alors, il existe une unique application ψ (linéaire et continue) est défini par :
si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C_c\left(\overline{\Omega}\right)$ et

$$\begin{array}{rccl} \psi : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\partial\Omega) \\ & u & \longrightarrow & \psi(u) = u \quad p.p \ sur(\partial\Omega), \end{array}$$

de plus $\ker \psi = W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.2.6 Identité de Green

Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $v(x)$ la normale extérieure au point x.
Soit u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$ (voir [13]). Alors la formule de Green s'écrit :

$$\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx,$$

et

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds.$$

1.2.7 Les injections de Sobolev

Définition 1.2.4. [14] (Injection continue)
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1; n[$, alors l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^{p*}(\Omega)$, et l'on écrira $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$. Plus précisément, il existe un constant $C_{n,p} \in \mathbb{R}_+$ (ne dépendant que de p, n) tel que :

$$\forall u \in W_p^1(\Omega) : \|u\|_{L_{p^*}} \leq C_{n,p} \|u\|_{W^{1,p}_{(\Omega)}},$$

avec

1. $C_{n,p} = \frac{(n-1)p}{np}$.
2. $p^* = \frac{np}{n-p}$ *est l'exposant critique de Sobolev.*

Théorème 1.2.2. [3] *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq +\infty$ on a :*

1. $1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
2. $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$,
3. $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

avec injections continues.
De plus, si $p > N$ on a, pour tout $u \in W_p^1(\Omega)$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}_{(\Omega)}}|x - y|^\alpha \ \ p.p \ \forall x, y \in \Omega,$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C une constante qui dépend de p, N et Ω. En particulier, $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

Définition 1.2.5. ([14] *Injection compact)*
Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, à frontière lipschitzienne et $p \in [1, +\infty[$.
On dite que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte et on note $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, si toute partie bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.2.3. [3](Rellich-Kondrachov)
Soient (Ω) un ouvert borné de classe C^1 on a :

1. $p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ *où* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
2. $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *où* $\forall q \in [p, +\infty[$,
3. $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$,

avec injections compactes.

1.2.8 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.2.4. [3] *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \geq 1$, alors il existe une constante $C > 0$ tel que :*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \|u\|_{L^P} \leq C\|\nabla u\|_{L^P}.$$

1.3 Quelques théorèmes fondamentaux

1.3.1 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.3.1. [3] *Soient H un espace de Hilbert. Et soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Supposons qu'il existe deux constantes $C, \alpha > 0$ tels que :*

1. $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ *pour tout* $(u,v) \in H \times H$ *(Continuité),*
2. $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$ *pour tout* $u \in H$ *(coercive).*

Alors, $\forall f \in H$, il existe $u \in H$ unique, tel que :

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H.$$

1.3.2 Théorème de Minty-Browder

Théorème 1.3.2. [3] *Soient H un espace de Hilbert. Et $A : H \to H$ une application (**non linéaire**) continue telle que*

- $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in H,\ u \neq v,$
- $$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = \infty.$$

Alors, pour tout $f \in H$ il existe un $u \in H$ unique solution de l'équation

$$Au = f.$$

1.4 Opérateur linéaire (borné et non borné)

1.4.1 Opérateur linéaire borné

Définition 1.4.1. [3] *Soit A un opérateur linéaire de E dans F :*

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F.$$

On dit que A est borné s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \forall u \in D(A).$$

Théorème 1.4.1. *Toute opérateur linéaire continue est un opérateur linéaire borné.*

1.4.2 Opérateur linéaire non borné

Définition 1.4.2. [3] *On appelle opérateur linéaire non-borné de E dans F tout application linéaire*

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F,$$

définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$, à valeurs dans F. $D(A)$ est le domaine de A.

1.5 Opérateur fermé

Définition 1.5.1. [3] *On dit qu'un opérateur A est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$*

$$G(A) = \bigcup_{u \in D(A)} [u, Au] \subset E \times F.$$

1.6 Semi-groupe

- E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$.
- $\mathcal{B}(E)$ un espace de Banach (l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E) muni de la norme d'opérateur

$$\|T\|_{\mathcal{B}(E)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|, \quad \forall T \in \mathcal{B}(E).$$

1.6.1 Semi-groupe fortement continu :

Définition 1.6.1. [14]
$\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornée dans E est applée semi-group si :

1 $T(0) = I.$

2 $T(t+s) = T(t)T(s).$

- *Un semi groupe fortement continue si :*

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x \qquad \forall x \in E.$$

- *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $T(t)$ est uniformément continue si :*

$$\lim_{t\to 0}\|T(t)-I\|_{\mathcal{L}(E)}=0.$$

- *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit semi-groupe de contraction de classe C_0 s'il est de classe C_0 et*

$$\|T(t)\|\leq 1 \qquad \forall t\geq 0.$$

1.6.2 Le générateur infinitésimal

Définition 1.6.2. [14] *A est un opérateur linéaire et le domaine de A défini par :*

$$D(A)=\left\{x\in E:\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}existe\right\}.$$

On défini le générateur infinitésimal du semi groupe $T(t)$ de la manière suivante :

$$Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}=\left.\frac{d^+T(t)x}{dt}\right|_{t=0} \qquad \forall x\in D(A).$$

Proposition 1.6.1. [14] *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Il existe deux constantes $\kappa\in\mathbb{R}$ et $M\geq 1$ telles que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)}\leq Me^{\kappa t}, \qquad \forall t\geq 0.$$

Proposition 1.6.2. [14] *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal.*
Si $x\in D(A)$, alors $T(t)x\in D(A)$ et on a l'égalité :

$$T(t)Ax=AT(t)x, \qquad \forall t\geq 0.$$

Proposition 1.6.3. [14] *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal.*

1. *Si $x\in E$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)xds=T(t)x \qquad \forall x\in E \ \ et \ \ t\geq 0.$$

2. *Si* $x \in E$, *alors*
$$\int_0^t T(s)xds \in D(A),$$
et on a l'égalité :
$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

3. *Si* $x \in D(A)$ *et* $T(t)x \in D(A)$
$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad \forall t \geq 0$$

4. *Pour tout* $x \in D(A)$ *et tous* $s,\ t \in [0, +\infty[\ (s \leq t)$,
$$\int_s^t AT(\tau)x\, d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

1.7 Théorème de Lumer-Phillips :

Théorème 1.7.1. [14]*Soit* A *un opérateur linéaire à domaine dense* $D(A)$ *dans* E.*Si* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions sur* E *si et seulement si*

- A *est dissipatif.*
- $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = E$ *pour tout* $\lambda > 0$.

CHAPITRE 2

THÉORÈMES FONDAMENTAUX

2.1 Problème de Cauchy abstrait

Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné. Le problème de Cauchy abstrait pour A avec la donnée initiale $x \in H$ consiste à trouver une solution $u(t)$ du problème à valeur initiale suivant (voir [7]) :

$$\begin{cases} U_t(t) = AU(t), \quad t > 0 \\ \\ U(0) = U \end{cases} \tag{2.1.1}$$

La fonction U est dite solution classique du (2.1.1) si :

✓ $u(t)$ est continue pour $t \geq 0$.

✓ $u(t)$ est continûment différentiable par rapport t.

✓ $u(t) \in D(A)$ pour toute $t > 0$.

✓ u(t) vérifie (2.1.1).

2.2 Les opérateurs m-dissipatifs

A est un opérateur linéaire non borné de H dans H

2.2.1 Opérateur monotone

Définition 2.2.1. [2] *Un opérateur A de H est dit monotone si* $\forall u, v \in D(A)$,

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0.$$

2.2.2 Opérateur dissipatif

Définition 2.2.2. [2] *Un opérateur A de H est dit dissipatif si* $\forall u, v \in D(A)$,

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \leq 0.$$

Remarque 2.1. *A est un opérateur linéaire (non borné)*

$$A \ \ est \ \ monoton \Longleftrightarrow -A \ \ est \ \ dissipatif.$$

2.2.3 Opérateur maximale monotone

Définition 2.2.3. [2]*Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non borné.*
A est dit maximal monotone si et seulement si A est monotone et R(I+A)=H.

2.3 Existence et unicité des solutions :

Théorème 2.3.1. [3] *Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction*

$$u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\,; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[\,; D(A)),$$

unique telle que

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 \quad sur\ [0, +\infty[, \\ \\ u(0) = u_0 \quad (donnée\ initiale). \end{cases} \tag{2.3.1}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad et \quad |u_t(t)| = |Au(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0.$$

2.4 Méthode de stabilité

Le but de la stabilisation est d'atténuer les vibrations par rétroaction, il s'agit donc d'assurer la décroissance des solutions énergétiques à 0 plus ou moins rapidement par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation qui nous intéresse consiste à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que nous désignons par E(t) (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou non, et si cette limite est nulle, à donner une estimation du taux de décroissance de l'énergie vers zéro. Il existe plusieurs types de stabilisation (voir [4]) :

1. **Stabilité forte :**
$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0.$$
2. **Stabilité exponentielle :**
$$E(t) \leq Ce^{-\delta t} \quad \forall t > 0.$$
3. **Stabilité polynomiale :**
$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha} \quad \forall t > 0.$$

où C, δ et α sont des constantes positives, et C dépend des données initiales.

2.5 Type de stabilité

2.5.1 Un résultat de décroissance exponentielle

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs linéaires sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 2.5.1. [12] *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante. Soit $\omega > 0$. Supposons que E satisfait la relation*

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(t). \tag{2.5.1}$$

Alors E vérifie l'estimation de décroissance suivante

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)\, e^{1-\omega t}. \tag{2.5.2}$$

Preuve. *Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*

$$h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)\, d\tau.$$

h est bien définie, décroissante, positive et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. D'après (2.5.1), h satisfait l'inéquation différentielle suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad h'(t) + \omega h(t) \leq 0.$$

Soit

$$T_0 := \sup\{t,\ h(t) > 0\}. \quad (T_0 \text{ vaut éventuellement } +\infty). \tag{2.5.3}$$

Pour tout $t < T_0$, on a

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq -\omega,$$

donc

$$\forall 0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq h(0)\, e^{-\omega t} \leq \frac{1}{\omega} E(0)\, e^{-\omega t}. \tag{2.5.4}$$

Notons que, puisque $h(t) = 0$ si $t \geq T_0$, cette relation reste vraie pour tout t.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme E est positive et décroissante, on déduit de la définition de h et de l'estimation précédente que

$$\forall t \geq \varepsilon, \quad E(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} E(\tau)\, d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} h(t-\varepsilon) \leq \frac{1}{\omega\varepsilon} E(0)\, e^{\omega\varepsilon}\, e^{-\omega t}.$$

La meilleure constante ε, c'est-à-dire celle qui donne la plus petite valeur à la quantité $\frac{e^{\omega\varepsilon}}{\omega\varepsilon}$, est $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$. Ainsi :

$$\forall t \geq \frac{1}{\omega}, \quad E(t) \leq E(0)\, e^{-\omega t}.$$

Ceci achève la preuve du **lemme** (2.5.1)

2.5.2 Un résultat de décroissance polynomiale

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs non linéaires sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 2.5.2. [12] *Soit* $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe deux constantes* σ *et* ω *strictement positives telles que* E *satisfait la relation*

$$\forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma}\, d\tau \leq \frac{1}{\omega} E(0)^\sigma E(t). \tag{2.5.5}$$

Alors E *vérifie l'estimation de décroissance suivante*

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t} \right)^{1/\sigma}. \tag{2.5.6}$$

Preuve. *L'idée directrice est la même que précédemment. Par homogénéité, on peut supposer que* $E(0) = 1$.
Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$h(t) = \int_t^{+\infty} E(\tau)^{1+\sigma}\, d\tau.$$

h *est bien définie, décroissante, positive et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$. *D'après* (2.5.5), h *satisfait l'inéquation différentielle suivante :*

$$\forall t \geq 0, \quad -h'(t) \geq (\omega h(t))^{1+\sigma}.$$

Soit T_0 *défini par* (2.5.3). *Alors*

$$\forall t \in [0, T_0[, \quad (h^{-\sigma})' \geq \sigma\omega^{1+\sigma}.$$

On intègre cette relation pour obtenir que

$$\forall 0 \leq t < T_0, \quad h(t)^{-\sigma} - h(0)^{-\sigma} \geq \sigma\omega^{1+\sigma} t,$$

donc

$$\forall 0 \leq t < T_0, \quad h(t) \leq \left(h(0)^{-\sigma} + \sigma\omega^{1+\sigma} t \right)^{-1/\sigma}. \tag{2.5.7}$$

Notons que cette relation reste évidemment vraie si t *est supérieur ou égal à* T_0. *Comme*

$$h(0) \leq \frac{1}{\omega} E(0)^{1+\sigma} = \frac{1}{\omega},$$

on peut majorer le second membre de (2.5.7) par

$$\left(h(0)^{-\sigma}+\sigma\omega^{1+\sigma}t\right)^{-1/\sigma} \leq \frac{1}{\omega}(1+\omega\sigma t)^{-1/\sigma}.$$

Comme E est positive et décroissante, on déduit de la définition de h et de l'estimation précédente que

$$\begin{aligned}\forall s \geq 0, \quad E\left(\frac{1}{\omega}+(\sigma+1)s\right)^{\sigma+1} &\leq \frac{1}{\frac{1}{\omega}+\sigma s}\int_{s}^{\frac{1}{\omega}+(\sigma+1)s} E(\tau)^{\sigma+1}\,d\tau \\ &\leq \frac{\omega}{1+\omega\sigma s}h(s) \\ &\leq \frac{1}{1+\omega\sigma s}(1+\omega\sigma s)^{-1/\sigma}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall s \geq 0, \quad E\left(\frac{1}{\omega}+(\sigma+1)s\right) \leq \frac{1}{(1+\omega\sigma s)^{1/\sigma}}.$$

Ceci donne l'estimation(2.5.6)en choisissant $t := \frac{1}{\omega}+(\sigma+1)s$.

2.6 Méthode de multiplicateur

Nous utilisons cette méthode pour obtenir une meilleure estimation du taux de décroissance. A. Haraux et V. Komornik ont amélioré et généralisé cette méthode. Ils ont introduit des inégalités intégrales qui permettent d'obtenir très efficacement et de très bonnes estimations de décroissance pour de nombreux problèmes linéaires ou non linéaires. Nous utiliserons ces inégalités intégrales pour étudier le taux de décroissance de l'énergie d'un problème dissipatif non linéaire (voir [13]).

CHAPITRE 3

ÉTUDE L'EXISTENCE , L'UNICITÉ ET LA STABILITÉ DE LA SOLUTION DES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION LINÉAIRE

Introduction :
Ce chapitre établit rigoureusement l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions pour des équations d'évolution linéaires. L'approche combine :
- La théorie des semi-groupes linéaires (génération de solutions),
- Le théorème de Lax-Milgram ,
- La méthode du multiplicateur (l'étude de la stabilité de la solution).

3.1 Équation de la chaleur

Considérons l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{t>0} \quad et \quad x \in \Omega \\ u = 0 & \text{t>0} \quad et \quad x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & \qquad\qquad x \in \Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

1. L'équation (3.1.1) est appelée **équation de la chaleur**.
2. L'équation $(3.1.1)_1$ est la **condition aux limites de Dirichlet** .
3. Les équations $(3.1.1)_2$ traduisent l'**état initial** du système :
   - La **configuration initiale** est décrite par $u_0(x)$,

avec l'énergie associé est :

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

et

$$E'(t) = -\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On transforme le problème (3.1.1) à problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} u_t + Au = 0 \quad t \geq 0 \\ u(0) = u \end{cases} \tag{3.1.2}$$

On définit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire :

$$Au = -\Delta u,$$

avec :

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega),$$

et le domaine de A est :

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

3.1.1 L'existence et l'unicité :

Théorème 3.1.1. (Existence et unicité)
On suppose que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une solution unique de (3.1.1) avec

$$u \in \mathcal{C}\left([0, \infty[\,;\, H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}\left([0, \infty[\,;\, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right).$$

Preuve. *L'opérateur A est Maximale monotone car :*

1.1 A **est un opérateur monotone :**

Pour la démonstration il suffit vérifier que :

$$\boxed{\langle Au - Av, u - v\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall u, v \in D(A).}$$

Comme A est linéaire on pose $w = u - v$ et donc :

$$\begin{aligned}
\langle Aw, w\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle -\Delta w, w\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= -\int_{\Omega} |(\Delta w)w| \; dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \; dx \\
&= ||\nabla w||^2_{L^2} \\
&= ||w||_{H^1_0} \geq 0.
\end{aligned}$$

Par l'identité de Green, avec $w = 0$ sur $\partial\Omega$:

$$-\int_{\Omega} (\Delta w) w \, dx = \int_{\Omega} |\nabla (w)|^2 \, dx.$$

Donc :

$$\boxed{A \text{ est monotone et} -A \text{ est dissipatif.}}$$

1.2 **La surjective de (I+A)** :

Pour ce faire il faut :

$$\boxed{R(I + A) = \mathcal{H}; \quad \forall u \in D(A), F \in \mathcal{H}\ .}$$

Soit $f \in \mathcal{H}$ donné. Nous cherchons $u \in D(A)$ tel que

$$(I + A)u = f \quad \textit{c'est-à-dire} \quad u - \Delta u = f.$$

Nous reformulons ce problème ($u - \Delta u = f$) sous forme variationnelle.

Définissons la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par :

$$a(u,v) = \int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx, \qquad (Grâce\,à\,l'identité\ de\ Green)$$

et la forme linéaire $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par :

$$L(v) = \int_\Omega fv\,dx.$$

On utilisons le théorème de Lax-Milgram, on a :

i) Continuité de** a **:

Pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

bien sur par passage au théorème de Cauchy-Schwartz.

On applique le théorème de Poincaré on trouve :

$$|a(u,v)| \leq C_0\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Ainsi, a est continue

***ii) Coercivité de** a **:** Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$a(u,u) = \int_\Omega |u|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

$$= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= \|u\|_{H^1}$$

ainsi, a est coercive .

Donc il existe un unique $u \in D(A)$ tel que

$$a(u,v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme A est monotone et $R(I+A) = \mathcal{H}$. Alors,

$$\boxed{A \text{ est maximale monotone.}}$$

Ainsi, par le théorie de semi-groupe, alors le problème(3.1.1) admet une unique solution

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\infty[\,;\, H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}\left([0,\infty[\,;\, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right).$$

3.1.2 La stabilité

Théorème 3.1.2. *Soit $u_0 \in H_0^1$,il existe un constante positive ω telle que la solution du problème(3.1.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

Preuve. *On multiplie notre équation par u, puis on intègre sur $\Omega \times [S,T]$*

$$\int_S^T \int_\Omega u(u_t - \Delta u)\, dx\, dt = 0$$

$$\int_S^T \int_\Omega u u_t\, dx\, dt - \int_S^T \int_\Omega u \Delta u\, dx\, dt = 0$$

$$\int_S^T \int_\Omega u u_t\, dx\, dt - \int_S^T \int_\Omega u \Delta u\, dx\, dt + \int_S^T \|u\|^2\, dt - \int_S^T \|u\|^2\, dt = 0$$

donc :

$$2\int_S^T E(t)\, dt = -\int_S^T \int_\Omega u u_t\, dx\, dt + \int_S^T \int_\Omega u \Delta u\, dx\, dt + \int_S^T \|u\|^2\, dt. \quad (3.1.3)$$

On pose I_1 et I_2,I_3 tels que :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_S^T \int_\Omega u u_t \, dx \, dt = -\left[\frac{1}{2}\|u\|^2\right]_S^T \\
&= -E(T) + E(S) \leq E(S). \\
I_2 &= \int_S^T \int_\Omega u\Delta u \, dx \, dt = -\int_S^T \|\nabla u\|^2 \, dt \quad (Par\ l'identit\ de\ Green) \\
&= -E(T) + E(S) \leq E(S). \\
I_3 &= \int_S^T E(t) \, dt \leq (T-S) \sup E(t) \leq CE(S).
\end{aligned}$$

Par le remplacement de I_1 et I_2,I_3 dans l'équation (3.1.3) *on trouve :*

$$2\int_S^T E(t) \, dt \leq E(S) + E(S) + CE(S),$$

alors

$$\int_S^T E(t) \leq \frac{\kappa}{2} E(S),$$

où κ un constante positive.

Ainsi, par l'application de lemme Martinez (2.5.1) *, alors E vérifie l'estimation de décroissance suivante :*

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}, \ \forall t \geq 0,$$

avec $\omega = \frac{\kappa}{2}$.

3.2 Équation des ondes

3.2.1 Exemple physiques

La corde vibrante : la corde vibrante considérant une corde horizontale de densité ρ supposée uniforme et constante, on note $u(x,t)$ le vecteur de déplacement par rapport à l'équilibre et $T(x,t)$ le vecteur de la tension (seule force supposée s'appliquer à la corde). La loi de comportement élastique est supposée donnée par la loi de Hooke $T = k\nabla u$. Sous des hypothèses de mouvement transverse (déplacement longitudinal négligé), après avoir appliqué le principe fondamental de la dynamique ne considérant que la force T, on obtient alors l'EDP suivante, portant sur la composante verticale de $u(x,t)$ notée $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Des modèles analogues s'obtiennent en dimension deux pour modéliser par exemple les ondes transverses dans la peau d'un tambour.
Considérons l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{t>0} \quad et \quad x \in \Omega \\ u = 0 & \text{t>0} \quad et \quad x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & \qquad\qquad\quad x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & \qquad\qquad\quad x \in \Omega \end{cases} \tag{3.2.1}$$

1. L'équation (3.2.1) est appelée **équation des ondes**.
2. L'équation $(3.2.1)_1$ est la **condition aux limites de Dirichlet** .
3. Les équations $(3.2.1)_2$ et $(3.2.1)_3$ traduisent l'**état initial** du système :
   - La **configuration initiale** est décrite par $u_0(x)$.
   - La **vitesse initiale** est décrite par $u_1(x)$.

avec l'énergie associé est :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2}\right)$$

et

$$E'(t) = -\|u_t\|_{L^2}^2.$$

On transforme le problème (3.2.1) à problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} U_t + AU = 0 \quad t \geq 0 \\ U(0) = U \end{cases} \tag{3.2.2}$$

On définit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ -\Delta & I_d \end{pmatrix},$$

avec :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Et le domaine de A est :

$$D(A) = \left\{(u,v) \in \mathcal{H} \mid u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\, v \in L^2(\Omega)\right\}.$$

3.2.2 L'existence et l'unicité :

Théorème 3.2.1. (Existence et unicité)
On suppose que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et que $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une solution unique de (3.2.1) avec

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\infty[\,;\, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty[\,;\, H_0^1(\Omega)\right).$$

Preuve. *L'opérateur A est maximale monotone car :*

1.1 A **est monotone :** *Pour la démonstration il suffit vérifier que :*

$$\boxed{\langle AU - AV, U - V\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall\, U, V \in D(A).}$$

Comme A est linéaire on pose $w = U - V$ et on a :

$$A\omega = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + v \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\langle A\omega, \omega\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \langle u, -v\rangle_{H_0^1} + \langle (-\Delta u + v), v\rangle_{L^2}$$

$$= -\langle u, v\rangle_{H_0^1} - \langle \Delta u, v\rangle_{L^2} + \langle v, v\rangle_{L^2}$$

Par l'identité de Green on a :

$$= -\langle u, v\rangle_{H_0^1} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2} + \langle v, v\rangle_{L_2}$$

$$= -\langle u, v\rangle_{H_0^1} + \langle u, v\rangle_{H_0^1} + \langle v, v\rangle_{L_2}$$

$$= \int_\Omega |v|^2 dx$$

$$= \|v\|_{L^2}^2 \geq 0.$$

Donc :

$$\boxed{A \text{ est monotone .}}$$

1.2 **La surjective de (I+A)**

Pour ce faire il faut :

$$\boxed{R(I+A) = \mathcal{H}; \quad \forall U \in D(A), F \in \mathcal{H} \text{ .}}$$

Soit $U = (u, v)^T \in D(A)$ *et* $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$ *on a :*

$$(I + A)U = F \iff \begin{cases} u - v = f_1 \\ v - \Delta u + v = f_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u - v = f_1. \\ -\Delta u = f_2. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

On prend $u = f_1 + v$ *et on remplace dans* $(3.2.3)_2$ *on trouve :*

$$(I + A)U = F \iff -\Delta(f_1 + v) = f_2 \iff -\Delta v = \Delta f_1 + f_2, \tag{3.2.4}$$

pour ce faire, on prend une autre fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ *et multiplie l'équation* (3.2.4) *par* u*,puis on intégre sur* Ω *et on obtient*

$$-\int_\Omega u \cdot \Delta v \ dx = \int_\Omega u \cdot \Delta f_1 \ dx + \int_\Omega u \cdot f_2 \ dx,$$

par l'identité de Green on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx = \int_\Omega u \cdot \Delta f_1 \ dx + \int_\Omega u \cdot f_2 \ dx.$$

On définie la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *par :*

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx,$$

et la forme linéaire $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *par :*

$$L(u) = \int_\Omega u \cdot \Delta f_1 \ dx + \int_\Omega u \cdot f_2 \ dx.$$

On utilisons le théorème de Lax-Milgram, on a :

i) ***Continuité de*** a ***:***

Pour tous $u, v \in H_0^1(\Omega)$*, on a*

$$|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

bien sur par passage au l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Maintenant on applique l'inégalité de Poincaré on trouve :

$$|a(u,v)| \leq C_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

ainsi, a *est continue .*

ii) ***Coercivité de*** a ***:*** *Pour tout* $v \in H_0^1(\Omega)$*, on a*

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v \cdot \nabla v|\, dx$$

$$= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

ainsi, a *est coercive avec* $C = 1$*.*

Donc il existe unique $v \in H_0^1(\Omega)$ *tel que*

$$a(u,v) = L(u) \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega),$$

comme A *est monotone et* $R(I + A) = \mathcal{H}$*. Alors,*

$$\boxed{A \text{ est maximale monotone.}}$$

Ainsi, par le théorie de semi-groupe,alors le problème (3.2.1) admet une unique solution

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\infty[\,;\, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty[\,;\, H_0^1(\Omega)\right).$$

3.2.3 La stabilité

Théorème 3.2.2. *Soit* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *et* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$*,il existe un constante positive* ω *telle que la solution du problème (3.2.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$\forall t \geq 0, E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

Preuve. *On multiplie notre équation par* u*,puis on l'intègre sur* $\Omega \times [S,T]$

$$\begin{aligned} &\int_S^T \left(\int_\Omega u\,(u_{tt} - \Delta u + u_t)\, dx\right) dt = \\ &\int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_{tt}\, dx\right) dt - \int_S^T \left(\int_\Omega u\,\Delta u\, dx\right) dt + \int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_t\, dx\right) dt \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On pose

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_{tt}\, dx\right) dt = \int_\Omega u\, u_t\Big|_S^T dx - \int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt \quad \big(Par\ I.P.P\big)\,. \\
I_2 &= -\int_S^T \left(\int_\Omega u\, \Delta u\, dx\right) dt = \int_S^T \|\nabla u\|_{L^2}^2\ dt \quad (Par\ l'identité\ de\ Green).
\end{aligned}$$

On remplace I_1 et I_2 dans l'équation (3.2.5) donc :

$$0 = \int_\Omega u\, u_t\Big|_S^T dx - \int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt + \int_S^T \|\nabla u\|_{L^2}^2\ dt + \int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_t\, dx\right) dt$$

$$0 = \int_\Omega u\, u_t\Big|_S^T dx - 2\int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt + \int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt + \int_S^T \|\nabla u\|_{L^2}^2\ dt$$

$$+ \int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_t\, dx\right) dt$$

$$0 = \int_\Omega u\, u_t\Big|_S^T dx - 2\int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt + 2\int_S^T E(t)dt + \int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_t\, dx\right) dt.$$

Alors

$$2\int_S^T E(t)dt = -\int_\Omega u\, u_t\Big|_S^T dx + 2\int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt - \int_S^T \left(\int_\Omega u\, u_t\, dx\right) dt. \quad (3.2.6)$$

On pose :

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -\int_\Omega u\,u_t\Big|_S^T dx = -\left[\int_\Omega u\,u_t dx\right]_S^T \\
&\leq -[\|u\|\cdot\|u_t\|]_S^T \quad \begin{pmatrix} \text{par l'inégalité} \\ \text{de Cauchy} - \text{Schwartz} \end{pmatrix} \\
&\leq -C_1\left[\|\nabla u\|\cdot\|u_t\|\right]_S^T \ (\text{par l'inegalité de Poincaré}) \\
&\leq -\tfrac{1}{2}C_1\left(\|\nabla u\|^2+\|u_t\|^2\right)\Big|_S^T \ (\text{par l'inegalite Young}) \\
&\leq C_1 E(S). \quad (\text{car l'énergie est décroissante}) \\
B_2 &= 2\int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\,dt \leq -2\int_S^T E'(t)dt \\
&\leq 2E(S). \\
B_3 &= -\int_S^T\left(\int_\Omega u\,u_t\,dx\right)dt \\
&\leq -\textstyle\int_S^T \|u\|\cdot\|u_t\|\ dx \quad \begin{pmatrix} \text{par l'inégalité} \\ \text{de Cauchy} - \text{Schwartz} \end{pmatrix} \\
&\leq -\int_S^T C_2\,\|\nabla u\|\cdot\|u_t\|\ dx \quad (\text{par l'inégalité de Poincaré}) \\
&\leq -\int_S^T \frac{1}{2}C_2\left(\|\nabla u\|^2+\|u_t\|^2\right)\ dx \quad (\text{par l'inégalité Young}) \\
&\leq C_2\,E(s).
\end{aligned}
$$

on insère B_1, B_2 et B_3 dans l'équation (3.2.6)

$$\int_S^T E(t)dt \leq \frac{C'}{2}E(S),$$

avec $C' = C_1 + 2 + C_2 \geq 0$

Ainsi, par l'application de lemme Martinez (2.5.1)*, alors* E *vérifie l'estimation de décroissance suivante :*

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}, \forall t \geq 0$$

avec $\omega = \frac{C'}{2}$.

3.3 Équation de Petrovsky

Considérons l'équation de Petrovsky suivante :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t = 0 & \text{t>0} \quad et \quad x \in \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial v} = 0 & \text{t>0} \quad et \quad x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{3.3.1}$$

1. L'équation (3.2.1) est appelée **équation de Petrovsky**.
2. L'équation $(3.2.1)_1$ est la **condition aux limites de Neumann** .
3. Les équations $(3.2.1)_2$ et $(3.2.1)_3$ traduisent l'**état initial** du système :
   – La **configuration initiale** est décrite par $u_0(x)$,
   – La **vitesse initiale** est décrite par $u_1(x)$.

avec l'énergie associé est

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|_{L^2}^2 + \|\Delta u\|_{L^2}^2\right)$$

et

$$E'(t) = -\|\nabla u_t\|_{L^2}^2.$$

On transforme le problème (3.3.1) à problème de Cauchy abstrait :

$$\begin{cases} U_t + AU = 0 \quad t \geq 0 \\ U(0) = U \end{cases} \tag{3.3.2}$$

On définit l'opérateur A comme suit :

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

avec :

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega),$$

et le domaine de A :

$$D(A) = \left\{(u,v) \in \mathcal{H} \mid u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),\ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right\}.$$

et on définit l'opérateur matriciel :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ \Delta^2 & -\Delta \end{pmatrix}.$$

3.3.1 L'existence et l'unicité :

Théorème 3.3.1. (Existence et unicité)
On suppose que $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ et que $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. Alors il existe une solution unique de (3.3.1) avec

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\infty[\,; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty[\,; H_0^1(\Omega)\right).$$

Preuve. *L'opérateur A est maximale monotone car :*

*1.1 A **est monotone :** Pour la démonstration il suffit vérifier que :*

$$\boxed{\langle Au - Av, u - v\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall u, v \in D(A).}$$

Comme A est linéaire on pose $w = u - v$ et on a :

$$A\omega = \begin{pmatrix} -v \\ \Delta^2 u - \Delta v \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\langle A\omega, \omega\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} -v \\ \Delta^2 u - \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \langle -v, u\rangle_{H_0^2} + \langle \Delta^2 u - \Delta v, v\rangle_{L^2}$$

$$= -\langle u, v\rangle_{H_0^2} + \langle \Delta^2 u, v\rangle_{L_2} - \langle \Delta v, v\rangle_{L_2}$$

par l'identité de Green on a :

$$= -\langle u, v\rangle_{H_0^2} + \langle u, v\rangle_{H_0^2} + \langle \nabla v, v\rangle_{L_2}$$

$$= \int_\Omega \nabla |v|^2 dx$$

$$= \|\nabla v\|_{L^2}^2 = \|v\|_{H_0^1}^2 \geq 0.$$

Donc :

$$\boxed{A \text{ est monotone .}}$$

1.2 ***La surjective de (I+A)*** *:Pour ce faire il faut :*

$$\boxed{R(I+A) = \mathcal{H}; \quad \forall U \in D(A), F \in \mathcal{H} \text{ .}}$$

Soit $U = (u, v)^T \in D(A)$ *et* $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$ *on a :*

$$(I+A)U = F \iff \begin{cases} u - v = f_1. \\ v + \Delta^2 u - \Delta v = f_2. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

On prend $u = f_1 + v$ *et on remplace dans* $(3.3.3)_2$ *on trouve :*

$$(I+A)U = F \iff v + \Delta^2(f_1 + v) - \Delta v = f_2, \tag{3.3.4}$$

pour ce faire on prend une autre $u \in H_0^2(\Omega)$ *et multiplie l'équation* (3.3.4) *par* u*, puis intégre sur* Ω *pour obtenir*

$$\int_\Omega u \cdot v \ dx + \int_\Omega u \cdot \Delta^2 v \ dx - \int_\Omega u \cdot \Delta v \, dx = \int_\Omega u \cdot f_2 \ dx - \int_\Omega u \cdot \Delta^2 f_1 \ dx.$$

Par l'identité de Green on obtient

$$\int_\Omega u \cdot v \ dx + \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega u \cdot f_2 \ dx - \int_\Omega u \cdot \Delta^2 f_1 \ dx.$$

On définie la forme bilinéaire $a : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *par :*

$$a(u, v) = \int_\Omega u \cdot v \ dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \ dx,$$

et la forme linéaire $L : H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *par :*

$$L(u) = \int_\Omega u \cdot f_2 \ dx - \int_\Omega u \cdot \Delta^2 f_1 \ dx.$$

On applique le théorème de Lax-Milgram afin de garantir l'existence et l'unicité de solution.

i) ***Continuité de*** a ***:***

Pour tous $u, v \in H_0^2(\Omega)$, *on a*

$|a(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$

bien sur par passage au l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

On applique l'inégalité de Poincaré on trouve :

$|a(u,v)| \leq C_0\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^2(\Omega)}.$

$|a(u,v)| \leq C_0'\|u\|_{H_0^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^2(\Omega)} + \|u\|_{H_0^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^2(\Omega)}.$

$|a(u,v)| \leq C\|u\|_{H_0^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^2(\Omega)},$

ainsi, a *est continue*

ii) ***Coercivité de*** a ***:*** *Pour tout* $v \in H_0^2(\Omega)$, *on a*

$$\begin{aligned} a(v,v) &= \int_\Omega |v|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |\Delta v|^2\,dx \\ &= \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|v\|^2_{H^2}\,, \end{aligned}$$

ainsi, a *est coercive .*

Donc il existe un unique $v \in H_0^2(\Omega)$ *tel que*

$$a(u,v) = L(u) \quad \textit{pour tout } u \in H_0^2(\Omega).$$

Comme A est monotone et $R(I+A)=\mathcal{H}$. Ainsi,

$$\boxed{A \text{ est maximale monotone.}}$$

Ainsi, par le théorie de semi-groupe,alors le problème (3.3.1) admet une unique solution

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\infty[; H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)\right)\cap \mathcal{C}^1\left([0,\infty[; H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.3.5}$$

3.3.2 La stabilité

Théorème 3.3.2. *Soit $u_0 \in H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$,il existe un constante positive ω telle que la solution du problème (3.3.1) vérifie l'estimation suivante :*

$$\forall t \geq 0, \qquad E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t}.$$

Preuve. *On multiplie notre équation par u,puis on l'intègre sur $\Omega \times [S,T]$*

$$\int_S^T \int_\Omega u\left(u_t t + \Delta^2 u - \Delta u_t\right) dx\, dt = 0 \tag{3.3.6}$$

On pose I_1 et I_2 tels que :

$$\begin{aligned} I_1 = & \int_S^T \int_\Omega u u_{tt} dx\, dt &= \left[\int_\Omega u_t u dx\right]_S^T - \int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt. \\ I_2 = & \int_S^T \int_\Omega u \Delta^2 u\, dx\, dt &= \int_S^T \|\Delta u\|_{L^2}^2\, dt. \end{aligned}$$

Remplaçons I_1 et I_2 dans (3.3.6) alors :

$$\int_\Omega u_t u dx - 2\int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt + 2\int_S^T E(t)dt - \int_S^T \int_\Omega \Delta u u_t dx = 0$$

$$2\int_S^T E(t)dt = -\int_\Omega u_t u dt + 2\int_S^T \|u_t\|_{L^2}^2\, dt + \int_S^T \int_\Omega \Delta u u_t dx. \tag{3.3.7}$$

On pose B_1, B_2 et B_3 :

$$B_1 = -\left[\int_\Omega u u_t\right]_S^T \leq -\left[\|u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\right]_S^T$$

$$\leq -\beta\left[\|\nabla u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\right]_S^T$$

$$\leq -\beta\left[\|\Delta u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\right]_S^T$$

$$\leq -\beta\frac{1}{2}\left[\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|u_t\|_{L^2}^2\right]_S^T \leq -\beta\left[E(t)\right]_S^T \leq \beta E(S).$$

$$B_2 = \int_S^T\int_\Omega \Delta u\, u_t\, dx\, dt \leq \int_S^T \|\Delta u\|_{L^2}\|u_t\|_{L^2}\, dt$$

$$\leq \int_S^T \frac{1}{2}\left(\|\Delta u\|_{L^2}^2+\|u_t\|_{L^2}^2\right) dt$$

$$\leq \int_S^T E(t) \leq E(S)\int_S^T 1dt \leq \delta\, E(S).$$

$$B_3 = 2\int_S^T \|u_t\|^2\, dt \leq 2c\int_S^T \|\nabla u_t\|^2\, dt = -2c\int_S^T E'(t)dt$$

$$\leq 2cE(S).$$

On remplace B_1 , B_2 et B_3 dans l'équation(3.3.7) *on a*

$$\int_S^T E(t)dt \leq \frac{C}{2}E(S),$$

tel que $C = 2c+\beta+\delta$.

Ainsi, par l'application de lemme Martinez (2.5.1), alors E vérifie l'estimation de décroissance suivante :

$$E(t) \leq E(0)e^{1-\omega t} \qquad \forall t \geq 0 \quad \text{avec } \omega = \frac{C}{2}.$$

CHAPITRE 4

QUELQUE PROBLÈME D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRE

Introduction :
Ce chapitre établit rigoureusement l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions pour des équations d'évolution linéaires. L'approche combine :
- La théorie des semi-groupes non linéaires (génération de solutions),
- Le théorème de Minty-Browder,
- La méthode du multiplicateur (l'étude de la stabilité de la solution).

4.1 Existence et stabilité de l'équation des ondes avec un terme non-linéaire dissipatif

4.1.1 Introduction

On considère dans ce chapitre l'équation d'onde non linéaire avec des conditions au bord du type Dirichlet, avec un terme dissipatif non linéaire .

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g(u_t) = 0 & t > 0 \quad et \quad x \in \Omega \\ u = 0 & t > 0 \quad et \quad x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = u_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où Ω est un domaine borné non vide de $\mathbb{R}$ de frontiére régulire, la donné initiale $(u_0; u_1)$ appartient à un espace de Sobolev convenable. plusieurs auteurs comme **Irena Laseicka, A.Haraux, Lawrence C.Evans, Haim Brezis**.

4.1.2 Préliminaires

Nous commençons par introduire quelques espaces qui seront utilisées tout au long de ce travail.

On pose :

$$V = L^2(\Omega), \qquad \|u\|_V^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\,dx,$$

$$W = \left\{u \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) \;\middle|\; \Delta u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}, \qquad \|u\|_W^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

On suppose que la fonction g satisfait les hypothèses suivantes :

- $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- La fonction g est une fonction croissante .
- $g(0) = 0$.

Il existe des constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ et un exposant $p \geq 1$ telles que :

$$c_1|s|^p \leq g(s) \leq c_2|s|^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{si } |s| \leq 1, \tag{4.1.2}$$

$$c_3|s| \leq g(s) \leq c_4|s|, \qquad \text{si } |s| > 1. \tag{4.1.3}$$

On introduit alors la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{4.1.4}$$

On remarque que E représente l'énergie naturelle du système (4.1.1), en accord avec la structure du terme d'amortissement.

On introduit la fonction $U = (u, v)^T$, où $v = u_t$, et on récrit le système (4.1.1) sous la forme :

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Ici, l'opérateur non linéaire $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & g(.) \end{pmatrix}. \tag{4.1.6}$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, v) \in W \times V; \Delta u - g(v) \in V\}.$$

On introduit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = W \times V,$$

muni de la norme

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |v|^2 dx \quad \forall \;\; (u,v) \in \mathcal{H}. \tag{4.1.7}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 4.1.1. *Soient $(u_0, u_1) \in W \times V$, il existe une solution du système (4.1.1) telle que*

$$u \in \mathcal{C}([0,+\infty), W) \cap \mathcal{C}^1([0,+\infty), V). \tag{4.1.8}$$

Preuve. *Nous montrons, dans un premier temps, que $\mathcal{A}$ est un opérateur monotone maximal.*
Soient

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad et \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}X - \mathcal{A}Y, X - Y \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ \\ -\Delta x_1 + g(x_2) + \Delta y_1 - g(y_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ \\ -\Delta(x_1 - y_1) + (g(x_2) - g(y_2)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= -\int_\Omega \nabla(x_2 - y_2)\nabla(x_1 - y_1)\, dx - \int_\Omega \Delta(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\, dx \\
&\quad + \int_\Omega (g(x_2) - g(y_2))(x_2 - y_2)\, dx,
\end{aligned}$$

par l'identité de Green, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}X - \mathcal{A}Y, X - Y\rangle_{\mathcal{H}} &= -\int_{\Omega} \nabla(x_2 - y_2)\nabla(x_1 - y_1)\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \nabla(x_1 - y_1)\nabla(x_2 - y_2)\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega} (g(x_2) - g(y_2))(x_2 - y_2)\,dx, \\
&= \int_{\Omega} (g(x_2) - g(y_2))(x_2 - y_2)\,dx, \\
\langle \mathcal{A}X - \mathcal{A}Y, X - Y\rangle_{\mathcal{H}} &\geq 0 \quad (\textit{car } g \textit{ est croissante}).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur non borné $\mathcal{A}$ est monotone.
Montrons maintenant que l'opérateur $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ est surjectif.

Soit

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}.$$

Nous cherchons $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ vérifiant

$$U + \mathcal{A}U = F,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} u - v = f_1 \in W \\ \\ v - \Delta u + g(v) = f_2 \in V. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

L'équation $(4.1.9)_1$ permet d'exprimer u en fonction de v et f_1. En la substituant dans $(4.1.9)_2$, on obtient

$$v - \Delta v + g(v) = f_2 + \Delta f_1. \tag{4.1.10}$$

On définit l'opérateur

$$\mathcal{B}v = f_2 + \Delta f_1, \tag{4.1.11}$$

Puisque nous cherchons v dans V, l'opérateur non linéaire $\mathcal{B}$ agit de V.

Montrons que l'opérateur $\mathcal{B}$ est monotone :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{B}u - \mathcal{B}v, u - v\rangle_V &= \langle u - v - \Delta(u - v) + (g(u) - g(v)), u - v\rangle_V \\ &= \int_\Omega \left[|u - v|^2 + |\nabla u - \nabla v|^2 + (g(u) - g(v))(u - v)\right] dx \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est monotone.
Ensuite, montrons que $\mathcal{B}$ est coercif :

$$\begin{aligned}\frac{\langle \mathcal{B}v, v\rangle}{\|v\|_V} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega \left[|v|^2 + |\nabla v|^2 + g(v)v\right] dx}{\|v\|_V} \\ &\geq C\|v\|_V + \frac{\displaystyle\int_\Omega g(v)v\, dx}{\|v\|_V},\end{aligned}$$

et puisque $\|v\|_V \to +\infty$ implique que ce quotient tend vers $+\infty$, $\mathcal{B}$ est coercif.

D'après le théorème de Minty-Browder , l'équation (4.1.11) admet une unique solution v, ce qui implique que le système (4.1.9) admet une unique solution (u, v).

Alors l'opérateur $\mathcal{I} + \mathcal{A}$ est surjectif.

Par la théorie des semi-groupes non linéaires, l'existence d'une unique solution au système (4.1.1) est assurée. Ceci achève la preuve du théorème (4.1.1).

4.1.3 Stabilité

Théorème 4.1.2. *Soit $(u_0, u_1) \in W \times V$. On suppose que (4.1.2),(4.1.3) sont vérifiées. L'énergie de la solution unique du système (4.1.1), donnée par l'estimation de décroissance (4.1.4) :*

$$E(t) \leq Ct^{-2/(p-1)} \quad \forall t > 0, \; si \; p > 1,$$

et

$$E(t) \leq C'E(0)e^{-wt} \quad \forall t > 0, \; si \; p = 1.$$

Ici C est une constante positive qui dépend uniquement de l'énergie initiale $E(0)$, tandis que C' et w sont des constantes positives, indépendantes des données initiales.

Preuve. *En multipliant la première équation de (4.1.1) par u, on obtient :*

$$0 = \int_S^T \int_\Omega E^\sigma u \left(u_{tt} - \Delta u + g(u_t)\right) dx\, dt$$

$$0 = \int_\Omega E^\sigma u u_t \Big|_S^T dx - \int_S^T \int_\Omega \sigma E' E^{\sigma-1} u u_t \, dx\, dt - 2 \int_S^T \int_\Omega u_t^2 \, E^\sigma \, dx\, dt$$

$$+ \int_S^T \int_\Omega u_t^2 \, E^\sigma \, dx\, dt + \int_S^T \int_\Omega E^\sigma \nabla u^2 \, dx\, dt + \int_S^T \int_\Omega E^\sigma u g(u_t) \, dx\, dt.$$

$$2 \int_S^T E^{\sigma+1} dt = - \int_\Omega E^\sigma u u_t \Big|_S^T dx + \int_S^T \int_\Omega \sigma E' E^{\sigma-1} u u_t \, dx\, dt \tag{4.1.12}$$

$$+ 2 \int_S^T \int_\Omega u_t^2 \, E^\sigma \, dx\, dt - \int_S^T \int_\Omega E^\sigma u g(u_t) \, dx\, dt.$$

Puisque E est décroissante, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\left| \int_S^T \int_\Omega \sigma E' E^{\sigma-1} u u_t \, dx \, dt \right| &\leq \int_S^T \sigma E' E^{\sigma-1} \int_\Omega |u| \, |u_t| \, dx \, dt \\
&\leq C_\varepsilon \int_S^T \sigma E' E^{\sigma-1} \left(\|\nabla u\| + \|u_t\| \right) \, dt \\
&\leq C_{(\varepsilon,\sigma)} \int_S^T E' E^\sigma \, dt \\
&\leq C E^{\sigma+1}(S)
\end{aligned}$$

$$\left| - \int_\Omega E^\sigma \, u \, u_t \Big|_S^T \, dx \right| \leq C E^{\sigma+1}(S).$$

En utilisant ces estimations, on conclut à partir de (4.1.12) que :

$$2 \int_S^T E^{\sigma+1} dt \leq C E^{\sigma+1}(S) + 2 \int_S^T \int_\Omega u_t^2 \, E^\sigma \, dx \, dt - \int_S^T \int_\Omega E^\sigma u \, g(u_t) \, dx \, dt \, . \tag{4.1.13}$$

Maintenant, nous estimons les termes du côté droit de (4.1.13).
Comme dans Komornik [15], nous considérons la partition suivante de Ω :

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : |u_t| > 1\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : |u_t| \leq 1\}.$$

En utilisant l'injection de Sobolev et l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$2\int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_1} |u_t|^2 \; dx\,dt - \int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_1} |u|\cdot|g(u_t)| \; dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon \int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_1} |u|^2 dx\,dt + C(\varepsilon)\int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_1} |g(u_t)|^2 dx\,dt + 2\int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_1} |u_t|^2 dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon C' \int_S^T E^\sigma \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dt + \left[C(\varepsilon)c_2 + \frac{c}{c_1}\right]\int_S^T E^\sigma \int_\Omega u_t\, g(u_t) dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon C \int_S^T E^{\sigma+1} dt + C_1(\varepsilon)\int_S^T E^\sigma(-E')dt$$

$$\leq \varepsilon C \int_S^T E^{\sigma+1} dt + C_1(\varepsilon,\mu)E^{\sigma+1}(S). \tag{4.1.14}$$

En utilisant l'injection de Sobolev et l'inégalité de Young, nous obtenons :

$$\int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_2} \left(|u||g(u_t)| + 2|u_t|^2\right) dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon' C' \int_S^T E^\sigma \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\,dt + C(\varepsilon')\int_S^T E^\sigma \int_{\Omega_2} \left(|u_t|^2 + |g(u_t)|^2\right) dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon' C' \int_S^T E^{\sigma+1} dt + C(\varepsilon')\int_S^T E^\sigma \int_\Omega (u_t\, g(u_t))^{\frac{2}{p+1}} dx\,dt$$

$$\leq \varepsilon' C \int_S^T E^{\sigma+1} dt + C(\varepsilon',p)\int_S^T E^\sigma \left[\int_\Omega u_t g(u_t) dx\right]^{\frac{2}{p+1}} dt. \tag{4.1.15}$$

En reportant (4.1.14) *et* (4.1.15) *dans* (4.1.13)*, nous trouvons :*

$$2\int_\Omega E^{\sigma+1} dt \leq CE(S) + C'E^{\sigma+1}(S) + \varepsilon_0 C\int_S^T E^{\sigma+1} dt + \varepsilon_1 \int_S^T E^{\frac{p+1}{p-1}} dt.$$

Nous choisissons σ *tel que*

$$\sigma^{\frac{p+1}{p-1}} = \sigma + 1.$$

Ainsi, nous trouvons

$$\sigma = \frac{p-1}{2}.$$

En choisissant ε_0 *et* ε_1 *suffisamment petits, nous obtenons*

$$\int_{\Omega} E^{\sigma+1}\, dt \leq C' E(S) + C' E^{\sigma}(0) E(S),$$

où C' *est une constante positive indépendante de* $E(0)$. *Nous pouvons ainsi compléter la preuve en appliquant les lemmes* (2.5.1) *et* (2.5.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Adams, R. A. and Fournier**, J. J. (2003). Sobolev spaces (Vol. 140). Elsevier.

[2] **Brezis, H**.(1973). Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert (Vol. 5). Elsevier.

[3] **Brezis, H**, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[4] **Mohamed Braiki, H., Abdelli, M., Mansouri, S., Zennir, K**.(2021). Well-posedness and stability for a Petrovsky equation with properties of nonlinear localized for strong damping. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 44(5).

[5] **Cazenave T, Haraux A**, An introduction to semilinear evolution equationns. Oxford University press, 1998

[6] **Chueshov,I. and Lasiecka, I.**Von Karman evolution equations :Well-posedness and long time dymanics.New York :Springer,2010.

[7] **Ezzinbi, K**. "Lectures notes in Functional Analysis and evolution equations." Graduate Course delivered at AUST, Abudja, Nigeria (2010).

[8] **Evans,L. C.**Partial differential equations.Vol.19.American Mathematical Society,2022.

[9] **Haraux,A,and Kirane. M.**"Estimations $C1$ pour des problèmes paraboliques semi-linéaires."Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques.Vol.5.No.3-4.1983.

[10] **Komornik, V**. Decay Estimates for a Petrovski, System with a Nonlinear Distributed Feedback. Institute for Mathematics and its Applications (USA), 1992.

[11] **Lacroix-Sonrier, M. T.** Distributions Espace De Sobolev Applications,ellipses/éditions marketing S.A,1998.

[12] **P. Martinez**. A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 4 (1999) 419-444.

[13] **Nadia, M**. Etude de l'existence globale et de la stabilisation de quelques problèmes d'évolution non linéaires avec retard. Diss. UNIVERSITE DJILLALI LIABES, 2018.

[14] **A. Pazy**, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations .