



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Application »

Présenté Par :
Merari Somia

Sous L'intitulé :

Mesure de Non Compacité et Applications

Soutenu publiquement le 23 / 06/ 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr BEDDANI Hamid	MCA	ESGEE d'Oran	Président
Mr HAMDI CHERIF Mountassir	MCA	ESGEE d'Oran	Examineur
Mr BEDDANI Moustafa	MCA	ENS de Mostaganem	Encadrant
Mr BENIA Kheireddine	MCA	Univ. Ibn Khaldoun - Tiaret	Co-Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Louange à Dieu, Maître des mondes, pour ses innombrables bienfaits, pour la force et la patience qu'Il m'a accordées, et pour m'avoir guidé tout au long de mon parcours universitaire jusqu'à l'achèvement de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrant, Monsieur BEDDANI Moustafa, pour son accompagnement précieux, ses conseils avisés, sa disponibilité constante, ainsi que pour l'attention qu'il a portée à chaque étape de l'élaboration de ce mémoire.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent également à Monsieur HAMDJ CHERIF Mountassir, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi qu'à Monsieur BEDDANI Hamid, pour avoir accepté de juger ce travail et pour l'intérêt qu'il lui a témoigné.

Je n'oublie pas Monsieur BENIA Kheireddine, Chef du Département de Mathématiques à l'Université Ibn Khaldoun – Tiaret, que je remercie chaleureusement pour son encadrement pédagogique et son soutien constant durant ma formation.

Enfin, j'adresse mes pensées reconnaissantes à toutes les personnes qui ont, de près ou de loin, contribué à la réalisation de ce mémoire : à ma famille pour son appui inconditionnel, à mes enseignants pour leur dévouement, et à mes camarades pour leur présence et leurs encouragements.



Dédicace

Je dédie ce modeste travail:

A ma mère,

A mes frères,

A mes sœurs,

A mes amies,

A toute ma famille

Je tien sa remercier l'ensemble de tous les
étudiants et étudiantes de ma promotion,

Enfin je dédie cette mémoire à mes
collègues et tous ceux qui mes ont chers.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة مفهوم مقياس عدم الانضغاط، والذي يُعد أداة مهمة في التحليل الدالي. نركز بشكل خاص على مقياسي كوراتوفسكي وهاوسدورف، مع توضيح خصائصهما الأساسية. في هذا السياق، نقدم بعض التطبيقات غير الخطية التي تُعد تعميمًا للدوال الكلاسيكية من نوع **Lipschitz**. كما نعرض عدة نظريات نقطة ثابتة تُعد امتدادًا لنظرية **Schauder**، مع تقديم بعض البراهين. وفي الجزء الأخير، نطبق هذه النتائج النظرية على دراسة معادلات تكاملية غير خطية من نوع **Hammerstein**، حيث نبرهن على وجود حلول داخل فضاءات دالية مناسبة.

Abstract

This work is devoted to exploring the **concept of the measure of noncompactness**, a powerful tool in the study of functional analysis. Particular attention is given to the **Kuratowski and Hausdorff measures**, highlighting their **key properties**.

We also introduce a class of **nonlinear operators** that generalize classical **Lipschitz-type functions**.

Several **fixed point theorems**, extending the well-known **Schauder fixed point theorem**, are discussed and proven.

Finally, the developed theory is applied to examine the **existence of solutions** for certain **nonlinear integral equations of Hammerstein type**, within suitable **functional spaces**.

Résumé

Ce travail vise à explorer la notion de **mesure de non-compacité**, un outil important en analyse fonctionnelle. Nous nous intéressons en particulier aux **mesures de Kuratowski et de Hausdorff**, en mettant en lumière leurs **caractéristiques essentielles**.

Dans ce cadre, nous introduisons également certaines **applications non linéaires** qui généralisent les fonctions de type **Lipschitz** classiques.

Par la suite, nous présentons plusieurs **théorèmes de point fixe** étendant le **théorème de Schauder**, accompagnés de démonstrations.

Enfin, ces résultats théoriques sont appliqués à l'étude de **certaines équations intégrales non linéaires de type Hammerstein**, avec des **résultats d'existence** établis dans des **espaces fonctionnels appropriés**.

Table des matières

1	Préliminaires	4
1.1	Complétude et Compacité dans les Espaces Métriques	4
1.1.1	Complétude	4
1.1.2	Compacité	9
1.2	Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	12
1.3	Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	17
1.4	Dérivée fractionnaire de Caputo	18
2	Mesures de Non-compacité	20
2.1	Mesures de Non-compacité dans les Espaces Métriques	20
2.2	Mesures de Non-compacité dans les Espaces Normés	26
2.3	Quelques résultats de la théorie du point fixe	30
3	Problème aux limites d'ordre fractionnaire sur un intervalle non borné dans un espace de Banach	32
3.1	Introduction	32
3.2	Préliminaire	32
3.3	Résultat d'existence	33
3.4	Exemple	41

Introduction

La mesure de non-compacité (MNC) évalue le degré de non-compacité d'un ensemble dans un certain espace métrique, dans le sens où elle est nulle pour tout ensemble relativement compact.

La première MNC a été introduite par le mathématicien polonais K. Kuratowski en 1930, lorsqu'il a étendu le théorème d'intersection de Cantor à l'aide de sa propre mesure de non-compacité, notée dans toute la littérature par α .

En 1955, G. Darbo a utilisé la MNC de Kuratowski pour démontrer un théorème du point fixe généralisé, qui étend à la fois le théorème de Schauder (pour les applications compactes) et le principe de contraction de Banach (1922) (pour les applications contractantes). En effet, Darbo a introduit la notion d'applications k -contractantes, généralisant la classe des applications de type Lipschitz ainsi que les applications contractantes.

Plus tard, en 1967, B.N. Sadovskii a généralisé le théorème du point fixe de Darbo à une classe plus large d'applications appelées *applications condensantes*. En termes simples, une application condensante est une application telle que l'image d'un ensemble est, d'une certaine manière, « plus compacte » que l'ensemble lui-même.

La mesure de Hausdorff, notée χ , a été introduite par L.S. Goldstein *et al.* en 1957. En 1972, le mathématicien roumain V.I. Istrăţescu *et al.* ont défini la mesure de non-compacité β .

Aujourd'hui, on trouve dans la littérature plusieurs types de MNC développées pour des cadres fonctionnels spécifiques. Une MNC peut même être définie selon une approche axiomatique (voir [12] pour plus de détails).

Comme mentionné précédemment, les classes d'applications impliquant les MNC peuvent être vues comme des alternatives aux applications compactes, et sont donc d'une grande importance en théorie du point fixe. Par exemple, on vérifiera dans ce travail que la somme d'une application contractante et d'une application compacte est une k -contraction stricte, ce qui constitue l'idée de base du théorème de point fixe de Darbo.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

- Le **premier chapitre** est consacré aux préliminaires : on y présente les notions de complétude et de compacité dans les espaces métriques, ainsi que les définitions de l'intégrale et des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.
- Le **deuxième chapitre** traite des mesures de non-compacité. On y introduit les différentes mesures existantes dans les espaces métriques et normés, et on expose certains résultats classiques de la théorie du point fixe.

- Le **troisième chapitre** est consacré à l'étude d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire sur un intervalle non borné dans un espace de Banach. On y présente le cadre du problème, les hypothèses principales, les résultats d'existence, ainsi que quelques exemples illustratifs.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Complétude et Compacité dans les Espaces Métriques

1.1.1 Complétude

Définition 1.1. Soit (X, d_X) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ dans X est appelée suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq n_\varepsilon \implies d_X(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2. Soit (X, d_X) un espace métrique et $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite convergente dans X . Alors $(x_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy.

Démonstration. Soit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq n_\varepsilon$, on a :

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $(x_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy. □

Remarque 1.3. Dans le cas général des espaces métriques, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, $(\frac{1}{n})_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique $((0, 1), |\cdot|)$. Cependant, cette suite n'a pas de limite dans cet espace métrique.

Proposition 1.4. Toute suite de Cauchy dans un espace métrique est bornée.

Démonstration. Soit $\varepsilon = 1$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n \geq m \geq N_1$, $d(x_m, x_n) < 1$. Soit $p \in X$ et soit $k = \max_{i \leq m} d(p, x_i)$. Alors $d(p, x_n) \leq d(p, x_m) + d(x_m, x_n) < k + 1$, ce qui implique que $(x_n)_n$ est bornée. □

Définition 1.5. Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge.

Exemple 1.6.

- (a) Dans un espace métrique discret, toute suite de Cauchy est constante à partir d'un certain rang. Elle est donc convergente. Par conséquent, les espaces métriques discrets sont complets.
- (b) Soit $S \neq \emptyset$ et Y un espace métrique. Une fonction $f : S \rightarrow Y$ est dite bornée si :

$$\sup_{(x,y) \in S^2} d(f(x), f(y)) < \infty.$$

Soit $B(S, Y) = \{f : S \rightarrow Y \text{ bornée}\} \subset \mathcal{F}(S, Y)$. Alors :

Assertion 1 : $B(S, Y)$ est un espace métrique avec la distance $D(f, g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x))$.

Preuve : Comme f et g sont bornées, cette définition a un sens. On a :

- (a) $D(f, g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) \geq 0$ car (Y, d) est un espace métrique, et :

$$\begin{aligned} D(f, g) = 0 &\iff \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) = 0 \\ &\iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in S \\ &\iff f = g. \end{aligned}$$

- (b) $D(f, g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) = \sup_{x \in S} d(g(x), f(x)) = D(g, f)$.

(c)

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \\ &\leq \sup_{x \in S} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in S} d(h(x), g(x)). \end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in S} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in S} d(h(x), g(x)).$$

Assertion 2 : $B(S, Y)$ est un espace complet si Y est complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $B(S, Y)$. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n > m \geq n_\varepsilon \implies D(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n > m \geq n_\varepsilon \implies d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in S.$$

Ainsi $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans Y , $\forall x \in S$. Comme Y est complet, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in S$. Il faut vérifier que :

$$(1) \quad f \in B(S, Y)$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D(f_n, f) = 0$$

Preuve de 1 : Soient $x, y \in S$, on a :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \\ &\leq d(f(x), f_n(x)) + \sup_{x, y \in S} d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)). \end{aligned}$$

Comme $(f_n)_n \subset B(S, Y)$, alors $\sup_{x, y \in S} d(f_n(x), f_n(y)) < M$. Donc quand $n \rightarrow \infty$:

$$d(f(x), f(y)) < M, \quad \forall x, y \in S \implies \sup_{x, y \in S} d(f(x), f(y)) < M \implies f \in B(S, Y).$$

Preuve de 2 : Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} D(f_n, f) = 0$. Comme $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $B(S, Y)$, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad m > n \geq n_\varepsilon \implies D(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

On a $d(f_n(x), f_m(x)) \leq D(f_n, f_m) \forall x \in S$, donc :

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \quad \forall m > n \geq n_\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\forall x \in S, \quad d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon + d(f_m(x), f(x)).$$

En fixant n et en faisant tendre $m \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon &\implies \sup_{x \in S} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \\ &\implies f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ dans } B(S, Y). \end{aligned}$$

Proposition 1.7. *Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$. Alors :*

- (i) *Si X est complet et Y est fermé dans X , alors Y est complet.*
- (ii) *Si Y est complet, alors Y est fermé.*

Démonstration.

- (i) Supposons X complet et Y fermé dans X . Soit $(x_n)_n \subset Y$ une suite de Cauchy. Alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X , donc converge dans X puisque X est complet. Cependant, Y étant fermé, la suite $(x_n)_n$ converge dans Y . Donc Y est complet.
- (ii) Supposons Y complet et soit $(x_n)_n \subset Y$ une suite convergente vers une limite x . Comme une suite convergente est de Cauchy et Y est complet, alors $x \in Y$. Donc Y est fermé.

□

Exemple 1.8. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ continue}\}$. Alors $C_b(X, Y) = C(X, Y) \cap B(X, Y)$ est fermé dans $B(X, Y)$ et donc complet si (Y, d_Y) l'est.*

Démonstration. Clairement, $C_b(X, Y)$ est un sous-espace de $(B(X, Y), D)$. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $C_b(X, Y)$ qui converge vers $f \in B(X, Y)$, i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} D(f_n, f) = 0$. On doit prouver que $f : X \rightarrow Y$ est continue, i.e., pour toute suite $(x_n)_n \subset X$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$. Soit $(x_n)_n \subset X$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Par hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_\varepsilon \implies D(f_n, f) < \varepsilon.$$

Donc $D(f_n, f) < \varepsilon \implies \sup_{x \in S} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. De plus, f_n étant continue $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f_n(x_m) = f_n(x) \quad \forall (x_m)_m \subset X \text{ convergeant vers } x.$$

Alors

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_m), f(x)) &\leq d_Y(f(x_m), f_n(x_m)) + d_Y(f_n(x_m), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) \\ &< \varepsilon + d_Y(f_n(x_m), f_n(x)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Quand $m \rightarrow \infty$, on trouve :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_Y(f(x_m), f(x)) \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \lim_{m \rightarrow \infty} d_Y(f(x_m), f(x)) = 0.$$

□

Définition 1.9. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ avec $A \neq \emptyset$. Le diamètre de A est défini par :

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y).$$

Clairement, si $A \subset B$ alors $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.

Proposition 1.10. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ avec $A \neq \emptyset$. Alors :

1. $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.
2. Si $A = B_r(x_0)$ alors $\text{diam}(A) \leq 2r$.
3. A est borné si et seulement si $\text{diam}(A) < \infty$.

Démonstration.

1. Comme $A \subset \overline{A}$ alors $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(\overline{A})$. Soient $x, y \in \overline{A}$. Alors il existe des suites $(x_n)_n, (y_n)_n \subset A$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. On a :

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x, x_n) + \text{diam}(A) + d(y_n, y).$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$, on trouve :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \text{diam}(A), \quad \forall x, y \in \overline{A} \implies \sup_{x, y \in \overline{A}} d(x, y) \leq \text{diam}(A) \\ &\implies \text{diam}(\overline{A}) \leq \text{diam}(A). \end{aligned}$$

D'où $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.

2. Soient $x, y \in A = B_r(x_0)$. Alors $d(x, x_0) < r$ et $d(y, x_0) < r$. Donc :

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < 2r \implies \sup_{x, y \in A} d(x, y) \leq 2r \implies \text{diam}(A) \leq 2r.$$

3. Si A est borné, alors il existe une boule $B_r(x_0)$ telle que $A \subset B_r(x_0)$. Donc $\text{diam}(A) \leq 2r < \infty$. Réciproquement, si $\text{diam}(A) < \infty$, alors pour $x_0 \in A$, on a $A \subset B_{r_0}(x_0)$ où $r_0 = \text{diam}(A)$. Donc A est borné. $\square$

Proposition 1.11. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé et soit $A = B_r(x_0) \subset X$. Alors :

$$\text{diam}(A) = \text{diam}(\partial A) = 2r.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\text{diam}(\partial A) = 2r$. Soient $x, y \in S_r[x_0] = \partial A$. Alors :

$$\|x_0 - x\| = r \quad \text{et} \quad \|x_0 - y\| = r.$$

Donc :

$$\|x - y\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0 - y\| = r + r = 2r.$$

Ainsi $\|x - y\| \leq 2r$ pour tous $x, y \in \partial A$, d'où $\text{diam}(\partial A) \leq 2r$. Réciproquement, soit $x \in \partial A$ et choisissons $y = 2x_0 - x$. Alors $y \in \partial A$ car :

$$\|x_0 - y\| = \|x_0 - 2x_0 + x\| = \|x - x_0\| = r.$$

De plus :

$$\|x - y\| = \|x - 2x_0 + x\| = 2\|x - x_0\| = 2r.$$

Donc $\text{diam}(\partial A) \geq 2r$. Finalement, $\text{diam}(\partial A) = 2r$.

Montrons maintenant que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\partial A)$. On a $A = A \cup \partial A$ et $\partial A \subset A$, donc :

$$2r = \text{diam}(\partial A) \leq \text{diam}(A) \leq 2r.$$

D'où $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(\partial A) = 2r$. $\square$

Définition 1.12. Soit (X, d) un espace métrique, $\emptyset \neq A \subset X$, et $x \in X$. Alors :

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Proposition 1.13. Soit (X, d) un espace métrique, $\emptyset \neq A \subset X$ et $x \in X$. Alors :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0.$$

Démonstration. Si $x \in \overline{A}$, alors il existe $(x_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ (i.e., $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$). Donc :

$$0 \leq d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, x_n), \quad \forall n.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, on obtient $d(x, A) = 0$. Réciproquement, si $d(x, A) = 0$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in A : \quad 0 \leq d(x, x_n) < \frac{1}{n}.$$

Ainsi il existe $(x_n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$, d'où $x \in \overline{A}$. $\square$

Théorème 1.14 (Théorème d'intersection de Cantor). Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fermés non vides de X telle que $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$. Alors $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ est non vide et réduit à un singleton.

Démonstration. Soit $(x_n)_n \subset X$ une suite telle que $x_n \in F_n$ pour tout n . Montrons d'abord que $(x_n)_n$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\text{diam}(F_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Soient $m, n > n_\varepsilon$. Alors $x_m, x_n \in F_{n_\varepsilon}$ car $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout k . Donc $d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(F_{n_\varepsilon}) < \varepsilon$. Ainsi $(x_n)_n$ est de Cauchy.

Comme (X, d) est complet, il existe $x \in X$ tel que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Montrons que $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire. Pour tout $m > n$, on a $x_m \in F_n$. Comme F_n est fermé, $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m \in F_n$. Ainsi $x \in F_n$ pour tout n , d'où $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$.

Montrons que $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \{x\}$. On a :

$$\bigcap_{n=1}^\infty F_n \subset F_n \implies 0 \leq \text{diam} \left(\bigcap_{n=1}^\infty F_n \right) \leq \text{diam}(F_n).$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0 \implies \text{diam}(\bigcap_{n=1}^\infty F_n) = 0 \implies \bigcap_{n=1}^\infty F_n = \{x\}$. $\square$

1.1.2 Compacité

Définition 1.15. Soit (X, d) un espace métrique et $S \subset X$.

- (a) Un recouvrement ouvert de S est une collection d'ouverts $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de X telle que $S \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.
- (b) S est dit compact si tout recouvrement ouvert de S admet un sous-recouvrement fini.
- (c) S est dit précompact ou totalement borné si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \{x_1, x_2, \dots, x_{N_\varepsilon}\} \subset X \quad \text{tel que} \quad S \subset \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(x_k).$$

- (d) S est dit séquentiellement compact si toute suite dans S admet une sous-suite convergente dans S .

Proposition 1.16. Tout espace métrique compact est totalement borné.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $X = \bigcup_{x \in X} B_\varepsilon(x)$ est un recouvrement ouvert. Comme X est compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{k=1}^N B_\varepsilon(x_k)$, i.e., X est totalement borné. $\square$

Exemple 1.17.

1. Soit (X, d) un espace métrique et $S \subset X$ fini : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de S . Alors pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, il existe $U_i \in (U_\lambda)$ tel que $x_i \in U_i$. Donc $S \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.
2. Soit $X = (0, 1)$ muni de la métrique usuelle. Soit $U_n = (\frac{1}{n}, 1)$. Alors $\bigcup_{n=1}^\infty (\frac{1}{n}, 1)$ est un recouvrement ouvert de $(0, 1)$ qui n'admet pas de sous-recouvrement fini.

Proposition 1.18. *Tout espace métrique totalement borné est borné.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_{N_\varepsilon} \in X$ tels que $X = \bigcup_{k=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon(x_k)$. Soit $x_0 \in X$ et $R > \varepsilon + \max_{1 \leq k \leq N_\varepsilon} d(x_k, x_0)$. Alors $B_\varepsilon(x_k) \subset B_R(x_0)$ pour tout $1 \leq k \leq N_\varepsilon$, car si $d(x, x_k) < \varepsilon$, alors :

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_k) + d(x_k, x_0) < \varepsilon + (R - \varepsilon) = R.$$

Ainsi $X \subset B(x_0, R)$, i.e., X est borné. $\square$

Remarque 1.19. *Par la proposition précédente, tout espace métrique compact est borné.*

Proposition 1.20. *Soit (X, d) un espace métrique, et Y un sous-espace de X .*

- (i) *Si X est compact et Y fermé dans X , alors Y est compact.*
- (ii) *Si Y est compact, alors il est fermé dans X .*

Démonstration.

- (i) Soit $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de Y . Comme Y est fermé, $X \setminus Y$ est ouvert. Donc $X \subset (X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)$. Comme X est compact, il existe un sous-recouvrement fini $X \subset (X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{k=1}^N U_k\right)$. Ainsi $Y \subset \bigcup_{k=1}^N U_k$, donc Y est compact.
- (ii) Montrons que $X \setminus Y$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus Y$. Comme X est métrique (donc séparé), pour tout $y \in Y$, il existe $\varepsilon_y > 0$ et $\delta_y > 0$ tels que $B_{\varepsilon_y}(x) \cap B_{\delta_y}(y) = \emptyset$. Alors $Y \subset \bigcup_{y \in Y} B_{\delta_y}(y)$. Comme Y est compact, il existe un sous-recouvrement fini $Y \subset \bigcup_{k=1}^N B_{\delta_{y_k}}(y_k)$. Soit $\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq N} \varepsilon_{y_k} > 0$. Alors :

$$B_\varepsilon(x) \cap Y \subset B_\varepsilon(x) \cap \left(\bigcup_{k=1}^N B_{\delta_{y_k}}(y_k)\right) = \emptyset.$$

Donc $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus Y$, i.e., $X \setminus Y$ est ouvert. $\square$

Définition 1.21. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $A \subset X$, et $x \in X$.*

1. *x est un point adhérent de A si tout voisinage de x intersecte A (i.e., $x \in \overline{A}$).*
2. *x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x intersecte $A \setminus \{x\}$ (i.e., $x \in A'$).*
3. *x est un point limite de A si tout voisinage de x contient une infinité de points de A (i.e., $x \in A^\bullet$).*

Remarque 1.22. *On a les relations suivantes :*

1. $A \subset A' \subset \overline{A}$.
2. $\overline{A} = A' \cup A$.
3. $L = \overline{A} \setminus A'$ est l'ensemble des points isolés.

Remarque 1.23. *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et $x \in X$.*

1. x est un point d'accumulation de la suite si tout voisinage de x contient une infinité de termes de la suite.
2. x est un point limite de la suite si tout voisinage de x contient presque tous les termes d'une sous-suite.

Dans un espace métrique, ces deux notions coïncident.

Proposition 1.24. Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique (X, d) et $x \in X$. Alors x est un point limite de $(x_n)_n$ si et seulement s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ convergeant vers x .

Démonstration. ($\Leftarrow$) Si une sous-suite converge vers x , alors x est un point limite de la suite.

($\Rightarrow$) Soit x un point limite. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n' > n$ tel que $d(x_{n'}, x) < \varepsilon$.

- Pour $\varepsilon = 1$, $\exists n_1 > 0 : d(x_{n_1}, x) < 1$.
- Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_2 > n_1 : d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$.
- ...

- Pour $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $\exists n_k > n_{k-1} : d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$.

La sous-suite $(x_{n_k})_k$ vérifie $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k} \rightarrow 0$, donc converge vers x . $\square$

Corollaire 1.25. Si une suite converge vers x , alors son seul point limite est x .

Proposition 1.26. Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique (X, d) . Alors :

$$(x_n)_n \text{ est de Cauchy} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0 \quad \text{où} \quad A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ de Cauchy. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall k, k' > n_0, \quad d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon.$$

Or $k, k' > n_0 \implies x_k, x_{k'} \in A_{n_0}$, donc :

$$\sup_{k, k' > n_0} d(x_k, x_{k'}) < \varepsilon \implies \text{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon.$$

Comme $n > n_0 \implies A_n \subset A_{n_0}$, on a $\text{diam}(A_n) \leq \text{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$.

Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_n) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\text{diam}(A_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour $m, n \geq n_0$, on a $d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon$, i.e., $(x_n)_n$ est de Cauchy. $\square$

Corollaire 1.27. Si une suite de Cauchy dans un espace métrique a un point limite x , alors elle converge vers x .

Proposition 1.28 (Théorème d'intersection de Cantor pour les compacts). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides. Alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Alors $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)$. Comme X est compact, il existe un sous-recouvrement fini $X = \bigcup_{k=1}^N (X \setminus F_k)$. Mais $(F_n)_n$ est décroissante, donc $F_N = \emptyset$, contradiction. $\square$

Corollaire 1.29. *Dans un espace compact, toute suite admet un point limite.*

Corollaire 1.30. *Tout espace métrique compact est complet.*

Corollaire 1.31. *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique compact (X, d) . Alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \text{l'ensemble des points limites de } (x_n)_n \text{ est } \{x\}.$$

Exemple 1.32. *Soit $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et la suite :*

$$x_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}.$$

Alors 0 est un point limite (car $x_{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$), et c'est le seul. Cependant, $(x_n)_n$ ne converge pas vers 0 car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Proposition 1.33. *Tout espace métrique totalement borné est séparable.*

Proposition 1.34. *Tout espace métrique séquentiellement compact est compact.*

Proposition 1.35. *Tout espace métrique séquentiellement compact est totalement borné et complet.*

1.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \int_a^t f(\tau) d\tau \\ I^{(2)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

D'après le théorème du Fubini, on trouve ;

$$I^{(2)} f(t) = \frac{1}{1!} \int_a^t (t - \tau)^{2-1} f(\tau) d\tau.$$

En répétant la même opération n fois, on obtient

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{1.1}$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et comme nous avons $(n-1)! = \Gamma(n)$. Riemann rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non-entiers, alors c'était naturel de définir l'opérateur d'intégration fractionnaire comme suit

Définition 1.36. Soit $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f de borne inférieure a est définie par

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad a < t < +\infty, \quad (1.2)$$

et on a : $I_{a+}^0 f(t) = f(t)$ (i.e. I_{a+}^0 est l'opérateur identité).

Remarque 1.37. Par un changement de variable $s = t - \tau$, on remarque que I_{a+}^α peut être écrit sous la forme suivante :

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s) ds, \quad (1.3)$$

subsectionIntégrales fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles

1. On pose $f(t) = (t - a)^\beta$, $t > a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > -1$:

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^\beta d\tau.$$

En utilisant le changement de variable $\tau = a + (t - a)s$ où s varie de 0 à 1 et la fonction Bêta, on obtient

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t - a - (t - a)s]^{\alpha-1} [s(t - a)]^\beta (t - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 s^\beta (1 - s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\beta} \beta(\beta + 1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Donc,

$$I_{a+}^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (t - a)^{\alpha+\beta}. \quad (1.4)$$

Pour $a = 0$, on a

$$I_{0+}^\alpha t^\beta = I^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}. \quad (1.5)$$

2. La fonction constante $f(t) = C$

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} C d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{-(t - \tau)^\alpha}{\alpha} \right) \Big|_a^t \\ &= \frac{C}{\alpha \Gamma(\alpha)} (t - a)^\alpha \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha. \end{aligned}$$

D'où,

$$I_{a+}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^{\alpha}. \quad (1.6)$$

subsection Propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de R-L

Théorème 1.38. *Si $f \in L^1[a, b]$ et $\alpha > 0$ alors $I_{a+}^{\alpha} f(t)$ existe pour presque tout $t \in [a, b]$ et on a :*

$$I_{a+}^{\alpha} f \in L^1[a, b].$$

Démonstration. Soit $f \in L^1[a, b]$; on a :

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) h(\tau) d\tau,$$

avec $-\infty \leq a < t < +\infty$

tel que :

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 < u \leq b - a \\ 0, & u \in \mathbb{R} - (0, b - a) \end{cases}$$

et

$$h(u) = \begin{cases} f(u), & a \leq u \leq b \\ 0, & u \in \mathbb{R} - [a, b] \end{cases}$$

comme $g, h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $I_{a+}^{\alpha} f \in L^1[a, b]$. □

Théorème 1.39. *Pour $f \in L^1[a, b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe suivant :*

$$I_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\beta} f)(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Démonstration. Soit $f \in L^1[a, b]$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} (I_{a+}^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (I_{a+}^{\beta} f)(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[\int_a^{\tau} (\tau - s)^{\beta-1} f(s) ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.40. *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut notamment s'écrire sous forme de produit de convolution de la fonction puissance $h_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$*

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \int_a^t h_{\alpha}(t - \tau) f(\tau) d\tau = (h_{\alpha} * f)(t).$$

Proposition 1.41. *L'opérateur I_{a+}^α est linéaire.*

Démonstration. En effet, si f et g sont deux fonctions telles que $I_{a+}^\alpha f$ et $I_{a+}^\alpha g$ existent, alors pour c_1 et c_2 deux réels arbitraires, on a

$$\begin{aligned} I_{a+}^\alpha (c_1 f + c_2 g)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (c_1 f + c_2 g)(\tau) d\tau \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \frac{c_2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \\ &= c_1 I_{a+}^\alpha f(t) + c_2 I_{a+}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.42. *Soit $f \in C([a, b])$. Alors on a*

1. $\frac{d}{dt} (I_{a+}^\alpha f)(t) = (I_{a+}^{\alpha-1} f)(t), \quad \alpha > 1.$
2. $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} (I_{a+}^\alpha f)(t) = f(t), \quad \alpha > 0.$

Preuve : Appliquons règle de dérivation de Leibniz (??) nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I_{a+}^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha - 1 + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_a^t (t - \tau)^{(\alpha-1)-1} f(\tau) d\tau = (I_{a+}^{\alpha-1} f)(t). \end{aligned}$$

2. Pour la dernière identité, comme $f \in C([a, b])$, nous avons

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

D'après la relation (1.3) on peut écrire :

$$I_{a+}^\alpha 1 = \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \longrightarrow 1.$$

quand $\alpha \longrightarrow 0^+$. Donc pour un certain $\delta > 0$, on aura

$$\begin{aligned} \left| I_{a+}^\alpha f(t) - \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} f(t) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(t) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t-\delta}^t (t - \tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau. \end{aligned} \tag{1.7}$$

D'une part, on a f est continue sur $[a, b]$ alors,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t, \tau \in [a, b] : |\tau - t| < \delta \Rightarrow |f(\tau) - f(t)| < \epsilon.$$

Ce qui entraine :

$$\int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau \leq \epsilon \int_{t-\delta}^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{\epsilon \delta^\alpha}{\alpha}. \quad (1.8)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau) - f(t)| d\tau &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} (|f(\tau)| + |f(t)|) d\tau \\ &\leq 2 \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)| \int_a^{t-\delta} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \forall t \in [a, b] \quad (1.9) \\ &= 2M \left(\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha} \right), \forall t \in [a, b], \end{aligned}$$

où $M = \sup_{\xi \in [a, t]} |f(\xi)|$.

Une combinaison de (1.7) et (1.8) et (1.9) nous donne :

$$\begin{aligned} \left| I_{a+}^\alpha f(t) - \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t) \right| &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} [\epsilon \delta^\alpha + 2M ((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [\epsilon \delta^\alpha + 2M ((t-a)^\alpha - \delta^\alpha)], \end{aligned}$$

faisons tendre α vers 0^+ , on obtient :

$$|I_{a+}^\alpha f(t) - 1f(t)| \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \forall \epsilon > 0,$$

ce qui montre que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{a+}^\alpha f(t) - f(t) = 0.$$

Les lemmes suivants fournissent quelques propriétés de I_{a+}^α . Les preuves peuvent être trouvées dans [25].

Lemme 1.43. Pour $\alpha > 0$, I_{a+}^α envoie $C[a, b]$ dans $C[a, b]$.

Lemme 1.44. Soit $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$. Alors I_{a+}^α est borné de $C_\gamma[a, b]$ dans $C_\gamma[a, b]$.

Lemme 1.45. Soit $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$. Si $\gamma \leq \alpha$, Alors I_{a+}^α est borné de $C_\gamma[a, b]$ dans $C[a, b]$.

Lemme 1.46. Soit $0 \leq \gamma < 1$ et $f \in C_\gamma[a, b]$. Alors

$$I_{a+}^\alpha f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} I_{a+}^\alpha f(x) = 0, \quad 0 \leq \gamma < \alpha.$$

Démonstration. Notez que d'après le lemme 1.45, $I_{a+}^\alpha f \in C_\gamma[a, b]$. Puisque $f \in C_\gamma[a, b]$ Alors $(x - a)^\gamma f(x)$ est continue sur $[a, b]$, il existe $M > 0$ telle que

$$|(x - a)^\gamma f(x)| < M, \quad x \in [a, b].$$

Donc

$$|I_{a+}^\alpha f(x)| < M[I_{a+}^\alpha (t - a)^{-\gamma}].$$

Par le lemme

$$|I_{a+}^\alpha f(x)| < M \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)} (x - a)^{\alpha - \gamma}.$$

Puisque $\alpha > \gamma$, le membre de droite $\rightarrow 0$ comme $x \rightarrow a^+$. $\square$

1.3 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.47. Soit $f \in L^1[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de f de borne inférieure a est définie par :

$$\begin{aligned} D_{a+}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f(\tau) d\tau, \\ &= D^n I_{a+}^{n - \alpha} f(t), \end{aligned}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ est la dérivée d'ordre entier $n = [\alpha] + 1$.

On a en particulier

1. $D_{a+}^0 f(t) = D^1 I_{a+}^1 f(t) = f(t)$ (D_{a+}^0 est l'opérateur identité).
2. Pour $\alpha = n$ où n est un entier, l'opérateur donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre n .

$$D_{a+}^n f(t) = D^{n+1} I_{a+}^{n+1-n} f(t) = D^{n+1} I_{a+}^1 f(t) = D^n f(t).$$

Lemme 1.48. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \alpha$, alors

$$D_{a+}^\alpha = D^n I_{a+}^{n - \alpha}.$$

Démonstration. L'hypothèse sur n implique que $n \geq [\alpha] + 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D^n I_{a+}^{n - \alpha} &= (D^{[\alpha] + 1} D^{n - [\alpha] - 1}) (I_{a+}^{n - [\alpha] - 1} I_{a+}^{[\alpha] + 1 - \alpha}) \\ &= D^{[\alpha] + 1} (D^{n - [\alpha] - 1} I_{a+}^{n - [\alpha] - 1}) I_{a+}^{[\alpha] + 1 - \alpha} \\ &= D^{[\alpha] + 1} I_{a+}^{[\alpha] + 1 - \alpha} = D_{a+}^\alpha, \end{aligned}$$

car $D^{n - [\alpha] - 1} I_{a+}^{n - [\alpha] - 1} = I$. $\square$

Théorème 1.49. Soit f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$D_{a+}^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 D_{a+}^\alpha f(t) + c_2 D_{a+}^\alpha g(t).$$

Lemme 1.50. Soit $0 < \alpha < 1$, on a alors

$$[D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-1}](x) = 0.$$

Lemme 1.51. Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^1(a, b)$, pour $x \in [a, b]$, on a les propriétés suivantes

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x),$$

et

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

En particulier, si $f \in C_{\gamma}[a, b]$ ou $f \in C[a, b]$, alors ces égalités restent valable.

1.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.52. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ d'une fonction $f \in L^1([a, +\infty))$ est donnée par

$${}^c D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, \quad (1.10)$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo

Notation 1.53. On note que l'opérateur D^n , $n \in \mathbb{N}$ est la différentiabilité d'ordre entier n i.e :

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Lemme 1.54. Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que ${}^c D^{\alpha} f(t)$ existe, alors :

$${}^c D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t). \quad (1.11)$$

Lemme 1.55. Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction telle que ${}^c D^{\alpha} f(t)$ existe, on alors

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow n} {}^c D^{\alpha} f(t) &= f^{(\pi)}(t), \text{ et} \\ \lim_{a \rightarrow n-1} {}^c D^{\alpha} f(t) &= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise l'intégration par partie on trouve

$$\begin{aligned} {}^c D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-f^{(n)}(x) \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_{x=0}^t - \int_0^t -f^{(n+1)}(x) \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha} dx \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left(f^{(n)}(0) t^{n-\alpha} + \int_0^t f^{(n+1)}(x) (t-x)^{n-\alpha} dx \right). \end{aligned}$$

En prenant la limite pour $\alpha \rightarrow n$ et $\alpha \rightarrow n - 1$, respectivement, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(0) + f^{(n)}(x) \Big|_{x=0}^t = f^{(n)}(t),$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}^c D^\alpha f(t) &= \left(f^{(n)}(0)t + f^{(n)}(x)(t-x) \right) \Big|_{x=0}^t - \int_0^t f^{(n)}(x) dx \\ &= f^{(n-1)}(x) \Big|_{x=0}^t \\ &= f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.56. *Pour la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on a*

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} D^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t) \text{ et} \\ \lim_{\alpha \rightarrow n-1} D^\alpha f(t) &= f^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Mesures de Non-compacité

2.1 Mesures de Non-compacité dans les Espaces Métriques

Définition 2.1. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ un sous-ensemble borné. On introduit les ensembles suivants :

1. $K(A) = \{\delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \exists (A_i)_{i=1}^N \subset X \text{ tels que } A \subset \bigcup_{i=1}^N A_i \text{ avec } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \forall 1 \leq i \leq N\}.$
2. $H(A) = \{r > 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \exists \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset X \text{ tels que } A \subset \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i)\}.$

Remarque 2.2. $2H(A) \subset K(A) \subset H(A)$. En effet :

(i) Soit $\delta \in K(A)$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists (A_i)_{i=1}^N \subset X \text{ tels que } A \subset \bigcup_{i=1}^N A_i \text{ avec } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \forall 1 \leq i \leq N.$$

Puisque chaque A_i est borné, on a

$$A_i \subset B(x_i, \delta) \text{ pour un } x_i \in \overline{A_i}, \forall 1 \leq i \leq N.$$

D'où

$$\bigcup_{i=1}^N A_i \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta) \implies A \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta).$$

Ainsi $\delta \in H(A)$ et $K(A) \subset H(A)$.

(ii) Soit $r \in H(A)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset X$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i).$$

Comme $\text{diam}(B_r(x_i)) \leq 2r$, on a

$$2r \in K(A) \implies 2H(A) \subset K(A).$$

Définition 2.3. On dit que A a un ε -réseau ($\varepsilon > 0$) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i) \text{ avec } \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset X.$$

Remarque 2.4. (a) A est totalement borné si et seulement si A a un ε -réseau pour tout $\varepsilon > 0$.

(b) $H(A) = \{r > 0 : A \text{ a un } r\text{-réseau}\}.$

Définition 2.5. 1. La mesure de non-compacité de Kuratowski est définie par

$$\alpha(A) := \inf(K(A)).$$

2. La mesure de non-compacité de Hausdorff est définie par

$$\chi(A) := \inf(H(A)).$$

Proposition 2.6. $\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A).$

Démonstration. D'après la Remarque 2.2, on a

$$2H(A) \subset K(A) \subset H(A).$$

Alors

$$\inf(H(A)) \leq \inf(K(A)) \leq 2\inf(H(A)),$$

d'où

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A).$$

Comme conséquence, $\alpha(A) = 0 \iff \chi(A) = 0.$ □

Proposition 2.7. $\chi(A) = 0$ si et seulement si A est totalement borné.

Démonstration.

$$\chi(A) = 0 \iff \inf\{r > 0 : A \text{ a un } r\text{-réseau}\} = 0 \iff A \text{ a un } r\text{-réseau, } \forall r > 0 \iff A \text{ totalement borné}$$

□

Définition 2.8. A est relativement compact si $\overline{A}$ est compact.

Proposition 2.9. $0 \leq \chi(A) \leq \alpha(A) \leq \text{diam}(A).$

Démonstration. On a $A \subset A$ avec $N = 1$ et $\delta = \text{diam}(A)$. Alors

$$\text{diam}(A) \in K(A) \implies \inf(K(A)) \leq \text{diam}(A),$$

d'où

$$\alpha(A) \leq \text{diam}(A) \implies \chi(A) \leq \alpha(A) \leq \text{diam}(A).$$

□

Proposition 2.10. Soient A et B des sous-ensembles bornés d'un espace métrique X tels que $A \subset B$. Alors :

1. $\alpha(A) \leq \alpha(B)$,
2. $\chi(A) \leq \chi(B)$.

Démonstration. 1. Soit $\delta \in K(B)$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \exists (A_i)_{i=1}^N \subset X \text{ tels que } B \subset \bigcup_{i=1}^N A_i \text{ avec } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \forall i.$$

Puisque $A \subset B \subset \bigcup_{i=1}^N A_i$, on a $\delta \in K(A)$. Ainsi $K(B) \subset K(A)$, d'où

$$\inf K(A) \leq \inf K(B) \implies \alpha(A) \leq \alpha(B).$$

2. On montre $\chi(A) \leq \chi(B)$ de manière similaire à la partie 1. □

Proposition 2.11. $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$ et $\chi(A) = \chi(\overline{A})$.

Démonstration. Comme $A \subset \overline{A}$, la Proposition 2.10 donne $\alpha(A) \leq \alpha(\overline{A})$. Soit $\delta \in K(A)$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{i=1}^N \subset X$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N A_i \text{ avec } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \forall i.$$

D'où

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^N \overline{A_i} \text{ avec } \text{diam}(\overline{A_i}) = \text{diam}(A_i) \leq \delta, \forall i.$$

Ainsi $\delta \in K(\overline{A})$, donc $K(A) \subset K(\overline{A})$ et $\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(A)$. On conclut que $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.

Montrons $\chi(A) = \chi(\overline{A})$. On a $A \subset \overline{A}$, donc $\chi(A) \leq \chi(\overline{A})$. Soit $r \in H(A)$. Alors

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i) \text{ pour des } \{x_1, \dots, x_N\} \subset X.$$

Alors

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^N \overline{B_r(x_i)} \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r+\varepsilon}(x_i), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ainsi $r + \varepsilon \in H(\overline{A})$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où

$$\chi(\overline{A}) \leq r + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \chi(\overline{A}) \leq r.$$

Par conséquent, $\chi(\overline{A}) \leq \chi(A)$. On conclut que $\chi(A) = \chi(\overline{A})$. □

Corollaire 2.12. Soit (X, d) un espace métrique complet et $A \subset X$ borné. Alors

$$\alpha(A) = 0 \iff \chi(A) = 0 \iff A \text{ est relativement compact.}$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si $\alpha(A) = \alpha(\overline{A}) = 0$, alors $\overline{A}$ est totalement borné (Proposition 2.7). Comme $\overline{A}$ est fermé dans un espace complet, il est compact.
 ($\Leftarrow$) Si A est relativement compact, $\overline{A}$ est compact donc totalement borné. Alors $\chi(\overline{A}) = 0 \implies \chi(A) = 0$. $\square$

Remarque 2.13. Soient $A, B \subset X$ bornés avec $A \subset B$.

1. Si B est relativement compact, alors A est relativement compact.
2. Si A est relativement compact, alors

$$0 = \alpha(A) \leq \alpha(B).$$

Pour cette raison, α et χ sont appelées mesures de non-compactité.

Proposition 2.14. Soient $A, B \subset (X, d)$ bornés. Alors :

1. $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$,
2. $\chi(A \cup B) = \max(\chi(A), \chi(B))$,
3. $\alpha(A \cap B) \leq \min(\alpha(A), \alpha(B))$,
4. $\chi(A \cap B) \leq \min(\chi(A), \chi(B))$.

Démonstration. 1. Comme $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on a

$$\alpha(A) \leq \alpha(A \cup B), \quad \alpha(B) \leq \alpha(A \cup B) \implies \max(\alpha(A), \alpha(B)) \leq \alpha(A \cup B). \quad (2.2)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_\varepsilon, N, (A_i)_{i=1}^N$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N A_i, \quad \text{diam}(A_i) \leq \delta_\varepsilon < \alpha(A) + \varepsilon \leq \max(\alpha(A), \alpha(B)) + \varepsilon.$$

De même, il existe $\delta'_\varepsilon, M, (B_j)_{j=1}^M$ tels que

$$B \subset \bigcup_{j=1}^M B_j, \quad \text{diam}(B_j) \leq \delta'_\varepsilon < \alpha(B) + \varepsilon \leq \max(\alpha(A), \alpha(B)) + \varepsilon.$$

Alors

$$A \cup B \subset \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^M B_j \right) = \bigcup_{k=1}^{N+M} C_k,$$

où $C_k = A_k$ pour $1 \leq k \leq N$ et $C_k = B_{k-N}$ pour $N+1 \leq k \leq N+M$, et

$$\text{diam}(C_k) < \max(\alpha(A), \alpha(B)) + \varepsilon, \quad \forall k.$$

Ainsi $\max(\alpha(A), \alpha(B)) + \varepsilon \in K(A \cup B)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où

$$\alpha(A \cup B) \leq \max(\alpha(A), \alpha(B)) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

De (2.2) et (2.3), on déduit $\alpha(A \cup B) = \max(\alpha(A), \alpha(B))$.

2. Clairement,

$$\max(\chi(A), \chi(B)) \leq \chi(A \cup B). \quad (2.4)$$

Soit $d = \max(\chi(A), \chi(B))$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon > 0$, $\{x_1, \dots, x_N\} \subset X$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_\varepsilon}(x_i), \quad r_\varepsilon < \chi(A) + \varepsilon \leq d + \varepsilon.$$

De même, il existe $r'_\varepsilon > 0$, $\{y_1, \dots, y_M\} \subset X$ tels que

$$B \subset \bigcup_{j=1}^M B_{r'_\varepsilon}(y_j), \quad r'_\varepsilon < \chi(B) + \varepsilon \leq d + \varepsilon.$$

Alors $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{N+M} B_{d+\varepsilon}(z_k)$ où $z_k = x_k$ pour $1 \leq k \leq N$ et $z_k = y_{k-N}$ pour $k > N$. Donc

$$\chi(A \cup B) \leq d + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \chi(A \cup B) \leq d. \quad (2.5)$$

De (2.4) et (2.5), on conclut $\chi(A \cup B) = \max(\chi(A), \chi(B))$.

3. Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, on a

$$\alpha(A \cap B) \leq \alpha(A), \quad \alpha(A \cap B) \leq \alpha(B) \implies \alpha(A \cap B) \leq \min(\alpha(A), \alpha(B)).$$

4. Similairement,

$$\chi(A \cap B) \leq \chi(A), \quad \chi(A \cap B) \leq \chi(B) \implies \chi(A \cap B) \leq \min(\chi(A), \chi(B)).$$

□

Lemme 2.15. Soit $\mathcal{N}_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$. Alors

$$\text{diam}(\mathcal{N}_r(A)) \leq \text{diam}(A) + 2r.$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{N}_r(A)$. Alors $d(x, A) < r$ et $d(y, A) < r$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x'_\varepsilon, y'_\varepsilon \in A$ tels que

$$d(x, x'_\varepsilon) < r + \varepsilon, \quad d(y, y'_\varepsilon) < r + \varepsilon.$$

Alors

$$d(x, y) \leq d(x, x'_\varepsilon) + d(x'_\varepsilon, y'_\varepsilon) + d(y'_\varepsilon, y) < (r + \varepsilon) + \text{diam}(A) + (r + \varepsilon) = \text{diam}(A) + 2r + 2\varepsilon.$$

Donc

$$\text{diam}(\mathcal{N}_r(A)) = \sup_{x, y \in \mathcal{N}_r(A)} d(x, y) \leq \text{diam}(A) + 2r + 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'où le résultat. □

Lemme 2.16. Soit $A = B_{r_0}(x_0)$. Alors

$$\mathcal{N}_r(A) \subset B_{r_0+r}(x_0).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{N}_r(A)$. Alors $d(x, A) < r$. Pour tout $y \in A$, on a

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) \leq d(x, y) + r_0.$$

Donc

$$d(x, x_0) \leq \inf_{y \in A} d(x, y) + r_0 = d(x, A) + r_0 < r + r_0,$$

d'où $x \in B_{r_0+r}(x_0)$. □

Lemme 2.17. Si $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, alors

$$\mathcal{N}_r(A) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{N}_r(A_i).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{N}_r(A)$. Alors $d(x, A) < r$. Comme $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, on a

$$d\left(x, \bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq d(x, A) < r.$$

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $d(x, A_{i_0}) < r$ (sinon, si $d(x, A_i) \geq r$ pour tout i , on aurait une contradiction), d'où $x \in \mathcal{N}_r(A_{i_0})$. □

Proposition 2.18. 1. $\chi(\mathcal{N}_r(A)) \leq \chi(A) + r$,

2. $\alpha(\mathcal{N}_r(A)) \leq \alpha(A) + 2r$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r_\varepsilon > 0$ et $\{x_1, \dots, x_N\} \subset X$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_\varepsilon}(x_i), \quad \chi(A) \leq r_\varepsilon < \chi(A) + \varepsilon.$$

Par le Lemme 2.17,

$$\mathcal{N}_r(A) \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{N}_r(B_{r_\varepsilon}(x_i)).$$

Par le Lemme 2.16, $\mathcal{N}_r(B_{r_\varepsilon}(x_i)) \subset B_{r_\varepsilon+r}(x_i)$. Donc

$$\mathcal{N}_r(A) \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_\varepsilon+r}(x_i),$$

d'où $r_\varepsilon + r \in H(\mathcal{N}_r(A))$ et

$$\chi(\mathcal{N}_r(A)) \leq r_\varepsilon + r < \chi(A) + \varepsilon + r, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ainsi $\chi(\mathcal{N}_r(A)) \leq \chi(A) + r$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{i=1}^N \subset X$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N A_i, \quad \text{diam}(A_i) \leq \delta_\varepsilon < \alpha(A) + \varepsilon.$$

Par le Lemme [2.17](#),

$$\mathcal{N}_r(A) \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{N}_r(A_i).$$

Par le Lemme [2.15](#),

$$\text{diam}(\mathcal{N}_r(A_i)) \leq \text{diam}(A_i) + 2r \leq \delta_\varepsilon + 2r < \alpha(A) + \varepsilon + 2r, \quad \forall i, \varepsilon > 0.$$

Ainsi $\alpha(A) + 2r + \varepsilon \in K(\mathcal{N}_r(A))$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où

$$\alpha(\mathcal{N}_r(A)) \leq \alpha(A) + 2r + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.19. (*Théorème Généralisé de l'Intersection de Cantor*) Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de X telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(F_n) = 0.$$

Alors $F_\infty := \bigcap_n F_n$ est non vide et compact.

Démonstration. Montrons que $F_\infty \neq \emptyset$. Choisissons $x_n \in F_n$ pour tout n . Posons $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Comme $A_n \subset F_n$, on a

$$\alpha(A_1) \leq \alpha(A_n) \leq \alpha(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\alpha(A_1) = 0$, ce qui implique que A_1 est relativement compact. La suite $(x_n)_n$ admet donc un point d'accumulation x . Comme

$$x \in \bigcap_n \overline{A_n} \subset \bigcap_n \overline{F_n} = \bigcap_n F_n = F_\infty \quad (\text{car les } F_n \text{ sont fermés}),$$

on a $x \in F_\infty$.

Montrons que F_∞ est compact. Comme $F_\infty \subset F_n$ pour tout n , on a

$$0 \leq \alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $\alpha(F_\infty) = 0$, i.e., F_∞ est relativement compact. Comme F_∞ est fermé (intersection de fermés) dans un espace complet, il est compact. □

2.2 Mesures de Non-compacité dans les Espaces Normés

Lemme 2.20. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé, $A, B \subset X$ bornés, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- (a) $\text{diam}(A + B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$,
- (b) $\text{diam}(\lambda A) = |\lambda| \text{diam}(A)$.

Démonstration. (a) Pour $x = a_1 + b_1, y = a_2 + b_2 \in A + B$:

$$\|x - y\| \leq \|a_1 - a_2\| + \|b_1 - b_2\| \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B).$$

(b) Pour $x = \lambda a_1, y = \lambda a_2 \in \lambda A$:

$$\|x - y\| = |\lambda| \|a_1 - a_2\| \leq |\lambda| \text{diam}(A).$$

Réciproquement, pour $a_1, a_2 \in A$:

$$\|a_1 - a_2\| = \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda a_1 - \lambda a_2\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \text{diam}(\lambda A).$$

D'où l'égalité. □

Proposition 2.21. Soit $\gamma = \alpha$ ou χ une mesure de non-compactité dans un espace normé $(X, \|\cdot\|)$. Pour tous $A, C \subset X$ bornés et $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

- (a) $\gamma(A + C) \leq \gamma(A) + \gamma(C)$ (sous-additivité),
- (b) $\gamma(A + \{x\}) = \gamma(A)$ (invariance par translation),
- (c) $\gamma(\lambda A) = |\lambda| \gamma(A)$ (homogénéité).

Démonstration. Preuve pour $\gamma = \alpha$:

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des recouvrements $(A_i)_{i=1}^N$ de A et $(C_j)_{j=1}^M$ de C tels que

$$\text{diam}(A_i) < \alpha(A) + \varepsilon/2, \quad \text{diam}(C_j) < \alpha(C) + \varepsilon/2.$$

Alors $(A_i + C_j)$ recouvre $A + C$ et

$$\text{diam}(A_i + C_j) \leq \text{diam}(A_i) + \text{diam}(C_j) < \alpha(A) + \alpha(C) + \varepsilon.$$

Donc $\alpha(A + C) < \alpha(A) + \alpha(C) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(b) $\alpha(A + \{x\}) \leq \alpha(A) + \alpha(\{x\}) = \alpha(A)$ (car $\alpha(\{x\}) = 0$). Réciproquement,

$$A = (A + \{x\}) + \{-x\} \implies \alpha(A) \leq \alpha(A + \{x\}) + \alpha(\{-x\}) = \alpha(A + \{x\}).$$

(c) Montrons $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un recouvrement (A_i) de A avec

$$\text{diam}(A_i) < \alpha(A) + \varepsilon.$$

Alors (λA_i) recouvre λA et

$$\text{diam}(\lambda A_i) = |\lambda| \text{diam}(A_i) < |\lambda|(\alpha(A) + \varepsilon).$$

Donc $\alpha(\lambda A) \leq |\lambda| \alpha(A)$. Réciproquement, si (λB_j) recouvre λA avec $\text{diam}(\lambda B_j) < \alpha(\lambda A) + \varepsilon$, alors

$$\text{diam}(B_j) = \frac{1}{|\lambda|} \text{diam}(\lambda B_j) < \frac{1}{|\lambda|} (\alpha(\lambda A) + \varepsilon),$$

d'où $\alpha(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} \alpha(\lambda A)$.

Preuve pour $\gamma = \chi$: Similaire, en utilisant

$$\bigcup_{i=1}^N \lambda B_r(a_i) = \bigcup_{i=1}^N B_{|\lambda|r}(\lambda a_i).$$

□

Définition 2.22. *Un ensemble A est convexe si*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A, \quad \forall x, y \in A, \lambda \in [0, 1].$$

Définition 2.23. *L'enveloppe convexe de A , notée $\text{conv}(A)$, est le plus petit ensemble convexe contenant A .*

Proposition 2.24. *(Invariance sous l'enveloppe convexe) Soit $A \subset X$ un espace normé et $\gamma = \alpha$ ou χ . Alors*

$$\gamma(A) = \gamma(\text{conv}(A)).$$

Démonstration. $A \subset \text{conv}(A) \implies \gamma(A) \leq \gamma(\text{conv}(A))$. L'égalité vient du fait que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\text{conv}(A))$ et de propriétés similaires pour χ . Voir références [1, 2, 3]. □

Lemme 2.25. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $x_0 \in X$. Alors*

$$B(x_0, R) = \{x_0\} + R \cdot B(0, 1).$$

Démonstration. $y \in B(x_0, R) \iff \|y - x_0\| < R$. Soit $u = \frac{y - x_0}{R}$. Alors $u \in B(0, 1)$ et $y = x_0 + Ru$. □

Lemme 2.26. *(Théorème de Riesz) Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

Proposition 2.27. *Soit $B = B(0, 1)$ la boule unité dans un espace normé $(X, \|\cdot\|)$. Alors*

$$\chi(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim(X) < \infty, \\ 1 & \text{si } \dim(X) = \infty. \end{cases}$$

Démonstration. Si $\dim(X) < \infty$, alors $B(0, 1)$ est compacte (Théorème de Riesz), donc $\chi(B) = 0$. Si $\dim(X) = \infty$, alors $\chi(B) \leq 1$ car $B \subset B(0, 1)$. Supposons par l'absurde $\chi(B) < 1$. Soit $\varepsilon \in (0, 1 - \chi(B))$. Alors

$$B \subset \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i) \quad \text{avec} \quad r < \chi(B) + \varepsilon < 1.$$

Mais alors

$$\chi(B) \leq \max_i \chi(B_r(x_i)) = \max_i \chi(\{x_i\} + rB(0, 1)) = \chi(rB(0, 1)) = r\chi(B) < r < 1,$$

ce qui contredit $\chi(B) \geq 1$ en dimension infinie (car si $\chi(B) = c < 1$, alors $r < c + \varepsilon < 1$ et $r\chi(B) < r < 1$ impliquerait $\chi(B) < 1$, impossible). Donc $\chi(B) = 1$. □

Corollaire 2.28. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $B = B(x_0, r) \subset X$. Alors

$$\chi(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim(X) < \infty, \\ r & \text{si } \dim(X) = \infty. \end{cases}$$

Démonstration. Par le Lemme 2.25, $B(x_0, r) = \{x_0\} + rB(0, 1)$. Donc

$$\chi(B(x_0, r)) = \chi(rB(0, 1)) = r\chi(B(0, 1)).$$

Le résultat découle de la Proposition 2.27. $\square$

Lemme 2.29. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $S = \partial B(0, 1)$ la sphère unité. Alors

$$\text{conv}(S) = \overline{B}(0, 1).$$

Démonstration. Clairement, $S \subset \overline{B}(0, 1)$ et $\overline{B}(0, 1)$ est convexe, donc $\text{conv}(S) \subset \overline{B}(0, 1)$. Réciproquement, pour tout $x \in \overline{B}(0, 1)$, soit $\lambda = \frac{1+\|x\|}{2} \in (0, 1]$. Alors

$$x = \lambda \left(-\frac{x}{\|x\|} \right) + (1 - \lambda) \left(\frac{x}{\|x\|} \right),$$

où $\pm \frac{x}{\|x\|} \in S$. Donc $x \in \text{conv}(S)$. $\square$

Remarque 2.30. Par le Lemme 2.29 et la Proposition 2.24,

$$\gamma(S) = \gamma(\text{conv}(S)) = \gamma(\overline{B}(0, 1)) = \gamma(B(0, 1)) \quad \text{pour } \gamma = \alpha, \chi.$$

Lemme 2.31. (Théorème de Ljusternik–Schnirelmann–Borsuk) Soit S la sphère unité d'un espace normé X de dimension n . Pour tout recouvrement de S par n ensembles fermés, l'un d'eux contient deux points antipodaux.

Proposition 2.32. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $B = B(0, 1)$. Alors

$$\alpha(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim(X) < \infty, \\ 2 & \text{si } \dim(X) = \infty. \end{cases}$$

Démonstration. Si $\dim(X) < \infty$, alors B est compacte, donc $\alpha(B) = 0$. Si $\dim(X) = \infty$, alors par les Propositions 2.6 et 2.27,

$$\chi(B) \leq \alpha(B) \leq 2\chi(B) \implies 1 \leq \alpha(B) \leq 2.$$

Supposons par l'absurde $\alpha(S) = \alpha(B) < 2$ (par la Remarque 2.30). Soit $\varepsilon \in (0, 2 - \alpha(S))$. Alors il existe un recouvrement fermé $(A_i)_{i=1}^N$ de S avec

$$\text{diam}(A_i) < \alpha(S) + \varepsilon < 2, \quad \forall i.$$

Soit $E \subset X$ un sous-espace de dimension finie N . Alors $S \cap E$ est recouvert par $(A_i \cap E)_{i=1}^N$ avec $\text{diam}(A_i \cap E) < 2$, ce qui contredit le Théorème 2.31 (car aucun $A_i \cap E$ ne peut contenir deux points antipodaux si son diamètre est < 2). Donc $\alpha(B) = 2$. $\square$

2.3 Quelques résultats de la théorie du point fixe

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante, s'applique aux espaces complets et qui possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques. Voir [?].

Théorème de l'application contractante

Soient (M, d) un espace métrique complet et $T : M \rightarrow M$ une application, On dit que T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que, pour tout x, y de M , on a

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y). \quad (2.1)$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Théorème 2.33. Théorème du point fixe de Banach (1922)

Soit (M, d) un espace métrique complet et soit $T : M \rightarrow M$ une application contractante avec la constante de contraction k , alors T a un unique point fixe $x \in M$. De plus,

$$\text{si } x_0 \in M \text{ et } x_n = T(x_{n-1}), \text{ on a} \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ et } d(x_n, x) \leq k^n(1 - k)^{-1}d(x_1, x_0) \quad n \geq 1, \quad (2.3)$$

x étant le point fixe de T .

Remarque 2.34. Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contractante) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a un seul point fixe. En effet, soit x l'unique point fixe de T^p on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$ et le résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

Remarque 2.35. Il se peut que T ne soit pas une contraction sur tout l'espace M mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant : Soit (M, d) un espace métrique complet et $T : B \rightarrow M$ telle que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in B \text{ et } k < 1, \quad (2.4)$$

où

$$B = \{x \in M, d(x, z) < \varepsilon\} \quad z \in M \text{ et } \varepsilon > 0. \quad (2.5)$$

Si $d(z, T(z)) < \varepsilon(1 - k)$, alors T possède un unique point fixe $x \in B$.

Théorème 2.36 (Darbo).

Soient Ω un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E , $T : \Omega \rightarrow \Omega$ un opérateur continue et μ la mesure de non-compacité définie dans E . Supposons qu'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que :

$$\mu(TX) \leq k\mu(X)$$

pour tout sous ensemble non vide X de Ω . Alors T admet au moins un point fixe dans Ω .

Chapitre 3

Problème aux limites d'ordre fractionnaire sur un intervalle non borné dans un espace de Banach

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au résultat d'existence des solutions pour le problème aux limites (PVP) suivant

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), & t \in J = [0, \infty), \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) = 0, & D_{0+}^{\alpha-1} u(\infty) = u_{\infty} \end{cases} \quad (3.1)$$

ou $D_{0+}^{\alpha-1}$ sont des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, $f \in C(J \times E, E)$, $u_{\infty} \in E$, D_{0+}^{α} et $D_{0+}^{\alpha-1} u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{0+}^{\alpha-1} u(t)$. Nous établissons l'existence de solutions sur l'intervalle $[0, \infty)$ pour BVP (3.1) dans un spécial espace de Banach. La technique repose sur les propriétés de la mesure de non-compacité de Kuratowski et du théorème du point fixe de Darbo.

3.2 Préliminaire

Nous introduisons tout d'abord quelques définitions et lemmes concernant ce chapitre. Soit $I \in J$ un intervalle compact et notons que $C(I, E)$ est l'espace de Banach des fonctions continues $y : I \rightarrow E$ avec sa norme $\|y\|_{\infty} = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$. Considerons l'espace des fonctions suivant

$$X = \left\{ u(t) \in C(J, E) : \sup_{t \in J} \frac{\|u(t)\|}{1 + t^{\alpha-1}} < \infty \right\},$$

associa à la norme

$$\|u\|_X = \sup_{t \in J} \frac{\|u(t)\|}{1 + t^{\alpha-1}}.$$

Il est facile de vérifier que X est un espace de Banach. On note respectivement que α , α_C et α_X la mesure de non-compacité de Kuratowski dans les espaces E ,

$C(I, E)$ et X , respectivement. Quant à la définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski, nous référons aux Réfs [12, 13]. Les propriétés suivantes de la mesure de non-compacité et la théorème du point fixe de Darbo sont nécessaires pour suite de travail.

Lemme 3.1. *Soit $h \in C([0, \infty)) \cap L^1([0, \infty))$, on a alors*

$$I_{a+}^\delta D_{a+}^\delta x(t) = x(t) + c_1(t-a)^{\delta-1} + c_2(t-a)^{\delta-2} + \dots + c_n(t-a)^{\delta-n},$$

pour certains $c_j \in E$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Lemme 3.2. *Soit h une fonction de $L^1([0, \infty))$, on a les relations suivantes*

$$\begin{aligned} D_{a+}^\delta I_{a+}^\delta f(t) &= f(t), \quad \delta > 0 \quad \text{et} \\ D_{a+}^\delta I_{a+}^\gamma f(t) &= I_{a+}^{\gamma-\delta} f(t), \quad 0 < \delta < \gamma, \quad t \in]a, \infty). \end{aligned}$$

3.3 Résultat d'existence

Afin d'utiliser le point fixe de Darbo pour établir le résultat d'existence pour le problème (3.1), on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H₁) Il existe des fonctions positives $a(\cdot), b(\cdot) \in C(J)$ telles que

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq a(t)\|x\| + b(t), \quad t \in J, \quad x \in E, \quad \text{avec} \\ \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt &< \Gamma(\alpha), \quad \int_0^\infty b(t)dt < \infty. \end{aligned}$$

(H₂) Pour tout $r > 0$ et tout intervalle compact $I \subset J$, $f(t, x)$ est uniformément continue sur $I \times B_E(\theta, r)$, où θ est l'élément nul de E et $B_E(\theta, r) = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$.

(H₃) Il existe une fonction positive $l(\cdot) \in L^1(J)$ tel que

$$\alpha(f(t, B)) \leq l(t)\alpha(B), \quad t \in J,$$

où B est tout sous-ensemble borné de E et

$$\int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})l(t)dt < \Gamma(\alpha).$$

Remarque 3.3. *On peut déduire de la condition (H1) que :*

$$\int_0^\infty \|f(t, u(t))\|dt \leq \|u\|_x \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt + \int_0^\infty b(t)dt \leq \infty, \quad (3.2)$$

Lemme 3.4. *Supposons que la condition (H₁) soit vérifiée. Alors le problème (3.1) est équivalent à l'équation intégrale*

$$u(t) = \frac{u_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}] f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty t^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds. \quad (3.3)$$

Démonstration. D'après Lemmes 3.1, 3.2 et en utilisant une méthode similaire comme la preuve du Lemme dans ['], on démontre facilement le lemme 3.4. $\square$

Le lemme précédent 3.4 indique que les solutions du problème (3.1) coïncide avec les points fixe de l'opérateur $T : X \rightarrow X$ défini comme suit

$$Tu(t) = \frac{u_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}] f(s, u(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty t^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds. \quad (3.4)$$

Les lemmes suivants présentent quelques propriétés de l'opérateur T qui sont très utiles à la preuve de notre résultat.

Lemme 3.5. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont valides. Alors l'opérateur $T : X \rightarrow X$ est borné et continu.*

Démonstration. Soit $u \in X$, d'après (H_1) , (3.3) et (3.2), il est facile de déduire que $Tu \in C(J, E)$. De plus, (H_1) garantit que

$$\begin{aligned} \frac{\|Tu(t)\|}{1+t^{\alpha-1}} &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \|f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \|f(s, u(s))\| ds, \\ &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \|f(s, u(t))\| dt, \\ &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\|u\| \times \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1}) a(t) dt + \int_0^\infty b(t) dt] < \infty. \end{aligned}$$

Donc, $T : X \rightarrow X$ est borné. Prouvons ensuite que T est continue. Soient $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ et $u \in X$ tels que $u_n \rightarrow u$ quant $n \rightarrow \infty$. Alors, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ est bornée dans X , c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|u_n\|_X \leq M$ pour $n \geq 1$. On a aussi $\|u\|_X \leq M$. Selon les hypothèses (H_1) et (H_2) , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L > 0$ tel que

$$\int_L^\infty (1+t^{\alpha-1}) a(t) dt < \frac{\Gamma(\alpha)}{6M} \varepsilon, \quad \int_L^\infty b(t) dt < \frac{\Gamma(\alpha)}{6} \varepsilon, \quad (3.5)$$

et qu'il existe $N > 0$ tel que pour $n > N$ et $t \in [0, L]$,

$$\|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| < \frac{\Gamma(\alpha)}{3L} \varepsilon. \quad (3.6)$$

Donc, pour $t \in [0, L]$ et $n > N$, on peut déduire de (3.4) – (3.6) que

$$\begin{aligned}
\frac{\|Tu_n(t) - Tu(t)\|}{1 + t^{\alpha-1}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^L \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \\
&+ \int_L^\infty \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \\
&+ \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_L^\infty (1 + t^{\alpha-1}) a(t) dt \\
&+ \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_L^\infty b(t) dt < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si $t > L$ et $n > N$, d’après (3.4) – (3.6) on trouve que

$$\begin{aligned}
\frac{\|Tu_n(t) - Tu(t)\|}{1 + t^{\alpha-1}} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^L \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \right. \\
&+ \left. \int_L^t \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \right] \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^L \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \right. \\
&+ \left. \int_L^\infty \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \right], \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^L \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| dt \\
&+ \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_L^\infty (1 + t^{\alpha-1}) a(t) dt \\
&+ \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_L^\infty b(t) dt < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On conclut que $\|Tu_n - Tu\|_X \leq \varepsilon$ lorsque $n > N$. Donc, T est continue. $\square$

Lemme 3.6. *Supposons que (H_1) est satisfaite, soit B un sous-ensemble borné de X . Alors*

- (a) $\{\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\}$ est équicontinue sur tout intervalle compact I de J .
- (b) Pour $\epsilon > 0$, il existe une constante $N > 0$ telle que

$$\left\| \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right\| < \epsilon, \quad \text{pour tout } t_1, t_2 \geq N \text{ et } u \in B.$$

Démonstration.

On réécrit l'opérateur $T : X \rightarrow X$ de façon équivalente suivante

$$Tu(t) = \frac{u_\infty - \int_0^\infty f(t, u(t))dt}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s))ds.$$

A partir de la condition (H_1) et de la bornitude de B , il existe $M > 0$ tel que

$$\int_0^\infty \|f(t, u(t))\| dt \leq M, \quad \text{pour tout } u \in B. \quad (3.7)$$

Premièrement, montrons l'axiome **(a)**, soient $R > 0$ telle que $\|u(t)\|_X \leq R$ pour tout $u \in B$ et $[a, b] \subset J$ un intervalle compact et $t_1, t_2 \in [a, b]$ avec $t_1 < t_2$. Ensuite, par 3.7 et la monotonie de $\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}$ en t pour $s < t$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{\|u_\infty - \int_0^\infty f(t, u(t))dt\|}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_2} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f(s, u(s))ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f(s, u(s))ds \right\| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f(s, u(s))ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} f(s, u(s))ds \right\|, \\ &\leq \frac{\|u_\infty\| + M}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left| \frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \frac{\|u_\infty\| + M}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| + \frac{R}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (1+t^{\alpha-1})a(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} b(t)dt + \frac{R}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right] (1+s^{\alpha-1})a(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right] b(s)ds, \\ &\leq \frac{\|u_\infty\| + M}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} \right| \\ &\quad + \frac{R}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (1+t^{\alpha-1})a(t)dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} b(t)dt \end{aligned}$$

$$+ \frac{R(A_1 + A_1 b^{\alpha-1}) + A_2}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[\frac{t_2^\alpha}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^\alpha}{1 + t_1^{\alpha-1}} - \frac{(t_2 - t_1)^\alpha}{1 + b^{\alpha-1}} \right],$$

où $A_1 = \max_{t \in [a, b]} a(t)$, $A_2 = \max_{t \in [a, b]} b(t)$, ceci assure que $\{\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\}$ est équicontinue sur $[a, b]$. Ensuite, nous vérifions l'assertion **(b)**. Notons que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Tu(t_2)}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_1)}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{\|u_\infty - \int_0^\infty f(t, u(t)) dt\|}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{t_2^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{t_1^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds \right\|. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que

$$\left\| \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds \right\| < \epsilon.$$

La relation (3.7) implique qu'il existe $N_1 > 0$ tel que,

$$\int_{N_1}^\infty \|f(t, u(t))\| dt \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{uniformément par rapport à } u \in B. \quad (3.8)$$

D'autre part, puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t - N_1)^{\alpha-1}}{1 + t^{\alpha-1}} = 1$, il existe $N > N_1$ tel que pour tout $t_1, t_2 \geq N$ et $s \in [0, N_1]$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} - \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} \right| &\leq \left(1 - \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right) + \left(1 - \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} \right), \\ &\leq \left(1 - \frac{(t_1 - N_1)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right) + \left(1 - \frac{(t_2 - N_1)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} \right) < \frac{\varepsilon}{3M}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En prenant maintenant $t_1, t_2 \geq N$, par (3.7) – (3.9) on arrive à

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds - \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{N_1} \left| \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} - \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} \right| \|f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \int_{N_1}^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_1^{\alpha-1}} \|f(s, u(s))\| ds + \int_{N_1}^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha-1}}{1 + t_2^{\alpha-1}} \|f(s, u(s))\| ds \\ &< \frac{\varepsilon}{3M} \int_0^\infty \|f(t, u(t))\| dt + 2 \int_{N_1}^\infty \|f(t, u(t))\| dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.7. *Supposons que (H_1) est vérifiée, soit B un sous-ensemble borné de X . Alors $\alpha_X(TB) = \sup_{t \in J} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})$.*

Démonstration. Premièrement, montrons que $\alpha_X(TB) \leq \sup_{t \in J} \alpha(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}})$. Par le lemme (3.6), on a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour $t_1, t_2 > N$,

$$\left\| \frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}} - \frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}} \right\| < \varepsilon \quad \text{uniformément par rapport à } u \in B. \quad (3.10)$$

Notons que $TB|_{[0,N]}$ est la restriction de TB sur $[0, N]$. Les lemmes (??) et (3.6) assurent que

$$\alpha_X(TB|_{[0,N]}) = \max_{t \in [0,N]} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \leq \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right).$$

Donc, il existe une partition de B telle que $B = \cup_{i=1}^n TB|_{[0,N]} = \cup_{i=1}^n TB_i|_{[0,N]}$ et

$$\text{diam}_X(TB_i|_{[0,N]}) < \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

où diam_X désigne le diamètre du sous-ensemble borné de X . De plus, pour tout $Tu_1, Tu_2 \in TB_i$ et $t \geq N$, il résulte de (3.10) et (3.11) que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}} - \frac{Tu_2(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| &\leq \left\| \frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}} - \frac{Tu_1(N)}{1+N^{\alpha-1}} \right\| + \left\| \frac{Tu_1(N)}{1+N^{\alpha-1}} - \frac{Tu_2(N)}{1+N^{\alpha-1}} \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{Tu_2(N)}{1+N^{\alpha-1}} - \frac{Tu_2(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| \\ &< \varepsilon + \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) + \varepsilon + \varepsilon, \\ &\leq \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) + 3\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donc, (3.11) et (3.12) impliquent que

$$\text{diam}_X(TB_i) \leq \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) + 3\varepsilon.$$

En observant que $TB = \cup_{i=1}^n TB_i$, on obtient

$$\alpha_X(TB) \leq \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) + 3\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on a

$$\alpha_X(TB) \leq \sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right).$$

Inversement, on prouve que $\sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \leq \alpha_X(TB)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partition $TB = \cup_{i=1}^n TB_i$ tel que $\text{diam}_X(TB_i) < \alpha_X(TB) + \varepsilon$, donc, pour tout $t \in J$ et $u_1, u_2 \in B_i$, on obtient

$$\left\| \frac{Tu_1(t)}{1+t^{\alpha-1}} - \frac{Tu_2(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| \leq \|Tu_1 - Tu_2\| < \alpha_X(TB) + \varepsilon,$$

puisque $TB(t) = \cup_{i=1}^n TB_i(t)$, on a

$$\alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \leq \alpha_X(TB) + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on trouve

$$\sup_{t \in J} \alpha\left(\frac{TB(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \leq \alpha_X(TB).$$

□

Théorème 3.8. *Supposons que les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) sont valides. Alors, il existe au moins une solution $u \in X$ du problème (3.1).*

Démonstration. Choisissons un nombre réel $R >$ vérifiant

$$R > \frac{\|u_\infty\| - \int_0^\infty b(t)dt}{\Gamma(\alpha) - \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt}.$$

Posons

$$B = \left\{ u \in X : \|u\|_X \leq R \right\}.$$

Alors, on peut en déduire que $T : B \rightarrow B$. En effet, pour tout $u \in B$, par (H_1) , on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \|f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}} \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \|f(t, u(t))\| dt \\ &\leq \frac{\|u_\infty\|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [\|u\| \times \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1})a(t)dt + \int_0^\infty b(t)dt] < R. \end{aligned}$$

Donc, $\|Tu\|_X \leq R$. Donc, T défini de B dans lui même.

On pose $D = \overline{\text{co}}(TB)$, il est clair que D est un sous-ensemble borné, convexe et fermé de B . En observant que $TD \subset TB \subset D$, par le lemme (3.5) nous savons que $T : D \rightarrow D$ est borné et continu. Il reste à montrer qu'il existe une constante $0 \leq \lambda < 1$ telle que

$$\alpha_X(TS) \leq \lambda \alpha_X(S) \text{ pour tout } S \subset D. \quad (3.13)$$

Soit $n >$, on définit $T_n : X \rightarrow X$ par

$$\begin{aligned} T_n u(t) &= \frac{u_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}] f(s, u(s)) ds \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^n t^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

A partir de (H_1) , on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_n u(t)}{1+t^{\alpha-1}} - \frac{T u(t)}{1+t^{\alpha-1}} \right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_n^\infty \|f(t, u(t))\| dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [R \int_n^\infty (1+t^{\alpha-1}) a(t) dt + \int_n^\infty b(t) dt]. \end{aligned}$$

Cela montre que $d_H\left(\frac{T_n S(t)}{1+t^{\alpha-1}}, \frac{T S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, $t \in J$, où d_H désigne la métrique de Hausdorff dans l'espace E . Par les propriétés de la mesure de non-compacité, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(\frac{T_n S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) = \alpha\left(\frac{T S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right), \quad t \in J. \quad (3.14)$$

Maintenant, nous estimons $\alpha\left(\frac{T_n S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right)$. Le lemme (3.6) implique que $\left\{\frac{D(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right\}$ est équicontinue sur tout intervalle compact de J , donc, $\left\{\frac{S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right\}$ est équicontinue sur tout intervalle compact de J . Par l'hypothèse (H_2) , il est facile de savoir que $\{f(t, u(t)) : u(t) \in S\}$ est équicontinue sur $[0, n]$. De plus, $\{f(t, u(t)) : u(t) \in S\}$ est borné sur $[0, n]$ par (H_1) . En utilisant Lemme (??), Lemme (3.7) et l'hypothèse (H_3) , on arrive à

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{T_n S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \alpha(\{f(t, u(t)) : u(t) \in S\}) dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^n \alpha(\{f(t, u(t)) : u(t) \in S\}) dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^n (1+t^{\alpha-1}) l(t) \alpha\left(\frac{S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^n (1+t^{\alpha-1}) l(t) \alpha_X(S) dt. \end{aligned}$$

D'après (3.14) (3.13), on a

$$\alpha\left(\frac{T S(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right) \leq \lambda \alpha_X(S)$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (1+t^{\alpha-1}) l(t) dt < 1.$$

D'après le lemme (3.7), il résulte que

$$\alpha_X(TS) \leq \lambda \alpha_X(S).$$

Par conséquent, le théorème du point fixe de Darbo affirme que le problème (3.1) admet au moins une solution dans D . $\square$

3.4 Exemple

Considérons le problème d'équations différentielles d'ordre fractionnaire suivant

$$\begin{cases} D^{\frac{3}{2}}u_n(t) = \left(\frac{u_n(t)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{\sin t + \ln(1+|u_{n+1}(t)|)}{30ne^{\sqrt{t}}} \right)_{n=1}^{\infty}, & t \in [0, \infty) \\ u_n(0) = 0, & D^{\frac{1}{2}}u_n(\infty) = u_{\infty}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Soit $E = \{u = (u_1, \dots, u_n, \dots) : \sup_n |u_n| < \infty\}$ avec la norme $\|u\| = \sup_n |u_n|$, alors E est un espace de Banach et le problème (3.13) peut être considéré comme le problème (3.1), où $\alpha = \frac{3}{2}$, $f(t, u) = (f_1(t, u), \dots, f_n(t, u), \dots)$ avec

$$f_n(t, u) = \frac{u_n(t)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{\sin t + \ln(1+|u_{n+1}(t)|)}{30ne^{\sqrt{t}}}.$$

Il est claire que $f(t, u) \in C(J \times E, E)$ et

$$\|f(t, u)\| \leq \left[\frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}} \right] \|u\| + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}.$$

A l'aide d'un calcul rapide, on trouve

$$\int_0^{\infty} (1+\sqrt{t}) \left[\frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}} \right] dt = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{5} \approx 0.3571.$$

Notez que $\Gamma(\frac{3}{2}) \approx 0.8862$ et $\int_0^{\infty} \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}} dt < \infty$. La condition (H1) est satisfaite avec $a(t) = \frac{1}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)} + \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}$ et $b(t) = \frac{1}{30e^{\sqrt{t}}}$. Il est facile de voir que la condition (H2) est aussi satisfait. En fin, nous vérifions la condition (H3). Notons $f = f^{(1)} + f^{(2)}$, ou $f_n^{(1)} = \frac{u_n(t)}{10(1+\sqrt{t})(1+t^2)}$ et $f_n^{(2)} = \frac{\sin t + \ln(1+|u_{n+1}(t)|)}{30ne^{\sqrt{t}}}$. Alors on peut obtenir que pour tout ensemble borné $B \subset E$, $\alpha(f^{(2)}(t, B)) = 0$.

En effet, soit $\{u^{(m)}\} \subset E$ bornée, ie $\|u^{(m)}\| \leq M$, $m = 1, 2, 3, \dots$, ou $u^{(m)} = (u_1^{(m)}, \dots, u_n^{(m)}, \dots)$. On a alors, pour fixe $t \in J$.

$$|f_n^{(2)}(t, u^{(m)})| \leq \frac{1+M}{30n}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.16)$$

Donc $\{f_n^{(2)}(t, u^{(m)})\}$ est bornée, et par la méthode diagonale, on peut choisir une sous-suite $\{u^{(m_k)}\} \subset \{u^{(m)}\}$ telle que

$$f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) \rightarrow v_n \quad \text{Comme } K \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.17)$$

Et de (3.16) on obtient

$$|v_n| \leq \frac{1+M}{30n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

Et donc $v = \{v_1, \dots, v_n, \dots\} \in E$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, (3.16) et (3.18) impliquent qu'il existe $N > 0$ tel que

$$|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)})| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |v_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n > N, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

Par contre, de (3.17) on obtient qu'il existe $K > 0$ tel que

$$|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) - v_n| < \varepsilon, \quad k > K, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.20)$$

Il découle de (3.19) et (3.20) que $|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) - v_n| \leq \varepsilon$, pour $k > K$. Cela signifie que $|f_n^{(2)}(t, u^{(m_k)}) - v_n| \rightarrow 0$, lorsque $k \rightarrow \infty$ et donc on a que $f^{(2)}(t, B)$ est relativement compacte pour tout $B \subset E$ borné, donc $\alpha(f^{(2)}(t, B)) = 0$. Donc par conséquent, on arrive que

$$\alpha(f(t, B)) \leq \alpha(f^{(1)}(t, B)) = \frac{\alpha(B)}{10(1 + \sqrt{t})(1 + t^2)}.$$

Puisque $\int_0^\infty (1 + \sqrt{t}) \frac{1}{10(1 + \sqrt{t})(1 + t^2)} dt < \Gamma(\alpha)$, nous concluons que la condition (H_3) est satisfaite pour $l(t) = \frac{1}{10(1 + \sqrt{t})(1 + t^2)}$.

Par conséquent, la théorème (3.8) assure que le problème (3.15) a une solution.

Conclusion

Ce travail nous a permis d'explorer en profondeur la notion de *mesure de non-compacité*, concept fondamental de l'analyse fonctionnelle moderne, en lien étroit avec la *théorie des points fixes*.

Nous avons retracé l'évolution historique de cette notion, depuis les travaux pionniers de Kuratowski jusqu'aux contributions de Darbo, Sadovskii et Istrăţescu, tout en mettant en évidence leur impact sur la généralisation des théorèmes classiques de Banach et Schauder.

L'étude des applications k -contractantes et condensantes a montré à quel point les MNC offrent une alternative efficace aux hypothèses de compacité strictes, élargissant ainsi le champ d'applicabilité de nombreux résultats.

Enfin, l'application de cette théorie à un problème aux limites d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach a permis d'établir des résultats d'existence rigoureux, illustrant la puissance et la pertinence des MNC dans la résolution d'équations intégrales non linéaires.

Ce mémoire constitue ainsi une base solide pour aborder des travaux futurs, que ce soit dans l'étude d'opérateurs plus généraux, de systèmes dynamiques complexes, ou dans l'analyse d'équations différentielles et intégrales dans des contextes fonctionnels encore plus vastes.

Bibliographie

- [1] AKHMEROV, R. R. ; KAMENSKII, M. I. ; POTAPOV, A. S. ; RODKINA, A. E. ; SADOVSKII, B. N. *Measures of noncompactness and condensing operators*. Translated from the 1986 Russian original by A. Iacob. Operator Theory : Advances and Applications, 55. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. viii+249 pp.
- [2] Rinehart H. and Winston : The Gamma Function, New Yor, 1964
- [3] AYERBE TOLEDANO, J. M. ; DOMÍNGUEZ BENAVIDES, T. ; LÓPEZ ACEDO, G. *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*. Operator Theory : Advances and Applications, 99. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. viii+211 pp.
- [4] BANÁS, JÓZEF ; GOEBEL, KAZIMIERZ. *Measures of noncompactness in Banach spaces*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 60. Marcel Dekker, Inc., New York, 1980. vi+97 pp.
- [5] BANÁS, JÓZEF ; MURSALEEN, MOHAMMAD. *Sequence spaces and measures of noncompactness with applications to differential and integral equations*. Springer, New Delhi, 2014. xii+315 pp.
- [6] CAIN, GEORGE L. *Introduction to general topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, MA, 1994. viii+215 pp.
- [7] DEIMLING, KLAUS. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. xiv+450 pp.
- [8] Srivastava H. M. and Trujillo J. J., Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006
- [9] Oldham K. B. and Spanier J., *The fractional calculus*. Academic Press, NewYork, 1974.
- [10] ROYDEN, H. L. ; FITZPATRICK, P. M. *Real Analysis*, Fourth Edition. Pearson Education, Asia Limited and China Machine Press, 2010. xiv+516 pp.
- [11] RUNDE, VOLKER. *A taste of topology*. Universitext. Springer, New York, 2005. x+176 pp.
- [12] ZEIDLER, EBERHARD. *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems*. Translated from the German by Peter R. Wadsack. Springer-Verlag, New York, 1986. xxi+897 pp.