RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse Fonctionnelle et Application »

Présenté Par :

DZIRI Ahlem et MEHIDI Sara

Sous L'intitulé :

Quelques applications de la méthode de la série de puissance résiduelle combinée avec la transformation de Laplace

Soutenu publiquement le 23 / 06 / 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr. BEDDANI Hamid	Grade :	MCA, ESGEE-Oran	Président
Mr. BEDDANI Mustafa	Grade :	MCA, ENS-Mostaganem	Examinateur
Mr. HAMDI CHERIF Mountassir	Grade :	MCA, ESGEE-Oran	Encadrant
Mr. BENIA Kheireddine	Grade :	MCA, Univ-Ibn Khaldoun Tiaret	Co-Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Je rends grâce à Allah, le Tout-Puissant, qui m'a accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour accomplir ce travail. Sans Sa volonté, rien n'aurait été possible.

*Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon encadrant, **Dr. Hamdi Cherif Mountassir**, pour ses orientations précieuses, sa disponibilité et ses encouragements constants tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

*Je remercie également les membres du jury **Mr. BEDDANI Hamid** et **Mr. BEDDANI Mustafa** pour avoir accepté d'évaluer ce travail, ainsi que pour leurs remarques enrichissantes.*

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de mathématiques et informatique, pour l'ensemble des connaissances qu'ils nous ont transmises tout au long de notre formation.

Dédicace :

Je dédie ce travail à :

- Ma fille Sarah et à mon fils Riadh bien-aimés, sources de fierté et de motivation, je souhaite que ce travail soit pour vous un exemple de persévérance et une preuve que la volonté associée à l'ambition porte toujours ses fruits.

- Mon cher époux, merci pour ton amour, ta patience et ton soutien constant. Tu as été mon pilier dans chaque étape de ce parcours.

-Mes chers parents, en reconnaissance de vos immenses sacrifices, de vos prières continues et de votre soutien indéfectible. Vous êtes la source et la base de tout ce que j'ai accompli.

-Mes frères et sœurs, merci pour vos encouragements sincères et vos paroles bienveillantes qui ont toujours été un moteur pour aller de l'avant.

-Je dédie ce travail à ceux qui ont été, à chaque étape, mon appui et ma lumière, avec toute ma reconnaissance et ma considération.

Dziri Ahlem

Dédicace :

Je remercie tout d'abord, ALLAH, le tout puissant, le Miséricordieux de m'avoir aidé à réaliser ce travail.

Je dédie ce modeste travail de fin d'études aux plus exceptionnels qui existent dans le monde, mes parents, cher père qui n'a jamais cessé de m'apporter tout dont j'ai besoin pour réaliser ce travail, à ma mère, ma source de bonheur.

Je dédie également à tous ceux qui m'aiment et spécialement mes chers frères bonheur et longue vie.

A tout ma famille sans exception

A ma binôme Ahlem et sa famille

A tout mes amis et proches.

Mehidi Sarah

Table des matières

Abréviations

Les diférentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

L^1 : Espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la valeur absolue (dans $\mathbb{C}$ dont le module) intégrable au sens de Lebesgue.

$C^k[a,b]$: Les dérivées de f jusqu'à l'ordre k existent sur $[a,b]$, et $f^{(k)}$est continues sur $[a,b]$.

$AC[a,b]$: Espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

$AC^n[a,b]$: Espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n-1$ et telle que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$.

$\Gamma(\alpha)$: La fonction Gamma.

$B(q,p)$: La fonction Bêta.

$E_\alpha(z)$: La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.

$E_{\alpha,\beta}(z)$: La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètre.

$\mathcal{L}[f(t)]$: La transformée de Laplace de la fonction f .

$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$: Dérivée ordinaire par rapport à x d'ordre entier n.

I_{a+}^α : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

D_{a+}^α : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α.

${}^cD^\alpha$: Dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α.

Res : La fonction résiduelle.

Res_k : La k-iéme fonction résiduelle.

Résumé

Nous allons étudier et mettre en œuvre la méthode de la série de puissance résiduelle (RPSM) combinée avec la transformation de Laplace afin de résoudre différents types d'équations différentielles, tant d'ordre entier que d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Cette approche vise à tirer parti des avantages respectifs des deux techniques : la transformation de Laplace simplifie les termes différentiels en les convertissant en fonctions algébriques, tandis que la méthode de la série de puissance résiduelle offre une solution approchée efficace sous forme de série convergente. Nous illustrerons l'efficacité et la précision de cette méthode hybride à travers l'analyse de plusieurs cas modèles issus des équations différentielles classiques et fractionnaires.

Mots clés : Intégration fractionnaire, dérivation fractionnaire, la méthode de la série de puissance résiduelle, solution approximative, transformation de Laplace.

Introduction

Les équations différentielles, qu'elles soient d'ordre entier ou fractionnaire, occupent une place centrale dans la modélisation de phénomènes physiques, biologiques, économiques ou encore techniques. Elles permettent de décrire avec précision l'évolution de systèmes dynamiques, qu'il s'agisse de la propagation des ondes, des processus de diffusion, des circuits électriques, ou encore des systèmes à mémoire ou à comportement héréditaire. Dans ce cadre, les équations différentielles fractionnaires, notamment au sens de Caputo, se distinguent par leur capacité à modéliser des phénomènes complexes intégrant des effets non locaux et temporels.

Face à la complexité de ces équations, en particulier lorsque les solutions exactes sont inaccessibles, il devient nécessaire de recourir à des méthodes analytiques et numériques avancées. Le présent mémoire s'inscrit ainsi dans une volonté d'explorer et de développer une approche analytique hybride, combinant la méthode modifiée de la série de puissances résiduelle (RPSM) et la transformation de Laplace, afin de proposer une stratégie efficace et robuste pour la résolution de ce type d'équations.

La méthode de la série de puissances résiduelle (RPSM), introduite au début des années 2000, constitue une alternative semi-analytique puissante, particulièrement bien adaptée aux équations non linéaires. Elle repose sur la construction d'une solution sous forme de série, en minimisant systématiquement le résidu associé à l'équation. Sa simplicité conceptuelle, sa rapidité de convergence et sa capacité à fournir des solutions approchées de haute précision en font une méthode attrayante dans de nombreux domaines. De son côté, la transformation de Laplace permet de convertir les équations différentielles complexes en équations algébriques plus simples à résoudre, tout en gérant efficacement les conditions initiales. En combinant ces deux outils complémentaires, nous obtenons une méthode à la fois souple, précise et peu coûteuse computationnellement, bien adaptée à une large classe de problèmes.

Cette approche trouve des applications dans plusieurs disciplines, notamment la physique (mécanique quantique, transfert de chaleur), le génie électrique (circuits RLC, systèmes de commande), l'ingénierie mécanique (systèmes vibratoires), ainsi que l'étude générale des systèmes linéaires et non linéaires. L'objectif principal de ce mémoire est de développer, formaliser et évaluer cette méthode combinée à travers l'analyse de cas modèles, en mettant en évidence sa pertinence, sa précision numérique et sa stabilité.

Pour ce faire, le travail est structuré en plusieurs étapes. Nous commencerons par poser les fondements théoriques du calcul différentiel fractionnaire et des méthodes analytiques considérées. Nous poursuivrons par une description rigoureuse de la méthode proposée, accompagnée de son algorithme de mise en œuvre. Enfin, une série d'exemples numériques et d'applications concrètes permettra de valider les performances de cette approche et de la comparer aux méthodes classiques.

Ce travail ouvre également la voie à de nombreuses perspectives de recherche. Parmi celles-ci figurent l'extension de cette méthode à des systèmes non linéaires, multi-dimensionnels ou à géométries complexes, ainsi que l'optimisation algorithmique pour son intégration dans des logiciels de simulation à grande échelle.

Ce travail a pour objectifs de :

— Développer le cadre théorique de la méthode combinée.

— Présenter les étapes de son implémentation.

— Appliquer cette méthode à différents types d'équations différentielles.

— Évaluer ses performances à travers des comparaisons avec d'autres méthodes classiques.

L'apport principal de ce mémoire réside dans l'élaboration d'une stratégie novatrice pour la résolution analytique approchée, qui peut être généralisée à divers problèmes concrets en sciences et en ingénierie.

Ce travail a été développé dans 03 chapitres :

Chapitre 1 : Généralités

Ce chapitre présente un ensemble de notions fondamentales qui constituent la base théorique de ce travail. On y aborde les espaces fonctionnels, les conditions d'existence et d'unicité, ainsi que le calcul fractionnaire. Ces concepts sont essentiels pour bien comprendre le cadre dans lequel les méthodes analytiques appliquées ultérieurement seront développées, en particulier dans le contexte des équations différentielles classiques et fractionnaires.

Chapitre 2 : Description de la méthode TRSPM

Ce chapitre est consacré à la présentation détaillée de la méthode modifiée de la série de puissances résiduelle (RSPM), intégrée avec la transformation de Laplace. Nous abordons d'abord le cas entier (ordre classique), puis nous étudions le cas fractionnaire. Des exemples illustratifs simples sont également présentés afin de faciliter la compréhension des étapes d'application de la méthode, aussi bien pour les équations différentielles ordinaires que partielles.

Chapitre 3 : Quelques applications aux différents problèmes

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode combinée à une série de problèmes bien connus, notamment des équations différentielles fractionnaires telles que l'équation de Kolmogorov fractionnaire. L'objectif est de démontrer l'efficacité et la pertinence de la méthode proposée dans le traitement de problèmes mathématiques réels et complexes, tout en évaluant ses performances par rapport aux méthodes classiques.

chapitre un

Concepts et notions élémentaires de base

Dans ce chapitre nous présentons les fonctions les plus intéressantes dans le calcul fractionnaire un bref rappel sur les espaces et les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler, ces fonctions jouent un rôle très importantes dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Nous avons également donné des définitions et des théorèmes de base concernant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de caputo, la transformation de Laplace. Nous avons besoin de ces fonctions dans notre travail les exemples illustratifs fournies dans ce chapitre, permettent de mieux comprendre ces nouveaux concepts dans ce domaine.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Les espaces de Lebesgue sont des espaces fondamentaux en théorie de l'ntégration.

Soit $\Omega =]a, b[$, $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.1. *1. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on note par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de puissances p-iéme intégrables sur Ω, c'est-á-dire :*

$$f \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx < \infty.$$

avec : $\| f \|_p = (\int_\Omega \mid f \mid^p dx)^{\frac{1}{p}}$, est une norme sur $L^p(\Omega)$,

$L^p(\Omega)$ muni de la norme $\| \, . \, \|_p$ est un espace de banach.

2. *Si* $p = 2$, $L^2(\Omega)$ *est un espace des classes d'équivalence de fonctions mesurable de carré intégrable sur* Ω ,

$$\int_{\Omega} f^2(x)dx < \infty$$

$(L^2(\Omega); <.,.>_{L^2(\Omega)})$ *est un espace de Hilbert oú* $<.,.>$ *est le produit scalaire.*

$$<f,g>_{L^2(\Omega)}= \int_{\Omega} f(x).g(x)dx, \quad \forall f,g \in L^2(\Omega).$$

3. *Si* $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions mesurables bornnées presque partout sur* Ω. f *est dite essentiellement bornée sur* Ω, *s'il existe* $M > 0$ *telle que :*

$$\| f \|_\infty = inf M \geq 0 / \mid f(x) \mid \leq M, \quad p.p \ \ sur \ \ \Omega.$$

$(L^\infty(\Omega), \| . \|_\infty)$ *est un espace de banach.*

1.1.2 Espaces des fonctions dérivée continues

Définition 1.1.2. *Soit* $\Omega = [a;b](-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N}_0 = 0,1,2,....$ *On note par* $C^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *qui leurs dérivée d'ordre* n *sont continues sur* Ω, *muni de la norme :*

$$\| f \| C^n = \sum_{k=0}^{n} \| f^{(k)} \| C = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} \mid f^{(k)}(x) \mid, \quad n \in \mathbb{C}_0. \tag{1.1}$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ *l'espace des fonctions continues sur* Ω, *muni de la norme :*

$$\| f \|_C = \max_{x\in\Omega} \mid f(x) \mid . \tag{1.2}$$

1.1.3 Espaces des fonctions absolument continues

Définition 1.1.3. *Soit* $\Omega = [a;b](-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N}_0 = 0,1,2,....$

On note par $AC[a;b]$ *l'espace des fonction absolument continues, c'est-á-dire l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables*

$$f(x) \in AC[a;b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, (\varphi(t) \in L[a;b]). \tag{1.3}$$

Ainsi, toute fonction f *absolument continue posséde une dérivée sommable* $f' = \varphi(t)$, *presque partout sur* $[a;b]$, *et donc* $c = f(a)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on désigne par* $AC([a;b])$ *l'espace des fonctions* $(n-1)$ *fois dérivable sur* $[a;b]$, *telle que* $f^{(n-1)} \in AC([a;b])$ *c'est-á-dire :*

$$AC^n(\Omega) = f : [a;b] \to \mathbb{C} \ \ et \ \ (D^{n-1}f)(x) \in AC[a;b], (D = \frac{d}{dx}). \tag{1.4}$$

Lemme 1.1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $AC^n[a;b]$ est l'espace des fonctions f s'écrivent sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k, \tag{1.5}$$

oú $\varphi(t) \in L[a;b]$ et C_k $(k = 0, 1, 2, ..., n-1)$ sont des constantes arbitraires telle que :

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \quad C_k = \frac{f^k(a)}{k!}.$$

1.1.4 Fonction continue par morceaux

Théorème 1.1.1. *Une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux , s'il existe une subdivision $\delta = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i = 1...n$:*
f soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$

1.2 Notion de base du calcul fractionnaire

1.2.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons certaines fonctions dites fonctions spéciale. Ces fonction jouent un role trés important dans la théorie du calcule fractionnare.

Fonction Gamma :

L'un des outils de base du calcule fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes.

Définition 1.2.1. *La fonction Gamma $\Gamma(.)$ est dèfinie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{1.6}$$

Cette intégrale est convergente pour tout $x \in \mathbb{C}$, avec $\Re(x) > 0$.

Lemme 1.2.1. *La fonction Gamma est une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$, de plus*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{\infty} (ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.7}$$

Proposition 1.2.1. *pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Corollaire 1.2.1. *La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entiéres est donnée par la formule :*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)....(x+n-1)} \qquad 0 \leq x+n \leq 1. \tag{1.8}$$

Exemple 1.2.1. *Calculons $\Gamma(-\frac{1}{2})$, dans le cas $n = 1$.*

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} \\ &= -2\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= -2\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2. *Calculons $\Gamma(-\frac{3}{2})$,*

$$\begin{aligned}\Gamma(-\frac{3}{2}) &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2}\ \ +1)}{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) \\ &= -\frac{2}{3}(-2\sqrt{\pi}) \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{\pi}).\end{aligned}$$

Fonction Bêta :

La fonction Bêta représente un type d'integrale d'Euler définie pour tous nombres complexes x et y de parties réeles stictement positive.

Définition 1.2.2. *La fonction Bêta est définie par :*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \ \Re(p) > 0, \quad \Re(q) > 0. \tag{1.9}$$

Proposition 1.2.2.

1. $\beta\,(p,q) = \beta\,(q,p)$
2. $\beta\,(p,q) = \beta\,(p+1,q) + \beta\,(p,q+1)$
3. $\beta\,(p,q+1) = \frac{q}{p}\beta\,(p+1,q) = \frac{q}{p+q}\beta\,(p,q)$

Remarque 1.2.1. *1 On peut prendre aussi la forme d'intégrale :*

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta, \tag{1.10}$$

par le changement $t = (\sin\theta)^2$.

2 La fonction Bêta et la fonction Gamma sont liées par la formule suivante :

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.11}$$

Exemple 1.2.3.
$\beta(1,1) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{1-1}\,dt = \int_0^1 1dt = 1$

Exemple 1.2.4. *Calculer* $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

On utilisant le changemant :
$t^{\frac{1}{2}} = x \Longrightarrow t = x^2$ *et* $dt = 2xdx$ *alors,*

$$\begin{aligned}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 x^{-1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2xdx \\ &= 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}dx \\ &= 2\left[\arcsin x\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$

Fonction Mittag-Leffler :

La fonction de base de Mittag-Leffler du mathémathicien soédois qui l'a défini et étudié en 1903 est une génération de la fonction exponentielle e^z, cette fonction joue un role majeur dans la théorie du calcule fractionnaire. On peut écrire la fonction expronentielle sous la form :

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{1.12}$$

Définition 1.2.3. *La fonction* $E_a(.)$ *est définie par :*

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+1)} \qquad \Re(a) > 0; z \in \mathbb{C}. \tag{1.13}$$

La fonction Mittag-Leffler généralisée est définie par :

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+\beta)} \qquad \Re(a) > 0; \beta, z \in \mathbb{C}. \tag{1.14}$$

Quelques propriétès : On va présenter quelques propriétés suivantes :

1 Pour $|z| < 1$, la fonction Mittag-Leffler satisfait :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha})dt = \frac{1}{z-1}.$$

2 L'intégrale de la fonction Mittag-Leffler est donnée par :

$$\int_0^{z} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})t^{\beta-1}dt = z^{\beta}E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}).$$

3 La dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la fonction Mittag-Leffler est donnée par :

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})) = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^{\alpha}).$$

Exemple 1.2.5.

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Exemple 1.2.6.

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1).$$

1.2.2 Intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approcher de Riemann pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, intégrale de Rimann-Liouville.

Définition 1.2.4. *On peut commencer par examiner une formule qui donne des primitives successives d'une fonction continue.*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$,

1. *Une primitive de f est donnée par :*

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{1.15}$$

2. *Pour une primitive seconde de f on aura :*

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds, \tag{1.16}$$

La théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt, \tag{1.17}$$

puis une itération donne :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \tag{1.18}$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factorielle par la fonction Gamma $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que la dernière expression pourrait avoir un sens même quand n prenant des valeurs non entiers .

Définition 1.2.5. *On appelle intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre n et on note I_a^n, la fonction définie par :*

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \tag{1.19}$$

Exemple 1.2.7. *Calculer l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$ de la fonction définie par :*

$$f(x) = \ln t, t > 0.$$

On a :

$$I_0^{\frac{1}{2}} \ln t = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \ln s ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\ln s}{\sqrt{t-s}} ds.$$

On pose : $\sqrt{t-s} = x$ alors, $ds = -2xdx$

$$\begin{aligned} I_0^{\frac{1}{2}} \ln t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{-2x \ln(t-x^2)}{x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 -2 \ln(t-x^2) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 (\ln(\sqrt{t}+x) + \ln(\sqrt{t}+x)) dx \end{aligned}$$

On sait que :

$$\int \ln(\sqrt{t}+x) dx = (\sqrt{t}+x) \ln(\sqrt{t}+x) dx - x + cte$$

$$\int \ln(\sqrt{t}-x) dx = (-\sqrt{t}+x) \ln(\sqrt{t}-x) dx - x + cte$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
I_0^{\frac{1}{2}} \ln t &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}[(\sqrt{t}+x)\ln(\sqrt{t}+x)-x]_0^{\sqrt{t}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}[(-\sqrt{t}+x)\ln(\sqrt{t}-x)-x]_0^{\sqrt{t}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}[2\sqrt{t}\ln 2\sqrt{t} - \sqrt{t} - \sqrt{t}\ln\sqrt{t}] + \frac{2}{\sqrt{\pi}}[-\sqrt{t} - \sqrt{t}\ln\sqrt{t} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}[\sqrt{t}\ln 2\sqrt{t} - \sqrt{t}] \\
&= \frac{-4+4\ln 2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\ln\sqrt{t}.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.2.3. *Pour $f \in L^1[a;b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(x) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(x) = I_a^{\alpha+\beta} f(x) \quad \alpha, \beta > 0. \tag{1.20}$$

Théorème 1.2.1. *Si $f \in L^1([a;b])$, alors $I_a^{\alpha} f$ existe pour presque tout $x \in [a;b]$ et de plus $I_a^{\alpha} \in L^1([a;b])$.*

Preuve :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \mid I_a^{\alpha} f \mid dx &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mid f(t) \mid dtdx, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \mid f(t) \mid \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dxdt, \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \mid f(t) \mid (b-t)^{\alpha} dt, \\
&\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b \mid f(t) \mid dt.
\end{aligned}
$$

1.2.3 Dérivée fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann Liouville et de Caputo qui sont les plus utilisées.

Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouvile :

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, la dérivée d'ordre α non entier (avec $n-1 \leq \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*$) au sens de Riemann -Liouville est définie par :

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt = \frac{d^n}{dx^n} I_a^{n-\alpha} f(x). \tag{1.21}$$

En particulier, si $\alpha = 0$, on a : $D_a^0 f(x) = f(x)$.

Remarque 1.2.2.

Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite D_a^α *par* D^α

Exemple 1.2.8. *Calculons la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* $\frac{1}{2}$ *de la fonction définie par :*

$$f(x) = x - c.$$

$$\begin{aligned}
D_a^{\frac{1}{2}} f(x) &= D_a^{\frac{1}{2}}(x-c), \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\int_a^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1}(t-c)dt\right], \\
&= \frac{d}{dx}\left[I_a^{\frac{1}{2}}(x-a)\right], \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}(x-c)^{\frac{3}{2}}]\right], \\
&= \frac{3\Gamma(2)}{2\Gamma(\frac{5}{2})}(x-c)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.9. *On calcule la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *de la fonction définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta.$$

On a :

$$D^\alpha\left[(x-a)^\beta\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}(\left[(x-a)^\beta\right]$$

En utilisant le on peut écrire :

$$I^{n-\alpha}\left[(x-a)^\beta\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}$$

alors,

$$D^\alpha\left[(x-a)^\beta\right] = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x-a)^{\beta+n-\alpha}$$

En utilisant la relation de dérivation classique :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)....(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'avoire :

$$D^\alpha\left[(x-a)^\beta\right] = (\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{1}{2}$ *alors,*

$$\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}}\left[(x-a)\frac{1}{2}\right] &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}(x-a)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}(x-a)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{1}(x-a)^{0} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
\end{aligned}$$

Propriétès :

1. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique.
2. La dérivée fractionnaire d'une fonction constante n'est ni nulle, ni constante :

$$D_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

3. Si $\alpha < 0$, on convient de prendre $D_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{-\alpha} f(x)$.

4. Soit f et g deux fonctions, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ alors,

$$D_{a+}^{\alpha}(c_1 f + c_2 g) = c_1 D_{a+}^{\alpha} f(x) + c_2 D_{a+}^{\alpha} g(x).$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo :

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés des dérivées fractionnaire au sence de Caputo.

Définition 1.2.6. *Soit* $f \in AC^n[a,b]$ *et* $\alpha > 0$, *la dérivée fractionnaire de Caputo* ${}^{C}D_a^{\alpha} f$ *d'ordre* α *défini comme suit :*

$$\begin{aligned}
{}^{c}D^{\alpha} f(x) &= I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= (I_a^{n-\alpha} D^n f)(x).
\end{aligned}$$

avec n *un entier positif vérifiant l'inégalité* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$

En particulier, si $0 < a < 1$ *et* $f(t) \in AC[a,b]$, *on obtient :*

$${}^{C}D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt = (I_{a_+}^{1-\alpha} D^1 f)(x).$$

Exemple 1.2.10. *La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle*

$$\begin{aligned}{}^{c}D^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\times 0dt = 0.\end{aligned}$$

Exemple 1.2.11. *La dérivée fractionnaire de Caputo de la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$.*

Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$,
alors on a :

$$\begin{aligned}f^{(n)}(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n} \\ {}^{c}D^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}dt.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x-a)$, on aura

$$\begin{aligned}{}^{c}D^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$:

$${}^{c}D^{\frac{1}{2}}(x-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}(x-a)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Relation entre la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo :

La relation est effectuée de la façon suivante : Si $f(x)$ est une fonction dont les dérivées d'ordr e α de Rimann-Liouville et de Caputo existent et si α un nombre non entier positif ou nul tel que : $n-1 \leq \alpha < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
La relation reliant la dérivée au sens de Caputo à celle de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}^{c}D_a^{\alpha}f(x) = D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(x-a)^k\right], \quad \forall x \in [a,b].$$

Théorème 1.2.2. *Si $f \subset ([a,b])$ et si $\alpha > 0$, $(n-1 < \alpha \leq n)$, alors :*

$${}^{c}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}f(x) = f(x).$$

Comparaison entre les dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo :

Lemme 1.2.2. *Soit la fonction f telle que ${}^{R}D_a^{\alpha}f, {}^{c}D_a^{\alpha}f$ existent, avec $n-1<\alpha<n$ alors on a :*

$$ {}^{R}D_a^{\alpha}f(x) \neq {}^{c}D_a^{\alpha}f(x). \tag{1.22}$$

Exemple 1.2.12. *La dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante, en effet :*

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_a^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{C}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x (x-t)^{\alpha-n+1}dt \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(-\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\ |_{t=0}^{t=x}) \\
&= \frac{C}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}x^{n-\alpha} \\
&= \frac{C(n-\alpha)(n-\alpha-1)...(n-\alpha-(n-1))}{\Gamma(1-\alpha)(n-\alpha)(n-\alpha-1)...(n-\alpha-(n-1))}x^{-\alpha} \\
&= \frac{Cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Et pour la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo, on a :

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{C^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.4. *Soit $n-1<\alpha<n$, alors :*

$$\lim_{\alpha\to n} {}^{R}D_a^{\alpha}f(x) = \lim_{\alpha\to n} {}^{c}D_a^{\alpha}f(x) = f^{(n)}(x).$$

Preuve :

On utilise l'intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{R}D_a^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(-f(t)\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x f'(t)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}dt) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{d^n}{dx^n}(f(0)x^{n-\alpha} + \int_0^x f'(t)(t-x)^{n-\alpha}dt).
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_a^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(-f(t)\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x f^{n+1}(t)\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{n-\alpha}dt) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}(f^{(n)}(0)x^{n-\alpha} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)(t-x)^{n-\alpha}dt).
\end{aligned}$$

1.2.4 Propriétès générales des dérivées fractionnaires

Linéarité :

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire.

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t). \tag{1.23}$$

La régle de leibniz :

Pour n entier on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t),$$

oú $n \geq p+1$, et

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}g(\tau)d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\zeta)(\tau-\zeta)^n d\zeta,$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0$.

. Si f et g sont continues dans $[a;t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} f^{(k)}(t) D^{(p-k)} g(t). \tag{1.24}$$

D^{α} est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

1.3 Transformation de Laplace

Définition 1.3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $(\mathbb{C})$ une fonction de la variable réelle, lorsqu'elle existe, on appelle transformation de **Laplace** $f(t)$ la fonction notée par $\mathcal{L}f(t)$ ou $F(z)$ de la variable complex $z = x + iy$ definie par :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt. \tag{1.25}$$

Où :

La fonction $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ est appellée l'origine de F .

*la fonction $\mathcal{L}f$ est appellée l'image de f par la transformation de **Laplace**.*

Définition 1.3.2. *La transformation de Laplace inverse est donnée par :*

$$f^{-1}(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i.\infty}^{c+i.\infty} \exp(sx)F(s)ds. \tag{1.26}$$

Condition d'existence :

Théorème 1.3.1. *(condition suffisante d'existance de transformées de* ***Laplace****)*
Si $f(t)$ est continue par morceaux sur chaque intervalle fini $0 \leq t \leq N$ et si $f(t)$ est d'ordre exponentiel x_0,

pour $t > N$, alors la transformée de ***Laplace*** *$F(z)$ existe $\forall$ z tel que $\Re e(z) > x_0$.*

Preuve :

Pour $N > 0$ Nous avons :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt = \int_0^{N} f(t)e^{-zt}dt + \int_N^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt.$$

puisque f est continue par morceaux sur tout intervalle fini [0 ;N[, alors l'intégrale $\int_0^N f(t)e^{-zt}dt$ existe. Et puisque f est exponentielle d'ordre x_0 pour t> N, alors on a :

$$\begin{aligned} \mid \int_N^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt \mid &\leq \int_N^{+\infty} \mid f(t)e^{-zt}dt \mid \\ &\leq \int_N^{+\infty} \mid f(t) \mid e^{-zt}dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} Me^{x_0 t}e^{-zt}dt = \frac{M}{z - x_0} < +\infty. \end{aligned}$$

Et par conséquent, la transformée de ***Laplace*** existe pour tout $\Re_e(z) > x_0$.

Unicité :

Si la transformée de ***Laplace*** d'une fonction existe alors elle est unique.

1.3.1 Transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire

Dans cette partie nous donnons quelques outils de bases, et des formules fondamentales de la transformation de Laplece pour les dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et de Caputo.

Transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et applications :

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(x) = x^{\alpha-1}$ et $f(x)$ comme suit :

$$^{RL}D^{\alpha}_{0_+}f(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-s)^{\alpha-1}f(s)ds = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(x).$$

La transformation de Laplace de la fonction $g(x) = x^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$G(s) = \mathcal{L}(g(x))(s) = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}.$$

Ainsi, en utilisant la formule de la transformation de Laplace de convolution, on obtient la transformation de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}(^{RL}D^{\alpha}_{0_+}f(s)) = s^{-\alpha}F(s),$$

pour obtenir la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f .
On a :

$$\begin{aligned} &^{RL}D^{\alpha}_{0_+}f(x) = g^{(n)}(x), \\ &\qquad g(t) =^{RL} D^{-(n-\alpha)}_{0_+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds, \qquad n-1 < \alpha \leq n. \end{aligned}$$

L'utilisation de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire conduit à :

$$\mathcal{L}(^{RL}D^{\alpha}_{0+}f(s)) = s^{\alpha}G(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \tag{1.27}$$

oú :

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)}F(s). \tag{1.28}$$

En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, nous obtenons :

$$g^{(n-k-1)}(x) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}{}^{RL}D^{-(n-\alpha)}_{0_+}f(x) = {}^{RL}D^{\alpha-k-1}_{0_+}f(x). \tag{1.29}$$

Par substitution de (1.28) et (1.29) dans (1.27), nous arrivons à l'expression finale de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville

$$\mathcal{L}(^{RL}D^{\alpha}_{0_+}f(x))(s) = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[^{RL}D^{\alpha-k-1}_{0_+}f(x)\right]_{x=0} (n-1 \leq \alpha \leq n). \tag{1.30}$$

Exemple 1.3.1.

$$^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = 0$$

puisque $(0 < \alpha < 1)$ *Par application la transformée de Laplace on obtient :*

$$\mathcal{L}\left\{^{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f(x)\right\} = \mathcal{L}\{0\},$$

$$s^{\frac{1}{2}} F(s) - C_1 = 0$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s^{\frac{1}{2}}}$$

Finalment on trouve l'inverse de la transformation de Laplace de $F(s)$ *:*

$$f(x) = C_1 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo et applications :

Afin d'établir la formule de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, récrivons la dérivée de Caputo sous la forme :

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} f(x) = {}^{C}D_{0+}^{-(n-\alpha)} g(x), \qquad g(x) = f^{(n)}(x), \qquad n-1 < \alpha \leq n.$$

En utilisant la formule (1.30) de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura :

$$\mathcal{L}({}^{C}D_{0_+}^{\alpha} f(x))(s) = s^{-(n-\alpha)} G(s). \tag{1.31}$$

Grace à (1.27), on a :

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(n)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \tag{1.32}$$

En substituant (1.31) dans (1.32), on arrive à la formule de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo.

$$\mathcal{L}({}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(x))(s) = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad , n-1 < \alpha \leq n. \tag{1.33}$$

Grace à (1.27), on a :

$$G(s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(n)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \tag{1.34}$$

En substituant (1.31) dans (1.34), on arrive à la formule de la transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$\mathcal{L}({}^{C}D_{0+}^{\alpha} f(x))(s) = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad , n-1 < \alpha \leq n. \tag{1.35}$$

Exemple 1.3.2. *soit le problème suivante :*

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0}^{\frac{2}{3}}f\left(x\right)=2f\left(x\right)+3. \\ F(0)=C. \end{cases} \tag{1.36}$$

On a transformation de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo :

$$\mathcal{L}\left({}^{C}D_{\alpha}\right)=S^{\alpha}F(S)-\sum_{k=0}^{n-1}S^{\alpha-k-1}f^{(n)}(0).$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}({}^{C}D^{\frac{2}{3}}f(x))&=\mathcal{L}(2f(x)+3).\\ S^{\frac{2}{3}}F(S)-\sum_{k=0}^{n-1}S^{\alpha-k-1}f^{(n)}(0)&=2F(S)+\frac{3}{S}.\\ S^{\frac{2}{3}}F(S)-C&=2F(S)+\frac{3}{S}.\\ F(S)&=\frac{3}{S(S^{\frac{2}{3}}-2)}+\frac{C}{S^{\frac{2}{3}-2}}.\end{aligned}$$

Finalemnt inverse de Laplace :

$$F(S)=1-E^{\frac{2}{3}(-2)}+Cx^{\frac{1}{3}}E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}).$$

Lemme 1.3.1. *Soit $\mathcal{W}(x,t)$ une fonction continue par morceaux sur $I\times[0,\infty)$ et d'ordre exponentiel δ, et soit $\mathcal{W}(x,s)=\mathcal{L}[w(x,t)]$. Alors :*

1. $\mathcal{L}[\mathcal{D}_t^a w(x,t)]=s^a\mathcal{W}(x,s),\quad a>0$
2. $\mathcal{L}[\mathcal{D}_t^a w(x,t)]=s^a\mathcal{W}(x,s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{a-k-1}D_t^k w(x,0),\quad n-1<a\leq n$
3. $\mathcal{L}[(\mathcal{D}_t^a)^j w(x,t)]=s^{ja}\mathcal{W}(x,s)-\sum_{k=0}^{j-1}s^{(j-k)a-1}D_t^{ka}w(x,0),\quad 0<a\leq 1,$
   où $\quad(\mathcal{D}_t^a)^j=\mathcal{D}_t^a\cdot\mathcal{D}_t^a\cdots\mathcal{D}_t^a$ *(répété j fois)*

Tableau de transformation de Laplace des dérivées fractionnaire :

$F(p)$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$
$\dfrac{1}{p^\alpha}$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\dfrac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\dfrac{1}{(p+a)^\alpha}$	$\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-at}$
$\dfrac{p^\alpha-a}{p^\alpha+a}$	$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha)$
$\dfrac{a}{p(p^\alpha+a)}$	$E_\alpha(-at^\alpha)$
$\dfrac{p^\alpha}{p^\alpha+a}$	$1-E_\alpha(-at^\alpha)$
$\dfrac{a}{p(p^\alpha-a)}$	$t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at)$
$\dfrac{p^\alpha}{p^\alpha-a}$	$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$
$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$

Dans ce tableau a et b sont des constantes réelles distinctes.

chapitre deux

Méthode de la série de puissance résiduelle combinée avec la transformation de Laplace(TRSPM)

Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode de la série de puissance résiduelle intégrée à la transformation de Laplace. Nous commencerons par une description détaillée de cette méthode puis nous l'expliquerons à l'aide des exemples illustratifs.

2.1 Description de la méthode (TRSPM)

1. **Application de la transformée de Laplace :**
   On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle de convertir les dérivées en expressions algébriques, tout en prenant en compte les conditions initiales.
2. **Résolution dans le domaine de Laplace :**
   On résout l'équation algébrique obtenue pour trouver $U(s)$, la transformée de Laplace de la solution.
3. **Supposition d'une solution sous forme de série de puissances :**
   On suppose que la solution $u(t)$ peut être exprimée comme une série de puissances :
   $$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$
4. **Calcul du résidu :**
   On remplace la série dans l'équation différentielle d'origine et on calcule le *résidu* $Res(t)$, c'est-à-dire l'erreur obtenue en substituant la solution approchée dans l'équation.

5. **Annulation du résidu terme à terme :**
   On impose que chaque coefficient du résidu soit nul pour déterminer les coefficients a_n de la série.
6. **Application de la transformée de Laplace inverse (si nécessaire) :**
   Si la solution est encore dans le domaine de Laplace, on applique la transformée de Laplace inverse pour obtenir la solution dans le domaine temporel.

2.2 Conditions d'existence de la méthode (TRSPM)

On considère une équation différentielle ordinaire (EDO), linéaire ou non linéaire, généralement de la forme :

$$L[y](t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots$$

où L est un opérateur différentiel, et $f(t)$ une fonction donnée.
Pour que la méthode soit applicable, les conditions suivantes doivent être remplies :

a) Existence de la transformée de Laplace :

Les fonctions $y(t)$, $y'(t)$.... etc, doivent avoir une croissance exponentielle modérée :

$$\exists M, \alpha > 0 \text{ tels que } |y(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0$$

La fonction $f(t)$ et les conditions initiales doivent permettre le calcul de $\mathcal{L}[f(t)]$.

b) Solution bien définie dans le domaine de Laplace :

Il doit exister une solution $Y(s)$ de l'équation transformée :

$$\mathcal{L}[L[y]](s) = \mathcal{L}[f](s)$$

La solution $Y(s)$ doit pouvoir être inversée.

C) Régularité de la solution :

La solution $y(t)$ doit être suffisamment dérivable, c'est-à-dire :

$$y(t) \in C^n([0, R[), \quad \text{où } n \text{ est l'ordre de l'EDO}$$

.

Résumé des conditions nécessaires :

Condition	Description
Croissance modérée	$y(t)$ et ses dérivées doivent avoir une croissance exponentielle bornée.
Existence de $\mathcal{L}[f(t)]$	La fonction $f(t)$ doit admettre une transformée de Laplace.
Solution dans le domaine de Laplace	L'équation dans le domaine de Laplace doit être résoluble.
Régularité	$y(t)$ doit être au moins de classe C^n.

Exemple 2.2.1. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$y''(t) + y(t) = \sin(t), \quad \textit{avec } y(0) = 0 \textit{ et } y'(0) = 1$$

Nous allons appliquer la méthode de la série de puissances résiduelle combinée avec la transformée de Laplace pour approximer la solution.

Étape 1 : Vérification des conditions d'existence

— *La fonction* $\sin(t)$ *est continue, bornée et admet une transformée de Laplace :*

$$\mathcal{L}[\sin(t)] = \frac{1}{s^2+1}$$

— *Les conditions initiales sont bien définies :* $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

— *La solution attendue est régulière et de croissance exponentielle modérée.*

Étape 2 : Application de la transformée de Laplace

Appliquons la transformée de Laplace à chaque membre de l'équation :

$$\mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[\sin(t)]$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, on obtient :

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Avec les conditions initiales :

$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow (s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+1)^2}$$

Étape 3 : Développement en série de puissances

On développe $Y(s)$ *en série autour de* $s = 0$ *(série de Taylor ou de Laurent) :*

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+1)^2}$$

Cette fonction peut être exprimée sous forme d'une série de puissances, et chaque terme peut être inversé pour retrouver les coefficients de la série de $y(t)$.

***Étape 4 : Série de puissances pour** $y(t)$.*

La solution $y(t)$ peut alors être écrite sous la forme :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Les coefficients a_n peuvent être calculés soit par inversion terme à terme, soit en utilisant la méthode des résidus.

2.3 Convergence de la méthode (TRSPM)

La convergence de la méthode de la série de puissances résiduelle (RPSM) combinée avec la transformée de Laplace dépend principalement de deux aspects :

1. La convergence de la série de puissances résiduelle.
2. La validité de l'application de la transformée de Laplace sur les termes de la série.

1. Convergence de la série de puissances résiduelle

La méthode consiste à approximer la solution d'une équation différentielle par une série de puissances centrée en un point $x = x_0$, souvent $x_0 = 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Cette série est substituée dans l'équation différentielle, et l'erreur résiduelle est minimisée.

La méthode est **convergente** si :

— La solution réelle est *analytique* au voisinage de x_0.

— Les coefficients a_n sont bien définis et stables à chaque ordre.

— Le rayon de convergence de la série est strictement positif.

On peut souvent montrer la convergence en étudiant la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{L}$$

où R est le rayon de convergence.

2. La transformée de Laplace

La convergence est conservée si :

— La transformée de Laplace de chaque terme de la série est bien définie.

— La série transformée converge absolument après transformation inverse.

ce qui est généralement assuré par des conditions initiales bien posées et une solution de croissance modérée.

Résumé

La méthode RPSM combinée avec Laplace est convergente si :

— La solution est analytique.

— La série résiduelle converge.

— L'application de la transformée de Laplace ne modifie pas les propriétés de convergence.

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Étape 1 : Application de la transformée de Laplace
On applique la transformée de Laplace des deux côtés :

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = 0$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 0$$

$$s^2Y(s) - 1 + Y(s) = 0 \Rightarrow Y(s)(s^2+1) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

La transformée de Laplace inverse donne :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin(t)$$

Étape 2 : Méthode de la série de puissances résiduelle
On suppose une solution approchée sous forme de série de puissances tronquée :

$$y_N(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_Nt^N$$

Ses dérivées sont :

$$y_N''(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + \ldots$$

Le résidu est défini par :

$$R_N(t) = y_N''(t) + y_N(t)$$

On impose que ce résidu soit nul jusqu'à un certain ordre, ce qui permet de déterminer les coefficients a_n *avec les conditions initiales :*

$$y(0) = a_0 = 0, \quad y'(0) = a_1 = 1$$

Et en remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve :

$$a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{120}, \ldots$$

On obtient donc une approximation :

$$y(t) \approx t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \ldots$$

Étape 3 : Convergence

Cette série est exactement le développement en série de Taylor de $\sin(t)$ *autour de* $t = 0$. *Ainsi, plus on ajoute de termes dans la série, plus l'approximation devient précise. Le résidu* $R_N(t)$ *tend vers zéro lorsque* $N \to \infty$, *ce qui montre la* ***convergence de la méthode****.*

2.4 Application de la méthode de la série de puissances résiduelle combinée avec la transformée de Laplace

2.4.1 Cas d'ordre entier :

Considérons l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - bu^q(x,t), \quad u(x,0) = f_0(x). \tag{2.1}$$

Étape 1 : Application de la transformée de Laplace

On applique la transformée de Laplace à l'équation par rapport à la variable t. On note :

$$\mathcal{U}(x,s) = \mathcal{L}[u(x,t)]$$

En utilisant la propriété :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = s\mathcal{U}(x,s) - u(x,0)$$

l'équation devient :

$$s\mathcal{U}(x,s) - f_0(x) = \frac{\partial^2 \mathcal{U}(x,s)}{\partial x^2} + a\mathcal{U}(x,s) - b\mathcal{L}[u^q(x,t)] \tag{2.2}$$

Étape 2 : Supposition d'une solution en série de puissances

On suppose que la solution cherchée $u(x,t)$ peut être approchée par une série de puissances tronquée :

$$u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) t^k, \tag{2.3}$$

et sa transformée de Laplace s'écrit :

$$\mathcal{U}_n(x,s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x)}{s^{k+1}}. \tag{2.4}$$

Étape 3 : Développement du terme non linéaire

Le terme non linéaire $u^q(x,t)$ est aussi développé comme suit :

$$u_n^q(x,t) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k(x) t^k \right)^q = \sum_{k=0}^{nq} U_k^{(q)}(x) t^k, \tag{2.5}$$

et donc :

$$\mathcal{L}[u_n^q(x,t)] = \sum_{k=0}^{nq} \frac{U_k^{(q)}(x)}{s^{k+1}}. \tag{2.6}$$

Étape 4 : Construction de la fonction résiduelle de Laplace

On définit la fonction résiduelle de Laplace en remplaçant $\mathcal{U}_n(x,s)$ dans l'équation obtenue à l'étape 1 :

$$R_n(x,s) = s\mathcal{U}_n(x,s) - f_0(x) - \frac{\partial^2 \mathcal{U}_n}{\partial x^2} - a\mathcal{U}_n(x,s) + b\mathcal{L}[u_n^q(x,t)] \tag{2.7}$$

Étape 5 : Annulation du résidu

On impose que le résidu $R_n(x,s)$ soit nul :

$$R_n(x,s) = 0.$$

En comparant les coefficients des puissances de s de chaque côté, on obtient un système d'équations différentielles pour les $u_k(x)$, que l'on peut résoudre récursivement.

Étape 6 : Transformée de Laplace inverse

Une fois que $\mathcal{U}_n(x,s)$ est déterminée, on applique la transformée de Laplace inverse terme à terme pour retrouver la solution dans le domaine temporel :

$$u_n(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{U}_n(x,s)] = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \frac{t^k}{k!} \tag{2.8}$$

Conclusion

La solution approchée $u_n(x,t)$ obtenue constitue une approximation de la solution exacte de l'équation donnée, et sa précision dépend du degré n de la série choisie.

2.4.2 Exemples illustratifs

Exemple 2.4.1. *On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad x \in [0,1],\ t > 0$$

avec la condition initiale :

$$u(x,0) = \ln(1+x)$$

La solution exacte est donnée par :

$$\boxed{u(x,t) = \ln(1+xe^t)}$$

Étape 1 : Application de la transformée de Laplace

On applique la transformée de Laplace en t :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = sU(x,s) - u(x,0)$$

et :

$$\mathcal{L}\left[x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = x\frac{\partial U(x,s)}{\partial x}$$

On obtient donc l'équation :

$$sU(x,s) - \ln(1+x) = x\frac{\partial U(x,s)}{\partial x}$$

Étape 2 : Développement en série de puissances

On suppose que :

$$U(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^n$$

alors :

$$x\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(s)x^n$$

et :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

Étape 3 : Substitution dans l'équation

Substituons dans l'équation :

$$s\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(s)x^n$$

Ce qui donne :

$$sa_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[sa_n(s) - \frac{(-1)^{n+1}}{n} - na_n(s)\right]x^n = 0$$

Étape 4 : Identification des coefficients

En identifiant les coefficients :

— *Pour $n = 0$:*

$$sa_0(s) = 0 \Rightarrow a_0(s) = 0$$

— *Pour $n \geq 1$:*

$$(s-n)a_n(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow a_n(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(s-n)}$$

Étape 5 : Transformée de Laplace inverse

Alors :

$$U(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(s-n)} x^n$$

On applique la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n(s-n)}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{nt}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n e^{nt} = \ln(1 + xe^t)$$

Exemple 2.4.2. *Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad x \in [0,1],\ t > 0$$

avec la condition initiale :

$$u(x,0) = x$$

La solution exacte de cette équation est

$$\boxed{u(x,t) = t + x}$$

Étape 1 : Transformation de Laplace

On applique la transformée de Laplace par rapport à la variable t :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0)$$

Ce qui donne :

$$sU(x,s) - x = \frac{\partial U(x,s)}{\partial x}$$

Étape 2 : Approximation par une série de puissances

On approxime $U(x,s)$ par une série de puissances d'ordre 2 :

$$U(x,s) = a_0(s) + a_1(s)x + a_2(s)x^2$$

Étape 3 : Calcul du résidu

On dérive par rapport à x :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a_1(s) + 2a_2(s)x$$

Substitution dans l'équation transformée :

$$sU(x,s) - x = sa_0 + sa_1 x + sa_2 x^2 - x$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x$$

Comparaison des coefficients :

$$sa_0 = a_1$$

$$sa_1 - 1 = 2a_2$$

$$sa_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0.$$

Étape 4 : Résolution du système

$$a_2 = 0$$
$$a_1 = \frac{1}{s}$$
$$a_0 = \frac{1}{s^2}.$$

D'où :

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2} + \frac{x}{s}$$

Étape 5 : Transformation de Laplace inverse

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + x \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = t + x$$

Exemple 2.4.3. *On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Étape 1 : *On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation :*

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + 4\mathcal{L}\{y'(t)\} + 4\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t^2\}.$$

En utilisant les conditions initiales :

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3(s+2)^2}.$$

Étape 2 : *On suppose une solution sous la forme :*

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \\ y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}. \end{aligned}$$

En insérant dans l'équation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 4(n+1)a_{n+1} + 4a_n\right] t^n = t^2.$$

En comparant les coefficients, on obtient progressivement les termes de la série en fonction de ceux déjà connus. À l'aide des conditions initiales, on trouve :

$$\begin{aligned} &a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \\ &a_4 = \frac{1}{12}, \quad a_5 = -\frac{1}{45}, \quad etc. \end{aligned}$$

La solution approchée s'écrit donc :

$$y(t) \approx \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{45}t^5 + \cdots$$

Étape 3 : *On insère la solution approchée dans l'équation pour calculer le résidu :*

$$Res(t) = y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) - t^2.$$

Cela permet de vérifier si la solution approchée satisfait bien l'équation, et d'évaluer l'erreur commise.

Étape 4 : *À partir de :*

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+2)^2}.$$

on applique la transformée de Laplace inverse et on trouve :

$$y(t) = \left(\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) e^{-2t}.$$

Exemple 2.4.4. *Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0$$

avec les conditions initiales et aux limites :

$$u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$

On applique la transformée de Laplace par rapport à t :

$$\mathcal{L}[u(x,t)] = U(x,s)$$

Ce qui donne :

$$sU(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$$

En remplaçant $u(x,0) = \sin(\pi x)$, *on obtient :*

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2} - sU(x,s) = -\sin(\pi x)$$

On suppose une solution approchée de la forme (jusqu'à l'ordre 3) :

$$U(x,s) \approx a_0(s) + a_1(s)x + a_2(s)x^2 + a_3(s)x^3$$

Alors :

$$\frac{d^2U}{dx^2} \approx 2a_2(s) + 6a_3(s)x$$

Substitution dans l'équation :

$$2a_2 + 6a_3x - s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = -\sin(\pi x)$$

On approche le second membre par un développement limité :

$$\sin(\pi x) \approx \pi x - \frac{(\pi x)^3}{6}$$

Donc :

$$2a_2 + 6a_3x - s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = -\pi x + \frac{\pi^3x^3}{6}$$

Par identification des coefficients selon les puissances de x, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\textit{Terme constant :} \quad & 2a_2 - sa_0 = 0 \quad \textit{(1)} \\
\textit{Terme en } x: \quad & 6a_3 - sa_1 = -\pi \quad \textit{(2)} \\
\textit{Terme en } x^2: \quad & -sa_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad \textit{(3)} \\
\textit{Terme en } x^3: \quad & -sa_3 = \frac{\pi^3}{6} \Rightarrow a_3 = -\frac{\pi^3}{6s} \quad \textit{(4).}
\end{aligned}$$

En utilisant (3) et (1) : $a_2 = 0$, *donc* $a_0 = 0$. *De (2) :*

$$6a_3 - sa_1 = -\pi \Rightarrow a_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi^3}{s} - \pi\right)$$

.

La solution dans le domaine de Laplace est

$$U(x,s) = a_1(s)x + a_3(s)x^3 = \left[\frac{1}{s}\left(\frac{\pi^3}{s} - \pi\right)\right]x - \frac{\pi^3}{6s}x^3$$

On applique la transformée de Laplace inverse :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1$$

Ainsi :

$$a_1(t)=\pi^3 t-\pi, \quad a_3(t)=-\frac{\pi^3}{6}$$

La solution approchée finale est donnée comme suit :

$$u(x,t)\approx a_1(t)x+a_3(t)x^3=(\pi^3 t-\pi)x-\frac{\pi^3}{6}x^3$$

2.4.3 Cas d'ordre fractionnaire :

On considère l'équation différentielle fractionnaire générale suivante [4] :

$$D_t^\alpha u(x,t)=cD_x^2 u(x,t)+au(x,t)-bu^q(x,t), \tag{2.9}$$

soumis á la condition initiale :

$$u(x,t)=f_0(x). \tag{2.10}$$

D'abord, en applique la transformation de Laplace á l'équation (2.9), on obtient :

$$\mathcal{L}\left\{D_t^\alpha u(x,t)\right\}=c\mathcal{L}\left\{D_x^2 u(x,t)\right\}+a\mathcal{L}\left\{u(x,t)\right\}-b\mathcal{L}\left\{u^q(x,t)\right\}. \tag{2.11}$$

Du fait que $\mathcal{L}\left\{D_t^a u(x,t)\right\}=s^a\mathcal{L}\left\{u(x,t)\right\}-s^{a-1}u(x,0)$ et en utilise l'équation (2.10), on a :

$$U(x,s)=\frac{f_0(x)}{s}+\frac{c}{s^a}D_x^2 U(x,s)+\frac{a}{s^a}U(x,s)-\frac{b}{s^a}\mathcal{L}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{U(x,s)\right\}\right)^q\right\}, \tag{2.12}$$

avec $U(x,s)=\mathcal{L}\left\{u(x,t)\right\}$.

Deuxièmement, on écrit la fonction transformée $U(x,s)$ comme suit :

$$u(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(x)}{s^{n\alpha+1}}. \tag{2.13}$$

La k-iéme série tronquée de l'équation (2.13) prend la forme :

$$U_k(x,s)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f_n(x)}{s^{n\alpha+1}}=\frac{f_0(x)}{s}+\sum_{n=1}^{k}\frac{f_n(x)}{s^{n\alpha+1}}. \tag{2.14}$$

Á partir de la définition de la fonction résiduelle de Laplace :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}Res(x,s)=&U(x,s)-\frac{f_0(x)}{s}-\frac{c}{s^\alpha}D_x^2 U(x,s)-\frac{a}{s^\alpha}u(x,s)\\&+\frac{b}{s^\alpha}\mathcal{L}\left\{\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{U(x,s)\right\}\right)^q\right\}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Et la fonction résiduelle k-iéme de Laplace de l'équation (2.15) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}Res_k(x,s) =& U_k(x,s) - \frac{f_0(x)}{s} - \frac{c}{s^\alpha} D_x^2 U_k(x,s) - \frac{a}{s^\alpha} U_k(x,s) \\ &+ \frac{b}{s^\alpha} \mathcal{L}\left\{ \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ U_k(x,s) \right\} \right)^q \right\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Troisiémement, on étendent certaines propriétés qui apparaissent dans la méthode de la série de puissance résiduelle, pour souligner quelques faits :

- $\mathcal{L}Res(x,s) = 0$ et $\lim_{k\to\infty} \mathcal{L}Res_k(x,s) = \mathcal{L}Res(x,s)$ pour chaque $s > 0$.
- $\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}Res(x,s) = 0 \Rightarrow \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}Res_k(x,s) = 0$.
- $\lim_{s\to\infty} s^{k\alpha+1}\mathcal{L}Res(x,s) = \lim_{s\to\infty} s^{k\alpha+1}\mathcal{L}Res_k(x,s) = 0. \quad 0 < \alpha \leq 1, k \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, pour déterminer les fonctions de coefficient $f_n(x)$, nous résolvons récursivement le systéme suivant :

$$\lim_{s\to\infty} \left(s^{k\alpha+1}\mathcal{L}Res_k(x,s) \right) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, k \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Enfin, on applique l'inverse de Laplace á $U_k(x,s)$, pour obtenir la k-iéme solution de $u_k(x,t)$.

2.4.4 Exemples illustratifs

Exemple 2.4.5. *On considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaire suivante :*

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

Étape 1 : Transformation de Laplace

On applique la transformation de Laplace par rapport à t :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]$$

En utilisant la propriété de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}\right] = s^\alpha U(x,s) - s^{\alpha-1} u(x,0)$$

On obtient donc :

$$s^\alpha U(x,s) - s^{\alpha-1}\sin(\pi x) = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}$$

Étape 2 : Série de puissances

On suppose une solution sous forme de série de puissances en s :

$$U(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) s^n$$

On insère cette série dans l'équation obtenue après transformation de Laplace.

Étape 3 : Formulation de la fonction résiduelle

On forme le résidu :

$$R(x,s) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)s^n\right) - s^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)s^n + s^{\alpha-1}\sin(\pi x)$$

On regroupe les termes selon les puissances des, et on impose $R(x,s) = 0$ pour déterminer les coefficients $a_n(x)$.

Étape 4 : Calcul des coefficients

$a_n(x)$ On développe chaque terme du résidu :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)s^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n''(x)s^n$$

$$s^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)s^{n+\alpha}$$

$$s^{\alpha-1}\sin(\pi x) = \sin(\pi x)\cdot s^{\alpha-1}$$

Le résidu devient :

$$Res(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n''(x)s^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)s^{n+\alpha} + \sin(\pi x)\cdot s^{\alpha-1}$$

Pour que le résidu soit nul, les coefficients de chaque puissance de s doivent être nuls. On procède à un changement d'indice et on identifiee les coefficients :

- En comparant les termes de même puissance en s, on obtient un système d'équations différentielles pour les $a_n(x)$.

- Par exemple, en prenant les premiers termes :

- Pour $s^{\alpha-1}$: le terme doit être annulé par un terme correspondant dans la série.

- On peut supposer que $a_0(x) = \sin(\pi x)$, ce qui correspond à la condition initiale.

- Ensuite, on calcule $a_1(x), a_2(x), \ldots$ à partir d'une relation de récurrence, souvent obtenue par identification ou par projection sur une base orthogonale (par exemple, les fonctions $\sin(n\pi x)$).

Étape 5 : Transformation de Laplace inverse :

Une fois la série $U(x,s) = \sum a_n(x)s^n$ trouvée, on applique la transformation de Laplace inverse terme à terme :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\cdot \mathcal{L}^{-1}[s^n]$$

Cependant, pour le cas fractionnaire, les transformées inverses peuvent faire intervenir des fonctions spéciales comme la fonction de Mittag-Leffler. Par exemple :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha + \lambda}\right] = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)$$

Cela permet d'écrire la solution sous forme :

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \cdot E_\alpha(-\pi^2 t^\alpha)$$

où $E_\alpha(\cdot)$ est la fonction de Mittag-Leffler définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Cette solution satisfait l'équation fractionnaire ainsi que les conditions initiales et aux bords.

Exemple 2.4.6. *On considère le système d'équations différentielles fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D_t^{1/2} y_1(t) = -y_1(t) + y_2(t), \\ D_t^{1/2} y_2(t) = y_1(t) - 2y_2(t), \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Étape 1 : Application de la transformée de Laplace

Utilisons la propriété :

$$\mathcal{L}\left\{D_t^\alpha y(t)\right\} = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0)$$

On obtient :

$$\begin{cases} s^{1/2} Y_1(s) = -Y_1(s) + Y_2(s), \\ s^{1/2} Y_2(s) - s^{-1/2} = Y_1(s) - 2Y_2(s) \end{cases}$$

Étape 2 : Résolution dans le domaine de Laplace

Réécrivons le système :

$$\begin{cases} (s^{1/2} + 1) Y_1(s) = Y_2(s), \quad \textit{(1)} \\ -Y_1(s) + (s^{1/2} + 2) Y_2(s) = s^{-1/2} \quad \textit{(2)} \end{cases}$$

Substituons (1) dans (2) :

$$-\frac{Y_2(s)}{s^{1/2} + 1} + (s^{1/2} + 2) Y_2(s) = s^{-1/2}$$

En factorisant :

$$\left[-\frac{1}{s^{1/2} + 1} + (s^{1/2} + 2)\right] Y_2(s) = s^{-1/2}$$

Étape 3 : Formulation de la fonction résiduelle

On suppose une solution sous la forme :

$$Y_2(s) = \frac{b_0}{s} + \frac{b_1}{s^{3/2}} + \frac{b_2}{s^2} \Rightarrow y_2(t) \approx b_0 + b_1 \frac{t^{1/2}}{\Gamma(1.5)} + b_2 \frac{t}{\Gamma(2)}$$

En identifiant les termes après substitution, on obtient :

$$y_2(t) \approx 1 - \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{t}{2}$$

Et puisque :

$$Y_1(s) = \frac{Y_2(s)}{s^{1/2}+1} \Rightarrow y_1(t) \approx \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{t}{2}$$

Solution approchée finale

$$\boxed{\begin{array}{l} y_2(t) \approx 1 - \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{t}{2}, \\ y_1(t) \approx \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{t}{2} \end{array}}$$

Cette solution est valable pour $t \in [0,1]$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $N = 2$.

Exemple 2.4.7. *On considère l'équation différentielle ordinaire fractionnaire suivante :*

$$D_t^\alpha y(t) + y(t) = t, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = 0. \tag{2.18}$$

Étape 1 : Transformation de Laplace

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation :

$$\mathcal{L}\left[D_t^\alpha y(t)\right] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[t]$$

Sachant que :

$$\mathcal{L}[D_t^\alpha y(t)] = s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0)$$

Et que $y(0) = 0$, on obtient :

$$(s^\alpha + 1)Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

Étape 2 : Série de puissances

On suppose que :

$$Y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

Étape 3 :Formulation de la fonction résiduelle

Le résidu est défini par :

$$R(s) = (s^\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n - \frac{1}{s^2}$$

Nous cherchons à annuler ce résidu :

$$R(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \frac{1}{s^2}$$

Étape 4 : Calcul des coefficients

On développe :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+\alpha} = \frac{1}{s^2}$$

On peut utiliser le développement en série de la fraction :

$$\frac{1}{s^2(1+s^\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^{\alpha k-2}$$

D'où on identifie les coefficients :

$$a_k = (-1)^k, \quad \textit{avec les puissances } s^{\alpha k-2}$$

Étape 5 : Inversion de Laplace

Utilisons :

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-\beta}] = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad \beta > 0$$

On obtient la solution :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(2-\alpha k)} t^{1-\alpha k}$$

Exemple 2.4.8. *On considère l'équation différentielle :*

$$y''(x) - y(x) = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Étape 1 : Application de la transformée de Laplace

On applique la transformée de Laplace des deux côtés :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''(x)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 1\\ \mathcal{L}\{y(x)\} &= Y(s)\\ \mathcal{L}\{e^x\} &= \frac{1}{s-1}.\end{aligned}$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned}s^2Y(s) - 1 - Y(s) &= \frac{1}{s-1}\\ Y(s)(s^2-1) &= \frac{1}{s-1} + 1\\ Y(s) &= \frac{1+\frac{1}{s-1}}{s^2-1}\end{aligned}$$

2. Développement en série : Méthode RSPM

On suppose que la solution cherchée est une série de puissances :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Alors :

$$\begin{aligned}y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\\ y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.\end{aligned}$$

Donc :

$$y''(x) - y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n\right] x^n.$$

Et :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La fonction résiduelle est :

$$R(x) = y''(x) - y(x) - e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - \frac{1}{n!}\right] x^n.$$

Étape 3 : Annulation du résidu

On impose que chaque coefficient soit nul :

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n - \frac{1}{n!} = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n + \frac{1}{n!}}{(n+2)(n+1)}.$$

Étape 4 : Conditions initiales

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 1.$$

Étape 5 : Calcul des coefficients

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{a_0 + \frac{1}{0!}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{a_1 + \frac{1}{1!}}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
a_4 &= \frac{a_2 + \frac{1}{2!}}{4 \cdot 3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{12} = \frac{1}{6} \\
a_5 &= \frac{a_3 + \frac{1}{3!}}{5 \cdot 4} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$

Étape 6 : Solution approchée

$$y(x) \approx x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

chapitre trois

Quelques applications aux différents problèmes connus

Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre la méthode développée dans le chapitre précédent pour résoudre des équations différentielles fractionnaires connues. L'objectif est d'illustrer la performance et la fiabilité de la méthode RSPM combinée avec la transformation de Laplace à travers des cas concrets issus de la littérature. Les équations traitées comprennent notamment celles de : Kolmogorov, Klein–Gordon et Burger toutes présentées dans leurs forme fractionnaire.

3.0.1 Equation fractionnaire de Kolmogorove

On considère le problème de Cauchy non linéaire de type Kolmogorov fractionnaire en temps : [8]

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t^a W(x,t) - (x+1)\mathcal{D}_x W(x,t) - x^2 e^t \Omega_x^2 W(x,t) = 0, \\ W(x,0) = x+1, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < a \leq 1$, et $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

La solution exacte dans le cas standard $a = 1$ est donnée par $\mathcal{W}(x,t) = (x+1)e^t$.

En appliquant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation de Kolmogorov fractionnaire et en utilisant la partie 2 du Lemme **(1.3.1)** ainsi que les conditions initiales de (3.1), on obtient l'équation fractionnaire suivante dans le domaine de Laplace :

$$\omega(x,s) = \frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^a} D_x \omega(x,s) + \frac{x^2}{s^a} \mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} D_x^2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\omega\right\}\right\} \tag{3.2}$$

où $\omega(x,s) = \mathcal{L}[W(x,t)]$.

En considérant la dernière discussion, la série de Laplace d'ordre k, $\omega_k(x,s)$ pour l'équation (3.2) , s'exprime sous la forme suivante :

$$\omega_k(x,s) = \frac{x+1}{s} + \sum_{n=1}^{k} \frac{h_n(x)}{s^{na+1}}. \tag{3.3}$$

De plus, nous définissons la k$^{\text{ème}}$ fonction résiduelle de Laplace de (3.2) comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_k}(x,s)) = \sum_{n=1}^{k} \frac{h_n(x)}{s^{na+1}} - \frac{x+1}{s^a} D_x \left(\frac{x+1}{s} + \sum_{n=1}^{k} \frac{h_n(x)}{s^{na+1}} \right) \\ - \frac{x^2}{s^a} \mathcal{L} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} D_x^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{x+1}{s} + \sum_{n=1}^{k} \frac{h_n(x)}{s^{na+1}} \right\} \right\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour $k=1$, dans l'équation ci-dessus, on obtient la première fonction résiduelle de Laplace comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_1}(x,s)) &= \frac{h_1(x)}{s^{a+1}} - \frac{x+1}{s^a} D_x \left(\frac{x+1}{s} + \frac{h_1(x)}{s^{a+1}} \right) - \frac{x^2}{s^a} \mathcal{L} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} D_x^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{x+1}{s} + \frac{h_1(x)}{s^{a+1}} \right\} \right\}. \\ &= \frac{h_1(x)}{s^{a+1}} - \frac{x+1}{s^a} \left(\frac{1}{s} + \frac{h_1'(x)}{s^{a+1}} \right) - \frac{x^2 h_1''(x)}{(s-1)^{2a+1} s^a} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ensuite, on multiplie les deux côtés de cette équation par s^{a+1}, puis on résout le système

$$\lim_{s \to \infty} s^{a+1} \mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_1}(x,s)) = 0$$

On obtient alors : $h_1(x) = x+1$.

Ainsi, la première solution en série de Laplace de (3.2) peut être écrite comme :

$$\omega_1(x,s) = \frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}}.$$

Pour $k=2$, dans (3.4) , alors la 2$^{\text{ème}}$ fonction résiduelle de Laplace donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_2}(x,s)) = \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{h_2(x)}{s^{2a+1}} - \frac{x+1}{s^a} D_x \left(\frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{h_2(x)}{s^{2a+1}} \right) \\ - \frac{x^2}{s^a} \mathcal{L} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} D_x^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{h_2(x)}{s^{2a+1}} \right\} \right\} \\ = \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{h_2(x)}{s^{2a+1}} - \frac{x+1}{s^a} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^{a+1}} + \frac{h_2'(x)}{s^{2a+1}} \right) - \frac{x^2 h_2''(x)}{(s-1)^{2a+1} s^a} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Après cela, nous multiplions le résultat de l'équation (3.6) par le facteur s^{2a+1} pour obtenir l'équation suivante :

$$s^{2a+1} \mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_2}(x,s)) = h_2(x) - x - 1 - \frac{(x+1) h_2'(x)}{s^a} - \frac{x^2 h_2''(x)}{(s-1)^{2a+1} s^{1-a}}. \tag{3.7}$$

En résolvant $\lim_{s\to\infty} s^{2a+1}\mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_2}(x,s)) = 0$, on obtient : $h_2(x) = x+1$.
Ainsi, la solution de la série de Laplace du $2^{\text{ème}}$ ordre de peut s'écrire comme :

$$\omega_2(x,s) = \frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{x+1}{s^{2a+1}}$$

De même, pour $k=3$, on a :

$$\begin{aligned} s^{3a+1}\mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_3}(x,s)) &= s^{3a+1}\left(\frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{x+1}{s^{2a+1}} + \frac{h_3(x)}{s^{3a+1}}\right) \\ &\quad - s^{3a+1}\left(\frac{x+1}{s^a}D_x\left(\frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{x+1}{s^{2a+1}} + \frac{h_3(x)}{s^{3a+1}}\right)\right) \\ &\quad - s^{3a+1}\left(\frac{x^2}{s^a}\mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}D_x^2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{x+1}{s^{2a+1}} + \frac{h_3(x)}{s^{3a+1}}\right\}\right\}\right) \\ &= h_3(x) - (x+1) - \frac{(x+1)h_2'(x)}{s^a} - \frac{x^2 h_3''(x)}{(s-1)^{3a+1}s^{1-2a}}. \end{aligned}$$

Et en résolvant $\lim_{s\to\infty} s^{3a+1}\mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_3}(x,s)) = 0$, on peut obtenir que $h_3(x) = x+1$.
Ainsi, la $3^{\text{ème}}$ solution en série de Laplace de (3.2) peut être écrite comme :

$$\omega_3(x,s) = \frac{x+1}{s} + \frac{x+1}{s^{a+1}} + \frac{x+1}{s^{2a+1}} + \frac{x+1}{s^{3a+1}}$$

En répétant les étapes précédentes pour un k arbitraire, et en utilisant le fait que

$$\lim_{s\to\infty} s^{ka+1}\mathcal{L}(\mathrm{Res}_{\omega_k}(x,s)) = 0$$

on peut obtenir que $h_k(x) = x+1$ pour $k = 4, 5, \ldots$.
Ainsi, la $\mathrm{k}^{\text{ème}}$ solution en série de Laplace de (3.2) peut être reformulée par le développement fractionnaire suivant :

$$\omega_k(x,s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^{a+1}} + \frac{1}{s^{2a+1}} + \cdots + \frac{1}{s^{ka+1}}\right)(x+1) = \sum_{n=0}^{k}\frac{x+1}{s^{na+1}}. \tag{3.8}$$

Enfin, nous appliquons la transformée de Laplace inverse à l'expansion obtenue (3.8) pour conclure que la $\mathrm{k}^{\text{ème}}$ solution approchée du problème de Cauchy non linéaire de Kolmogorov fractionnaire en temps (3.1) a la forme :

$$\mathcal{W}_k(x,t) = (x+1)\sum_{n=0}^{k}\frac{t^{na}}{\Gamma(na+1)}, \tag{3.9}$$

lorsque $k \to \infty$ et en substituant $a = 1$ dans (3.9) , nous obtenons le développement en série de Maclaurin de la forme fermée $\mathcal{W}(x,t) = (x+1)e^t$, ce qui est en parfait accord avec la solution exacte. Les résultats numériques de la 10ème solution approchée du problème de Kolmogorov sont calculés et résumés dans le Tableau pour des valeurs fixes de la variable x et certaines valeurs de $t \in [0, 1]$ avec un pas de 0,25, et différentes valeurs de l'ordre fractionnaire $a \in \{1, 0{,}95, 0{,}85, 0{,}75, 0{,}65\}$.

Il en ressort que la méthode présentée fournit une solution approchée précise, en bon accord avec la solution exacte pour toutes les valeurs de $t \in [0, 1]$, en particulier à proximité des conditions initiales. De plus, les erreurs de récurrence sont présentées dans le Tableau pour valider la précision de notre approche par les erreurs $|\mathcal{W}_8(x, t) - \mathcal{W}_7(x, t)|$ pour la solution approchée obtenue du probleme (3.1) à différentes valeurs de a.

TABLE 3.1 – Résultats de la $10^{\text{ème}}$ solution approchée pour différentes valeurs de a pour l'exemple 1.

x	t_i	$a = 1$	$a = 0.95$	$a = 0.85$	$a = 0.75$	$a = 0.65$
	0.00	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
	0.25	1.2840254167	1.316898938	1.3960863710	1.4990355063	1.6365268759
0	0.50	1.6487212707	1.7072557012	1.8456231911	2.0217199431	2.2527959051
	0.75	2.1170000155	2.2042026866	2.4091674423	2.6683879567	3.0068075604
	1.00	2.7182818011	2.8399806687	3.1254929139	3.4858483992	3.9554385524
	0.00	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
	0.25	1.9260381250	1.9753484075	2.0941295565	2.2485523594	2.4547903138
0.5	0.50	2.4730819060	2.5608835519	2.7684348767	3.0325799147	3.3791958387
	0.75	3.1755000232	3.3063040300	3.6137511635	4.0025819351	4.5102113406
	1.00	4.0774227017	4.2599710030	4.6882393708	5.2287725988	5.9331578286

TABLE 3.2 – Les erreurs de récurrence $|W_8(x, t) - W_7(x, t)|$ de la dixième solution approchée pour l'exemple 1.

t_i	$a = 0{,}75$	$a = 0{,}85$	$a = 0{,}95$	$a = 1{,}00$
0.16	2.3301689×10^{-8}	1.1468189×10^{-9}	$5.1702642 \times 10^{-11}$	$1.0651924 \times 10^{-11}$
0.32	1.4913081×10^{-6}	1.2779060×10^{-7}	1.0030869×10^{-8}	2.7269635×10^{-9}
0.48	1.6986931×10^{-5}	2.0133509×10^{-6}	2.1859095×10^{-7}	6.9889089×10^{-8}
0.64	9.5443717×10^{-5}	1.4239767×10^{-5}	1.9461063×10^{-6}	6.9810262×10^{-7}
0.80	3.6408889×10^{-4}	6.4936813×10^{-5}	1.0609201×10^{-5}	4.1610159×10^{-6}
0.80	1.0871636×10^{-3}	2.2434864×10^{-4}	4.2409205×10^{-4}	1.7891607×10^{-5}

Figure 1 Montre les graphes des solutions exactes et de la dixième solution approchée pour le problème de Cauchy de Kolmogorov non linéaire à temps fractionnaire (3.1) pour différentes valeurs de a.

Évidemment, on peut voir que les solutions approchées obtenues pour différentes valeurs de l'ordre fractionnaire simulent la solution du cas classique. De plus, les solutions exactes et approchées coïncident pour $a = 1$, ce qui confirme l'efficacité et la performance de notre méthode. La Figure 2 Illustre la comparaison du comportement géométrique entre la solution exacte et la dixième solution approchée obtenue pour le problème de Cauchy de Kolmogorov non linéaire à temps fractionnaire (3.1) pour différentes valeurs de a avec $(x, t) \in [0, 1]^2$.
À partir de ces graphiques en 3D, on observe que les comportements des solutions pour différentes dérivées fractionnaires de Caputo sur leur domaine sont en bon accord entre eux, en particulier pour la dérivée classique. En outre, la comparaison du coût total de calcul des figures données dans l'Exemple 1 est rapportée dans le Tableau 3.

TABLE 3.3 – Coût total de calcul pour les figures obtenues dans l'Exemple 1.

ID		**Taille de l'image (KB)**	**Mémoire maximale (MB)**	**Temps de tracé (s) tracé (s)**	**Coût total (MB×S)**
Figure 1	a	11.5	48	4.4	211.2
	b	11.2	48	4.2	201.6
	a	30.6	49	4.5	220.5
Figure 2	b	34.7	50	4.4	220.0
	c	37.4	54	5.0	270.0
	d	36.2	51	4.5	229.5

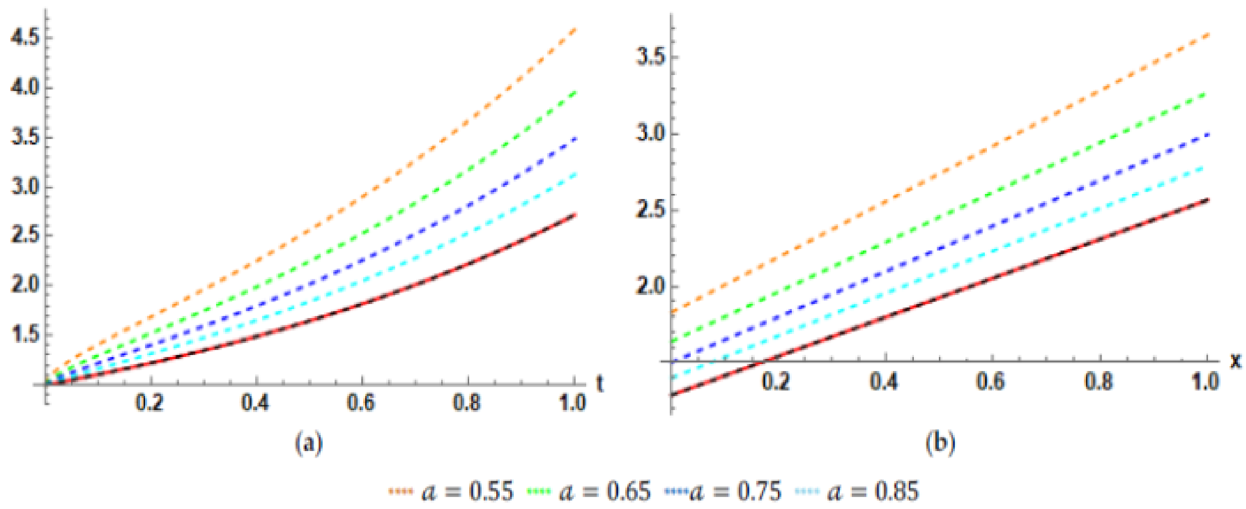

FIGURE 3.1 – La solution exact et la solution approchée.

(a) Tracés de la solution exacte $W(x, t)$ et de $W_{10}(x, t)$ en $x = 0$ pour différentes valeurs de

α du (3.1) .

(b) Tracés de la solution exacte $W(x,t)$ et de $W_{10}(x,t)$ en $t=0$ pour différentes valeurs de α du (3.1) .

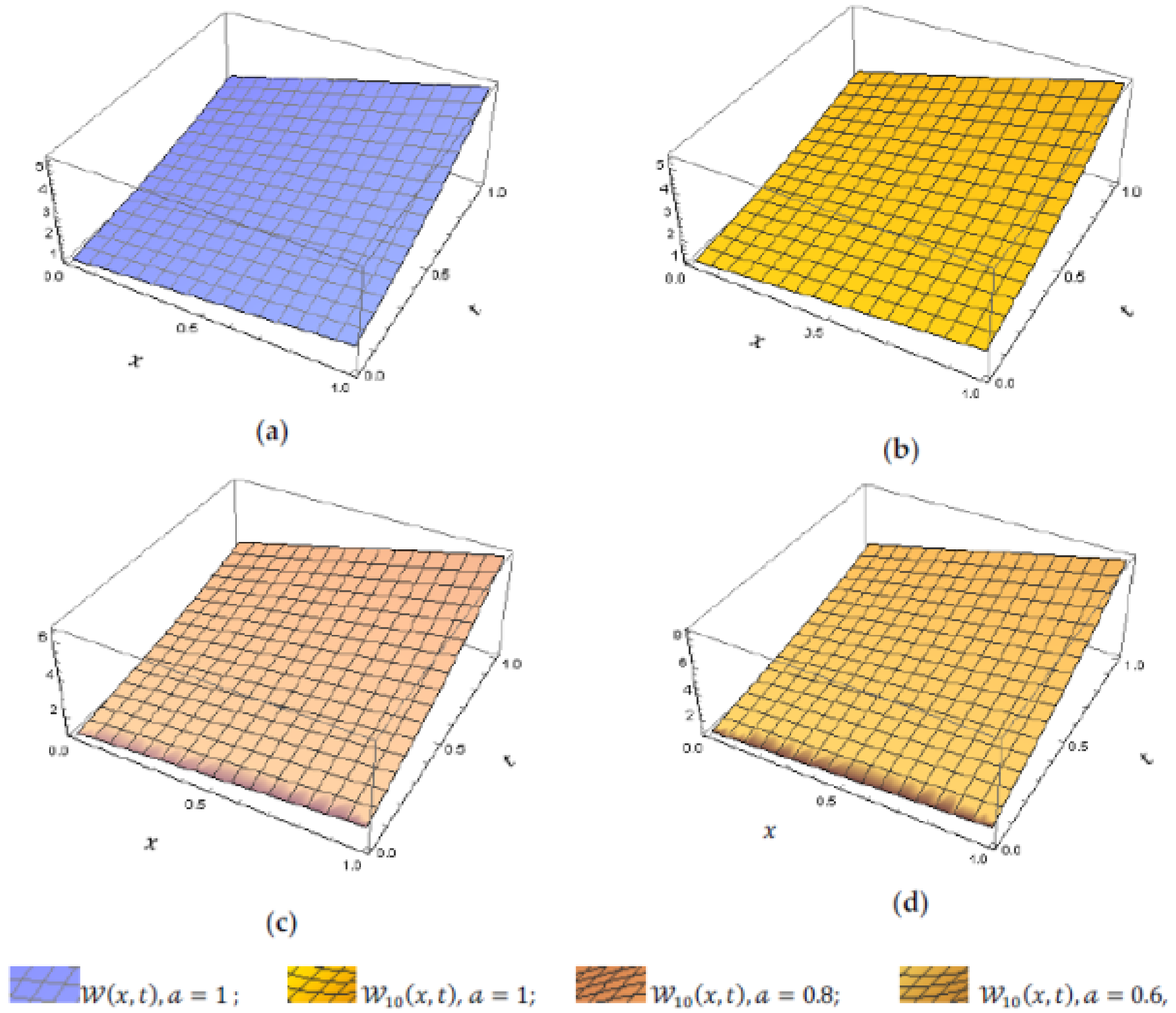

FIGURE 3.2 – La solution exact et la solution approchée 3D

Tracés de surfaces 3D de la solution exacte $W(x,t)$ et de la solution approchée d'ordre 10 $W_{10}(x,t)$ pour le (3.1) , avec $t \in [0,1]$ et $x \in [0,1]$, pour différentes valeurs de α.

3.0.2 Equation de Klein-Gordon d'ordre fractionnaire

On considère l'équation de Klein-Gordon à temps fractionnaire : [9]

$$D_t^{2\alpha}\psi(x,t) = \nu[\psi^2(x,t)]_{xx} - \omega[\psi^2(x,t)]_{xxxx}, \tag{3.10}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \frac{2\lambda^2}{3\nu}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right), \\ D_t^{\alpha}\psi(x,0) &= \frac{\lambda^3}{3\sqrt{\nu\omega}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

où $0<\alpha\leq 1$, $\nu,\omega>0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Le terme non linéaire du membre de droite est :

$$\mathcal{R}[\psi] = \nu[\psi^2]_{xx} - \omega[\psi^2]_{xxxx}.$$

— En utilisant la formule du coefficient suivante pour ϕ_2

$$\phi_m(x) = \mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{f_n(x)t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} + \frac{\phi_m(x)t^{m\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)}\right]\Bigg|_{t=0} = \mathcal{R}[f_0(x)]$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \mathcal{R}[\psi(x,0)] \\ &= \mathcal{R}\left[\frac{2\lambda^2}{3\nu}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)\right] \\ &= \nu\left[\frac{4\lambda^4}{9\nu^2}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]_{xx} - \omega\left[\frac{4\lambda^4}{9\nu^2}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]_{xxxx} \\ &= -\frac{\lambda^4}{6\omega}\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui est identique au coefficient obtenu dans**(3.10)**.

— L'étape suivante consiste à déterminer la valeur de ϕ_3. À partir de la formule du coefficient suivante :

$$\phi_{m+1}(x) = D_t^{\alpha}\left(\mathcal{R}\left[f_0(x) + \frac{f_1(x)t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\right)\Big|_{t=0}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= D_t^{\alpha}\left(\mathcal{R}\left[\psi(x,0) + D_t^{\alpha}\psi(x,0)\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\right) \\ &= D_t^{\alpha}\left\{\mathcal{R}\left[\frac{2\lambda^2}{3\nu}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\lambda^3}{3\sqrt{\nu\omega}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\right\}\Bigg|_{t=0} \end{aligned}$$

On pose :

$$\frac{2\lambda^2}{3\nu}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)+\frac{\lambda^3}{3\sqrt{\nu\omega}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}=\Theta_1$$

Alors,

$$\phi_3(x)=D_t^\alpha\left(\nu[\Theta_1^2]_{xx}-\omega[\Theta_1^2]_{xxxx}\right)\Big|_{t=0}$$

Considérons les termes suivants :

$$\Theta_1^2=\frac{4\lambda^4}{9\nu^2}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)^2+\frac{4\lambda^5}{9\nu\sqrt{\nu\omega}}\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$
$$+\frac{\lambda^6}{9\nu\omega}\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\frac{t^{2\alpha}}{(\Gamma(1+\alpha))^2}.$$

En appliquant la partie **(03)** du **Lemme(1.3.1)**, on obtient :

$$\begin{aligned}D_t^\alpha\left[\Theta_1^2\right]_{xx}\Big|_{t=0}&=\frac{4\lambda^5}{9\nu\sqrt{\nu\omega}}\left[\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right]_{xx}\\&=\frac{\lambda^5}{9\omega\sqrt{\nu\omega}}\left(\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)-2\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot x\right)\right).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}D_t^\alpha\left[\Theta_1^2\right]_{xxxx}\Big|_{t=0}&=\frac{4\lambda^5}{9\nu\sqrt{\nu\omega}}\left[\left(1-\cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)\right]_{xxxx}\\&=\frac{\nu\lambda^5}{36\omega^2\sqrt{\nu\omega}}\left(\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right)-8\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot x\right)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\varphi_3(x)&=\nu D_t^\alpha\left[\Theta_1^2\right]_{xx}\Big|_{t=0}-\omega D_t^\alpha\left[\Theta_1^2\right]_{xxxx}\Big|_{t=0}\\&=\frac{\lambda^5}{12}\sqrt{\frac{\nu}{\omega^3}}\sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\cdot\frac{x}{2}\right),\end{aligned}$$

ce qui coïncide avec le coefficient donné dans (3.10) , mais notre dérivation offre une approche plus simple. De manière similaire, pour trouver les coefficients $\varphi_k(x)$ pour $k=4,5,\ldots$, nous utilisons la formule du coefficient suivante pour $m=2$:

$$\phi_k(x)=D_t^{(k-m)\alpha}\left(\mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{k-m}\frac{\phi_n(x)\,t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\right]\right)\Bigg|_{t=0},\quad k=m+2,m+3,\ldots$$

où $\phi_i(x)=f_i(x)$, $i=0,1,2,\ldots,m-1$.
On obtient

$$\varphi_k(x)=D_t^{(k-2)\alpha}\left(\mathcal{R}\left[\sum_{n=0}^{k-2}\varphi_n(x)\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\right]\right)\Big|_{t=0}.$$

On pose :

$$\Theta_{k-2} = \sum_{n=0}^{k-2} \varphi_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}.$$

Alors,

$$\varphi_k(x) = \nu D_t^{(k-2)\alpha} \left(\left[\Theta_{k-2}^2\right]_{xx} \right) \Big|_{t=0} - \omega D_t^{(k-2)\alpha} \left(\left[\Theta_{k-2}^2\right]_{xxxx} \right) \Big|_{t=0}.$$

où $\phi_n, n = 0, 1$ est obtenu à partir des conditions initiales et $\phi_n, n = 2, 3, \ldots, k-2$ sont obtenues à partir des calculs précédents.

Considérons :

$$\begin{aligned}
D_t^{(k-2)\alpha} \left(\Theta_{k-2}^2\right) \Big|_{t=0} &= D_t^{(k-2)\alpha} \left(\left(\sum_{n=0}^{k-2} \phi_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right)^2 \right) \Bigg|_{t=0} \\
&= D_t^{(k-2)\alpha} \left(\left(\sum_{m=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{t^{(n+m)\alpha}}{\Gamma(1+m\alpha)\Gamma(1+n\alpha)} \phi_m(x)\phi_n(x) \right)^2 \right) \Bigg|_{t=0} \\
&= \sum_{m=0}^{k-2} \frac{\Gamma(1+(k-2)\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)\Gamma(1+(k-2-m)\alpha)} \phi_m(x)\phi_{k-2-m}(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons la formule pour les coefficients de ce problème :

$$\begin{aligned}
\phi_k(x) =& \nu \sum_{m=0}^{k-2} \frac{\Gamma(1+(k-2)\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)\Gamma(1+(k-2-m)\alpha)} \left[\phi_m(x)\phi_{k-2-m}(x)\right]_{xx} \\
&- \omega \sum_{m=0}^{k-2} \frac{\Gamma(1+(k-2)\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)\Gamma(1+(k-2-m)\alpha)} \left[\phi_m(x)\phi_{k-2-m}(x)\right]_{xxxx}, \quad k = 4, 5, \ldots.
\end{aligned}$$

Le logiciel Maple a été utilisé pour déterminer les coefficients suivants en se basant sur la formule ci-dessus comme indiqué :

$$\begin{aligned}
\phi_4(x) &= -\frac{\lambda^6 \nu}{24\omega^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \cdot \frac{x}{2} \right), \\
\phi_5(x) &= \frac{\lambda^7}{48} \sqrt{\frac{\nu^3}{\omega^5}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \cdot \frac{x}{2} \right), \\
\phi_6(x) &= -\frac{\lambda^8 \nu^2}{96\omega^3} \cosh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \cdot \frac{x}{2} \right), \\
\phi_7(x) &= \frac{\lambda^9}{192} \sqrt{\frac{\nu^5}{\omega^7}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \cdot \frac{x}{2} \right).
\end{aligned}$$

Ces coefficients sont en accord avec la dérivation présentée dans (3.10). Cependant, notre formule propose une approche simplifiée qui permet d'obtenir les mêmes coefficients. La dérivation de la solution en série est omise pour des raisons de concision, les lecteurs intéressés peuvent la consulter dans (3.10).

3.0.3 Equation fractionnaire de Burgers généralisée

On considère l'équation de Burgers généralisée fractionnaire : [10]

$$D_t^{\alpha}u(x,t) = u_{xx}(x,t) + u_x\left(x,\frac{t}{2}\right)u\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}u(x,t) \tag{3.11}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = x$, où $0 < \alpha \leq 1$.

Le terme non linéaire du membre droit est donné par :

$$\mathcal{R}[u] = u_{xx}(x,t) + u_x\left(x,\frac{t}{2}\right)u\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}u(x,t)$$

En utilisant la formule des coefficients suivante :

$$\phi_k(x) = D_t^{(k-1)\alpha}\left(\mathcal{R}\left[f_0(x) + \sum_{m=1}^{k-1}\frac{t^{m\alpha}\phi_m(x)}{\Gamma(1+m\alpha)}\right]\right)\Bigg|_{t=0}, \quad \text{pour } k = 2,3,\ldots$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \mathcal{R}[u(x,0)] = \mathcal{R}[x] = x \\
\phi_2(x) &= D_t^{\alpha}\left(\mathcal{R}\left[x + \frac{\phi_1(x)t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\right)\Bigg|_{t=0} \\
\phi_2(x) &= D_t^{\alpha}\left(\mathcal{R}\left[x + \frac{xt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= D_t^{\alpha}\left(\mathcal{R}\left[x\left(1 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right]\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= D_t^{\alpha}\left(\frac{x}{2}\left(1 + \frac{t^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}\right)^2 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= x\left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs suivants, on définit

$$\phi_2(x) = xc_1(\alpha) \quad \text{où} \quad c_1(\alpha) = \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2}\right).$$

$$
\begin{aligned}
\phi_3(x) &= D_t^{2\alpha}\left(R\left[x+\frac{\phi_1(x)t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{\phi_2(x)t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]\right)\Big|_{t=0}\\
\phi_3(x) &= D_t^{2\alpha}\left(R\left[x\left(1+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}\right)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)\right]\right)\Big|_{t=0}\\
&= D_t^{2\alpha}\left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{t^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}+\left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}\right)\frac{t^{2\alpha}}{2^{2\alpha}\Gamma(1+2\alpha)}\right)^2\right]\Big|_{t=0}\\
&+ D_t^{2\alpha}\left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2}\right)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)\right]\Big|_{t=0}\\
&= D_t^{2\alpha}\left(\frac{xt^{2\alpha}}{2^{2\alpha+1}(\Gamma(1+\alpha))^2}+x\left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2}\right)\frac{t^{2\alpha}}{2\alpha\Gamma(1+2\alpha)}+\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2}\right)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)\Big|_{t=0}\\
&= x\left(\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{2\alpha+1}(\Gamma(1+\alpha))^2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Pour simplifier les calculs suivants, posons :

$$
\phi_3(x) = xc_2(\alpha), \quad \text{où} \quad c_2(\alpha) = \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{2^{2\alpha+1}(\Gamma(1+\alpha))^2}+\left(\frac{1}{2^{2\alpha}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2}\right).
$$

Les coefficients restants peuvent être calculés de la même manière :

$$
\phi_4(x) = xc_3(\alpha), \quad \text{où} \quad c_3(\alpha) = \left(\frac{1}{2^{3\alpha}}+\frac{1}{2}\right)c_2(\alpha)+\frac{\Gamma(1+3\alpha)}{2^{3\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}c_1(\alpha).
$$

$$
\phi_5(x) = xc_4(\alpha), \quad \text{où} \quad c_4(\alpha) = \left(\left(\frac{1}{2^{4\alpha}}+\frac{1}{2}\right)c_3(\alpha)+\frac{\Gamma(1+4\alpha)c_2(\alpha)}{2^{4\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}+\frac{\Gamma(1+4\alpha)(c_1(\alpha))^2}{2^{4\alpha+1}(\Gamma(1+2\alpha))^2}\right).
$$

Par conséquent, la solution approchée en série d'ordre 5 est :

$$
u_5(x,t) = x\left(1+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+c_1(\alpha)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+c_2(\alpha)\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}+c_3(\alpha)\frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)}+c_4(\alpha)\frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)}\right). \tag{35}
$$

Pour valider la précision de la méthode LRPS et la formule proposée pour l'approximation des solutions de l'équation (3.11), le Tableau **3.4** présente une comparaison.

TABLE 3.4 – L'erreur absolue de la solution par perturbation homotopique d'ordre 4 et de la solution approchée LRPS d'ordre 5 pour l'Exemple 3 avec $\alpha = 1$.

x	**t**	**HPM Erreur abs. (ordre 4)**	**LRPSM Erreur abs. (5eme approx.)**
0.25	0.25	0.000002123	$8{,}88 \times 10^{-8}$
0.25	0.50	0.000070943	0.000005838
0.25	0.75	0.000563483	0.000069968
0.25	1.00	0.002487123	0.0004037913
0.50	0.25	0.00004245	$1{,}775 \times 10^{-7}$
0.50	0.50	0.000141885	0.0000116765
0.50	0.75	0.001126970	0.000138194
0.50	1.00	0.004974250	0.000807587
0.75	0.25	0.000006367	$2{,}662 \times 10^{-7}$
0.75	0.50	0.000012830	0.000017512
0.75	0.75	0.001690450	0.000207295
0.75	1.00	0.007461370	0.001211370

Conclusion générale

Ce mémoire a été consacré à l'étude et à la mise en œuvre d'une méthode analytique hybride combinant la méthode modifiée de la série de puissances résiduelle (RPSM) et la transformation de Laplace pour la résolution d'équations différentielles fractionnaires, au sens de Caputo. Cette approche s'est révélée à la fois efficace, accessible et polyvalente, adaptée à divers types d'équations, y compris celles d'ordre entier et fractionnaire.

À travers une progression structurée, nous avons posé les bases théoriques nécessaires, exposé rigoureusement la méthode proposée, puis validé son efficacité au moyen de plusieurs exemples numériques et applications concrètes. Les résultats obtenus soulignent la convergence rapide, la précision numérique élevée ainsi que la simplicité de mise en œuvre de cette méthode, qui peut constituer une alternative compétitive aux techniques classiques plus lourdes sur le plan computationnel.

Au-delà de ces résultats, cette étude ouvre la voie à de nombreuses perspectives de recherche. Parmi elles, on peut citer l'extension de cette approche à des systèmes non linéaires, multi-dimensionnels ou à conditions complexes, ainsi que le raffinement des algorithmes associés en vue d'une amélioration de la performance numérique. Ces pistes permettront de renforcer encore davantage l'utilité et l'applicabilité de cette méthode dans des contextes scientifiques et industriels variés.

Bibliographie

[1] S.Abbas, M.Benchohra and G.M.N'Gurkata ; *Topics in Fractional Differential Equations* , Springer Science and Business Media New York, 2012.

[2] K.S. Miller, B. Ross ; An Introduction to the Fractional Calculus and *Fractional Diffrential Equation* ; John Wiley and Sons, INC, New York, 1993.

[3] M. Alquran, M. Ali, M. Alsukhour, I. Jaradat ;*Promoted residual power series technique with Laplace transform to solvesome time-fractional problems arising in physics*, 2020.

[4] W. Albalawi, R. Shah , K. Nonlaopon , L.S. El-Sherif and S.A. El-Tantawy ; *Laplace Residual Power Series Method for SolvingThree-Dimensional Fractional Helmholtz Equations* , 2023.

[5] Mohammad Alaroud, *Application of Laplace residual power series method for approximate solutions of fractional IVP's*

[6] M.H. Al-Smadi,*Solving initial value problems by residual power series method, Theoretical Mathematics et Applications, 3(1), 2013, 199-210.*

[7] S. Momani, O. Abu Arqub, M. Abu Hammad and Z. Abo-Hammour, *A residual power series technique for solving systems of initial value problems, Appl. Math. Inf. Sci. 10, No. 2, 765-775 (2016).*

[8] H. Aljarrah, M. Alaroud, A. Ishak, M. Darus, *Approximate solution of nonlinear time-fractional PDEs by Laplace residual power series method .*

[9] Z. Körpınar, *The residual power series method for solving fractional Klein-Gordon equation, SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE, 2016.*

[10] P. Kittipoom, *Extracting explicit coefficient formulas :A robust approach to the Laplace residual power series method .*

[11] I. Podlubny, *Fractional Differential equations, Academic Press, New York, 1999.*