



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
« Analyse fonctionnelle et applications »

Présenté Par :
FARAH ALI et BAH DAHOU

Sous L'intitulé :

Résultats d'existence et d'unicité pour certaines classes
d'équations différentielles fractionnaires

Soutenu publiquement le 29 / 06 / 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr MAHROUZ TAYEB

MCA Université de Tiaret

Président

Mr DELLAL MOHAMED

MCA Université de Tiaret

Examineur

Mr BENMEHIDI HAMMOU

MCA Université de Tiaret

Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

En préambule à ce mémoire, nous tenons tout d'abord à remercier Dieu Tout-Puissant, qui nous a donné la force, la patience et la volonté nécessaires pour mener à bien ce modeste travail.

Nous exprimons ensuite notre profonde gratitude à Monsieur Benmehidi Hammou, notre encadrant, pour ses précieux conseils, son accompagnement attentif et ses orientations pertinentes tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Nos vifs remerciements s'adressent également à l'ensemble de l'équipe pédagogique de la Faculté des Mathématiques pour leurs efforts constants et la qualité de leur enseignement. Nous remercions tout particulièrement les enseignants pour le savoir qu'ils nous ont transmis et leur disponibilité.

Nous remercions également les enseignants qui ont eu l'amabilité de répondre à nos questions et de nous apporter les éclaircissements nécessaires.

Nos sincères remerciements vont aussi aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail en acceptant de l'évaluer, et pour leurs remarques constructives qui contribueront à l'enrichir.

Enfin, nous remercions toutes les personnes, de près ou de loin, ayant contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Merci à toutes et à tous.

Dédicace

À l'occasion de l'élaboration de cette humble œuvre, fruit des efforts accumulés tout au long de mon parcours éducatif, il m'est un devoir de cœur de la dédier à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation et m'ont aidé à faire face aux épreuves de la vie. Car la vie, aussi difficile soit-elle, garde ses douceurs cachées au creux de ses souffrances.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma gratitude la plus profonde à mes parents, les plus belles personnes depuis le début de mon existence et pour l'éternité. Leur amour, leurs sacrifices et leur soutien inconditionnel sont à l'origine de tout ce que je suis.

Je dédie également ce travail à mon épouse et mes enfants yacine , younes et youcef , source de protection, de réconfort et de confiance, dont la présence constante m'a toujours porté.

Je n'oublie pas mon collègue et ami Ali, pour sa patience, son soutien et sa précieuse compagnie tout au long de cette année.

Bah Dahou

Dédicace

Dieu Tout-Puissant, merci d'être toujours à mes côtés.

Je dédie ce travail aux êtres les plus chers à mon cœur :

À la meilleure des mamans, qui m'a soutenu tout au long de mes années d'étude, qui m'a appris à aimer le travail et à adopter un bon comportement. Merci pour ton amour infini et ta bienveillance de chaque instant, jour et nuit.

À mon épouse, mon modèle éternel, mon soutien moral, ma source de joie et de bonheur. Merci d'être toujours à mes côtés, par ton amour et ton appui constant. Je n'oublie pas non plus mon cher fils Mouad que Dieu le bénisse.

À mes chères sœurs, à mes chers frères, et à toute ma famille, avec tout mon amour.

À mon cher binôme Dahou et à sa famille, à tous mes amis, et à tous ceux que j'aime : je vous dédie ce travail.

ALI FERRAH

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de certaines équations et systèmes différentiels fractionnaires, en utilisant différentes approches de dérivées fractionnaires, telles que celles de Caputo, Riemann–Liouville et Hadamard. Cette étude analytique porte principalement sur l'existence et l'unicité des solutions, à l'aide de l'application de certains théorèmes de point fixe. À la fin de chaque chapitre, des exemples numériques sont présentés afin d'illustrer et de renforcer les résultats théoriques obtenus.

Mots clés : Caputo-Hadamard, existence, Riemann-Liouville, unicité.

Abstract

In this master thesis, we focus on the study of certain fractional differential equations and systems, using various approaches to fractional derivatives, such as those of Caputo, Riemann–Liouville, and Hadamard. This analytical study mainly addresses the existence and uniqueness of solutions through the application of fixed point theorems. At the end of each chapter, numerical examples are provided to illustrate and support the theoretical results obtained.

Keywords : Caputo-Hadamard, existence, Riemann-Liouville, uniqueness.

ملخص:

في هذه المذكرة، نولي اهتماما بدراسة بعض المعادلات و الأنظمة التفاضلية الكسرية مثل ريمان- ليوفيل، كابوتو وأدامار. تركز هذه الدراسة التحليلية على بحث وجود و وحدانية الحلول بالإعتماد على تطبيق بعض نظريات النقطة الثابتة. في ختام كل فصل، نقدم أمثلة تطبيقية تدعم النتائج النظرية التي تم التوصل إليها.

كلمات مفتاحية: كابوتو-أدامار، وجود، ريمان-ليوفيل، وحدانية.

Introduction Générale

Le calcul fractionnaire constitue une branche des mathématiques qui s'intéresse à l'étude des dérivées et intégrales d'ordres non entiers. Ce concept a été introduit pour la première fois par le célèbre mathématicien L'Hôpital, dans une lettre adressée à Leibniz. Depuis cet événement, ce domaine a connu un développement remarquable, en particulier au cours des dernières décennies, au point de devenir l'un des sujets majeurs ayant suscité un vif intérêt parmi les chercheurs.

Plusieurs mathématiciens ont contribué au développement de cette discipline, notamment Riemann, Liouville, Hadamard, entre autres. Leurs travaux fondamentaux ont jeté les bases des applications modernes, en particulier dans le cadre des équations différentielles fractionnaires, qui occupent aujourd'hui une place importante dans la modélisation de phénomènes complexes, notamment en viscoélasticité, électrochimie, automatique, ainsi que dans d'autres problématiques physiques.

Au cours des deux dernières décennies, il a été établi qu'une série de phénomènes peuvent être étudiés à travers le calcul fractionnaire. Il a été démontré que les propriétés rhéologiques [22] de certains polymères peuvent être modélisées à l'aide d'équations différentielles fractionnaires [4, 5, 8]. Des phénomènes de nature fractionnaire ont été identifiés, notamment dans l'amortissement observé dans les mousses de polyuréthane à haute densité [25], la dynamique des réacteurs nucléaires [23], la thermoélasticité [21], les vibrations mécaniques [7], ou encore dans les tissus biologiques [17].

Ce document est structuré en trois chapitres.

Le **premier chapitre** est consacré à l'introduction de plusieurs notions clés de l'analyse fonctionnelles et du calcul fractionnaire. Il présente également les définitions et propriétés de fonctions spéciales, telles que la fonction Gamma et la fonction Bêta. Une section est dédiée aux différentes approches des opérateurs fractionnaires, qui constituent un cadre théorique indispensable à l'étude des équations différentielles fractionnaires.

Dans le **deuxième chapitre**, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions d'une équation différentielle fractionnaire faisant intervenir une dérivée fractionnaire de type Caputo–Hadamard,

sous des conditions aux limites. Ce problème est présenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{CH}D^p \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right) = \psi(t, u(t)), \quad t \in [1, e], p \in]1, 2], \\ {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=e} = \lambda_1 {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=\eta_1}, \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=1} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où ${}^{CH}D^p$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $1 < p \leq 2$, $\lambda \in]0, 1[$, et $\eta \in]1, e[$.

Le **troisième chapitre** est dédié à l'étude des résultats d'existence et d'unicité des solutions pour un système d'équations différentielles fractionnaires séquentielles. Le système considéré est de la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\delta_1} \left[{}^CD^{\lambda_1} \left(\frac{u(t)}{w_1(t, u(t), v(t))} \right) \right] = f_1(t, u(t), v(t)) \\ {}^{RL}D^{\delta_2} \left[{}^CD^{\lambda_2} \left(\frac{v(t)}{w_2(t, u(t), v(t))} \right) \right] = f_2(t, u(t), v(t)) \\ u(0) = v(0) = 0, \quad u(1) = v(1) = 0 \\ 0 \leq t \leq 1, 0 < \delta_i, \lambda_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

où ${}^{RL}D^{\delta_i}$ et ${}^CD^{\lambda_i}$, $i = 1, 2$ désignent respectivement les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, $w_1, w_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données.

Table des matières

Résumé

Résumé	ii
--------	----

1 Préliminaires

1.1 Fonctions spéciales	1
1.1.1 La fonction Gamma	2
1.1.2 La fonction Beta	4
1.2 Calcul fractionnaire	4
1.3 Différentes approches de l'intégrale fractionnaire	5
1.4 Différentes approches de la dérivée fractionnaire	8
1.5 Espaces fonctionnels	10
1.6 Lemmes Fondamentaux	11
1.7 Théorèmes de point fixe	12

2 Équation différentielle fractionnaire hybride de type Caputo–Hadamard

2.1 Résultats d'existence et d'unicité	14
2.2 Exemples	19

3 Système couplé d'équations hybrides fractionnaires de type séquentielle

3.1 Résultats d'existence	23
3.2 Exemples	28

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre a pour objectif de rappeler les notions fondamentales qui constitueront le socle théorique de l'ensemble de ce mémoire. Il présente, de manière rigoureuse, un ensemble de concepts essentiels du calcul fractionnaire, indispensables à la compréhension des développements qui suivront. Parmi ces notions, une attention particulière est accordée aux fonctions spéciales, notamment la fonction Gamma et la fonction Bêta, qui jouent un rôle central dans les équations différentielles fractionnaires. Différentes approches d'intégration et de dérivation fractionnaires sont ensuite présentées, chacune de ces approches possède des propriétés spécifiques.

Par ailleurs, quelques espaces fonctionnels classiques sont introduits. Le chapitre s'attarde également sur certains lemmes fondamentaux du calcul fractionnaire, qui seront utilisés dans la suite de notre mémoire. Par la suite, quelques théorèmes de point fixe essentiels, tels que ceux de Banach, l'alternative de Leray-Schauder, sont présentés. Ces outils mathématiques puissants permettent, sous certaines conditions, d'établir l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes étudiés.

L'ensemble du contenu de ce chapitre s'appuie sur des références spécialisées dans le domaine. Le lecteur pourra consulter, par exemple, [11, 14, 28, 20] pour approfondir les aspects théoriques et historiques abordés.

1.1 Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales, en particulier la fonction Gamma et la fonction Bêta, jouent un rôle fondamental dans le calcul fractionnaire. La fonction Gamma, considérée comme une généralisation de la factorielle aux réels, intervient fréquemment dans la définition des dérivées et intégrales

fractionnaires, notamment dans les formules de Riemann-Liouville et Caputo. Quant à la fonction Bêta, elle apparaît souvent dans les formules d'intégration et les transformations associées aux opérateurs fractionnaires. Ces deux fonctions permettent ainsi de formaliser et d'étendre les concepts classiques du calcul différentiel à des ordres non entiers, ouvrant la voie à de nombreuses applications en modélisation physique, ingénierie et sciences appliquées. Pour plus de détails, consulter par exemple [14, 16, 20].

1.1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1.1 Soit $\alpha > 0$. La fonction Gamma, notée $\Gamma(\alpha)$, est définie par l'intégrale impropre suivante :

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1.1 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z > 0$. La fonction Γ vérifie les propriétés :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (1.2)$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Proposition 1.1.2 Soit $\alpha > 0$. La fonction Gamma est donnée par la formule suivante :

$$\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2\alpha-1} dx$$

Démonstration : En utilisant le changement de variable $x = u^2$. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (u^2)^{\alpha-1} e^{-u^2} \cdot 2u du \\ &= 2 \int_0^{\infty} u^{2\alpha-1} e^{-u^2} du \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^{2\alpha-1} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Proposition 1.1.3 Soit $x, y > 0$. Alors

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} \quad (1.4)$$

Démonstration : Nous démontrons ce résultat en évaluant de deux manières différentes l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_R \exp(-t^2 - u^2) t^{2x-1} u^{2y-1} dt du$$

où R désigne le premier quadrant du plan (t, u) , c'est-à-dire $R = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

L'idée consiste à exploiter deux systèmes de coordonnées distincts (cartésiennes et polaires) pour évaluer cette intégrale et en déduire une relation utile impliquant la fonction Gamma. Nous avons

$$\begin{aligned} I &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^{\infty} \exp(-t^2 - u^2) t^{2x-1} u^{2y-1} dt du \\ &= \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2y-1} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(x) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(y) \\ &= \frac{1}{4} \Gamma(x) \Gamma(y). \end{aligned} \tag{1.5}$$

D'autre part, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \exp(-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) (r \cos \theta)^{2x-1} (r \sin \theta)^{2y-1} r dr d\theta \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2x-1} \cos^{2x-1} \theta r^{2y-1} \sin^{2y-1} \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(x+y) \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En identifiant les deux expressions données par (1.5) et (1.6), on obtient immédiatement le résultat (1.4).

Proposition 1.1.4

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Démonstration : Posant $x = y = \frac{1}{2}$ dans la proposition 1.1.3, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\theta &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2 \quad (\text{en utilisant le fait que } \Gamma(1) = 1). \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration du membre de gauche, on obtient :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right\}^2$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

1.1.2 La fonction Beta

Définition 1.1.2 Soit $x, y > 0$ deux réels. La fonction Bêta, notée $B(\cdot, \cdot)$, est définie par :

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (1.7)$$

Proposition 1.1.5 La fonction Beta $B(x, y)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Symétrie :

$$B(x, y) = B(y, x). \quad (1.8)$$

2. Relation de récurrence :

$$B(x, y) = \frac{y-1}{x+y-1} B(x, y-1), \quad \text{pour } y > 1. \quad (1.9)$$

3. Lien avec la fonction Gamma :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.10)$$

1.2 Calcul fractionnaire

L'idée du calcul fractionnaire remonte à plus de trois siècles. En 1695, dans une lettre devenue célèbre, Leibniz s'interrogeait sur la signification d'une dérivée d'ordre non entier, en posant la

question à son correspondant Guillaume de l'Hôpital. Cette interrogation, longtemps considérée comme purement spéculative, a néanmoins éveillé l'intérêt de nombreux mathématiciens au fil des siècles. Ce n'est toutefois que durant les dernières décennies, sous l'impulsion des avancées technologiques et des exigences croissantes de modélisation dans les sciences appliquées, que le calcul fractionnaire a connu un essor considérable et une reconnaissance accrue. Pour une présentation approfondie de ce développement, on pourra consulter, entre autres, les ouvrages de Kilbas et al. [14], Miller et Ross [18], ainsi que le volume édité par Sabatier et al. [24].

Aujourd'hui, il s'impose comme un domaine de recherche majeur en raison de ses vastes applications dans la modélisation mathématique de systèmes complexes, non locaux et non linéaires. Contrairement au calcul classique, restreint aux dérivées et intégrales d'ordre entier, le calcul fractionnaire étend ces notions à des ordres réels ou même complexes. Il permet ainsi de représenter plus fidèlement certains phénomènes physiques, biologiques ou économiques, notamment ceux où les effets de mémoire et de transmission héréditaire jouent un rôle fondamental.

1.3 Différentes approches de l'intégrale fractionnaire

Dans le cadre du calcul fractionnaire, plusieurs approches de l'intégrale fractionnaire ont été développées afin de mieux modéliser des phénomènes dans diverses disciplines. Parmi les approches les plus connues figurent celles de Riemann-Liouville et de Hadamard. L'intégrale de Riemann-Liouville constitue l'une des définitions les plus anciennes et les plus utilisées ; elle repose sur une généralisation de l'opérateur d'intégration classique via le noyau singulier $(t-s)^{\alpha-1}$, ce qui permet une extension naturelle du concept d'ordre entier à un ordre réel positif. De son côté, l'intégrale de Hadamard introduit une modification logarithmique du noyau, avec des expressions de la forme $(\ln(t/s))^{\alpha-1}$, ce qui s'avère particulièrement adapté aux fonctions définies sur des intervalles de type $(0, \infty)$. Ces différentes définitions offrent des outils complémentaires selon les propriétés des fonctions considérées et les conditions aux limites du problème étudié. pour plus de détails, voir par exemple

Définition 1.3.1 Soit $u: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction u est définie par :

$${}^{RL}I_a^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \quad t > a > 0. \quad (1.11)$$

Exemple 1.3.1 Soit $u(t) = t^\beta$ avec $\beta > -1$. En utilisant la formule (1.11) on obtient :

$$I_0^\alpha(t^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

Posons $s = tz \Rightarrow ds = t dz$, alors :

$$s^\beta = t^\beta z^\beta, \quad t-s = t(1-z) \Rightarrow (t-s)^{\alpha-1} = t^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1}$$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha(t^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1} \cdot t^\beta z^\beta \cdot t dz \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz \end{aligned}$$

En utilisant la définition 1.1.2, on obtient

$$I_0^\alpha(t^\beta) = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) = \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

Donc

$$I_0^\alpha(t^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}$$

Remarque 1.3.1 Prenons les valeurs particulières :

$$\beta = 2, \quad \alpha = 1.$$

En appliquant la formule, on obtient :

$$I_0^1(t^2) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(4)} t^3.$$

Ainsi

$$\boxed{I_0^1(t^2) = \frac{1}{3} t^3}.$$

Ce résultat est conforme à l'intégrale classique :

$$\int_0^t s^2 ds = \frac{1}{3} t^3.$$

Proposition 1.3.1 Soit $\alpha > 0$. Alors l'opérateur ${}^{RL}I_a^\alpha$ est bien définie.

Proposition 1.3.2 Soient $u \in L^1(\Omega)$ et $\alpha, \beta > 0$. Alors

$${}^{RL}I_a^\alpha \left(I_a^\beta u(t) \right) = {}^{RL}I_a^{\alpha+\beta} u(t)$$

Définition 1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction continue $u : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$${}^H I_1^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} u(s) \frac{ds}{s}, \quad t > 1. \quad (1.12)$$

Exemple 1.3.2 Considérons l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $u(t) = \log t$, définie par :

$${}^H I_1^\alpha (\log t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \log s \cdot \frac{ds}{s}$$

Nous effectuons le changement de variable $s = te^{-u}$, ce qui donne $ds = -te^{-u} du$. L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} {}^H I_1^\alpha (\log t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\log t} u^{\alpha-1} (\log t - u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\log t \int_0^{\log t} u^{\alpha-1} du - \int_0^{\log t} u^\alpha du \right] \end{aligned}$$

Les intégrales élémentaires donnent :

$$\int_0^{\log t} u^{\alpha-1} du = \frac{(\log t)^\alpha}{\alpha}, \quad \int_0^{\log t} u^\alpha du = \frac{(\log t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} {}^H I_1^\alpha (\log t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\log t \cdot \frac{(\log t)^\alpha}{\alpha} - \frac{(\log t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] \\ &= \frac{(\log t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} \right) \\ &= \frac{(\log t)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Proposition 1.3.3 Soit $f \in L^1([1, +\infty[)$. Alors $\forall \alpha, \beta > 0$, on a

$${}^H I_1^\alpha \left({}^H I_1^\beta f(x) \right) = {}^H I_1^{\alpha+\beta} f(t) = {}^H I_1^\beta \left({}^H I_1^\alpha f(x) \right)$$

1.4 Différentes approches de la dérivée fractionnaire

La dérivation fractionnaire constitue une extension de la dérivée classique à des ordres non entiers. Elle s'est imposée comme un outil efficace pour modéliser des phénomènes à mémoire ou à comportement non local, fréquemment rencontrés dans les sciences appliquées. Plusieurs formulations coexistent dans la littérature, chacune adaptée à un type spécifique de problème.

Ces approches, bien que fondées sur des principes similaires, présentent des propriétés analytiques distinctes qui orientent leur choix selon le contexte mathématique ou physique étudié. Pour une étude plus approfondie, se référer à [14, 18, 20].

Définition 1.4.1 Soit $u : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction u est définie par :

$${}^{RL}D_a^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s) ds \quad (1.13)$$

avec $n = [\alpha] + 1$, $t > a > 0$.

Remarque 1.4.1 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$.

1. Si $\alpha = 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre zéro correspond simplement à la fonction elle-même :

$$({}^{RL}D_a^0 u)(t) = u(t).$$

2. Si $\alpha = n$, la dérivée fractionnaire coïncide avec la dérivée usuelle d'ordre n :

$$({}^{RL}D_a^n u)(t) = u^{(n)}(t),$$

Exemple 1.4.1 Soit $0 < \alpha < 1$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par

$${}^{RL}D_0^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (1.14)$$

Posons $u(t) = t^3$, on obtient

$${}^{RL}D_0^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s^3}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (1.15)$$

Calculons l'intégrale $\int_0^t \frac{s^3}{(t-s)^\alpha} ds$: on pose $s = ty \Rightarrow ds = t dy$. Alors

$$\int_0^t \frac{s^3}{(t-s)^\alpha} ds = t^{3-\alpha+1} \int_0^1 y^3 (1-y)^\alpha dy = t^{4-\alpha} B(4, 1-\alpha).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_0^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(t^{4-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(5-\alpha)} \right) \\ &= \frac{(4-\alpha)\Gamma(4)}{\Gamma(5-\alpha)} t^{3-\alpha} \end{aligned}$$

Définition 1.4.2 Soit $u : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$, avec $n = [\alpha] + 1$, est définie par :

$${}^C D_{0+}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(s) ds \quad (1.16)$$

où $n-1 < \alpha < n$.

Exemple 1.4.2 Considérons la fonction constante $u(t) = K$, où $K \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0, 1[$. La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α est définie par :

$${}^C D_a^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds.$$

Puisque la dérivée classique de la fonction constante est nulle :

$$u'(t) = 0,$$

on obtient :

$${}^C D_a^\alpha K = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{0}{(t-s)^\alpha} ds = 0.$$

Alors, La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante est nulle :

Définition 1.4.3 Soient $u : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre α , avec $n = [\alpha] + 1$ de la fonction u est donnée par :

$${}^{CH}D_1^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n-\alpha-1} \delta^n u(s) \frac{ds}{s}, \quad \text{où } n-1 < \alpha < n, \quad (1.17)$$

1.5 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous introduisons quelques espaces fonctionnels fondamentaux. Ces structures jouent un rôle central en analyse fonctionnelle et dans divers domaines des mathématiques, en offrant un cadre approprié à l'étude des propriétés des fonctions et des opérateurs. Pour plus de détails sur ces concepts, veuillez consulter les références suivantes [14, 18, 20].

Dans la suite, on désignera par Ω l'intervalle de la forme $[a, b]$, $0 \leq a < b$.

Définition 1.5.1 *L'espace des fonctions continues $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est noté $C(\Omega)$ et*

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Définition 1.5.2 *Soit $k \in \mathbb{Z}_+$, on note $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k -fois continument différentiables sur Ω , et*

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{\alpha=0}^k \|f^{(\alpha)}\|_{C(\Omega)}.$$

Définition 1.5.3 *On note par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω , noté $AC(\Omega)$ est l'espace des fonctions primitives de fonctions Lebesgue-sommables c'est-à-dire*

$$f \in AC(\Omega) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1(\Omega) \text{ telle que } f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Théorème 1.1 *L'espace $AC(\Omega)$ coïncide avec l'espace des primitives de fonctions sommable de Lebesgue c'est-à-dire.*

$$f \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \quad (\varphi \in L^1(\Omega))$$

Définition 1.5.4 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $AC^n(\Omega)$, l'espace des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n-1)$ -fois continument dérivable sur Ω tel que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$, i.e. :*

$$AC^n(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ et } f^{(n-1)} \in AC(\Omega)\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Définition 1.5.5 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = t \frac{d}{dt}$. L'espace des fonctions f qui ont δ^{n-1} -dérivées absolument continues, noté $AC_\delta^n(\Omega)$ est défini comme suit :*

$$AC_{\delta}^n(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} : \delta^{n-1}f \in AC(\Omega)\}$$

Clairement $AC_{\delta}^1(\Omega) \equiv AC(\Omega)$.

1.6 Lemmes Fondamentaux

Dans cette partie, nous allons présenter quelques lemmes sur les dérivées fractionnaires, qui joueront un rôle essentiel dans l'analyse qui suivra. Pour plus de détails, vous pouvez consulter les référence [6, 14, 18].

Lemme 1.1 *Pour $\lambda > 0$, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^C D^{\lambda} z(t) = 0$$

est donnée par :

$$z(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{avec } n-1 < \lambda < n.$$

Lemme 1.2 *Soit $\delta > 0$. Alors, pour toute fonction $z \in C(0, 1) \cap L^1(0, 1)$ telle que ${}^{RL} D^{\delta} z \in C(0, 1) \cap L^1(0, 1)$, on a :*

$$I^{\delta} [{}^{RL} D^{\delta} z(t)] = z(t) + \sum_{i=1}^n c_i t^{\delta-i}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = [\delta] + 1$.

Lemme 1.3 *Soit $\lambda > 0$. Alors :*

$$I^{\lambda} [{}^C D^{\lambda} z(t)] = z(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad n = [\lambda] + 1.$$

Lemme 1.4 *Soit $u \in AC_{\delta}^n([a, T], \mathbb{R})$. Alors,*

$${}^H I^v ({}^{CH} D^v u)(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\log \frac{t}{a} \right)^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad n = [v] + 1.$$

1.7 Théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe occupent une place fondamentale dans l'étude des équations différentielles non linéaires. Ils constituent des outils essentiels permettant de démontrer l'existence de solutions, en montrant que celles-ci sont des points fixes d'un opérateur approprié.

Dans le cadre de notre travail, nous faisons principalement appel à deux théorèmes classiques, le théorème du point fixe de Banach et l'alternative de Leray-Schauder, qui fournissent un cadre théorique adapté pour établir l'existence et l'unicité des solutions. Pour plus de détails, consultez [14, 18, 20].

Dans ce qui suit, X désigne un espace de Banach .

Définition 1.7.1 *Un opérateur $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ est dite contraction s'il existe une constante $k \in]0, 1[$, tels que, pour tout $x, y \in X$, on a*

$$\|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(y)\| \leq k \|x - y\| .$$

Théorème 1.2 (*Theoreme de point fixe de Banach*) *soit $\mathcal{T} : X \longrightarrow X$ un opérateur de contraction . Alors, $\mathcal{T}$ admet un unique point fixe dans X .*

Théorème 1.3 (*theoreme d'Arzela-Ascoli*) *Soit Ω un ensemble de X . alors Ω est relativement compact dans X si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- i) Ω est uniformément bornée.*
- ii) Ω est équicontinue.*

Théorème 1.4 [*Alternative de Leray-Schauder*] *Soit $F : E \rightarrow E$ un opérateur complètement continu. Soit*

$$\xi(F) = \{x \in E : x = \lambda F(x) \text{ pour un certain } 0 < \lambda < 1\}.$$

Alors, soit l'ensemble $\xi(F)$ est borné, soit F admet au moins un point fixe.

Chapitre 2

Équation différentielle fractionnaire hybride de type Caputo–Hadamard

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires de Hadamard reposent sur une dérivée fractionnaire particulière, caractérisée par la présence d'un noyau logarithmique dans sa définition intégrale. Ce type d'équation permet de modéliser efficacement des phénomènes complexes et non locaux. Ces dernières années, elles ont suscité un intérêt scientifique croissant en raison de leur pertinence dans divers domaines appliqués. Pour une étude approfondie du calcul fractionnaire de Hadamard, ainsi que des applications associées, on pourra consulter les travaux référencés dans [1, 3, 9, 10].

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles fractionnaires hybrides de Hadamard. Ces résultats sont établies à l'aide du principe de contraction de Banach, tandis que l'existence de solutions est également démontrée à l'aide de l'alternative de Leray-Schauder. L'équation considérée est présentée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{CH}D^p \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right) = \psi(t, u(t)), \quad t \in [1, e], p \in]1, 2], \\ {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=e} = \lambda_1 {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=\eta_1}, \quad \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=1} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où ${}^{CH}D^p$ est la dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre $1 < p \leq 2$, $\lambda \in]0, 1[$, et $\eta \in]1, e[$.

Dans la section suivante, nous exposerons les résultats principaux de cette étude. Nous commencerons par rechercher une solution intégrale de l'équation (2.1). À partir de ce résultat, nous déterminerons l'opérateur associé, puis nous développerons des théories concernant l'existence et l'unicité des solutions pour ce type de système d'équations.

2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Lemme 2.1 Soit $h \in C([1, e], \mathbb{R})$, la solution intégrale du problème

$$\begin{cases} {}^{CH}D^p \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right) = h(t), \quad t \in [1, e], p \in (1, 2], \\ \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=1} = 0, \quad {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=e} = \lambda {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right)_{t=\eta} \end{cases} \quad (2.2)$$

est donné par :

$$\begin{aligned} u(t) = \phi(t, u(t)) \times & \left(\frac{-1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} h(r) \frac{dr}{r} + \frac{\log t}{(1-\lambda) \Gamma(p-1)} \right. \\ & \left. \times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} h(r) \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} h(r) \frac{dr}{r} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Démonstration. En appliquant l'opérateur ${}^H I_1^p$ à l'équation

$${}^{CH}D^p \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right) = h(t),$$

et en utilisant le lemme 1.4, on obtient

$$\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} = {}^H I_1^p h(t) + a_0 + a_1 \log t.$$

La première condition, nous donne $a_0 = 0$. Ainsi, on a :

$$\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} = {}^H I_1^p h(t) + a_1 \log t. \quad (2.4)$$

En utilisant les propriétés des dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard, on obtient :

$${}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} \right) = {}^H I_1^{p-1} h(t) + a_1.$$

En utilisant la deuxième condition, on obtient :

$$a_1 = \frac{1}{1-\lambda} \left[{}^H I_1^{p-1} h(e) \lambda {}^H I_1^{p-1} h(\eta) \right]. \quad (2.5)$$

En substituant l'équation (2.5) dans (2.4), on obtient :

$$\frac{u(t)}{\phi(t, u(t))} = {}^H I_1^p h(t) + \frac{1}{1-\lambda} \left[{}^H I_1^{p-1} h(e) \lambda {}^H I_1^{p-1} h(\eta) \right] \log t.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} u(t) &= \phi(t, u(t)) \times \left(\frac{1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} h(r) \frac{dr}{r} \right) + \frac{\log t}{(1-\lambda) \Gamma(p-1)} \\ &\times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} h(r) \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} h(r) \frac{dr}{r} \right], \quad t \in [1, e]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Soit $\mathcal{E} = C([1, e], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[1, e]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|z\| = \sup\{|z(t)| : t \in [1, e]\}.$$

Par le lemme (2.1), on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ u &\longmapsto \mathcal{A}u \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u(t) &= \phi(t, u(t)) \times \left(\frac{1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} \psi(r, u(r)) \frac{dr}{r} \right) + \frac{\log t}{(1-\lambda) \Gamma(p-1)} \\ &\times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} \psi(r, u(r)) \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} \psi(r, u(r)) \frac{dr}{r} \right], \quad t \in [1, e]. \end{aligned}$$

Considérons les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$: On suppose que la fonctions ϕ est continue et bornée. Autrement dit, il existe une constante

λ_ϕ positive telle que

$$|\phi(t, u)| \leq \lambda_\phi, \quad \forall t \in [1, e] \times \mathbb{R}.$$

$(\mathcal{H}_2)$: La fonction ψ est continue et bornée, et il existe une constantes $v > 0$ tel que

$$|\psi(t, x_1) - \psi(t, x_2)| \leq v |x_1 - x_2|, \quad \forall t \in [1, e], x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2).$$

$(\mathcal{H}_3)$: Il existe deux constantes positives ω_0, ω_1 telles que

$$|\psi(t, x)| \leq \omega_0 + \omega_1 |x|, \quad \forall t \in [1, e], x \in \mathbb{R}.$$

$(\mathcal{H}_4)$: Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ un ensemble borné, alors il existe $\vartheta > 0$ tel que

$$|\psi(t, u(t))| \leq \vartheta, \quad \forall u \in \mathcal{S}.$$

Pour simplifier les calculs qui suivent, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \sup_{1 \leq t \leq e} \left\{ \left(\frac{1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} \frac{dr}{r} + \frac{\log t}{(1-\lambda) \Gamma(p-1)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} \right] \right\} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{(1-\lambda) \Gamma(p)} [1 + \lambda (\log \eta)^{p-1}] \end{aligned}$$

Le théorème suivant est basé sur le principe de contraction de Bannach.

Théorème 2.1 *Si les deux conditions $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$: sont satisfaites, et si*

$$\lambda_\phi \mathcal{K} v < 1,$$

alors le problème aux limites (2.1) admet une solution unique.

Démonstration. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \forall t \in [1, e]$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(x_1)(t) - \mathcal{A}(x_2)(t)| &\leq \lambda_\phi \sup_{1 \leq t \leq e} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} |\psi(r, x_1(r)) - \psi(r, x_2(r))| \frac{dr}{r} \right. \\
&\quad + \frac{\log t}{(1-\lambda)\Gamma(p-1)} \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} |\psi(r, x_1(r)) - \psi(r, x_2(r))| \frac{dr}{r} \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} |\psi(r, x_1(r)) - w_1(r, x_2(r))| \frac{dr}{r} \right] \right\} \\
&\leq \lambda_\phi v \|x_1 - x_2\| \sup_{1 \leq t \leq e} \left\{ \frac{-1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} \frac{dr}{r} + \frac{\log t}{(1-\lambda_1)\Gamma(p-1)} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} - \lambda_1 \int_1^{\eta_1} \left(\log \frac{\eta_1}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} \right] \right\} \\
&\leq \lambda_\phi \mathcal{K}v \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

La condition $\lambda_\phi \mathcal{K}v < 1$ implique que l'opérateur $\mathcal{A}$ est contractant. Ainsi, en vertu du théorème du point fixe de Banach, le problème (2.1) admet une solution unique sur l'intervalle $[1, e]$.

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_3)$ et $(\mathcal{H}_4)$ sont satisfaites. Si*

$$\lambda_\phi \mathcal{K}\omega_1 < 1,$$

alors le problème (2.1) admet au moins une solution.

Démonstration. La démonstration de ce théorème se fait en quatre étapes :

Etape1 : Montrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est complètement continu. La continuité de l'opérateur $\mathcal{A}$ découle de celle des fonctions ϕ, ψ .

Etape2 : En utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_4)$, $\forall u \in \mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}u(t)| &= \phi(t, u(t)) \times \left(\frac{-1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} \psi(r, u(r)) \frac{dr}{r} + \frac{\log t}{(1-\lambda)\Gamma(p-1)} \right. \\
&\quad \times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} \psi(r, u(r)) \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^{\eta_1} \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} \psi(r, u(r)) \frac{dr}{r} \Big] \Big| \\
&\leq \lambda_\phi \sup_{1 \leq t \leq e} \left\{ \frac{-1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} |\psi(r, u(r))| \frac{dr}{r} + \frac{\log t}{(1-\lambda)\Gamma(p-1)} \right. \\
&\quad \times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} |\psi(r, u(r))| \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} |\psi(r, u(r))| \frac{dr}{r} \Big] \Big\} \quad (2.7) \\
&\leq \lambda_\phi \vartheta \sup_{1 \leq t \leq e} \left\{ \left(\frac{-1}{\Gamma(p)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{r} \right)^{p-1} \frac{dr}{r} + \frac{\log t}{(1-\lambda)\Gamma(p-1)} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} \right] \Big\} \\
&\leq \lambda_\phi \mathcal{K} \vartheta.
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.12) nous donne

$$\|\mathcal{A}u\| \leq \lambda_\phi \mathcal{K} \vartheta,$$

c'est-à-dire que l'opérateur $\mathcal{A}$ est uniformément borné.

Etape3 : Montrons que $\mathcal{A}$ est équicontinu. Soit $t_1, t_2 \in [1, e]$ avec $t_1 < t_2$. On a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(u)(t_2) - \mathcal{A}(u)(t_1)| &\leq \lambda_\phi \vartheta \sup_{1 \leq t \leq e} \left\{ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_1^{t_1} \left(\left(\log \frac{t_2}{r} \right)^{p-1} - \left(\log \frac{t_1}{r} \right)^{p-1} \right) \frac{dr}{r} \right. \\
&\quad + \frac{-1}{\Gamma(p)} \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(\log \frac{t_2}{r} \right)^{p-1} \right) \frac{dr}{r} + \frac{\log t_2 - \log t_1}{(1-\lambda)\Gamma(p-1)} \\
&\quad \times \left[\int_1^e \left(\log \frac{e}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} - \lambda \int_1^\eta \left(\log \frac{\eta}{r} \right)^{p-2} \frac{dr}{r} \Big] \Big\} \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Le membre de droite de (2.8) tend vers zéro lorsque $t_2 \rightarrow t_1$, ce qui signifie que l'opérateur $\mathcal{A}$ est équicontinu. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, l'opérateur $\mathcal{A}$ est donc complètement continu.

Etape4 : Soit l'ensemble $F = \{u \in \mathcal{E} : u = \beta \mathcal{A}u, \beta \in [0, 1]\}$. On a

$$\forall t \in [1, e], u(t) = \beta \mathcal{A}u(t).$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, on obtient

$$\|u\| \leq \lambda_\phi \mathcal{K} (\omega_0 + \omega_1 \|u\|) \quad (2.9)$$

Il en résulte que

$$\|u\| (1 - \lambda_\phi \mathcal{K} \omega_1) \leq \lambda_\phi \mathcal{K} \omega_0 \quad (2.10)$$

L'inégalité (2.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\|u\| \leq \frac{\lambda_\phi \mathcal{K} \omega_0}{1 - \lambda_\phi \mathcal{K} \omega_1}. \quad (2.11)$$

De l'inégalité (2.11), on déduit que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné.

2.2 Exemples

Exemple 2.2.1 Dans cette partie, nous présentons un exemple d'application pour illustrer les résultats théoriques obtenus dans le théorème 2.2.

$$\begin{cases} {}^{CH}D^{\frac{4}{3}} \left(\frac{u(t)}{\frac{6}{13}|\sin u(t)| + \frac{1}{9}} \right) = e^{-t} + \frac{2}{11} \arctan u, t \in [1, e] \\ {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\frac{6}{13}|\sin u(t)| + \frac{1}{9}} \right)_{t=e} = \frac{1}{17} {}^{CH}D \left(\frac{u(t)}{\frac{6}{13}|\sin u(t)| + \frac{1}{9}} \right)_{t=2}, \\ \left(\frac{u(t)}{|\sin u(t)| + \frac{1}{9}} \right)_{t=1} = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans cette exemple, on a

$$p = \frac{4}{3}, \eta = 2, \lambda = \frac{1}{17}, \phi(t, u(t)) = \frac{6}{13}|\sin u(t)| + \frac{1}{9}, \psi(t, u(t)) = e^{-t} + \frac{2}{11} \arctan u.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} |\psi(t, x_1) - \psi(t, x_2)| &= \left| e^{-t} + \frac{2}{11} \arctan x_1 - e^{-t} - \frac{2}{11} \arctan x_2 \right| \\ &= \frac{2}{11} |\arctan x_1 - \arctan x_2| \leq \frac{2}{11} |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t \in [1, e]. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\lambda_\phi \mathcal{K} v = 2.0918 \times 0.51417 \times 0.18182 = 0.19555 < 1.$$

Ainsi, le problème (2.12) satisfait toutes les conditions du théorème 2.2; par conséquent, on en déduit que ce problème admet une solution unique sur l'intervalle $[1, e]$.

Chapitre 3

Système couplé d'équations hybrides fractionnaires de type séquentielle

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires hybrides séquentielles constituent une généralisation naturelle des équations différentielles classiques, intégrant à la fois les effets de mémoire (via les dérivées fractionnaires), des retards et des dépendances mixtes. Elles apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques pures et appliquées, notamment dans les systèmes dynamiques, la théorie des probabilités, les modèles biologiques, l'électrodynamique, ou encore la mécanique quantique. Une forme particulière de ces équations, connues sous le nom d'équations de type pantographe, se distingue par la présence d'un retard proportionnel, et a fait l'objet de nombreuses études en raison de ses applications concrètes. Pour plus de détails, consultez [14, 18, 24] ainsi que les références qu'elles contiennent.

Dans le présent chapitre, nous étudions l'existence, l'unicité des solutions pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires hybride de type séquentielles, faisant intervenir deux

dérivées fractionnaires de Caputo et Riemman-Liouville, donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{RL}D^{\delta_1} \left[{}^CD^{\lambda_1} \left(\frac{u(t)}{w_1(t, u(t), v(t))} \right) \right] = f_1(t, u(t), v(t)) \\ {}^{RL}D^{\delta_2} \left[{}^CD^{\lambda_2} \left(\frac{v(t)}{w_2(t, u(t), v(t))} \right) \right] = f_2(t, u(t), v(t)) \\ u(0) = v(0) = 0, \quad u(1) = v(1) = 0 \\ 0 \leq t \leq 1, 0 < \delta_i, \lambda_i \leq 1, i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où ${}^{RL}D^{\delta_i}$ et ${}^CD^{\lambda_i}$, $i = 1, 2$ désignent respectivement les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, $w_1, w_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données.

Le résultat énoncé dans la proposition suivante joue un rôle fondamental dans la démonstration des résultats principaux développés dans ce chapitre.

Proposition 3.0.1 *Soient $0 < \delta_i, \lambda_i < 1, i = 1, 2$. Si $w_1, w_2 \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ et $h_1, h_2 \in C([0, 1], \mathbb{R})$, alors la solution du problème :*

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{RL}D^{\delta_1} \left[{}^CD^{\lambda_1} \left(\frac{u(t)}{w_1(t, u(t), v(t))} \right) \right] = h_1(t) \\ {}^{RL}D^{\delta_2} \left[{}^CD^{\lambda_2} \left(\frac{v(t)}{w_2(t, u(t), v(t))} \right) \right] = h_2(t) \\ u(0) = v(0) = 0, \quad u(1) = v(1) = 0 \\ 0 \leq t \leq 1, 0 < \delta_i, \lambda_i \leq 1, i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

est donnée par :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{w_1(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^t (t-s)^{\delta_1+\lambda_1-1} h_1(s) ds \\
&\quad - t^{\delta_1+\lambda_1-1} \frac{w_1(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (t-s)^{\delta_1+\lambda_1-1} h_1(s) ds, \\
v(t) &= \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^t (t-s)^{\delta_2+\lambda_2-1} h_2(s) ds \\
&\quad - t^{\delta_2+\lambda_2-1} \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^1 (t-s)^{\delta_2+\lambda_2-1} h_2(s) ds,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit u une solution de la première équation du problème (3.2). Alors, on a :

$${}^{RL}D^{\delta_1} \left[{}^C D^{\lambda_1} u(t) \left(\frac{z(t)}{w_1(t, u(t), v(t))} \right) \right] = h_1(t) \tag{3.4}$$

En appliquant maintenant l'opérateur I^{δ_1} des deux côtés de l'équation (3.4) et en utilisant le 1.2, on obtient :

$${}^C D^{\lambda_1} u(t) \left(\frac{u(t)}{w_1(t, u(t), v(t))} \right) = I^{\delta_1} [h_1(t)] + at^{\delta_1-1}, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

En appliquant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre λ_1 des deux côtés de (3.5) et en utilisant le Lemme (1.3), on trouve :

$$u(t) = w_1(t, u(t), v(t)) \left[I^{\delta_1+\lambda_1} [h_1(t)] + a \frac{\Gamma(\delta_1)}{\Gamma(\delta_1 + \lambda - 1)} t^{\delta_1+\lambda_1-1} + b \right], \quad b \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

En utilisant les conditions $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$, on trouve :

$$a = -\frac{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)}{\Gamma(\delta_1)} I^{\delta_1+\lambda_1} [h_1(1)] \quad \text{et} \quad b = 0$$

En substituant les valeurs de a et b dans (3.6), nous obtenons la première formule de (3.3).

En utilisant les mêmes étapes précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^t (t-s)^{\delta_2+\lambda_2-1} h_2(s) ds \\
&\quad - t^{\delta_2+\lambda_2-1} \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^1 (t-s)^{\delta_2+\lambda_2-1} h_2(s) ds
\end{aligned}$$

3.1 Résultats d'existence

Soit $H = C[0, 1]$ l'espace de Banach des fonctions continues muni de la norme définie par

$$\|z\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |z(t)|.$$

L'espace produit $(H \times H, \|(u, v)\|)$, muni de la norme

$$\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|, \quad \forall (u, v) \in H \times H,$$

est un espace de Banach. D'après la proposition (3.0.1), on définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \Lambda : H \times H &\longrightarrow H \times H \\ (u, v) &\longrightarrow (\Lambda_1(u, v), \Lambda_2(u, v)), \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} \Lambda_1(u, v)(t) &= \frac{w_1(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^t (t-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} f_1(s, u(s), v(s)) ds \\ &\quad - t^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} \frac{w_1(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} f_1(s, u(s), v(s)) ds, \\ \Lambda_2(u, v)(t) &= \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^t (t-s)^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} f_2(s, u(s), v(s)) ds \\ &\quad - t^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} f_2(s, u(s), v(s)) ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Évidemment, les points fixes de l'opérateur Λ sont des solutions du système (3.1).

Avant de démontrer les résultats principaux, nous introduisons les conditions suivantes :

(H_1) : Les fonctions $w_i, (i = 1, 2) : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont continues et il existe des constantes $k_i > 0, i = 1, 2$ telles que pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, on a

$$|w_i(t, x_1, y_1) - w_i(t, x_2, y_2)| \leq k_i (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|).$$

(H_2) : Les fonctions $f_i, (i = 1, 2) : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et il existe des constantes $\tilde{k}_i > 0, i = 1, 2$ telles que pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, on a

$$|f_i(t, x_1, y_1) - f_i(t, x_2, y_2)| \leq \tilde{k}_i (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|).$$

(H_3) : Il existe des constantes $A_i, B_i \in \mathbb{R}_+^*, i = 1, 2$, telles que

$$|w_i(t, x, y)| \leq A_i \text{ et } |f_i(t, x, y)| \leq B_i, i = 1, 2, \text{ pour tous } t \in [0, 1] \text{ et } x, y \in \mathbb{R}.$$

(H_4) : Il existe deux fonction $\phi_i \in L^1([0, 1], \mathbb{R}), i = 1, 2$ telles que, pour tout $t \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_i(t, x, y)| \leq \phi_i(t), i = 1, 2.$$

Le résultat d'unicité suivant est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 3.1 *Supposons que les conditions $(H_i), i = 1, \dots, 3$ sont vérifiées.*

Si l'inégalité

$$\sum_{i=1}^2 \frac{A_i \tilde{k}_i + B_i k_i}{\Gamma(\delta_i + \lambda_i + 1)} < \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

est satisfaite, alors le système (3.1) admet une solution unique définie sur $[0, 1]$.

Démonstration. Montrons que l'opérateur Λ est une contraction. Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in H \times H$, alors on a :

$$\begin{aligned} & |\Lambda_1(u_1, v_1)(t) - \Lambda_1(u_2, v_2)(t)| \\ & \leq \frac{|w_1(t, u_1(t), v_1(t))|}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^t (t-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} |f_1(s, u_1(s), v_1(s)) - f_1(s, u_2(s), v_2(s))| ds \\ & \quad + t^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} \frac{|w_1(t, u_2(t), v_2(t))|}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (t-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} |f_1(s, u_1(s), v_1(s)) - f_1(s, u_2(s), v_2(s))| ds \\ & \quad + \frac{|w_1(t, u_1(t), v_1(t)) - w_1(t, u_2(t), v_2(t))|}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^t (t-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} |f_1(s, u_1(s), v_1(s))| ds \\ & \quad + t^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} \frac{|w_1(t, u_1(t), v_1(t)) - w_1(t, u_2(t), v_2(t))|}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (t-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} |f_1(s, u_1(s), v_1(s))| ds. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions (H_i) , $i = 1, \dots, 3$, on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(u_1, v_1)(t) - \Lambda_1(u_2, v_2)(t)| &\leq \frac{A_1 \tilde{k}_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|) \\ &\quad + \frac{B_1 k_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|) \\ &\quad + \frac{A_1 \tilde{k}_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|) \\ &\quad + \frac{B_1 k_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient l'inégalité suivante

$$|\Lambda_1(u_1, v_1)(t) - \Lambda_1(u_2, v_2)(t)| \leq 2 \left(\frac{A_1 \tilde{k}_1 + B_1 k_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)} \right) (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|).$$

Il en résulte l'inégalité suivante

$$\|\Lambda_1(u_1, v_1)(t) - \Lambda_1(u_2, v_2)(t)\| \leq 2 \left(\frac{A_1 \tilde{k}_1 + B_1 k_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)} \right) (\|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\|). \quad (3.8)$$

De façon analogue, on trouve que

$$\|\Lambda_2(u_1, v_1)(t) - \Lambda_2(u_2, v_2)(t)\| \leq 2 \left(\frac{A_2 \tilde{k}_2 + B_2 k_2}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2 + 1)} \right) (\|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\|). \quad (3.9)$$

D'après les inégalités (3.8) et (3.9), il en résulte que.

$$\|\Lambda(u_1, v_1)(t) - \Lambda(u_2, v_2)(t)\| \leq 2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{A_i \tilde{k}_i + B_i k_i}{\Gamma(\delta_i + \lambda_i + 1)} \right) (\|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\|). \quad (3.10)$$

Comme $2 \left(\sum_{i=1}^2 \frac{A_i \tilde{k}_i + B_i k_i}{\Gamma(\delta_i + \lambda_i + 1)} \right) < 1$, l'opérateur Λ est donc une contraction.

En appliquant le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur Λ admet un point fixe unique. Par conséquent, il existe une solution unique du Problème (3.1) sur $[0, 1]$.

Dans le résultat suivant, nous montrons l'existence de solutions pour le problème hybride fractionnaire de type séquentiel (3.1) en appliquant le théorème suivant.

Théorème 3.2 *Supposons que la conditions (H_3) est vérifiée, alors le problème hybride fractionnaire de type séquentiel (3.1) admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, 1]$.*

Démonstration. Par continuité des fonctions $w_1, w_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f_1, f_2 : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, l'opérateur Λ est continu. Maintenant, nous montrons que l'opérateur $\Lambda : H \times H \rightarrow H \times H$ est complètement continu.

Soit $\Omega \subset H \times H$ une partie bornée. Alors, pour tout $(u, v) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(u, v)(t)| &= \left| \frac{w_1(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^t (t-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} f_1(s, u(s), v(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - t^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} \frac{w_1(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} f_1(s, u(s), v(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} |w_1(t, u(t), v(t))| \int_0^1 (1-s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} |f_1(s, u(s), v(s))| ds \\ &\leq \frac{2A_1B_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)}. \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\Lambda_1(u, v)\| \leq \frac{2A_1B_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)}. \quad (3.11)$$

De plus, on obtient

$$\begin{aligned} |\Lambda_2(u, v)(t)| &= \left| \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^t (t-s)^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} f_2(s, u(s), v(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - t^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} \frac{w_2(t, u(t), v(t))}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} \int_0^1 (1-s)^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} f_2(s, u(s), v(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{2}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2)} |w_2(t, u(t), v(t))| \int_0^1 (1-s)^{\delta_2 + \lambda_2 - 1} |f_2(s, u(s), v(s))| ds \\ &\leq \frac{2A_2B_2}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2 + 1)}. \end{aligned}$$

Il en result, que

$$\|\Lambda_2(u, v)\| \leq \frac{2A_2B_2}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2 + 1)}. \quad (3.12)$$

D'après les inégalités (3.11), (3.12), on en déduit que l'ensemble $\Lambda\Omega$ est uniformément borné.

Ensuite, nous montrons que l'ensemble $\Lambda\Omega$ est équicontinu. Pour tout $(u, v) \in \Omega$, et pour tout

$t_1, t_2 \in [0, 1]$ tels que $t_1 < t_2$, on a

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(u, v)(t_1) - \Lambda_1(u, v)(t_2)| &\leq \left| \frac{A_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} - (t_1 - s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} \right] f_1(s, u(s), v(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} f_1(s, u(s), v(s)) ds \right| \\ &\quad + A_1 \frac{|t_1^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} - t_2^{\delta_1 + \lambda_1 - 1}|}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1)} \int_0^1 (1 - s)^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} |f_1(s, u(s), v(s))| ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |\Lambda_1(u, v)(t_1) - \Lambda_1(u, v)(t_2)| &\leq \frac{A_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)} \left[(t_2 - t_1)^{\delta_1 + \lambda_1} + t_2^{\delta_1 + \lambda_1} - t_1^{\delta_1 + \lambda_1} \right] \\ &\quad + \frac{A_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)} |t_1^{\delta_1 + \lambda_1 - 1} - t_2^{\delta_1 + \lambda_1 - 1}| \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par conséquent, on obtient

$$|\Lambda_1(u, v)(t_1) - \Lambda_1(u, v)(t_2)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t_1 \rightarrow t_2.$$

Par un raisonnement similaire, on obtient

$$|\Lambda_2(u, v)(t_1) - \Lambda_2(u, v)(t_2)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t_1 \rightarrow t_2.$$

Par conséquent, l'ensemble $\Lambda\Omega$ est équicontinu. En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on déduit que $\Lambda\Omega$ est relativement compact, ce qui signifie que l'opérateur Λ est complètement continu.

Nous montrons que l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{(u, v) \in H \times H : (u, v) = \lambda \Lambda(u, v), 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est borné. Soit $(u, v) \in \mathcal{U}$, alors on obtient $(u, v) = \lambda \Lambda(u, v)$, ce qui implique, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$u(t) = \lambda \Lambda_1(u, v)(t), \quad v(t) = \lambda \Lambda_2(u, v)(t).$$

Alors, nous avons

$$\|u\| \leq \frac{2A_1B_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)}, \quad \|v\| \leq \frac{2A_2B_2}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2 + 1)}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\|u\| + \|v\| \leq \frac{2A_1B_1}{\Gamma(\delta_1 + \lambda_1 + 1)} + \frac{2A_2B_2}{\Gamma(\delta_2 + \lambda_2 + 1)}.$$

Ce qui montre que l'ensemble Ω est borné. Par conséquent, en appliquant le théorème (1.4), l'opérateur Λ admet au moins un point fixe dans Ω . On en déduit donc que le Problème (3.1) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

3.2 Exemples

Exemple 3.2.1 *On considère le système fractionnaire couplé suivant :*

$$\begin{cases} {}^{RL}D^{\frac{1}{3}} \left[{}^CD^{\frac{2}{5}} \left(\frac{u(t)}{w_1(t, u(t), v(t))} \right) \right] = f_1(t, u(t), v(t)) \\ {}^{RL}D^{\frac{3}{7}} \left[{}^CD^{\frac{4}{9}} \left(\frac{v(t)}{w_2(t, u(t), v(t))} \right) \right] = f_2(t, u(t), v(t)) \\ u(0) = v(0) = 0, \quad u(1) = v(1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

On a : $\delta_1 = \frac{1}{3}, \delta_2 = \frac{3}{7}, \lambda_1 = \frac{2}{5}, \lambda_2 = \frac{4}{9}$ et

$$\begin{aligned} w_1(t, u(t), v(t)) &= e^{-2t} + \frac{1}{50} (\arctan u(t) + \arctan v(t)), \\ w_2(t, u(t), v(t)) &= \sqrt{t} + \frac{1}{11\sqrt{t^2 + 1}} \frac{u(t)}{1 + u(t)} + \frac{1}{22} \arctan v(t), \\ f_1(t, u(t), v(t)) &= \frac{1}{54} \cos u(t) + \frac{1}{(t^2 + 6)} \sin v(t), \\ f_2(t, u(t), v(t)) &= \frac{\sqrt{t}}{15} \arctan u(t) + \frac{1}{5\sqrt{t + 9}} \cos v(t) + \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que les fonctions $w_i, f_i, i = \overline{1, 2}$ sont lipschitziennes.

Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} |w_1(t, x_1, y_1) - w_1(t, x_2, y_2)| &\leq \frac{1}{50} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \\ |w_2(t, x_1, y_1) - w_2(t, x_2, y_2)| &\leq \frac{1}{11} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \\ |f_1(t, x_1, y_1) - f_1(t, x_2, y_2)| &\leq \frac{1}{54} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \\ |f_2(t, x_1, y_1) - f_2(t, x_2, y_2)| &\leq \frac{1}{15} (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|). \end{aligned}$$

De plus, $\forall t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |w_1(t, u(t), v(t))| &\leq 1.0400, \\ |w_2(t, u(t), v(t))| &\leq 1.1364, \\ |f_1(t, u(t), v(t))| &\leq 0.095442, \\ |f_2(t, u(t), v(t))| &\leq 0.32593, \end{aligned}$$

et

$$2 \times \sum_{i=1}^2 \frac{A_i \tilde{k}_i + B_i k_i}{\Gamma(\delta_i + \lambda_i + 1)} = 2 \times \left(0.02886627273 \times \Gamma\left(\frac{11}{15}\right) + 0.1116693947 \times \Gamma\left(\frac{55}{63}\right) \right) < 1.$$

Comme toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, le problème (3.14) admet donc une solution unique définie sur l'intervalle $[0, 1]$.

Bibliographie

- [1] Y. ADJABI, F. JARAD, D. BALEANU et T. ABDELJAWAD : On cauchy problems with caputo hadamard fractional derivatives. 2016.
- [2] K. AGILAN et V. PARTHIBAN : Existence of solutions of fuzzy fractional pantograph equations. *Int. J. Math. Comput. Sci.*, 15(4) :1117–1122, 2020.
- [3] Y. ARIOUA et N. BENHAMIDOUCE : Boundary value problem for caputo-hadamard fractional differential equations. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 12 :103–115, 2017.
- [4] T. M. ATANACKOVIC, S. PILIPOVIC, B. STANKOVIC et D. ZORICA : *Fractional calculus with applications in mechanics : vibrations and diffusion processes*. John Wiley & Sons, 2014.
- [5] T. M. ATANACKOVIC, S. PILIPOVIC, B. STANKOVIC et D. ZORICA : *Fractional calculus with applications in mechanics : wave propagation, impact and variational principles*. John Wiley & Sons, 2014.
- [6] M. BAHAR ALI KHAN, T. ABDELJAWAD, K. SHAH, G. ALI, H. KHAN et A. KHAN : Study of a nonlinear multi-terms boundary value problem of fractional pantograph differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2021(1) :1–15, 2021.
- [7] J.-F. DEÜ et D. MATIGNON : Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a newmark-diffusive scheme. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5) :1745–1753, 2010.
- [8] G. DRĂGĂNESCU : Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives. *Journal of Mathematical Physics*, 47(8), 2006.
- [9] Y. Y. GAMBO, F. JARAD, D. BALEANU et T. ABDELJAWAD : On caputo modification of the hadamard fractional derivatives. *Advances in difference equations*, 2014 :1–12, 2014.
- [10] M. GOHAR, C. LI et C. YIN : On caputo–hadamard fractional differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(7) :1459–1483, 2020.
- [11] R. HERRMANN : *Fractional calculus : an introduction for physicists*. World Scientific, 2011.

- [12] M. HOUAS, M. I. ABBAS et F. MARTINEZ : Existence and mittag-leffler-ulam-stability results of sequential fractional hybrid pantograph equations. *FILOMAT*, 37(20) :6891–6903, 2023.
- [13] E. KARIMOV, B. LOPEZ et K. SADARANGANI : About the existence of solutions for a hybrid non-linear generalized fractional pantograph equation. *arXiv preprint arXiv :1605.08972*, 2016.
- [14] A. KILBAS : *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204. elsevier, 2006.
- [15] V. LAKSHMIKANTHAM et A. S. VATSALA : Basic theory of fractional differential equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 69(8) :2677–2682, 2008.
- [16] Y. LI, Y. CHEN et I. PODLUBNY : Mittag–leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 45(8) :1965–1969, 2009.
- [17] R. L. MAGIN : Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5) :1586–1593, 2010.
- [18] K. S. MILLER et B. ROSS : An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *Wiley*, 1993.
- [19] K. OLDHAM et J. SPANIER : *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, vol. 111. Elsevier, 1974.
- [20] I. PODLUBNY : Fractional differential equations academic press, san diego, 1999. *Search in*.
- [21] Y. POVSTENKO : Fractional heat conduction and related theories of thermoelasticity. *In Fractional thermoelasticity*, p. 13–33. Springer, 2015.
- [22] R. H. PRITCHARD et E. M. TERENTJEV : Oscillations and damping in the fractional maxwell materials. *Journal of Rheology*, 61(2) :187–203, 2017.
- [23] S. S. RAY : *Fractional calculus with applications for nuclear reactor dynamics*. CRC press, 2015.
- [24] J. SABATIER, O. P. AGRAWAL et J. T. MACHADO : *Advances in fractional calculus*, vol. 4. Springer, 2007.
- [25] R. SINGH, P. DAVIES et A. BAJAJ : Identification of nonlinear and viscoelastic properties of flexible polyurethane foam. *Nonlinear Dynamics*, 34 :319–346, 2003.
- [26] Z.-H. YU : Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation. *Physics Letters A*, 372(43) :6475–6479, 2008.
- [27] X. ZHANG : The general solution of differential equations with caputo-hadamard fractional derivatives and impulsive effect. *Advances in Difference Equations*, 2015 :1–16, 2015.

- [28] Y. ZHAO, S. SUN, Z. HAN et Q. LI : Theory of fractional hybrid differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3) :1312–1324, 2011.