



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques



MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématiques »

Option :
«Analyse Fonctionnelle et Applications »

Présenté Par :
KHIATI Amira et TAIBI Hiba Elrahmane

Sous L'intitulé :

Sur la Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm et de Volterra

Soutenu publiquement le 11 / 06 / 2025 à Tiaret

Devant le jury composé de :

Mr BENIA Kheireddine

Mr DERKAOUI Rafik

Mr MENAD Bendehiba

MCA Université Ibn Khaldoun Tiaret

MCA ENS d'Oran-AMMOUR Ahmed

MCA ENS de Mostaganem

Président

Examineur

Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département des sciences exactes,
spécialité mathématique.

Je rends grâce à **Dieu** Tout-Puissant pour la force et la persévérance qu'Il
m'a accordées tout au long de ce parcours.

Je remercie sincèrement mon directeur de mémoire, **Dr. MENAD
Bendehiba**, pour son encadrement rigoureux, ses conseils précieux et sa
disponibilité.

Mes remerciements vont également à :

À Docteur. **BENIA Kheireddine**, pour avoir accepté de présider le jury
de soutenance, en témoignant ainsi de l'intérêt porté à ce travail,

À Docteur. **DERKAOUI Rafik** pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant
d'évaluer ce mémoire, malgré ses multiples engagements,

Je reste profondément reconnaissante envers mes parents pour leur présence
constante et leur soutien moral inestimable.

Mes pensées reconnaissantes vont également à mes collègues de la
promotion 2024–2025, ainsi qu'à toutes les personnes qui, de près ou de
loin, ont contribué à la réalisation de ce travail, par un mot, un geste ou un
encouragement.

Dédicace

J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail à ceux qui, après **Dieu**, ont eu le plus grand mérite dans mon soutien et mon encouragement tout au long de sa réalisation :

À ma chère mère, symbole de tendresse et de compréhension,

À mon cher père, dont l'influence a marqué profondément mon parcours,

À mes frères : Nouredine et Salah et Yassine,

À ma chère sœur Djouhaina,

À mes fidèles amies : Maroua, bouchra et Nawal,

Et à tous mes amis et collègues qui ont contribué, chacun à sa manière, à cette aventure scientifique.

Toute ma gratitude et ma reconnaissance à vous tous.

KHIATI Amira

Dédicace

À ceux qui ont été le pilier et la force dans mon parcours. . .

À ma mère aimante, dont la patience et les prières ont été un trésor
inestimable,

À mon père bienveillant, qui m'a transmis l'amour du savoir et du travail,

À mes frères et sœurs, source de fierté et d'énergie,

À mes amies fidèles, lumière dans les moments sombres,

À tous ceux qui ont contribué par une parole, une prière, un sourire ou une
présence sincère...

Je dédie ce modeste travail en signe de gratitude et de profonde
reconnaissance.

TAIBI Hiba

Résumé

Les équations intégrales linéaires de Fredholm et Volterra sont largement utilisées dans plusieurs domaines scientifiques, notamment en physique et en biologie. Cette étude analyse les solutions des équations du second ordre, en examinant les conditions d'existence, d'unicité et l'effet du noyau intégral.

Les équations de Fredholm ont des bornes fixes, tandis que celles de Volterra possèdent des bornes variables, adaptées aux systèmes dynamiques.

Mots clés :

Équations intégrales, Fredholm, Volterra, Existence, Unicité, Noyau intégral, Bornes d'intégration.

Table des matières

1 Généralités sur les équations intégrales de Fredholm et Volterra	9
1.1 Equations intégrales linéaires	9
1.2 Classification des équations intégrales linéaire	11
1.2.1 Equation intégrale linéaire de Fredholm	11
1.2.2 Equation intégrale linéaire de Volterra	12
1.2.3 Equation intégral linéaire de Volterra-Fredholm	13
1.2.4 Autres équations intégrales linéaires	14
1.3 Liaison entre les EDO et les équations intégrales de Fredholm	15
1.3.1 Problèmes de valeur aux limites	16
1.4 Solution d'une équation intégrale	20
2 La théorie des équations intégrales	22
2.1 Equations intégrales non linéaires	22
2.1.1 Equation intégrale non linéaire de Fredholm	23
2.1.2 <i>Equation intégrale non linéaire de Volterra</i>	24
2.2 Théorie d'existence et d'unicité	25
2.2.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra et de Fredholm	25
2.2.2 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale non linéaire de Volterra	29
2.2.3 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale non linéaire de Fredholm	30
2.3 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm	31

3	Résolution des équations intégrales de Fredholm et Volterra	34
3.1	Méthode de Fredholm	34
3.2	La méthode de solution en série	37
3.3	Méthode de décomposition d'Adomian	40
3.4	Méthode de décomposition modifiée	43
3.5	La méthode des approximations successives	45
3.6	Méthode de décomposition d'Aomian	47
3.7	Méthode de décomposition modifiée	49

Notations et Abréviations

λ	Paramètre numérique.
$u(x)$	Une fonction de la variable x
$k(x, t)$	Le noyau de l'équation intégrale linéaire de Fredholm.
$f(x)$	Fonction donnée.
EDO	Equation différentielle ordinaire.
$L^2([a, b])$	L'ensemble de toutes les fonctions de carré intégrables sur $[a, b]$.
$R(x, t; \lambda)$	La résolvante de l'équation intégrale .
K_n	Les noyaux itérés.
$C[a, b]$	L'espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$d(u, \psi)$	La distance entre u et ψ .
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\oplus$	La somme directe.

Introduction Générale

Les équations intégrales sont très utilisées dans plusieurs domaines et sont apparues rapidement à la suite des travaux de Volterra et Fredholm.

En 1887, Volterra (1860-1940) a établi une méthode pour résoudre les équations intégrales, par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales, tandis que Fredholm (1866-1927) a développé une approche plus générale.

Aujourd'hui, les équations intégrales de Fredholm et Volterra sont d'une grande importance. Elles interviennent dans plusieurs applications, notamment les équations différentielles ordinaires, les problèmes aux limites et les équations d'approximation.

Dans cette étude, nous cherchons à obtenir des solutions précises pour certaines équations intégrales importantes, notamment celles de Fredholm et de Volterra. Nous analysons les solutions analytiques associées à ces équations en mettant en évidence les principales méthodes utilisées pour leur résolution.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre :

Il présente les équations intégrales linéaires et leurs classifications, ainsi que les équations de Fredholm et de Volterra. Nous donnons également quelques exemples illustratifs et abordons le lien entre les équations intégrales et les équations intégrales différentielles.

Le deuxième chapitre :

Il est consacré à l'étude des équations intégrales non linéaires, qui suscitent un intérêt particulier en raison de leur importance scientifique. Nous présentons également différentes méthodes permettant d'obtenir des solutions exactes.

Le dernier chapitre :

Il expose quelques méthodes analytiques employées pour résoudre les équations intégrales linéaires et non linéaires de Fredholm et Volterra de seconde espèce, avec des exemples sur ces méthodes.

Ce mémoire se termine par une conclusion et des références bibliographiques.

Chapitre 1

Généralités sur les équations intégrales de Fredholm et Volterra

Les équations intégrales apparaissent dans de nombreux types. Les espèces dépendent principalement des limites d'intégration et du noyau de l'équation. Dans ce chapitre, nous classons présentons et clarifions les équations intégratives pour Volterra et Fredholm. En outre, la linéarité traite clairement des concepts d'équations intégrées.

1.1 Equations intégrales linéaires

Définition 1.1.1 Une équation intégrale linéaire est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration $\int$.

La forme générale d'une équation intégrale linéaire est :

$$(1.1) \quad h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{l(x)} k(x, t)u(t)dt,$$

où $g(x)$ et $l(x)$ sont les bornes de l'intégration, λ est un paramètre constant, $f(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions données et $K(x, t)$ est une fonction donnée de deux variables x et t appelé le noyau de l'équation intégrale.

Notons que l'équation (1.1) peut être écrite sous forme d'opérateur

$$Tu = \lambda u + f$$

Où l'opérateur T s'écrit :

$$Tu(x) = \int k(x, t)u(t)dt$$

La principale différence entre les équations intégrales de Fredholm et celles de Volterra se trouve dans les bornes de l'opérateur intégral.

-Si elles sont des constantes fixées l'équation intégrale (1.1) est appelée équation intégrale de Fredholm.

-Si au moins une borne est variable, elle est appelée équation intégrale de Volterra.

Remarque 1.1.2 1)– Si $f(x) = 0$ l'équation (1.1) est dite équation intégrale linéaire homogène.

2)– Si $f(x) \neq 0$ l'équation (1.1) est dite équation intégrale linéaire non homogène.

Exemple 1.1.3 Les équations

$$u(x) = 1 + \int_0^1 (x^2 + t) \cos t u(t)dt,$$

$$u(x) = x - \int_0^x (x - t)u(t)dt,$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (1 - 3xt)u(t)dt,$$

sont des équations intégrales linéaires.

1.2 Classification des équations intégrales linéaire

L'étude des équations intégrales est divisée en deux secteurs, par rapport aux équations linéaires et à ceux non linéaire. Nous donnons les équations intégrales les plus célèbres qui sont les équations intégrales de Volterra et de Fredholm.

1.2.1 Equation intégrale linéaire de Fredholm

Définition 1.2.1 Une équation de la forme (1.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale linéaire de Fredholm, et on a :

$$(1.2) \quad h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

1)- Si $h(x) = 0$, l'équation (1.2) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0,$$

Et elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

2)- Si $h(x) = 1$, l'équation (1.2) s'écrit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt,$$

Et elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

3)- Si $h(x)$ est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de l'intervalle $[a, b]$, elle est dite équation intégrale linéaire de Fredholm de troisième espèce.

Exemple 1.2.2 1)- L'équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de seconde espèce :

$$u(x) = e^x - x + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)u(t)dt,$$

2)- L'équation intégrale linéaire non homogène de Fredholm de première espèce :

$$x^2 + 1 - \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt = 0.$$

3)- L'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de seconde espèce :

$$u(x) = 2 \int_{-1}^1 xtu(t)dt.$$

4)- L'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de première espèce :

$$\int_0^1 (x - t)u(t)dt = 0$$

1.2.2 Equation intégrale linéaire de Volterra

Définition 1.2.3 L'équation intégrale linéaire de Volterra est une équation intégrale linéaire de Fredholm sauf que la borne d'intégration supérieure est variable x , c'est $b = x$ et on a :

$$(1.3) \quad h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt.$$

1)- Si $h(x) = 0$, l'équation (1.3) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt = 0,$$

Et elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

2)- Si $h(x) = 1$, l'équation (1.3) s'écrit :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt,$$

Et elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce.

3)- Si $h(x) \neq 0$, elle est dite équation intégrale linéaire de Volterra de troisième espèce.

Exemple 1.2.4 On considère l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce :

$$u(x) = 1 - \int_0^x u(t)dt,$$

Où le noyau $k(x, t) = 1$, la fonction $f(x) = 1$ et $\lambda = -1$.

Remarque 1.2.5 L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau k vérifie la condition suivante :

$$k(x, t) = 0 \text{ pour tout } x < t.$$

1.2.3 Equation intégral linéaire de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm proviennent des liaisons paraboliques, les problèmes de valeur à partir de la modélisation mathématique de l'espace-temps, le développement d'une épidémie, et de diverses modifications physiques et biologique.

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm appariassent dans la littérature dans la littérature sous deux formes, soient :

$$(1.4) \quad u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t)dt.$$

Et

$$(1.5) \quad u(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau)) d\xi d\tau, (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Où $f(x, t)$ et $F(x, t, \xi, \tau, u(\xi, \tau))$ sont des fonctions analytiques sur $D = \Omega \times [0, T]$, et Ω est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

Il est intéressant de noter que (1.4) contient des équations intégrales disjointes de Volterra et de Fredholm, alors que (1.5) contient des équations intégrales mixtes de Volterra et de Fredholm. En outre, les fonctions inconnues $u(x)$ et $u(x, t)$ apparaissent à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale. C'est une caractéristique d'un deuxième type d'équation intégrale. Si les fonctions inconnues n'apparaissent qu'à l'intérieur des signes intégraux, le résultat.

Les équations sont de première classe, mais ne seront pas examinées dans ce mémoire.

Exemple 1.2.6

$$u(x) = 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x xu(t)dt - \int_0^1 tu(t)dt,$$

Et

$$u(x, t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \int_0^t \int_0^1 (\tau - \xi) d\xi d\tau.$$

1.2.4 Autres équations intégrales linéaires**Définition 1.2.7 (*Equation intégrale de Wiener-Hopf*)**

On appelle équation intégrale linéaire de Wiener-Hopf une équation de la forme

$$h(x)u(x) + \int_a^{+\infty} k(x-t)u(t)dt = f(x).$$

Définition 1.2.8 (*Equation intégrale de Renwal*)

On appelle équation intégrale linéaire de Renwal toute équation de la forme

$$h(x)u(x) + \int_a^x k(x-t)u(t)dt = f(x).$$

Définition 1.2.9 (*Equation intégrale d'Abel*)

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel toute équation de la forme

$$\int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x).$$

Où α est une constante $0 < \alpha < 1$.

1.3 Liaison entre les EDO et les équations intégrales de Fredholm

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale, pour cela nous avons besoin le lemme suivant :

Lemme 1.3.1 *Pour tout fonction $u(x)$, on a :*

$$\int_a^x \int_a^s u(t) dt ds = \int_a^x (x-t)u(t)dt.$$

En général, on a :

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} u(x_1) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x) dx_1.$$

Preuve. Soit

$$g(s) = \int_a^s u(t)dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s u(t) dt ds &= \int_a^x g(s) ds \\ &= \int_a^x 1 \cdot g(s) ds \\ &= [s \cdot g(s)]_a^x - \int_a^x s \cdot g'(s) ds \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s) ds \\ &= x \int_a^x u(t) dt - 0 - \int_a^x tu(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t)u(t) dt. \end{aligned}$$

□

1.3.1 Problèmes de valeur aux limites

Prenons

$$u'' + A(x)u' + B(x)u = F(x), \quad (1)$$

Avec les valeurs aux limites :

$$u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1. \quad (2)$$

Intégrant (1) par rapport à x , on obtient :

$$\int_a^x u''(x)dx + \int_a^x A(x)u'(x)dx + \int_a^x B(x)u(x)dx = \int_a^x F(x)dx,$$

ce qui donne :

$$[u'(x)]_a^x + \int_a^x A(x)d(u(x)) + \int_a^x B(x)u(x)dx = \int_a^x F(x)dx + c_1.$$

Par intégration par parties

$$u'(x) - u'(a) + [A(x)u(x)]_a^x - \int_a^x u(x)A'(x)dx = \int_a^x F(x)dx - \int_a^x B(x)u(x)dx + c_1.$$

D'où

$$u'(x) = -A(x)u(x) + A(a)u(a) + \int_a^x u(x)A'(x)dx + \int_a^x F(x)dx - \int_a^x B(x)u(x)dx + c_1 + u'(a)$$

$$u'(x) = \int_a^x F(x)dx - A(x)u(x) + A(a)u_0 + \int_a^x [A'(x) - B(x)]u(x)dx + c.$$

Où

$$c = c_1 + u'(a).$$

Intégrant à nouveau par rapport à x , on trouve :

$$\begin{aligned}\int_a^x u'(x)dx &= \int_a^x \int_a^x F(x)dx - \int_a^x A(x)u(x)dx + \int_a^x A(a)u_0dx \\ &+ \int_a^x \int_a^x [A'(x) - B(x)]u(x)dx + \int_a^x cdx,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}[u(x)]_a^x &= \int_a^x \int_a^x F(x)dx - \int_a^x A(x)u(x)dx + (x-a)A(a)u_0 \\ &+ \int_a^x \int_a^x [A'(x) - B(x)]u(x)dx + (x-a)c.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme

$$u(x) - u(a) = \int_a^x (x-t)F(t)dt - \int_a^x A(x)u(x)dx + \int_a^x (x-t)[A'(t) - B(t)]u(t)dt + [c + A(a)u_0](x-a),$$

donc,

$$u(x) = u(a) + \int_a^x (x-t)F(t)dt - \int_a^x A(x)u(x)dx + \int_a^x (x-t)[A'(t) - B(t)]u(t)dt + [c + A(a)u_0](x-a).$$

Alors,

$$u(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt - \int_a^x A(x)u(x)dx + \int_a^x (x-t)[A'(t) - B(t)]u(t)dt + [c + A(a)u_0](x-a),$$

ce qui donne

$$u(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt - \int_a^x A(t)u(t)dt + \int_a^x (x-t)[A'(t) - B(t)]u(t)dt + [c + A(a)u_0](x-a).$$

d'où

$$u(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \int_a^x [(x-t)(A'(t) - B(t)) - A(t)]u(t)dt + [c + A(a)u_0](x-a). \quad (3)$$

Pour trouver la valeur de c , on prend $x = b$.

$$u(b) = u_0 + \int_a^b (b-t)F(t)dt + \int_a^b [(b-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt + [c+A(a)u_0](b-a)$$

$$u_1 = u_0 + \int_a^b (b-t)F(t)dt + \int_a^b [(b-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt + [c+A(a)u_0](b-a)$$

$$[c+A(a)u_0](b-a) = u_1 - u_0 - \int_a^b (b-t)F(t)dt - \int_a^b [(b-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt,$$

$$[c+A(a)u_0] = \frac{1}{b-a} [u_1 - u_0 - \int_a^b (b-t)F(t)dt - \int_a^b [(b-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt]. \quad (4)$$

De (3) et (4), on trouve

$$\begin{aligned} u(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \int_a^x [(x-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt \\ + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[u_1 - u_0 - \int_a^b (b-t)F(t)dt - \int_a^b [(b-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt], \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} u(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[u_1 - u_0 - \int_a^b (b-t)F(t)dt] \\ + \int_a^x [(x-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\left[\int_a^b [(b-t)(A'(t)-B(t))-A(t)]u(t)dt\right], \end{aligned}$$

donc

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

où

$$f(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[u_1 - u_0 - \int_a^b (b-t)F(t)dt],$$

et

$$k(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}, & x < t, \\ A(t)\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - 1\right\} - \frac{[A'(t)-B(t)](t-a)(b-x)}{b-a} & x > t. \end{cases}$$

Remarque 1.3.2 1. Les problèmes de valeur initiale dans l'équation différentielle ordinaire conduisent à l'équation de Volterra.

2. Les problèmes de valeur aux limites dans l'équation différentielle conduisent à l'équation de Fredholm.

Exemple 1.3.3 Réduire le problème de valeurs limites à une équation de Fredholm,

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda P(x)u(x) &= Q(x) \\ u(a) &= 0, \quad u(b) = 0. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad B = \lambda P(x), \quad F(x) = Q(x) \\ u_0 &= 0, \quad u_1 = 0. \end{aligned}$$

On sait que

$$f(x) = u_0 + \int_a^x (x-t)F(t)dt + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)[u_1 - u_0 - \int_a^b (b-t)F(t)dt].$$

Donc

$$f(x) = \int_a^x (x-t)Q(t)dt + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \int_a^b (b-t)Q(t)dt,$$

Et

$$\begin{aligned} k(x, t) &= \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\} & x < t \\ A(t)\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - 1\right\} - \frac{[A'(t)-B(t)](t-a)(b-x)}{b-a} & x > t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\{0 - (b-t)[0 - \lambda P(t)]\}, & x < t, \\ 0\left\{\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - 1\right\} - \frac{[0 - \lambda P(t)](t-a)(b-x)}{b-a} & x > t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b-t)\lambda P(t) & x < t \\ \frac{\lambda P(t)(t-a)(b-x)}{b-a} & x > t. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

1.4 Solution d'une équation intégrale

Définition 1.4.1 On dit que la fonction continue $u(x)$ est une solution de l'équation :

$$(1.6) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t) \, dt,$$

Si et seulement si elle vérifie l'équation (1.6).

Exemple 1.4.2 Montrer que la fonction $u(x) = 1$ est une solution de l'équation :

$$u(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)u(t) \, dt = e^x - x.$$

On a :

$$\begin{aligned} u(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)u(t) \, dt &= 1 + \int_0^1 x(e^{xt} - 1) \, dt \\ &= 1 + \int_0^1 xe^{xt} \, dt - \int_0^1 x \, dt \\ &= 1 + e^x - x - 1 \\ &= e^x - x. \end{aligned}$$

Exemple 1.4.3 Montrer que la fonction $u(x) = \cos 2x$ est une solution de l'équation intégrale de Fredholm :

$$u(x) - 3 \int_0^\pi K(x, t)u(t) \, dt = \cos x,$$

Avec

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin t \cos x & 0 \leq t \leq x \\ \sin x \cos t & x \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Mettons le premier terme sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &u(x) - 3 \left\{ \int_0^x K(x, t)u(t) \, dt + \int_x^\pi K(x, t)u(t) \, dt \right\} \\ &= \cos 2x - 3 \left\{ \int_0^x \sin t \cos x \cos 2t \, dt + \int_x^\pi \sin x \cos t \cos 2t \, dt \right\} \end{aligned}$$

$$= \cos 2x - 3 \left\{ \cos x \int_0^x \sin t \cos 2t \, dt + \sin x \int_x^\pi \cos t \cos 2t \, dt \right\}.$$

En utilisant les formule de linéarisation $\sin \mathbf{a} \cos \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\sin(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sin(\mathbf{a} - \mathbf{b}))$
et

$$\begin{aligned} \cos \mathbf{a} \cos \mathbf{b} &= \frac{1}{2}(\cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b})) \\ &= \cos 2x - 3 \left\{ \cos x \int_0^x \frac{\sin 3t - \sin t}{2} \, dt + \sin x \int_x^\pi \frac{\cos t + \cos 3t}{2} \, dt \right\} \\ &= \cos 2x - \frac{3}{2} \left\{ \cos x \left(\cos t - \frac{\cos 3t}{3} \right) \Big|_{t=0}^x + \sin x \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} \right) \Big|_{t=x}^\pi \right\} \\ &= \cos 2x - \frac{3}{2} \left\{ \cos x \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} - \frac{2}{3} \right) + \sin x \left(-\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right) \right\} \\ &= \cos 2x - \frac{3}{2} \left\{ \cos^2 x - \frac{\cos 3x \cos x}{3} - \frac{2}{3} \cos x - \sin^2 x + \frac{\sin 3x \sin x}{3} \right\} \end{aligned}$$

En utilisant les formule de linéarisation

$$\cos^2 \mathbf{a} = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \cos \mathbf{a} \cos \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b})), \sin^2 \mathbf{a} = \frac{1 - \cos 2a}{2},$$

$$\text{et } \sin \mathbf{a} \sin \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\cos(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \cos(\mathbf{a} + \mathbf{b})),$$

$$\begin{aligned} &= \cos 2x - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{6} - \frac{\cos 4x}{6} - \frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{6} + \frac{\cos 4x}{6} \right) \\ &= \cos 2x - \frac{3}{2} \left(\cos 2x - \frac{\cos 2x}{3} - \frac{2}{3} \cos x \right) \\ &= \cos 2x - \cos 2x + \cos x \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Chapitre 2

La théorie des équations intégrales

Les équations intégratives linéaires et non linéaires de Volterra et de Fredholm sont connues pour leur émergence dans de nombreux domaines scientifiques et applications tels que la dynamique des populations, la propagation des épidémies et les dispositifs semi-conducteurs.

Notre but dans ce chapitre est d'étudier les équations et systèmes non linéaires d'intégration de Fredholm et Volterra, et nous fournirons également des preuves d'existence pour résoudre les équations non linéaires d'intégration de Volterra et Fredholm, et résumer les circonstances dans lesquelles il y a une solution à cette équation

2.1 Equations intégrales non linéaires

La plupart des équations intégrales non linéaires sont de la forme :

$$(2.1) \quad h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x, t, u(t))dt,$$

Où $u(x)$ est une fonction inconnue, $h(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues, k une fonction non linéaire et λ un paramètre réel.

2.1.1 Equation intégrale non linéaire de Fredholm

Définition 2.1.1 Une équation de la forme (2.1) telle que $b(x) = b$ (constant) est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm et on a :

$$(2.2) \quad h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt.$$

1. Si $h(x) = 0$, alors l'équation (2.2) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt = 0.$$

Cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = 1$, alors l'équation (2.2) devient :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt,$$

Et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, alors l'équation (2.2) est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de troisième espèce.

4. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.2) est dite équation intégrale non linéaire de Fredholm non homogène.

5. Si $f(x) = 0$, alors l'équation (2.2) devient :

$$h(x)u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt,$$

Et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm homogène.

Exemple 2.1.2 On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce :

$$u(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 xtu^2(t)dt,$$

Où $k(x, t, u(t)) = xtu^2(t)$, la fonction $f(x) = x^2$.

2.1.2 Equation intégrale non linéaire de Volterra

Définition 2.1.3 Une équation de la forme (2.1) telle que $b(x) = x$ est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra et on a :

$$(2.3) \quad h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt.$$

1. Si $h(x) = 0$, alors l'équation (2.3) devient :

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt = 0.$$

Cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce.

2. Si $h(x) = 1$, alors l'équation (2.3) devient :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt,$$

Et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, alors l'équation (2.3) est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de troisième espèce.

4. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.3) est dite équation intégrale non linéaire de Volterra non homogène.

5. Si $f(x) = 0$, alors l'équation (2.3) devient :

$$h(x)u(x) = \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt,$$

Et cette équation est appelée équation intégrale non linéaire de Volterra homogène.

Exemple 2.1.4 On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra de seconde espèce :

$$u(x) = x + \lambda \int_0^1 (x - t)u^3(t)dt,$$

Où $k(x, t, u(t)) = (x - t)u^3(t)$, la fonction $f(x) = x$.

2.2 Théorie d'existence et d'unicité

2.2.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra et de Fredholm

Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce suivante :

$$(2.4) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt,$$

où $f(x)$ est une fonction complexe et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et le noyau $k(x, t)$ est complexe et continu sur le triangle

$$T(a, b) = \{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq x\}.$$

On suppose toujours que les noyaux Volterra satisfont la condition

$$k(x, t) = 0 \text{ si } x < t.$$

Définition 2.2.1 (*Résolvante d'une équation intégrale*)

On appelle résolvante de l'équation intégrale, toute fonction $R(x, t, \lambda)$ de la forme

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n k_n(x, t),$$

Où les k_n sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante :

$$k_1(x, t) = k(x, t)$$

$$k_n(x, t) = \int_t^x k(x, s)k_{n-1}(s, t)ds.$$

Lemme 2.2.2 La résolvante $R(x, t, \lambda)$ vérifie l'équation suivante :

$$R(x, t, \lambda) = k(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s)R(s, t, \lambda)ds.$$

Théorème 2.2.3 Si $f \in L^2([a, b])$ et si le noyau K vérifie la condition suivante :

$$(2.5) \quad \int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < \infty,$$

Alors l'équation (2.4) admet une solution unique dans $L^2([a, b])$ et la solution peut-être donnée par la formule :

$$u(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

Preuve. On pose

$$P(x) = \int_a^x |k(x, t)|^2 dt \quad \text{et} \quad Q(x) = \int_t^b |k(x, t)|^2 dt,$$

de (2.5) , P et Q sont des fonctions intégrables, donc il existe une constante M telle que

$$\int_a^b P(x) dx \leq M \quad \text{et} \quad \int_a^b Q(t) dt \leq M$$

Soit la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = \int_a^x P(t) dt.$$

Il est claire que $0 \leq \varphi(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Considérons l'opérateur

$$(Tu)(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt.$$

Alors

$$T^n u = f + \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j L^j f,$$

L'opérateur L^j peut-être écrit sous la forme

$$(L^j g)(x) = \int_a^x K_j(x, t) g(t) dt,$$

Où les noyaux K_j sont définis ci-dessus.

En effet, pour $j = 2$ on a :

$$\begin{aligned} (L^2 g)(x) &= \int_a^x K_2(x, t) g(t) dt \\ &= \int_a^x K(x, z) \int_a^z K(z, t) g(t) dt dz. \end{aligned}$$

Après changement de l'ordre d'intégration, on obtient

$$(L^2g)(x) = \int_a^x \int_t^x K(z, t)g(t)dt dz.$$

Si on note

$$K_2(z, t) = \int_t^x K(x, z)K(z, t)g(t)dt,$$

alors par le même raisonnement, on obtient

$$(L^2g)(x) = \int_a^x \int_t^x K(x, z)K_2(z, t)g(t)dz dt.$$

Et ainsi de suite. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et raisonnement par récurrence, on a

$$|K(x, t)|^2 \leq P(x)Q(t) \frac{[\varphi(x) - \varphi(t)]^{j-2}}{(j-2)!}, \text{ pour tout } j \geq 2$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |(T^j u_1)(x) - (T^j u_2)(x)| &= |\lambda|^{2j} \int_a^x |K_j(x, t)[u_1(t) - u_2(t)]|^2 dt. \\ &\leq |\lambda|^{2j} \int_a^x P(x)Q(t) \frac{[\varphi(x) - \varphi(t)]^{j-2}}{(j-2)!} dt \int_a^x |u_1(t) - u_2(t)|^2 dt \\ &\leq \frac{|\lambda|^{2j} [\varphi(x) - \varphi(t)]^{j-2}}{(j-2)!} \int_a^x Q(t) ||u_1(t) - u_2(t)||^2 dt \\ &\leq \frac{|\lambda|^{2j} [\varphi(x) - \varphi(t)]^{j-2}}{(j-2)!} M ||u_1 - u_2||^2. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x dans $[a, b]$, on trouve

$$||T^j u_1 - T^j u_2||^2 \leq \frac{|\lambda|^{2j} M^j}{(j-2)!} ||u_1 - u_2||^2 \text{ pour tout } j \geq 2.$$

Par conséquent, puisqu'il existe un $n \geq 2$ tel que

$$\frac{|\lambda|^{2n} M^n}{(n-2)!} < 1.$$

T^n est une contraction. D'après le théorème de l'application contractante, l'équation (2.4) admet une solution unique. Cette solution s'écrit sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n u_1 = f + \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda^j L^j f,$$

ce qui est équivalent

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \int_a^x K_n(x, t) f(t) dt,$$

c'est-à-dire

$$u(x) = f(x) + \int_a^x R(x, t, \lambda) f(t) dt.$$

Ce qui achève la preuve. □

Exemple 2.2.4 Soit l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1 + t^2}{1 + t^2} u(t) dt, \quad 0 \leq t \leq x \leq 1$$

On a $\lambda = 1$ et $a = 0$, $b = 1$ et

$$K(x, t) = \frac{1 + x^2}{1 + t^2}$$

On calcule

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1 + x^2}{1 + t^2} \right)^2 dx dt \leq 4 < +\infty$$

D'où, d'après le théorème, l'équation admet une solution unique, cette solution est

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \int_0^x R(x, t, \lambda) f(t) dt \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \int_0^x K_n(x, t) f(t) dt \\ &= 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1 + t^2}{1 + t^2} e^{(x-t)} (1 + t^2) dt \\ &= 1 + x^2 + (1 + x^2) e^x \int_0^x e^{-t} dt. \\ &= (1 + x^2) e^x. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.5 *Le théorème (2.3.3) reste vrai pour les équations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce.*

2.2.2 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale non linéaire de Volterra

Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$(2.6) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t)) dt \quad 0 \leq x \leq +\infty$$

On note $C[a, b]$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$ est complet par rapport à la métrique

$$d(x(t), y(t)) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

Théorème 2.2.6 *Soit $K(x, t, z)$ une fonction à valeurs réelles, continue sur $T(a, b) \times \mathbb{R}$ et satisfait la condition de Lipschitz par rapport z :*

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

De plus si $f \in C[a, b]$ alors, l'équation (2.6) admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$ pour toute λ , où $x \in [a, b]$.

Preuve. On sait que l'espace $C[a, b]$ est constitué des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ est un espace métrique complet avec la métrique

$$d(u, \psi) = \max_{a \leq t \leq b} |u(t) - \psi(t)|.$$

On définit l'opérateur A comme suit :

$$Au(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, u(t)) dt$$

Pour prouver que l'équation (2.6) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur A admet un point fixe. D'abord, on montre que A est contractante pour toute valeur de λ .

Noter que pour tout $u, \psi \in C[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |Au(x) - A\psi(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^x [K(x, t, u(t)) - K(x, t, \psi(t))] dt \right| \\ &\leq |\lambda| L \int_a^x |Au(x) - A\psi(x)| dt \\ &\leq \frac{|\lambda|^2 L^2 (x-a)^2}{2!} d(u, \psi). \end{aligned}$$

Après n intégrations, on obtient

$$|A^n u(x) - A^n \psi(x)| \leq \frac{|\lambda|^n L^n (x-a)^n}{n!} d(u, \psi).$$

Alors

$$d(A^n u, A^n \psi) \leq \frac{|\lambda|^n L^n (x-a)^n}{n!} d(u, \psi).$$

Donc, si n assez grand et $\frac{|\lambda|^n L^n (x-a)^n}{n!} < 1$ alors A^n est un opérateur contractant de $C([a, b])$ en lui-même et d'après le principe de Banach l'opérateur A admet un point fixe unique u qui est une solution unique de l'équation intégrale (2.6). $\square$

2.2.3 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale non linéaire de Fredholm

Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce suivante :

$$(2.7) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, u(t)) dt$$

Où $f(x)$ est une fonction complexe et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et le noyau $K(x, t)$ est complexe et continu sur

$$Q(a, b) = \{(x, t) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}.$$

Théorème 2.2.7 *Supposons que le noyau $K(x, t, z)$ est une fonction continue sur $Q(a, b) \times \mathbb{R}$ satisfaisant la condition Lipschitz suivante :*

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|.$$

De plus si $f \in C[a, b]$, alors, l'équation (2.7) admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$ pour toute $|\lambda| \leq \frac{1}{L(b-a)}$.

Preuve. On sait que l'espace $C[a, b]$ est constitué des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ est un espace métrique complet avec la métrique

$$d(u, \psi) = \max_{a \leq t \leq b} |u(t) - \psi(t)|.$$

On définit l'opérateur B comme suit :

$$Bu(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, u(t)) dt.$$

Pour prouver que l'équation (2.7) admet une solution, il faut montrer que l'opérateur B admet un point fixe. D'abord, on montre que B est contractante pour toute valeur de λ .

Noter que pour tout $u, \psi \in C[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |Bu(x) - B\psi(x)| &= |\lambda| \left| \int_a^b [K(x, t, u(t)) - K(x, t, \psi(t))] dt \right| \\ &\leq |\lambda| L(b - a) d(u, \psi). \end{aligned}$$

Donc, de cette inégalité, on obtient

$$d(Bu, B\psi) \leq |\lambda| L(b - a) d(u, \psi)$$

Donc, si $\alpha = |\lambda| L(b - a) < 1$, alors B est contractante de $C[a, b]$ en lui-même et d'après le théorème de l'application contractante l'opérateur B admet un point fixe unique qui est une solution unique de l'équation intégrale (2.7). $\square$

2.3 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

On désigne par A l'opérateur linéaire compact dans un espace normé E dans lui-même. On présente la théorie de base pour une équation $u - Au = f$, on définit l'opérateur

$$T = I - A.$$

Où I est l'opérateur identité.

Théorème 2.3.1 (Premier Théorème de Riesz)

L'espace nul de l'opérateur T , i.e. le noyau de l'opérateur T , définie par

$$\ker(T) = \{u \in E; Tu = (I - A)u = 0\},$$

Est un sous-espace de dimension finie.

Théorème 2.3.2 (Deuxième Théorème de Riesz)

L'espace image de l'opérateur T , i.e. l'image de l'opérateur T , définie par

$$\text{Im } T = T(E) = \{\psi, \exists u \in E, Tu = \psi\},$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie.

Théorème 2.3.3 (Troisième Théorème de Riesz)

Il existe un unique $m \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur T tel que :

$$\{0\} = \ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \dots \subset \ker(T^m) = \ker(T^{m+1}) = \dots$$

$$E = \text{Im}(T^0) \supset \text{Im}(T^1) \supset \dots \supset \text{Im}(T^m) = \text{Im}(T^{m+1}) = \dots$$

Et on a la somme directe $E = \ker(T^m) \oplus \text{Im}(T^m)$

Théorème 2.3.4 (Alternative de Fredholm)

On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autres, issues d'un noyau $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont donc définies par :

$$(2.8) \quad \text{trouver } u \in [a, b] \text{ telque } u(x) - \int_a^b K(x, t)u(t)dt = 0$$

$$(2.9) \quad \text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ telque } \psi(x) - \int_a^b K(t, x)\psi(t)dt = 0.$$

On considère pour $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$(2.10) \quad \text{trouver } u \in [a, b] \text{ telque } u(x) - \int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x)$$

$$(2.11) \quad \text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ telque } \psi(x) - \int_a^b K(t, x)\psi(t)dt = g(x)$$

Alors on a l'alternative :

- Ou bien les équations (2.8) et (2.9) n'ont que les solutions triviales $u \equiv 0$ et $\psi \equiv 0$, et dans ces cas les équations (2.10) et (2.11) admettent une unique solution $u \in [a, b]$ et $\psi \in [a, b]$ pour chaque $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$.

- Ou bien les équations (2.8) et (2.9) ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (2.10) et (2.11) sont résolubles si et seulement si pour toute solution de (2.8) et toute solution de (2.9) on a

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b g(x)u(x)dx = 0.$$

Dans ces conditions, la solution générale de (2.10) s'écrit sous la forme :

$$u = \tilde{u} + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$$

où $\tilde{u}$ est une solution particulière de (2.10) et les $(u_i)_{0 \leq i \leq m}$ forme une famille libre de solution de (2.8).

Théorème 2.3.5 (Séries de Neumann)

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même, avec $\|A\| < \lambda$.

Alors $A_\lambda = A - \lambda I$ admet un opérateur inverse borné donné par la série

$$(A - \lambda I)^{-1} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}},$$

de plus

$$(A - \lambda I)^{-1} \leq \frac{1}{\|\lambda\| - \|A\|}.$$

Chapitre 3

Résolution des équations intégrales de Fredholm et Volterra

Il existe de nombreuses méthodes analytiques pour résoudre des équations intégrales linéaires de Fredholm et Volterra de seconde espèce.

Dans ce chapitre, nous étudierons certaines des méthodes les plus couramment utilisées de Fredholm qui existent sa méthode et la méthode des noyau itérés, ainsi que pour Volterra, il y a sa méthode et la méthode de décomposition d'Adomian et d'autres méthodes. . . , pour déterminée la solution d'une équation intégrale de Fredholm et Volterra.

3.1 Méthode de Fredholm

la solution de l'équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce :

$$(3.1) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

est donnée par :

$$(3.2) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)f(t)dt,$$

où la fonction $R(x, t; \lambda)$ est dite la résolvante de l'équation de Fredholm (3.1)

est définie par :

$$(3.3) \quad R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

avec $D(\lambda) \neq 0$.

$D(x, t; \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont dit séries de puissance de λ .

où

$$(3.4) \quad D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n,$$

est le mineur du déterminant de Fredholm,

et

$$(3.5) \quad D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n,$$

est le déterminant de Fredholm,

avec

$$(3.6) \quad B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \left| \begin{array}{cccccc} k(x, t) & k(x, t_1) & \dots & \dots & \dots & k(x, t_n) \\ k(t_1, t) & k(t_1, t_1) & \dots & \dots & \dots & k(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t) & k(t_n, t_1) & \dots & \dots & \dots & k(t_n, t_n) \end{array} \right| dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

et

$$B_0(x, t) = k(x, t)$$

$$(3.7) \quad c_n = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \left| \begin{array}{cccccc} k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) & \dots & \dots & \dots & k(t_1, t_n) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) & \dots & \dots & \dots & k(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k(t_n, t_1) & k(t_n, t_2) & \dots & \dots & \dots & k(t_n, t_n) \end{array} \right| dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Si le noyau $K(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt,$$

est finie, les séries (3.4) et (3.5) convergentes quel que soit λ et donc elle sont des fonctions analytiques entières de λ .

La résolvante (3.3) est une fonction analytique de λ sauf les λ qui sont des zéros de $D(\lambda)$. Ces zéros sont les pôles de la résolvante $R(x, t; \lambda)$.

Exemple 3.1.1 *En utilisant les déterminants de Fredholm calculer la résolvante du noyau*

$$K(x, t) = xe^t \quad \text{avec } a = 0 \text{ et } b = 1,$$

puis donner la solution de l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xe^t u(t) dt \quad \lambda \neq 1$$

pour $f(x) = e^{-x}$.

On a $B_0(x, t) = K(x, t) = xe^t$ donc

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1 e^t & t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^t & t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

puisque les déterminants sont nuls, alors tous les $B_n(x, t)$ sont nuls aussi .c'est à dire $B_n(x, t) = 0 \quad \forall n$.

$$c_1 = \int_0^1 k(t_1, t_1) dt_1 = \int_0^1 t_1 e^{t_1} dt_1 = 1$$

$$c_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1 e^{t_1} & t_1 e^{t_2} \\ t_2 e^{t_1} & t_2 e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

alors $c_n = 0 \quad \forall n \geq 2$. D'après (3.4) et (3.5) on trouve

$$D(x, t; \lambda) = k(x, t) = xe^t.$$

et

$$D(\lambda) = 1 - c_1\lambda = 1 - \lambda.$$

d'où

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}$$

D'après la formule (3.2) la solution de l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 xe^t u(t) dt$$

est

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1 - \lambda} f(t) dt$$

et pour $f(x) = e^{-x}$

$$u(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} x$$

3.2 La méthode de solution en série

Définition 3.2.1 Une fonction réelle est dite analytique, si elle possède des dérivées de tous les ordres tels que la série de Taylor en tout point x_0 de son domaine :

$$(3.8) \quad u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Converge vers $f(x)$ dans un voisinage de x_0 .

La forme générique de la série de Taylor est de la forme :

$$(3.9) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Pour $x_0 = 0$, La formule peut s'écrire sous la forme :

$$(3.10) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Principe de la méthode : La méthode de solution en série découle de la série de Taylor pour les fonctions analytiques. On suppose que la solution $u(x)$ de l'équation intégrale de Fredholm

$$(3.11) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

Est analytique et possède donc une série de Taylor de la forme (3.10).

En remplaçant (3.10) dans les deux côtés de (3.11) on obtient

$$(3.12) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt$$

La formule (3.12) peut s'écrire

$$(3.13) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = T(f(x)) + \lambda \int_a^b k(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt$$

Où $T(f(x))$ est la série de Taylor de $f(x)$.

L'équation intégrale de Fredholm (3.11) sera transformée en une intégrale de (3.12) et (3.13).

On intègre d'abord le côté droit de l'intégrale dans (3.12) et (3.13) et on additionne les coefficients de puissance similaires de x .

Nous égalisons ensuite les coefficients comme les pouvoirs de x dans les deux côtés de l'équation résultante pour obtenir une relation de récurrence. La résolution de la relation de récurrence conduira à une détermination des coefficients a_j , $j \geq 0$.

Après avoir déterminé les coefficients a_j , $j \geq 0$, la solution en série suit immédiatement en remplaçant les coefficients dérivés en (3.10).

La solution exacte peut être obtenue si la solution existe, et elle est de la forme.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple 3.2.2 Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante, en utilisant la méthode de solution en série :

$$u(x) = 2x - 4x^3 + \int_0^1 (1 - 2xt) u(t) dt$$

On remplace $u(x)$ par

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2x - 4x^3 + \int_0^1 (1 - 2xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \quad a_n = 0, \quad n \geq 4$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^3 a_n x^n &= 2x - 4x^3 + \int_0^1 (1 - 2xt) \sum_{n=0}^3 a_n t^n dt \\ &= 2x - 4x^3 + \int_0^1 \sum_{n=0}^3 a_n t^n dt - 2x \int_0^1 \sum_{n=0}^3 a_n t^{n+1} dt \\ &= 2x - 4x^3 + \sum_{n=0}^3 \left[\frac{a_n t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - 2x \sum_{n=0}^3 \left[\frac{a_n t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \\ &= 2x - 4x^3 + \left[a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + a_3 \frac{t^4}{4} \right]_0^1 - 2x \left[a_0 \frac{t^2}{2} + a_1 \frac{t^3}{3} + a_2 \frac{t^4}{4} + a_3 \frac{t^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2x - 4x^3 + a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} - 2x \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{5} \right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \left(2 - a_0 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{2}{5}a_3 \right) x - 4x^3 \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \left(2 - a_0 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{2}{5}a_3 \right) x - 4x^3. \end{aligned}$$

Par indentification on obtient

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 + \frac{a_1}{2} + a_2 x^3 + a_3 x^4 \\ a_1 &= 2 - a_0 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{a_2}{2} - \frac{2}{5}a_3 \end{aligned}$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -4$$

Donc

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{4}{3} \\a_1 &= 2 \\a_2 &= 0 \\a_3 &= -4,\end{aligned}$$

Donc la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \frac{4}{3} + 2x - 4x^3.$$

3.3 Méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian consiste à décomposer la fonction inconnue $u(x)$ en une somme de nombre infini de composants définie par :

$$(3.14) \quad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

ou d'une façon équivalente :

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

pour la relation de récurrence nous substituons (3.14) dans l'équation intégrale de Fredholm,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) u(t) dt,$$

pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt.$$

D'une façon équivalente :

(3.15)

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)(u_0(t) + u_1(t) + u_2(t) + \dots)dt,$$

Les composants zéros sont définis par tous les termes qui ne sont pas sous le signe de l'intégrale.

Ces composants $u_j(x)$, $j \geq 0$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont déterminés par la relation de récurrence :

$$u_0(x) = f(x) \neq 0,$$

$$(3.16) \quad u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u_n(t)dt,$$

d'une façon d'équivalence :

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u_0(t)dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u_1(t)dt$$

$$u_3(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u_2(t)dt,$$

et ainsi de suite.

La solution $u(x)$ de l'équation de Fredholm (3.15) est définie finalement par la formule (3.14).

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Exemple 3.3.1 Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm par la méthode de décomposition d'Adomian :

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 tu(x)dt.$$

On remplace $u(x)$ par la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x \int_0^1 t \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dt.$$

on a d'après la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x \\ u_{n+1}(x) &= x \int_0^1 t u_n(x) dt. \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x \\ u_1(x) &= x \int_0^1 t u_0(t) dt = x \int_0^1 t (e^t - t) dt = \frac{2}{3}x \\ u_2(x) &= x \int_0^1 t u_1(t) dt = x \int_0^1 t \left(\frac{2}{3}t\right) dt = \frac{2}{9}x = \frac{2}{3^2}x \\ u_3(x) &= x \int_0^1 t u_2(t) dt = x \int_0^1 t \left(\frac{2}{9}t\right) dt = \frac{2}{27}x = \frac{2}{3^3}x \end{aligned}$$

par récurrence on obtient

$$u_n(x) = \frac{2}{3^n}x$$

d'où d'après

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots\right) \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x \frac{3}{2} \\ &= e^x \end{aligned}$$

donc la solution est

$$u(x) = e^x.$$

3.4 Méthode de décomposition modifiée

La méthode de décomposition modifiée fournit les solutions dans une série infinie de composants. Les composants u_j , $j \geq 0$ sont facilement à calculés si le terme non homogène $f(x)$ dans l'équation intégrale de Fredholm :

$$(3.17) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt.$$

Consiste en un polynôme d'un ou deux termes.

La fonction $f(x)$ se compose d'une combinaison de deux ou plusieurs fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles et autres.

La méthode de décomposition modifiée dépend principalement de la division de la fonction $f(x)$ en deux parties.

Principe de la méthode :

La fonction $f(x)$ se décompose comme suit :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

$$u_0(x) = f_1(x)$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u_0(t)dt.$$

$$(3.18) \quad u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u_n(t)dt, \quad n \geq 1.$$

La solution est donnée par

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Remarque 3.4.1 Cette méthode ne peut donc pas être utilisée, si la fonction $f(x)$ se compose d'un seul terme.

Remarque 3.4.2 *D'abord en sélectionnant correctement les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, la solution exacte peut être obtenue, en utilisant $f_1(x)$ et $f_2(x)$.*

Exemple 3.4.3 *Résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm suivante en utilisant la méthode de décomposition modifiée :*

$$u(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16} (17 + 3e^4) + \int_0^1 tu(t)dt.$$

Nous décomposons d'abord $f(x)$ donné par :

$$f(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16} (17 + 3e^4)$$

en deux parties :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 3x + e^{4x} \\ f_2(x) &= -\frac{1}{16} (17 + 3e^4) \end{aligned}$$

nous utilisons ensuite la formule de récurrence modifiée<ref>q</ref> pour obtenir :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x) = 3x + e^{4x} \\ u_1(x) &= -\frac{1}{16} (17 + 3e^4) + \int_0^1 t (3t + e^{4t}) dt = 0, \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t) u_n(t) dt = 0, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

alors la solution est donnée par

$$u(x) = 3x + e^{4x}.$$

3.5 La méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives également appelée méthode d'intégration de Picard fournit un schéma qui peut être utilisé pour résoudre des problèmes à valeur initiale ou des équations intégrales.

Le principe de cette méthode, consiste à remplacer la fonction inconnue $u(x)$ sous le signe intégral de l'équation de Volterra :

$$(3.19) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt,$$

Par toute fonction continue à valeurs réelles sélectionnée $u_0(x)$, appelée approximation zéro.

Cette substitution donnera la première approximation $u_1(x)$:

$$(3.20) \quad u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u_0(t)dt,$$

Il est évident que $u_1(x)$ est continue si $f(x)$, $k(x, t)$ et $u_0(x)$ sont continues.

La deuxième approximation $u_2(x)$ peut être obtenue de la même façon en remplaçant $u_0(x)$ dans l'équation (3.20) par $u_1(x)$.

$$(3.21) \quad u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u_1(t)dt,$$

En continuant ainsi, nous obtenons une suite infinie de fonctions :

$$u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \dots$$

qui satisfait la relation de récurrence

$$(3.22) \quad u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ainsi à la limite la solution $u(x)$ est obtenue comme suit :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

De sorte que la solution résultante $u(x)$ soit indépendante du choix de l'approximation $u_0(t)$:

Théorème 3.5.1 Si :

- 1- La fonction $f(x)$ dans (3.22) est continue dans l'intervalle $0 < x < a$.
- 2- le noyau $k(x, t)$ est également continu dans le triangle $0 < x < a$, $0 < t < x$.

Alors la suite des approximation successives $u_n(x)$, $n \geq 0$ converge vers la solution $u(x)$.

Résoudre l'équation intégrale linéaire de Volterra suivante en utilisant la méthode des approximations successives : $u_n(x) = x + \int_0^x (t-x) u(t) dt$.

On à :

$$u_0(x) = x.$$

Ensuite, la première approximation,

$$u_1(x) = x + \int_0^x (t-x) u_0(x) dt = x + \int_0^x (t-x) t dt$$

$$u_1(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$u_2(x) = x + \int_0^x (t-x) u_1(x) dt = x + \int_0^x (t-x) \left(x - \frac{t^3}{3} \right) dt$$

$$u_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$u_3(x) = x + \int_0^x (t-x) u_2(x) dt = x + \int_0^x (t-x) \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) dt$$

$$u_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

En continuant ce processus, le n-ième itéré :

$$u_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarquons que nous avons utilisé le développement de série de Maclaurin de $\sin(x)$ pour déterminer $u_4(x)$, $u_5(x)$, $u_6(x)$, ..., $u_n(x)$, ... Donc la solution $u_n(x)$ est :

$$u(x) = \lim u_n(x).$$

$$u(x) = \sin(x).$$

3.6 Méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition Adomian consiste à décomposer la fonction inconnue $u(x)$ de toute équation en une somme d'un nombre infini de composantes définies par la série de décomposition :

$$(3.23) \quad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

En plaçant cette série dans l'équation :

$$(3.24) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) u(t) dt.$$

il vient :

$$(3.25) \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt,$$

$$(3.26) \quad u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) (u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots) dt.$$

La composante zéro $u_0(x)$ est identifiée par tous les termes qui ne sont pas inclus dans le signe intégral. Par conséquent, les composantes $u_n(x)$, $n \geq 0$ de la fonction inconnue $u(x)$ sont complètement déterminées en définissant la relation de récurrence :

$$u_0(x) = f(x),$$

$$(3.27) \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x k(x, t) u_n(t) dt, \quad n \geq 0.$$

La solution $u(x)$ de l'équation de Volterra est donnée par la formule (3.23) :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Exemple 3.6.1 Résoudre l'équation intégrale linéaire de Volterra par la méthode de décomposition d'Adomian :

$$u(x) = 5x^3 - x^5 + \int_0^x tu(x) dt.$$

Détermination de la composante zéro $u_0(x)$ par les deux premiers termes qui ne sont pas inclus sous le signe intégral :

$$u_0(x) = 5x^3 - x^5$$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x tu_n(x)dt, \quad n \geq 0.$$

Cela donne à son tour :

$$u_0(x) = 5x^3 - x^5$$

$$u_1(x) = \int_0^x tu_0(x)dt = x^5 - \frac{1}{7}x^7,$$

$$u_2(x) = \int_0^x tu_1(x)dt = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{63}x^9,$$

$$u_3(x) = \int_0^x tu_2(x)dt = \frac{1}{63}x^9 - \frac{1}{693}x^{11}.$$

La solution en série est donnée par :

$$u(x) = (5x^3 - x^5) + (x^5 - \frac{1}{7}x^7) + (\frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{63}x^9) + (\frac{1}{63}x^9 - \frac{1}{693}x^{11}) + \dots +$$

Ainsi, nous trouvons enfin :

$$u(x) = 5x^3.$$

3.7 Méthode de décomposition modifiée

La méthode de décomposition modifiée fournit les solutions dans une série infinie de composantes.

Les composants u_n , $n \geq 0$ sont facilement calculables si le terme non homogène $f(x)$ dans l'équation intégrale de Volterra :

$$(3.28) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t)dt,$$

consiste en un polynôme d'un ou deux termes.

La fonction $f(x)$ se compose d'une combinaison de deux ou plusieurs fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles et autres.

La méthode de décomposition modifiée dépend principalement de la division de la fonction $f(x)$ en deux parties.

Principe de la méthode :

La fonction $f(x)$ se décompose comme suit :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

$$u_0(x) = f_1(x).$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u_0(t)dt.$$

$$(3.29) \quad u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x k(x, t)u_n(t)dt. \quad n \geq 1,$$

où la solution $u(x)$ est exprimée comme une somme infinie de composantes définies auparavant :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

Exemple 3.7.1 Résoudre l'équation intégrale linéaire de Volterra suivante en utilisant la méthode de décomposition modifiée :

$$u(x) = \sin x + (e - e^{\cos x}) - \int_0^x e^{\cos t} u(t)dt.$$

Nous divisons d'abord $f(x)$ donné par :

$$f(x) = \sin x + (e - e^{\cos x}).$$

En deux parties :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x \\ f_2(x) &= (e - e^{\cos x}), \end{aligned}$$

nous utilisons ensuite la formule de récurrence modifiée pour obtenir :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x) = \sin x, \\ u_1(x) &= (e - e^{\cos x}) - \int_0^x e^{\cos t} u_0(t) dt = 0 \\ u_{n+1}(x) &= - \int_0^x k(x, t) u_n(t) dt. \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Il est évident que chaque composante de u_n , $n \geq 1$ est zéro. Cela donne à son tour la solution exact par :

$$u(x) = \sin x.$$

Conclusion 1 *Dans ce travail, nous traitons de quelques méthodes analytiques pour résoudre des équations intégrales linéaires du type Fredholm et Volterra comme :*

La méthode de décomposition d'Adomian, la méthode de décomposition modifiée..., et vérifions l'existence et l'unicité de la solution de ces équations, de plus nous présentons quelques exemples des différentes méthodes utilisées.

Erik Ivar Fredholm



Nom complet : Erik Ivar Fredholm

Date de naissance : 7 avril 1866

Lieu de naissance : Stockholm, Suède

Date de décès : 17 août 1927

Domaine de spécialité : Mathématiques, notamment les équations intégrales et l'analyse fonctionnelle.

Réalisations majeures :

Il est l'un des premiers mathématiciens à avoir établi une base théorique pour les équations intégrales.

Il a développé ce qu'on appelle aujourd'hui les équations intégrales de Fredholm, qui sont des outils fondamentaux en analyse mathématiques et en physique mathématiques.

Ses travaux ont conduit au développement de la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces fonctionnels, un pilier de l'analyse fonctionnelle moderne.

Il a également contribué à préparer le terrain pour la théorie spectrale.

Impact scientifique :

Ses idées ont jeté les bases de nombreuses avancées en mathématiques modernes et ont influencé des mathématiciens majeurs comme David Hilbert.

Vito Volterra



Nom complet : Vito Volterra

Date de naissance : 3 mai 1860

Lieu de naissance : Ancône, Italie

Date de décès : 11 octobre 1940

Domaine de spécialité : Mathématiques et physique, en particulier les équations intégrales et l'analyse fonctionnelle.

Réalisations majeures :

Il est l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle, et a contribué de manière significative à la théorie des équations intégrales.

Il est célèbre pour les équations intégrales de Volterra, caractérisées par des bornes variables, utilisées dans de nombreux domaines comme la biologie et la physique.

Il a participé à la création de modèles mathématiques décrivant les interactions entre espèces, comme le modèle Lotka-Volterra en écologie.

Il a joué un rôle important dans le développement des sciences appliquées en Italie et s'est opposé au régime fasciste.

Impact scientifique :

Ses recherches ont eu une influence durable en mathématiques, en physique et en biologie, et ses travaux sont toujours utilisés dans la modélisation scientifique moderne.

Bibliographie

- [1] A. Rahmoune, Equations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution, August 16, 2018.
- [2] AM. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations- Methods and Application, (2011).
- [3] AM. Wazwaz, A First Course in Integral Equations 2nd Edition, (saint Xavier University USA, 2015).
- [4] B.Abdelaziz, Equations intégrales linéaires de Fredholm de seconde espèce et méthode de Galerkin, mémoire de master, Université de Biskra Juin 2019.
- [5] B. Kress, Linear Integral Equations, (Third Edition, 2013).
- [6] Halim Benali, Introduction aux équations intégrales linéaires méthodes et applications, Université de Iben Khaldoun de Tiaret, 2019.
- [7] K. Mimoune, Equations intégrales linéaires de Volterra de seconde espèce et méthode de Galerkin, Université de Biskra Juin 2019.
- [8] M. Adel, Sur la résolution numérique des équations intégrales mixtes de Fredholm- Volterra, mémoire master. Université Mohamed Khider, Biskra, Septembre 2020.
- [9] M. Rahman, Integral Equations and calculus of Variations, (2007-2008).
- [10] Rahmoune Azedine, Sur la résolution numérique des équations en utilisant des fonctions spéciales, thèse, Université de Batna, 30/05/2001.
- [11] SEGHIRI Imane, Quelques méthodes numérique pour résoudre des équations intégrales non linéaires de Volterra et de Fredholm, mémoire master, Université Larbi mhidi- Oum El Bouaghi, Juillet 2021.