RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
Analyse fonctionnelle

OPTION :
Analyse Fonctionnelle Application - Analyse Fonctionnelle Équation Différentielle

Présenté Par :
BOUDJENANE Mohammed
MORSLI Sidahmed

Sous L'intitulé :

Sur les solutions de quelques EDPs elliptiques

Soutenu publiquement le 24 / 06 / 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr MAAZOUZ Kada	Grade	Université de Tiaret	Président
Mr BENSAID Mhamed	Grade	Université de Tiaret	Examinateur
Mr BENIA Yassine	MCA	Université Alger 1	Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Remerciements

Je remercie avant tous ALLAH qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le moral durant ces années d'études.

Je voudrais exprimer ma profonde et respectueuse gratitude au directur du mémoire, Mr.Benia Yassine, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses précieux conseils.

Je tiens à remercier tous les membres de jury qui s'est chargés de débattre et enréchir ce travail.

Toute ma reconnaissance pour mes parents d'avoir été une agréable source d'encouragement.

Abstract

This thesis is devoted to the study of exact solutions of certain elliptic partial differential equations, both linear and nonlinear. In the linear case, we employ classical methods such as separation of variables. We also present a basic application of the Lax-Milgram theorem to a simple one-dimensional Poisson problem, followed by an extension to a problem in NN-dimensional space.

Keywords : elliptic partial differential equations, exact solutions, existence, uniqueness, Poisson equation, analytical methods.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des solutions exactes de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques, qu'elles soient linéaires ou non linéaires. Dans le cas linéaire, nous avons recours à des méthodes classiques, telles que la séparation des variables. Nous présentons également une application élémentaire du théorème de Lax-Milgram à un problème de Poisson unidimensionnel simple, puis à un problème en dimension N.

Mots clés : Eéquations aux dérivées partielles elliptiques, solutions exactes, existence, unicité, équation de Poisson, méthodes analytiques.

Table des matières

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées, un ce domaine qui devient de plus en plus important à l'époque moderne.

Les EDP ont une grande utilité dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes comme la physique, la chimie, la biologie et d'autres sciences.

Les équations aux dérivées partielles de type elliptiques occupent une place centrale en mathématiques appliquées et en physique théorique, en raison de leurs capacité à modéliser des phénomènes évolutifs liés à la diffusion et à la dissipation. Elles interviennent dans des domaines variés tels que la conduction de la chaleur (modélisée par l'équation de la chaleur), la dynamique des fluides visqueux, la diffusion de populations ou de substances en biologie, ainsi que dans la valorisation d'actifs financiers en finance quantitative.

L'étude des solutions exactes des équations aux dérivées partielles présente un double intérêt. D'une part, elle permet une meilleure compréhension des phénomènes modélisés. Elle facilite également l'analyse théorique de propriétés importantes telles que l'unicité, la régularité ou la stabilité des solutions. D'autre part, les solutions exactes sont indispensables pour valider les méthodes numériques, car elles permettent de mesurer l'erreur entre la solution approchée et la solution réelle. Cette évaluation est cruciale pour juger la précision, la convergence et la fiabilité des algorithmes de résolution.

La mémoire est structuré en trois chapitres. On commence dans le premier chapitre par quelques préliminaires, quelques outils d'analyse de Fourier, rappels théorique sur les équations aux dérivées partielles, avec une attention particulière portée aux EDP elliptiques. Ainsi, nous y abordons la classification. Le deuxième chapitre, est réservé aux méthodes de résolution exacte des équations différentielles aux dérivées partielles elliptiques, il s'agit notamment de la méthode de séparation de variables, et un changement de fonction. Dans le Chapitre 3 on étudie quelques équations différentielles aux dérivées partielles elliptiques linéaires moyennant le Théorème de Lax-Milgram.

Chapitre 1

Préliminaires

1.0.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On définit*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Définition 1.2 *On définit*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ est mesurable et il existe } C > 0 \text{ tel que } |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega \},$$

muni de la norme essentielle

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C > 0 \,|\, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}.$$

1.0.2 Espaces vectoriels normés

Remarque 1.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On désigne par p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Lorsque $1 \leq p < \infty$, l'espace dual de $L^p(\Omega)$ est $L^{p'}(\Omega)$.

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une application*

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

*est une **norme** si elle satisfait les propriétés suivantes*

1. ***(Positivité)*** $\forall x \in E,\ \|x\|_E \geq 0,$
2. ***(Ségrégation)*** $\|x\|_E = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0_E,$
3. ***(Homogénéité)*** $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \|\alpha x\|_E = |\alpha| \cdot \|x\|_E,$
4. ***(Inégalité triangulaire)*** $\forall x, y \in E,\ \|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E.$

Remarque 1.2

— *Le couple $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelé un **espace vectoriel normé**.*

— *Si la propriété (2) n'est pas satisfaite, on dit que $\|\cdot\|$ est une **semi-norme**.*

Définition 1.4 (Suite de Cauchy) *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E.*

*On dit que (x_n) est une **suite de Cauchy** si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m \geq n_0,\ \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1 *Toute suite convergente dans un espace vectoriel normé est une suite de Cauchy.*

Preuve

Soit (x_n) une suite convergente vers $x \in E$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tous $n, m \geq n_0$, on a

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc (x_n) est une suite de Cauchy. ■

1.0.3 Espace de Banach

Théorème 1.1 *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si $x_n \to \bar{x} \in E$, alors toute sous-suite (x_{n_k}) converge également vers $\bar{x}$.*

Théorème 1.2 *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si $x_n \to \bar{x} \in E$, alors la suite est bornée, c'est-à-dire que la suite réelle $(\|x_n\|)$ est bornée.*

Théorème 1.3 *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si $x_n \to \bar{x} \in E$, alors :*

$$\|x_n\|_E \longrightarrow \|\bar{x}\|_E.$$

Définition 1.5 (Espace complet) *Un espace normé est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy converge vers une limite qui appartient à cet espace.*

Définition 1.6 (Espace de Banach) *Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est un* ***espace de Banach*** *si E est complet, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy dans E converge vers un élément de E.*

Exemple 1.1

L'espace $E = C([-1,1], \|\cdot\|_\infty)$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|,$$

est un espace de Banach.

En effet, soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq n_0,\ \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Alors, on en déduit qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que :

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{uniformément sur } [-1,1].$$

Puisque la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues donne une fonction continue, on a $f \in C([-1,1])$, et donc

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

1.0.4 Espace de Hilbert

Proposition 1.2 *Tout espace normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie est un espace de Banach.*

Définition 1.7 (Produit scalaire) *Soit E un espace vectoriel réel (resp. complexe). On appelle* ***produit scalaire*** *sur E toute application*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle E E \to \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}),$$

qui vérifie les propriétés suivantes

1. *Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire.*
2. *Pour tous $x, y \in E$,*
$$\langle y, x\rangle = \begin{cases} \langle x, y\rangle, & \text{si } E \text{ est réel,} \\ \overline{\langle x, y\rangle}, & \text{si } E \text{ est complexe.} \end{cases}$$
3. *Pour tout $x \in E$, on a $\langle x, x\rangle \geq 0$.*
4. *$\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

Remarque 1.3 *Dans le cas complexe, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a*

$$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

Définition 1.8 (Espace préhilbertien) *Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un* ***espace préhilbertien****.*

Corollaire 1.1 *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Alors l'application*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

définit une norme sur E.

Définition 1.9 (Espace de Hilbert, [6]) *Un espace préhilbertien est dit* ***espace de Hilbert*** *s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire.*

Proposition 1.3 (Inégalité de Young) *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in (1, +\infty)$ tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors on a l'inégalité suivante

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Pour tous $x, y \in E$, on a*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Proposition 1.5 ([5]) *Si x et y sont deux éléments quelconques d'un espace préhilbertien, alors*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

1.0.5 Séries de Fourier

Définition 1.10 *L'espace vectoriel $L^2_T(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs réelles ou complexes, périodiques de période T, telles que $|f|^2$ est intégrable sur $[0, T]$, c'est-à-dire*

$$L^2_T(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \textit{périodique de période } T, \quad \int_0^T |f(x)|^2\,dx < \infty \right\},$$

muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

et de la norme hilbertienne associée, appelée ***norme quadratique moyenne***

$$\|f\|_{L^2_T} = \left(\int_0^T |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Le **système trigonométrique** associé est défini, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par la famille de fonctions

$$e_n(x) = \exp\left(\frac{2i\pi nx}{T}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le système trigonométrique par

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad \text{où } = \frac{2\pi}{T}.$$

Ce système forme une famille orthogonale dans $L^2_T(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire défini précédemment. Dans le cas réel, la famille suivante est orthogonale dans $L^2_T(\mathbb{R})$

$$\{\cos(nx),\ n \in \mathbb{N}; \quad \sin(nx),\ n \in \mathbb{N}^*\}, \quad \text{avec } = \frac{2\pi}{T}.$$

Définition 1.11 (Polynôme trigonométrique, [7]) *On appelle* ***polynôme trigonométrique*** *toute combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique.*

Définition 1.12 (Coefficients de Fourier réels, [7]) *Soit $f \in L^2_T(\mathbb{R})$. On définit les coefficients de Fourier de f par*

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nx)\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(nx)\,dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.13 (Série de Fourier réelle) *La série de Fourier d'une fonction $f \in L^2_T(\mathbb{R})$ est la série de fonctions donnée par*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right].$$

Remarque 1.4 *Dans le cas complexe, la série de Fourier associée à $f \in L^2_T(\mathbb{R})$ est donnée par*

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx},$$

où les coefficients de Fourier complexes sont définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-inx}\,dx.$$

1.0.6 Convergence des séries de Fourier

On a le résultat de convergence suivant

Théorème 1.4 (Convergence dans L^2) *Soit $f \in L^2_T(\mathbb{R})$. Alors f est égale presque partout à sa série de Fourier, c'est-à-dire*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx), \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}.$$

Remarque 1.5 *Cela ne signifie pas que f est égale partout à sa série de Fourier, mais seulement qu'elles sont égales presque partout. Deux fonctions de $L^2_T(\mathbb{R})$ ayant les mêmes coefficients de Fourier ne sont pas nécessairement égales, mais égales presque partout.*

Théorème 1.5 (Théorème de Dirichlet – Convergence ponctuelle) *Soit f une fonction périodique de période T, continue par morceaux. Alors, la série de Fourier associée à f converge, pour tout $a \in [0, T]$, vers*

$$\frac{f(a^+) + f(a^-)}{2},$$

où $f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ *et* $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Si de plus f *est continue, alors la série de Fourier converge, pour tout* $a \in [0, T]$, *vers* $f(a)$.

Remarque 1.6 (Convergence uniforme) *Si* f *est continue et* f' *est continue par morceaux, alors la série de Fourier converge uniformément vers* f.

Chapitre 2

Méthodes de résolution exacte

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à plusieurs méthodes analytiques permettant d'obtenir des solutions exactes pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques, qu'elles soient linéaires ou non linéaires. Parmi les outils abordés figurent la séparation des variables, la transformation de Fourier et les changements de variables.

2.2 Généralités sur les Équations aux Dérivées Partielles (EDP)

Il existe une infinité d'équation aux dérivées partielles. Il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci. Il faut donc restreindre notre champ d'étude. On réalisera ceci en exigeant que l'équation satisfasse certaine propriétés. Par exemple qu'elle soit linéaire. C'est ce que nous décrirons dans ce section. Nous énumérerons aussi quelques-unes des équations aux dérivées partielles classiques. Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des équations aux dérivées partielles. L'acoustique, l'aérodynamique, la dynamique des fluide, l'élasticité, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique quantique, la météorologie, l'océanographie, la physique des plasmas sont quelques-uns de ces domaines.

2.2.1 Définition EDP

Une équation aux dérivées partielles (noté EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles) u, et ses dérivées partielles, et une fonction données f

$$F\left(u, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f(u) \tag{2.1}$$

ou Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et F est une fonction de plusieurs variables réelles. L'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans l'équation est(1) est appelé l'ordre de l'EDP.

Remarque

Si la fonction f est nulle, alors F définit une équation homogène. **Dimension et ordre d'une EDP**

- **Dimension :** La dimension d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u.
- **Ordre :** L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation.

2.2.2 Équations aux dérivées partielles linéaires

Définition Une équation aux dérivées partielles (EDP) d'une inconnue u est dite **linéaire** si elle peut être mise sous la forme

$$Lu = f \tag{1.}$$

où

- L est un opérateur différentiel linéaire,
- f est une fonction de n variables indépendantes, définie sur un domaine de $\mathbb{R}^n$.

Si $f = 0$, on dit que l'équation est **linéaire homogène**. Sinon, elle est dite **linéaire non homogène**.

Exemple L'équation

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \tag{2.2}$$

est **linéaire non homogène** sur $\mathbb{R}^2$, car elle peut s'écrire sous la forme (**??**) où

$$Lu = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$f(x, y) = 1,$$

et L est un opérateur différentiel linéaire. *Vérification de la linéarité de* L *:* Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et u_1, u_2 deux fonctions suffisamment régulières. On a

$$\begin{aligned} L(au_1 + bu_2) &= (au_1 + bu_2) + y\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2(au_1 + bu_2)}{\partial x^2} \\ &= a\left(u_1 + y\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + b\left(u_2 + y\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) \\ &= aL(u_1) + bL(u_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que L est un opérateur linéaire.

Équations aux dérivées partielles quasi-linéaires

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est dite **quasi-linéaire** lorsqu'elle est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction inconnue u, pour chacune des variables indépendantes. Autrement dit, les dérivées d'ordre inférieur peuvent apparaître de manière non linéaire, mais les termes de plus haut ordre apparaissent de manière linéaire.

Équations aux dérivées partielles non linéaires

Une EDP est dite **non linéaire** lorsque la fonction inconnue u ou ses dérivées d'ordre le plus élevé apparaissent de manière non linéaire dans l'équation. Cela inclut, par exemple, des produits entre dérivées, des puissances non linéaires, ou des fonctions non linéaires appliquées à ces dérivées.

Exemple Voici trois exemples illustrant les différents types d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0 \tag{2.3}$$

   est une EDP **linéaire**, d'ordre 2, **homogène**.

2.
$$xyz\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = c \tag{2.4}$$
est une EDP **quasi-linéaire**, d'ordre 2, **non homogène**.

3.
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - c = 0 \tag{2.5}$$
est une EDP **non linéaire**, d'ordre 2, **non homogène**.

Remarque La solution générale d'une EDP non homogène est la somme

$$u = u_p + u_h$$

où

— u_p est une solution particulière de l'équation non homogène,

— u_h est la solution générale de l'équation homogène associée.

Classification des équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles (EDP) peuvent être classées selon plusieurs critères

1. **Présence du temps :** Si le temps t est l'une des variables indépendantes de la fonction inconnue u, on parle d'**équations d'évolution**. Ces équations modélisent généralement des phénomènes dynamiques, comme la propagation de la chaleur ou des ondes.
2. **Équations stationnaires :** Si l'équation ne dépend que des variables spatiales (et non du temps), on parle d'**équations stationnaires**. Elles décrivent des phénomènes à l'équilibre ou constants dans le temps.
3. **Ordre de l'équation :** Le **degré de l'équation** est déterminé par l'ordre le plus élevé des dérivées partielles de la fonction u apparaissant dans l'équation.
4. **Linéarité :** Si l'équation est constituée uniquement d'une combinaison linéaire de u et de ses dérivées, on parle d'une **équation linéaire**.
5. **Non-linéarité :** Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'équation contient des termes non linéaires en u ou en ses dérivées (produits, puissances, fonctions non linéaires), on parle d'une **équation non linéaire**.

Équations aux dérivées partielles du premier ordre

Définition Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, ainsi que les dérivées partielles de premier ordre de f par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0,$$

est appelée une **équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre**.

Remarque

— Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, alors $f(x, y) = \varphi(y)$.

— Si $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, alors $f(x, y) = \psi(x)$.

Proposition Une fonction $\Phi(x, y, z)$ est une **intégrale première** d'un système différentiel si, et seulement si, elle est solution de l'équation aux dérivées partielles associée.

Définition Soit f une fonction de deux variables. Une équation aux dérivées partielles **linéaire du premier ordre** est une relation de la forme

$$P(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} = R(x, y, z),$$

où P, Q et R sont des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Soit $z = f(x, y)$ une solution de cette équation.

Posons maintenant

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Alors, les dérivées partielles de Φ sont

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -1.$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on peut réécrire l'équation sous la forme

$$P(x, y, z)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial \Phi}{\partial y} - R(x, y, z)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être associée au système différentiel suivant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)},$$

ou encore sous forme plus symétrique

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Ce système est appelé le **système caractéristique** de l'équation aux dérivées partielles.

Proposition Les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y,z),$$

sont définies implicitement par une relation de la forme

$$\Phi(x,y,z) = 0,$$

où Φ est l'intégrale première la plus générale du système caractéristique

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Remarque Comme Φ peut s'exprimer en fonction de deux intégrales premières indépendantes Φ_1 et Φ_2, l'intégration de l'équation aux dérivées partielles se ramène à la recherche de ces deux intégrales premières.

Exemple Déterminer la solution générale de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

Étape 1 : Système caractéristique associé

Cette équation peut être mise sous la forme

$$P = 1, \quad Q = 2, \quad R = -z,$$

et donc le système caractéristique est

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{-z}.$$

Étape 2 : Résolution des deux premières égalités

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{1}{2} dy \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} y + C_1.$$

Donc une première intégrale est

$$u(x, y, z) = 2x - y = k_1.$$

Étape 3 : Résolution de la deuxième égalité

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{-z} \quad \Rightarrow \quad \int dx = -\int \frac{1}{z} dz \quad \Rightarrow \quad x = -\ln|z| + C_2 \quad \Rightarrow \quad ze^x = k_2.$$

Étape 4 : Solution générale

On a deux intégrales premières indépendantes

$$\begin{cases} u = 2x - y, \\ v = ze^x, \end{cases}$$

donc la solution générale s'écrit implicitement sous la forme

$$v = \varphi(u), \quad \text{c'est-à-dire :} \quad ze^x = \varphi(2x - y),$$

ce qui donne

$$\boxed{z(x, y) = \varphi(2x - y)\, e^{-x},}$$

où φ est une fonction arbitraire de classe C^1.

Équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

Définition 1.13. Soit f une fonction de deux variables x et y. On appelle **équation aux dérivées partielles du deuxième ordre** une relation de la forme

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$

faisant intervenir f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.

Classification des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

Une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables x et y peut être écrite sous la forme générale

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d\frac{\partial f}{\partial x} + e\frac{\partial f}{\partial y} + gf = k, \tag{1.8}$$

où a, b, c, d, e, g, k sont des constantes ou des fonctions de x et y.

L'équation est classée selon la nature de l'expression quadratique en ses dérivées secondes. La classification dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

— **elliptiques** si $b^2 - 4ac = 0$. Exemple : l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

— **Hyperbolique** si $b^2 - 4ac > 0$. Exemple : l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

— **parabolique** si $b^2 - 4ac < 0$. Exemple : l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Elliptique : L'équation est dite **elliptique** si elle satisfait la condition

$$b^2 - 4ac < 0.$$

Un exemple classique est l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exemple Classer les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre suivantes comme étant hyperbolique, elliptiques ou elliptique

1. $u_t = 4u_{xx}$

   Ici, $a = 4$, $b = 0$, $c = 0$, donc

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Équation } \textbf{elliptiques}.$$

2. $u_{tt} = 4u_{xx}$

   Ici, $a = 4$, $b = 0$, $c = -1$, donc

$$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(4)(-1) = 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Équation } \textbf{hyperbolique}.$$

3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$

   Ici, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, donc

$$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Équation } \textbf{elliptique}.$$

2.3 Séparation des variables

Dans cette section, nous discuterons de l'équation différentielle partielle homogène qui décrit le flux de chaleur dans une tige, en utilisant une méthode bien connue appelée la méthode de la séparation des variables.

La méthode de séparation des variables permet de résoudre certaines équations aux dérivées partielles ,en supposant que la solution peut être écrite sous la forme d'un produit de fonctions dépendant chacune d'une seule variable.

On considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \tag{2.6}$$

où $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel agissant sur la variable spatiale x.

L'idée principale est de supposer que la solution $u(x,t)$ peut s'écrire sous la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{2.7}$$

où $X(x)$ est une fonction qui depend de x et $T(t)$ une fonction de t.

La méthode de séparation des variables transforme une EDP en un ensemble d'équations différentielles ordinaires plus simples, qui peuvent être résolues individuellement. Elle est particulièrement efficace pour les problèmes ayant des conditions aux limites bien posées et un domaine simple.

2.3.1 Application

On considère le problème des ondes suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in]0,l[. \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{2.8}$$

On remarque que

$$u(0,0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$

et

$$u(L,0) = f(L) \Rightarrow f(L) = 0.$$

On cherche une solution sous la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

On doit déterminer des solutions non triviales $u(x,t) \neq 0$ du problème homogène(2.8).

c-à-d

$X(x) \not\equiv 0, \quad \forall x \in]0,l[$ et $T(t) \not\equiv 0, \quad \forall t > 0.$

On suppose que

$$u = u(x,t) = X(x)T(t),$$

est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En substituant $u(x,t) = X(x)T(t)$, dans cette derniere on obtient

$$T''(t)X(x) - c^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Il existe $\lambda = cte$ réelle telle que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \lambda.$$

On déduit que

$$X''(x) = \lambda X(x), T''(t) = \lambda c^2 T(t).$$

On distinges les cas suivant ,solen les valeurs de λ

— Si $\lambda = 0$, la solution générale de $X(x)$ est $X(x) = C_1 x + C_2$.

— Si $\lambda > 0$, la solution générale de $X(x)$ est $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

— Si $\lambda < 0$, posons $\lambda = -\mu^2$ avec $\mu > 0$, la solution est $X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$.

A partir des conditions aux bords, on a

$$U(0,t) = 0 = U(l,t), \quad \forall t \geq 0,$$

ainsi

$$U(0,t) = 0 \Longleftrightarrow X(0) \cdot T(t) = 0.$$

Comme nous cherchons des solutions non triviales U, on suppose que $T(t) \neq 0$ pour tout $t \geq 0$, donc

$$X(0) = 0,$$

$$U(l,t) = 0 \Longleftrightarrow X(l) \cdot T(t) = 0.$$

De même, comme $T(t) \neq 0$ pour tout $t \geq 0$, on en déduit que

$$X(l) = 0.$$

Ainsi, le problème homogène est équivalent au systeme d'equation différentielle ordinaire suivants

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), & \forall x \in]0,l[, X(0) = X(l) = 0, \\ T''(t) = \lambda c^2 T(t), & \forall t > 0. \end{cases}$$

La resolution du système sera diviser en deux étapes.

Étape 1. résoudre le problème dont l'inconue est X

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \quad \forall x \in]0, l[, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

— si $\lambda = 0$, alors

$$X''(x) = 0, X(x) = C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Moyennent $X(0) = 0$ et $X(l) = 0$, on deduit $C_1 = 0$ et $C_2 = 0$,

ce qui donne $X(x) = 0$ donc $U(x,t) = 0$, une solution triviale à exclure.

— Si $\lambda > 0$, la solution générale de l'équation est

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On a

$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$,

et

$X(x) = -C_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} = C_2(-e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x})$.

Or

$X(l) = 0 \Rightarrow C_2(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0$.

Si $C_2 = 0$, alors $X(x) = 0$, ce qui donne la solution triviale à exclure.

Supposons que $C_2 \neq 0$,alors

$$e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0,$$

ce qui implique

$$e^{\sqrt{\lambda}l} = e^{-\sqrt{\lambda}l}.$$

En prenant le logarithme des deux membres ,on trouve

$$2\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

contradiction avec $\lambda > 0$. Donc, il n'y a pas de solution dans ce cas.

— Pour le dernier cas en considère $\lambda < 0$.

On pose $\lambda = -\mu^2$, avec $\mu \neq 0$, et $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

La solution générale de l'équation

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

est donnée par

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

soit encore

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On a $X(0) = 0$ alors $C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0$ donc $C_1 = 0$.

Ainsi, $X(x) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$,

d'autre part , $X(l) = 0$ donc $C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$.

Si $C_2 = 0$, alors $X(x) = 0$, ce qui donne une solution triviale.

Supposons que $C_2 \neq 0$

$$\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}l = K\pi, \quad K \in \mathbb{Z},$$

donc

$$K = \frac{\sqrt{-\lambda}l}{\pi} > 0, \quad K \in \mathbb{N}^*.$$

Soit $K = n \in \mathbb{N}^*$ (où n est un entier),alors

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{l}$$

, aussi

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

.

En remplaçant dans l'équation,on obtient

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

On en déduit que pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une solution $X_n(x)$ de l'équation

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad B_n \in \mathbb{R}.$$

Étape 2. Soit à résoudre l'equation

$$T''(t) = \lambda C^2 T(t), \quad t > 0.$$

On considère

$$\lambda = \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

On pose

$$\lambda_n = \lambda C^2 < 0,$$

la solution générale de

$$T''(t) = \lambda C^2 T(t)$$

est

$$T(t) = \alpha \cos(\sqrt{-C^2\lambda_n} t) + \beta \sin(\sqrt{-C^2\lambda_n} t),$$

Donc

$$T(t) = \alpha \cos\left(\frac{n\pi}{l} t\right) + \beta \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right).$$

On déduit,pour tout entier $n \geq 1$, il existe une solution

$$T_n(t) = \alpha_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right).$$

On en déduit qu'il existe une infinité de solutions

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t),$$

du problème linéaire homogène du (2.8), avec

$$u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[\alpha_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right)\right],$$

soit

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[\alpha_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right)\right].$$

On cherche une solution du problème(2.8) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[\alpha_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right) + \beta_n \sin\left(\frac{Cn\pi}{l} t\right)\right].$$

Cette solution doit satisfaire les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x),$$

on en déduit

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \alpha_n,$$

si la série

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

coïncide avec la série de Fourier impaire de f, alors

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad \forall n \geq 1,$$

de même, pour

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0),$$

on obtient

$$\beta_n = \frac{l}{Cn\pi}\left(\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx\right).$$

On conclue que

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left[\alpha_n \cos\left(\frac{Cn\pi}{l}t\right) + \frac{l}{Cn\pi}\beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right],$$

où

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

et

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Exemple 2.1

Résolution de l'équation de Laplace par séparation de variables Résolvons l'équation de Laplace 2D dans un rectangle $(0 < x < a,\ 0 < y < b)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(0,y) = 0, \quad u(a,y) = 0 & \text{(bords verticaux)} \\ u(x,0) = 0 & \text{(bord bas)} \\ u(x,b) = f(x) & \text{(bord haut)} \end{cases}$$

1. Séparation des variables

On cherche une solution sous la forme

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

En substituant dans l'équation de Laplace

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

On introduit une constante de séparation $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

2. Résolution de l'équation pour $X(x)$

Avec les conditions $X(0) = 0$, $X(a) = 0$, *on cherche les solutions non triviales.*

Les solutions sont sinusoïdales pour $\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

3. Résolution de l'équation pour $Y(y)$

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y) = 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

La condition $u(x,0) = 0 \Rightarrow Y_n(0) = 0 \Rightarrow B_n = 0,$ *donc*

$$Y_n(y) = A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

4. Solution générale

Chaque produit $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$ *est solution, donc la solution générale est*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

5. Condition au bord supérieure $y = b$

On impose $u(x,b) = f(x),$ *donc*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

C'est une série de Fourier sinus sur $[0,a],$ *donc*

$$A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\, dx$$

6. Solution finale

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\, dx\right] \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Résolution exacte d'une EDP elliptique non linéaire via changement de fonction

On considère l'équation elliptique non linéaire suivante

$$-u''(x) = u(x)^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

et l'on cherche une solution exacte, positive et définie sur tout $\mathbb{R}$.

On commence par multiplier les deux membres de l'équation par $u'(x)$

$$-u''(x)u'(x) = u(x)^3 u'(x)$$

ce qui peut s'écrire sous forme de dérivées

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(u'(x))^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}u(x)^4\right)$$

En intégrant des deux côtés, on obtient

$$-\frac{1}{2}(u'(x))^2 = \frac{1}{4}u(x)^4 + C \quad \Rightarrow \quad (u'(x))^2 = -\frac{1}{2}u(x)^4 + K$$

où $K = \frac{1}{2}A^4 > 0$. Ainsi

$$(u'(x))^2 = \frac{1}{2}(A^4 - u^4)$$

On sépare alors les variables

$$\frac{du}{\sqrt{A^4 - u^4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,dx$$

et l'on intègre. L'intégrale du membre de gauche est classique et donne une fonction hyperbolique. On obtient une solution exacte bien connue

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$$

Vérifions cette solution. On a

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}, \quad u'(x) = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}, \quad u''(x) = -\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\cosh^2(x) - 2\sinh^2(x)}{\cosh^3(x)}\right)$$

Après simplification, on retrouve bien que

$$-u''(x) = u(x)^3$$

On conclut que l'équation elliptique non linéaire

$$-u'' = u^3$$

admet la solution exacte suivante

$$u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$$

obtenue par un changement de fonction implicite et l'intégration d'une identité énergétique classique.

Chapitre 3

Étude de quelques problèmes elliptiques

3.1 Introduction

Le théorème de Lax-Milgram est un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions de nombreux problèmes aux dérivées partielles (EDP) sous forme faible. Il repose sur l'étude de formes bilinéaires continues et coercives sur un espace de Hilbert.

Dans ce chapitre, nous présentons une application élémentaire de ce théorème à un problème de Poisson unidimensionnel simple. Ce type de problème est représentatif de nombreux phénomènes physiques tels que la diffusion ou la conduction thermique dans un milieu homogène.

L'objectif est de reformuler le problème différentiel classique en une formulation variationnelle, d'en vérifier les hypothèses (bilinéarité, continuité, coercivité), puis de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution faible à l'aide du théorème de Lax-Milgram.

3.2 Théorème de Lax-Milgram

Définition 3.1 *Soit V un espace de Hilbert.*

$a : VV \to \mathbb{R}$ *une forme linéaire.*

$a)$ *a est continue si et seulement si*

$$\exists M > 0, \forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V.$$

b) a est coercive si et seulement si

$$\exists \alpha > 0, a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Théorème 3.1 *de Lax-Milgram Soit $a : VV \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive et soit $L : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, alors il existe $u \in V$ unique tel que*

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in V. \tag{3.1}$$

Preuve

Fixons $u \in V$ et définissons $L_u : V \to \mathbb{R}$ par

$$L_u(v) = a(u,v), \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

La bilinéarité de a montre que L_u est linéaire et la continuité de a implique que

$$|L_u(v)| \leq M\|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

On en déduit que $L_u \in V'$ avec

$$\|L_u\|_{V'} \leq M\|u\|_V,$$

ainsi le théorème de Riesz assure l'existence et l'unicité d'un élément $Au \in V$ tel que pour tout $v \in V$

$$L_u(v) = \langle Au, v\rangle = a(u,v), \quad \|Au\|_V = \|L_u\|_{V'}.$$

De même, une nouvelle application du théorème de Riesz montre l'existence et l'unicité d'un $f \in V$ tel que pour tout $v \in V$

$$l(v) = \langle f, v\rangle, \quad \|f\|_V = \|L\|_{V'}.$$

On est donc ramené à démontrer l'existence et l'unicité d'un $u \in V$ tel que $Au = f$.
Tout d'abord, l'application $A : V \to V$ est linéaire, comme

$$\|Au\|_V = \|L_u\|_{V'} \leq M\|u\|_V,$$

alors A est continue.

Par ailleurs la coercivité de a implique que A est injective car si $Au = 0$, alors

$$0 = \langle Au, u\rangle = a(u, u) \geq \alpha\|u\|_V^2,$$

ce qui implique que $u = 0$.

Pour montrer la surjectivité, on établit d'abord que Im A est fermé dans V. On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Im A telle que $v_n \to v$ dans V. Comme $v_n = Au_n$ pour un certain $u_n \in V$, on en déduit par coercivité de a et l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\lambda \left\|u_n - u_m\right\|_V^2 &\leq a\left(u_n - u_m, u_n - u_m\right)\\ &= \langle Au_m - Au_n, u_m - u_m,\rangle\\ &\leq \left\|Au_m - Au_n\right\|_V \left\|u_m - u_n\right\|_V.\end{aligned}$$

II s'ensuit que $(u_n)_\mathbb{N}$ est de Cauchy dans V, ce qui assure l'existence d'un $u \in V$ tel que $u_n \to u$.

Par continuité de A, il vient $v = Au$ ce qui montre que Im A est un sous espace vectoriel fermé de V. On peut donc décomposer $V = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A^\perp$ et A sera surjective dès lors que $\mathrm{Im}\, A^\perp = \{0\}$. Or $u \in \mathrm{Im}\, A^\perp$ si et seulement si $\langle u, Av\rangle = 0$ pour tout $u \in V$.

En particulier, en prenant $v = u$, on obtient

$$\lambda\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u\rangle = 0,$$

ainsi $u = 0$.

Ceci établit la bijectivité de l'opérateur $A : V \to V$ et donc l'existence et l'unicité d'un u satisfaisant

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V.$$

En effectuant le produit scalaire avec u, on obtient

$$\lambda\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle = l(u) \leq \|L\|_{V'}\|u\|_V,$$

ce qui montre l'estimation. ■

Remarque 3.1 *Si la forme bilinéaire a est de plus supposée symétrique, alors $a(\cdot,\cdot)$ définit sur V un nouveau produit scalaire équivalent à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, la conclusion du théorème de Lax-Milgram résulte d'une application directe du théorème de Riesz.*

Dans le cas où a est de plus symétrique, le résultat suivant établit une caractérisation variationnelle de la solution de (3.1).

Proposition 3.1 *p211 Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, si l'on suppose de plus que a est symétrique, alors l'unique solution du problème* (3.1) *est aussi solution de*

$$\inf_{v\in V} J(v), \qquad \textit{avec} \qquad J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v).$$

Preuve

Soit $u \in V$, on écrit, pour tout $w \in V$

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) + a(u,w) - l(w). \tag{3.2}$$

Si u est l'unique solution de (3.1), alors $a(u,v) = l(w)$ pour tout $w \in H$ et donc $J(u+w) > J(u)$ si $w\mathbb{N}eq0$. Réciproquement, si $J(u+w) \geq J(u)$ pour tout $w \in H$, on prend $w = tv$ avec $t > 0$ dans (3.2), puis on fait tendre $t \to 0^+$, il vient alors $a(u,v) - l(v) \geq 0$, puis $a(u,v) - l(v) = 0$ en changeant v en $-v$. ■

3.3 Exemples classiques d'application

3.3.1 Problème aux limites en dimension un

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{dans} \quad]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

où $f \in L^2(]0,1[)$.

Une solution classique (ou solution forte) du problème (3.3) est une fonction $u \in C^2(]0,1[) \cap C^1([0,1])$ vérifiant (3.3) au sens usuel. Bien entendu (3.3) peut être résolu explicitement par un calcul très simple (voir l'exercice 1 de la série), mais nous ignorerons cet aspect des choses afin d'illustrer la méthode variationnelle sur cet exemple élémentaire.

Étape 1. Notion de solution faible.

Définition 3.2 *Une solution faible de* (3.3) *est une fonction* $u \in H_0^1(]0,1[)$ *vérifiant pour tout* $v \in H_0^1(]0,1[)$ *l'égalité*

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx. \tag{3.4}$$

Il est clair que toute solution classique est une solution faible. Pour construire une notion de solution faible, on commence par intégrer l'équation différentielle contre une fonction test à support compact. Après une intégration par partie, on obtient la formulation (3.4) pour l'équation différentielle. Les conditions aux limites sont encodées dans l'espace fonctionnel utilisé. L'espace $H_0^1(]0,1[)$ traduit le mieux la condition aux limites de Dirichlet homogène. Le problème faible (variationnel) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(]0,1[) \\ \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[). \end{cases} \tag{3.5}$$

Étape 2. Existence et unicité d'une solution faible (résolution du problème faible).

Proposition 3.2 *Le Problème* (3.5) *admet une solution unique* $u \in H_0^1(]0,1[)$.

La preuve de cette proposition repose sur une application directe du Théorème de Lax-Milgram.

On définit une forme bilinéaire $a : H_0^1(]0,1[)H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ et une forme linéaire L : $H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ pour $u, v \in H_0^1(]0,1[)$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx,$$

et

$$l(v) = \int_0^1 fvdx.$$

Remarquons que a n'est autre que le produit scalaire usuel sur l'espace $H_0^1(]0,1[)$. La continuité de a est alors une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, pour tout $u, v \in H_0^1(]0,1[)$, on a

$$|a(u,v)| = \left|(u,v)_{H^1(]0,1[)}\right| \leq \|u\|_{H^1(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

De plus

$$|l(v)| \leq \int_{\Omega} |fv|\, dx \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{L^2(]0,1[)} \leq \|f\|_{L^2(]0,1[)} \|v\|_{H^1(]0,1[)}.$$

D'autre part

$$a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(]0,1[)}.$$

l est linéaire continue et a est bilinéaire, continue et coercive alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique au problème variationnel (3.5).

Étape 3. Régularité de la solution faible.

Remarquons tout d'abord que si $f \in L^2(]0,1[)$, alors $u \in H^2(]0,1[)$. En effet, pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ on a

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 (u-f)vdx$$

donc u' est dérivable au sens des distributions avec $(u')' = u - f \in L^2(]0,1[)$. Ainsi $u' \in H^1(]0,1[)$ et donc $u \in H^2(]0,1[)$. En particulier, $u \in C^1([0,1])$. Si de plus $f \in C([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$. En effet, au sens des distributions on a $u'' = u - f \in C([0,1])$.

Étape 4. Retour à la solution classique (retour au probleme (3.4), à partir du problème faible (3.5)).

La notion de solution classique n'a de sens que dans le cas où $f \in C([0,1])$. On a vu que la solution u est dans $C^2([0,1])$ et que au sens des distribution,

$$u'' = u - f.$$

Puisque chaque membre de l'égalité est une fonction continue, l'égalité a lieu également au sens classique. Par ailleurs, puisque $u \in H_0^1(]0,1[)$, alors $u(0) = u(1) = 0$. La solution faible u est donc bien une solution forte (au sens classique) de (3.4).

3.3.2 Problème aux limites en dimension N

Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

où Ω est un ouvert quelconque de l'espace $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Étape 1. Recherche de la formulation variationnelle.

On multiplie l'équation du problème par v avec $v_{|\partial\Omega} = 0$. Par la formule de Green

$$-\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dx,$$

ccar $v_{|\partial_\Omega} = 0$ on obtient

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int\limits_{\Omega} f v dx.$$

Afin que cette expression ait un sens, il suffit de choisir u et v dans $H_0^1(\Omega)$. Le problème faible (variationnel) est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \\ \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int\limits_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.7}$$

Étape 2. Résolution du problème faible.

On pose

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

et

$$l(v) = \int\limits_{\Omega} f v dx.$$

Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$|a(u, v)| = \left|(u, v)_{H^1(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

et

$$|l(v)| \leq \int\limits_{\Omega} |fv|\, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

de plus

$$a(u, u) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

l est linéaire continue et a est bilinéaire, continue et coercive alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique au problème variationnel.

Étape 3. Retour au problème (3.6), à partir du problème faible (3.7).

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega -\varphi \Delta u dx = \int_\Omega f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ainsi

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donc

$$-\Delta u \overset{\mathcal{D}'(\Omega)}{=} f \in L^2(\Omega),$$

d'où

$$-\Delta u = f \quad \text{p.p} \quad \text{dans } \Omega.$$

Enfin, comme $u \in H_0^1(\Omega)$ et Ω est un ouvert régulier, $u_{|\partial\Omega} = 0$.

Problème 1

On considère le problème suivant sur l'intervalle $(0, 1)$

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 & \text{pour } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Formulation variationnelle

On multiplie l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(0, 1)$, et on intègre par parties

$$\int_0^1 (-u'')v \, dx = \int_0^1 u'v' \, dx = \int_0^1 1 \cdot v \, dx.$$

On obtient la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(0,1) \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(0,1),$$

où

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx, \qquad L(v) = \int_0^1 v(x)\,dx.$$

2. Vérification des hypothèses du théorème de Lax-Milgram

- a est bilinéaire et symétrique.
- Continuité :

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} = \|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}.$$

- Coercivité :

$$a(v,v) = \int_0^1 |v'(x)|^2 dx = \|v\|_{H_0^1}^2.$$

  Donc $a(v,v) \geq \|v\|^2$, coercivité avec $\alpha = 1$.
- Continuité de L :

$$|L(v)| = \left|\int_0^1 v(x)dx\right| \leq \|v\|_{L^2} \leq C\|v\|_{H_0^1}.$$

3. Conclusion

Le théorème de Lax-Milgram s'applique, donc il existe une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$ telle que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1).$$

4. Solution exacte

On peut résoudre explicitement

$$u''(x) = -1 \Rightarrow u'(x) = -x + C_1, \quad u(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Conditions aux bords

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad u(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Problème 2

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné régulier. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On veut prouver l'existence et l'unicité d'une solution faible à ce problème par le théorème de Lax-Milgram.

1. Cadre fonctionnel

On travaille dans l'espace de Hilbert

$$V = H_0^1(\Omega),$$

muni de la norme

$$\|v\|_V = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

2. Formulation variationnelle

On multiplie l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et on intègre par parties

$$\int_\Omega (-\Delta u) v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

Ainsi, la formulation variationnelle est

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \qquad L(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

3. Vérification des hypothèses du théorème de Lax-Milgram

Continuité de a

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} = \|u\|_V \|v\|_V.$$

Donc a est bilinéaire et continue.

Coercivité de a

$$a(v,v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = \|v\|_V^2.$$

Donc $a(v,v) \geq \|v\|_V^2$, et a est coercive avec $\alpha = 1$.

Continuité de L

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Poincaré

$$|L(v)| = \left| \int_\Omega f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \|v\|_V.$$

Donc L est linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$.

4. Conclusion

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Il existe donc une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

5. Exemple explicite en 1D

Prenons $\Omega = (0,1)$ et $f(x) = 1$. On considère

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Intégration deux fois

$$u''(x) = -1 \Rightarrow u'(x) = -x + C_1 \Rightarrow u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Conditions aux bords

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \quad u(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc la solution est

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, O.I. Maricijev, S.G. Samako, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1993.

[2] A. D. Polyanin, Vladimir E. Nazankinskii, *Manuel des équations aux dérivées partielles linéaires pour ingénieurs et scientifiques*, 2ème édition, 2002.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[4] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : Rappels de cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2010.

[5] F. G. Lacombre, *Éléments d'analyse fonctionnelle, cours et exercices avec réponse*, Dunod.

[6] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*, Ellipses.

[7] M. El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, Ellipses, 2008.

[8] C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications*, Dunod, 2004.

[9] H. Khelifi, *Integral Transformation in L^p Spaces : Course and Corrected Exercises*, Alger, Septembre 2021.

[10] A. D. Polyanin, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002.

[11] M. S. Joshi, *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, Second Edition, Cambridge University Press, 2008, pp. 119-120.