RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
« AFED »

Présenté Par :

Laaredj Ayat Mouna et Hassani Dikra Nour Elimane

Sous L'intitulé :

Systèmes couplé d'ordre fractionnaire avec un effet aléatoire

Soutenu publiquement le 25 / 06/ 2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

Mr BENHABI Sidi Mohammed	MAA	Université de Tiaret	Président
Mr ZIANE Mohamed	Pr	Université de Tiaret	Examinateur
Mr ZENTAR Oualid	MCB	Université de Tiaret	Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Dédicace

Avec mes plus sincères sentiments,

Je dédie ce modeste travail de recherche tout d'abord à mes plus chers au monde , Ma mère , qui m'a toujours accompagnée avec ses prières…

Mon père ,rien au monde ne vaut les efforts et les sacrifices fournis jours et nuit pour nous,

À mes adorables chères sœurs ; Marwa, Bochra,Nadjwa,Salma.

À tous qui sont absents dans ces quelques lignes et présent dans mon cœur.

Hassani Dikra Nour Elimane

Dédicace

قال الله تعالى في كتابه الكريم ﴿ وأن للإنسان إلاّ ماسعى ﴾
الحمدلله الذي بنعمته تتم الصالحات، وبفضله تُنال الغايات، وبعونه تُذلل
الصعاب، وتُختصر المسافات، الحمدلله حمدا كثيرًا طيبًا مباركًا فيه

À ma mère, mon ange gardien, dont les prières ont éclairé mes pas.
À mon père, mon pilier, ce succès est le prolongement de tes sacrfiices.
À mes frères, source de joie et de réconfort.
À ma famille, présente ou lointaine, merci pour votre soutien et vos prières.
À mes amis, compagnons de route, merci pour les souvenirs inoubliables.
À tous ceux qui ont touché mon cœur par un mot ou une prière...
Je vous dédie le couronnement de cette réussite.

Laaredj Ayat Mouna

Remerciements

Nous remercions-DIEU - le tout -puissant de m'avoir accordé la patience pour pouvoir achever ce travail de recherche…

Nous tenons à remercier mon encadrant :Zentar Oualid que nous avons l'honneur l'avoir en qualité de directeur de ma recherche .

Merci encore à tout le personnel administratif et pédagogique de notre faculté…

Merci enfin à tous ceux qui m'ont assistés de près ou de loin dans l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est une extension de la dérivation et de l'intégration ordinaires à des ordres non entiers arbitraires. Ces dernières années, cette théorie est devenue un objet d'investigation important en raison de ses applications démontrées dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie (voir, par exemple, [5, 9] et les références citées). En particulier, les équations différentielles fractionnaires temporelles sont utilisées pour tenter de décrire les processus de transport avec une mémoire longue. Récemment, l'étude des équations différentielles ordinaires et partielles fractionnaires temporelles a attiré une grande attention de nombreux chercheurs, tant sur le plan théorique que sur le plan des applications ; nous renvoyons le lecteur aux monographies de Kilbas et al. [7], ainsi qu'aux articles [12, 13, 14, 15] et les références qui y figurent. D'autre part, l'existence de solutions pour les problèmes de valeur initiale et de frontière des équations différentielles fractionnaires avec la dérivée fractionnaire de Hilfer a commencé à susciter de l'attention.

La nature d'un système dynamique en ingénierie ou en sciences naturelles dépend de la précision des informations dont nous disposons concernant les paramètres qui décrivent ce système. Si la connaissance d'un système dynamique est précise, alors un système dynamique déterministe apparaît. Malheureusement, dans la plupart des cas, les données disponibles pour la description et l'évaluation des paramètres d'un système dynamique sont inexactes, imprécises ou confuses. En d'autres termes, l'évaluation des paramètres d'un système dynamique n'est pas sans incertitudes. Lorsque notre connaissance des paramètres d'un système dynamique est de nature statistique, c'est-à-dire que l'information est probabilistique, l'approche courante dans la modélisation mathématique de tels systèmes consiste à utiliser des équations différentielles aléatoires ou des équations différentielles stochastiques. Les équations différentielles aléatoires, en tant qu'extensions naturelles des équations déterministes, apparaissent dans de nombreuses applications et ont été étudiées par de nombreux mathématiciens.

L'objectif de ce travail est double : **D'une part**, une découverte puis une familiarisation avec la méthode de l'argument du point fixe dans l'étude de l'existence de solutions aléatoires de certains systèmes des équations différentielles. **D'autre part**, une acquisition de connaissance autour des problèmes considérés concernant le type d'équations, les espaces sur lesquels elles sont définies, la transformation du problème en un problème de point fixe, et enfin le type d'hypothèses imposées.

Ce travail est subdivisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions et résulats d'analyse fonctionnelles que nous utilisons tout au long de ce mémoire. Nous rappelons aussi les théorèmes fondamentaux de point fixe intervenant dans les preuves des résultats d'existence de solutions.

Nous consacrons le deuxième chapitre à la présentation quelques résultats et propriétés du calcul fractionnaire.

Nous consacrons le troisième et le quatrième chapitres à la présentation de résultat d'existence de solutions pour le système différentiel fractionnaire aléatoire couplé de la forme :

$$\begin{cases} \left(\mathscr{D}_0^{\alpha_1,\beta_1} u_1\right)(t,w) = f_1(t,u_1(t,w),u_2(t,w),w), & t\in[0,T], \quad w\in\Omega \\ \left(\mathscr{D}_0^{\alpha_2,\beta_2} u_2\right)(t,w) = f_2(t,u_1(t,w),u_2(t,w),w), & t\in[0,T], \quad w\in\Omega \\ \left(\mathscr{I}_0^{1-\gamma_1} u_1\right)(t,w)\big|_{t=0} = \phi_1(w), & \\ \left(\mathscr{I}_0^{1-\gamma_2} u_2\right)(t,w)\big|_{t=0} = \phi_2(w) & \end{cases}$$

ainsi que le système

$$\begin{cases} \left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_1,\beta_1} u_1\right)(t,w) = g_1(t,u_1(t,w),u_2(t,w),w), & t\in[1,T], \quad w\in\Omega \\ \left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_2,\beta_2} u_2\right)(t,w) = g_2(t,u_1(t,w),u_2(t,w),w), & t\in[1,T], \quad w\in\Omega \\ \left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_1} u_1\right)(t,w)\big|_{t=0} = \psi_1(w), & \\ \left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_2} u_2\right)(t,w)\big|_{t=0} = \psi_2(w) & \end{cases}$$

sous certaines conditions (Lipscitz, Carathéodory,...) sur les fonctions f_1, f_2, g_1, g_2.

1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les opérateurs différentiels fractionnaires, ensuite nous donnons certains des théorèmes du point fixe.

1.1 Sur les fonctions

Définition 1.1: (Espace de Banach)
Toute espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition 1.2: (Espace séparable)
Un espace séparable est un **espace topologique** contenant un sous-ensemble **dense** et **au plus dénombrable**, c'est-à-dire contenant un **ensemble fini** ou dénombrable de points dont l'**adhérence** est égale à l'espace topologique tout entier.

Exemples :

1. Tout espace à **base** dénombrable est séparable.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, muni de sa topologie usuelle, est séparable car $\mathbb{Q}$ (dénombrable) y est dense.
3. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R})$ des fonctions dont la puissance p est intégrable muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue est séparable.
4. Un **espace vectoriel topologique** sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est séparable si et seulement s'il contient une famille dénombrable de vecteurs **engendrant un sous-espace** dense

Définition 1.3: Fonction absolument continue
Une fonction $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a,b]$, si
$\forall \epsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, $]a_k, b_k[_{k=1,2,\ldots,n}$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

Définition 1.4
Pour $z > 0$, la fonction gamma $\Gamma(\cdot)$ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds.$$

Définition 1.5
Soit $z, w > 0$. Alors, la fonction bêta $B(z, w)$ est définie par

$$B(z, w) = \int_0^{1} s^{z-1}(1-s)^{w-1} ds.$$

De plus, la fonction bêta et la fonction gamma ont la relation suivante

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

1.2 Sur les opérateurs

Définition 1.6: Opérateur borné
Soit A un opérateur linéaire défini d'un espace de Banach X dans lui même. A est dit borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall x \in X, \quad \|Ax\| \leq c \|x\| \; .$$

Définition 1.7: Opérateur continu
Un opérateur A défini d'un espace de Banach X dans lui même est dit continu si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X qui converge vers $x \in X$, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Ax.

Soit $C(J, X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X et soit M un sous ensemble de $C(J, X)$.

Définition 1.8: Ensemble équicontinu
M est dit équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall t_1, t_2 \in J : \ \left(\|t_1 - t_2\| \leq \delta \right) \Rightarrow \left(\forall f \in M, \ \left\| f(t_1) - f(t_2) \right\| \leq \varepsilon \right).$$

Définition 1.9: Ensemble uniformément borné
M est dit uniformément borné si :

$$\exists \ c > 0 : \left\| f(t) \right\| \leq c \quad \forall t \in J, \text{ et } \forall f \in M.$$

Définition 1.10: Ensemble relativement compact
M est dit relativement compact si $\overline{M}$ (adhérence de M) est compact.

Théorème 1.1: [Ascoli Arzela]
M est relativement compact si et seulement si :

1. *M est uniformément borné.*
2. *M est équicontinu.*

Soit A un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui- même.

Définition 1.11: Opérateur compact
L'opérateur A est dit compact si l'ensemble $A(X)$ est relativement compact.

Définition 1.12: Opérateur totalement borné
L'opérateur A est dit totalement borné si pour tout ensemble borné B de l'espace X, l'ensemble $A(B)$ est relativement compact.

Définition 1.13: Opérateur complètement continu
L'opérateur A est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.

1.3 Sur Les opérateur aléatoire

Soit $\beta_{\mathbb{R}^m}$ la tribu (σ-algebra) de Borel des parties de $\mathbb{R}^m$. Une application $v : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est dite mesurable si, pour tout $B \in \beta_{\mathbb{R}^m}$, on a :

$$v^{-1}(B) = \{w \in \Omega : v(w) \in B\} \subset \mathscr{A}.$$

Soit $\mathscr{A} \times \beta_{\mathbb{R}^m}$ le produit direct des tribus (σ-algebras) $\mathscr{A}$ et $\beta_{\mathbb{R}^m}$, définies respectivement sur Ω et $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.14
Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est dite mesurable conjointement si $\mathscr{N}(\cdot, u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et $f(w, \cdot)$ est continue pour tout $w \in \Omega$

Définition 1.15
Une fonction $f : I \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est dite Carathéodory aléatoire si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'application $(t, w) \to f(t, u, w)$ est mesurable conjointement pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, et
2. L'application $u \to f(t, u, w)$ est continue pour tout $t \in I$ et $w \in \Omega$.

Définition 1.16
Soit E un espace de Banach et $T : \Omega \times E \longrightarrow E$ une application. On dit que T est un opérateur aléatoire si $T(w, u)$ est mesurable par rapport à w pour tout $u \in E$, et si l'on peut écrire

$$T(w)u = T(w, u)$$

Dans ce cas, on dit aussi que $T(w)$ est un opérateur aléatoire sur E.

Un opérateur aléatoire $T(w)$ sur E est dit continu (respectivement compact, totalement borné, ou complètement continu) si $T(w, u)$ est continu (resp. compact, totalement borné, complètement continu) par rapport à u, pour tout $w \in \Omega$.

Définition 1.17: [4]
Soit $\mathscr{P}(Y)$ la famille de toutes les parties non vides de Y etsoit C une application de ω dans $\mathscr{P}(Y)$.

1. Une application $T : \{(w, y) : w \in \Omega, y \in C(w)\} \longrightarrow Y$ est appelée un opérateur aléatoire à domaine stochastique C if C est mesurable (c'est-à-dire, pour tout ensemble fermé $A \subset Y$, l'ensemble $\{w \in \Omega, C(w) \cap A \neq \emptyset\}$ est mesurable) et pour tout ouvert $D \subset Y$ et tout $y \in Y$, l'ensemble $\{w \in \Omega : y \in C(w), T(w, y) \in D\}$ est mesurable.
2. On dit que T est continu si, pour tout $w \in \Omega$, l'application $T(w)$est continue.
3. Pour un opérateur aléatoire T, une application $y : \Omega \to Y$ est appelée un point fixe aléatoire (ou stochastique) de T si, pour P-presque tout $w \in \Omega, y(w) \in C(w)$ et$T(w)y(w) = y(w)$ et, pour tout ouvert $D \subset Y$, l'ensemble $\{w \in \Omega : y(w) \in D\}$ est mesurable.

1.4 Sur les point fixe

Dans cette section, nous énonçons les théorèmes de point fixe qui serons utilisés dans les chapitres suivants.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^m$ avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Par $x \le y$, on entend $x_i \le y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. On définit également :

- $|x| := (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|)$,
- $\max(x, y) := \big(\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2), \ldots, \max(x_m, y_m)\big)$,
- $\mathbb{R}^m_+ := \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \in \mathbb{R}_+,\ i = 1, \ldots, m\}$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, l'inégalité $x \le c$ signifie $x_i \le c$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

Définition 1.18: [2]
Soit X un ensemble non vide. Une *métrique vectorielle* sur X est une application

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^m$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $d(x,y) \geq 0$ pour tous $x, y \in X$, et si $d(x,y) = 0$, alors $x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ pour tous $x, y \in X$;

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tous $x, y, z \in X$.

On appelle le couple (X,d) un *espace métrique généralisé*, avec

$$d(x,y) := \begin{pmatrix} d_1(x,y) \\ d_2(x,y) \\ \vdots \\ d_m(x,y) \end{pmatrix}.$$

On remarque que d est une métrique vectorielle sur X si et seulement si chaque composante d_i, $i = 1, \ldots, m$, est une métrique sur X.

Pour $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in X$, on définit la boule ouverte centrée en x_0 de rayon r par :

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0, x) < r\} = \{x \in X : d_i(x_0, x) < r_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m\}.$$

Nous définissons également la boule fermée centrée en x_0 de rayon r par :

$$\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\} = \{x \in X : d_i(x_0, x) \leq r_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m\}.$$

Définition 1.19: [11, 3]
Une matrice carrée à coefficients réels est dite *convergente vers zéro* si et seulement si son rayon spectral $\rho(M)$ est strictement inférieur à 1. Autrement dit, cela signifie que toutes les valeurs propres de M sont situées dans le disque unité ouvert, c'est-à-dire que $|\lambda| < 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\det(M - \lambda I) = 0,$$

où I désigne la matrice identité de $M_{m\times m}(\mathbb{R})$.

Exemple 1. La matrice $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est convergente vers zéro dans les cas suivants :

1. $b = c = 0, a, d > 0$, and $\max\{a, d\} < 1$.
2. $c = 0, a, d > 0, a + d < 1$, and $-1 < b < 0$.
3. $a + b = c + d = 0, a > 1, c > 0$, and $|a - c| < 1$.

Théorème 1.2
Soit X un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et borné de l'espace de Banach séparable E, et soit $\mathcal{N} : \Omega \times X \to X$ un opérateur aléatoire compact et continu. Alors, l'équation aléatoire $\mathcal{N}(\omega)x = x$ admet une solution aléatoire.

Théorème 1.3: [6]
Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, X un espace de Banach généralisé réel séparable, et $F : \Omega \times X \longrightarrow X$ un opérateur aléatoire continu. Soit également $M(w) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ une matrice aléatoire telle que, pour tout $w \in \Omega$, la matrice $M(w)$ converge vers zéro, et que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$d(F(w,x_1), F(w,x_2)) \leq M(w)\,d(x_1,x_2), \quad \textit{pour tout } x_1, x_2 \in X \textit{ et } w \in \Omega.$$

Alors, il existe une variable aléatoire $x : \Omega \to X$ qui est le point fixe aléatoire unique de F.

Théorème 1.4: [6]
Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, X un espace de Banach généralisé réel séparable, et $F : \Omega \times X \to X$ un opérateur aléatoire complètement continu. Alors, l'une des deux alternatives suivantes est vraie :

(i) L'équation aléatoire $F(w,x) = x$ admet une solution aléatoire, c'est-à-dire qu'il existe une fonction mesurable $x : \Omega \to X$ telle que $F(w, x(w)) = x(w)$, $\quad$ pour tout $w \in \Omega$,

(ii) L'ensemble $M = \{x : \Omega \to X \text{ mesurable} : \lambda(w)F(w,x) = x\}$ est non borné pour une certaine fonction mesurable $\lambda : \Omega \to X$ telle que $0 < \lambda(w) < 1$ pour tout $w \in \Omega$.

Nous utiliserons également le lemme de Gronwall suivant :

Lemme 1.1: [6] Soit $u : I \to [0, \infty)$ une fonction réelle, et supposons que $u(\cdot)$ est une fonction non négative et localement intégrable sur I. Supposons qu'il existe des constantes $c > 0$ et $r < 1$ telles que :

$$u(t) \leq v(t) + c\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^r}\,ds,$$

alors, il existe une constante $K := K(r)$ telle que :

$$u(t) \leq v(t) + cK\int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^r}\,ds, \quad \text{pour tout } t \in I.$$

2

Eléments de calcul fractionnaire

On introduit dans ce chapitre les éléments de bases théoriques sur les opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui vont suivre.

2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1: [7]
Soit (a,b), $(0 \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle finie ou infinie de la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue et $\alpha > 0$, on définie l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville comme suite :

$$^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a^+}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Lemme 2.1: Soit f une fonction continue, soient α, β deux réles teles que $\alpha > 0, \beta > 0$ on a :

$$^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve

Par le changement de variable $\tau - a = s(t-a)$, et en utilisant la définition de la fonction Beta, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\left(\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}
$$

Proposition 2.1.1: (Propriété de semi-groupe)
Soit $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a :

$$
{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta}f\right) = {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f.
$$

Preuve

D'après définition (2.1), on a :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^{\tau}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\,d\tau.
\end{aligned}
$$

D'après la formule de Dirichlet, on peut écrire :

$$
\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau\,ds
$$

Avec un changement de variables $u = \dfrac{\tau-s}{t-s}$, et en utilisant la définition de la fonction bêta :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_s^t (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du\,ds, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)du\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds = \mathscr{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}
$$

Théorème 2.1
Soit $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ *avec* $0 < a < b < \infty, \alpha > 0$*, alors*

$$({}^{RL}\mathscr{I}^{\alpha}_{a^+} f)(a) = \lim_{t \to a^+} ({}^{RL}\mathscr{I}^{\alpha}_{a^+} f)(t) = 0.$$

Preuve
D'abord, on a

$$\begin{aligned}\left|({}^{RL}\mathscr{I}^{\alpha}_{a^+} f)(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a^+}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a^+}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mid f(s)\mid ds,\end{aligned}$$

et

$$\mid f(s)\mid \leq \sup_{s\in[a,b]} \mid f(s)\mid = \| f \|_{\infty}.$$

En appliquant le Lemme **??**, on obtient :

$$\begin{aligned}\mid {}^{RL}\mathscr{I}^{\alpha}_{a^+} f(t)\mid &\leq \frac{\| f \|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\int_{a^+}^{t}(t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{\| f \|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_{a^+}^{t} \\ &\leq \frac{\| f \|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha}\right]_{t}^{a^+} \\ &\leq \frac{\| f \|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a^+)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite,on obtient

$$\lim_{t\to a^+}\left|{}^{RL}\mathscr{I}^{\alpha}_{a^+} f(t)\right| \leq \lim_{t\to a^+}\frac{\| f \|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t-a^+\right)^{\alpha} = 0.$$

2.2 L'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 2.2
Soit f une fonction continue et $\alpha > 0$, on définit l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard comme suite :

$$\left({}^{H}\mathscr{I}^{\alpha}_{1} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{x}\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s)}{s}ds.$$

Lemme 2.2: (Propriété de semi-groupe) Soit f une fonction continue, pour α,β réels tels que $\alpha>0$ et $\beta>0$, on a :

$$ {}^{H}\mathcal{J}_1^{\alpha}\left({}^{H}\mathcal{J}_1^{\beta} f\right)(x) = {}^{H}\mathcal{J}_1^{\alpha+\beta} f(x). $$

Preuve

On a

$$\begin{aligned}
\left[{}^{H}\mathcal{J}_1^{\alpha}\left({}^{H}\mathcal{J}_1^{\beta} f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\,{}^{H}\mathcal{J}_1^{\beta} f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^s \left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1} t^{-1}f(t)dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_1^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\int_1^s \left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1} t^{-1}f(t)dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_1^x \int_1^s \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1} t^{-1}f(t)dtds,
\end{aligned}$$

d'aprés Direchlet

$$\left[{}^{H}\mathcal{J}_1^{\alpha}\left({}^{H}\mathcal{J}_1^{\beta} f\right)\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_1^x t^{-1}f(t)\left[\int_1^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1} ds\right]dt.$$

Posons

$$I_1 = \int_1^x \left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1} ds.$$

On va caluculer cette intégrale, on suppose

$$v=\ln\frac{s}{t} \Rightarrow e^v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = te^v \Rightarrow ds = \frac{s}{t}dv.$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\ln\frac{x}{t}} \left(\ln\frac{x}{te^v}\right)^{\alpha-1}(te^v)^{-1}\left(\ln\frac{te^v}{t}\right)^{\beta-1}(te^v)dv \\
&= \int_0^{\ln\frac{x}{t}} (\ln x - \ln te^v)^{\alpha-1}(\ln e^v)^{\beta-1}dv \\
&= \int_0^{\ln\frac{x}{t}} \left(\ln\frac{x}{t}-v\right)^{\alpha-1} v^{\beta-1}dv.
\end{aligned}$$

Posons

$$z=\frac{v}{\ln\frac{x}{t}} \Rightarrow v = z\ln\frac{x}{t} \Rightarrow dv = \ln\frac{x}{t}dz.$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \left(\ln\frac{x}{t} - z\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} z^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\beta} dz \\
&= \int_0^1 \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}(1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\beta} dz \\
&= \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-z)^{\alpha-1}z^{\beta-1}dz \\
&= \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left[{}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\beta}f\right)\right](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{1}^{x} t^{-1}f(t)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{1}^{x}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1} t^{-1}f(t)dt\\ &= \left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha+\beta}f\right)(x).\end{aligned}$$

Lemme 2.3: Soit $0<\alpha<1$, alors

$$ {}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}(\ln t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\ln t)^{\alpha+\beta-1}.$$

Preuve

On a :

$$ {}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}(\ln t)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{t}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}(\ln s)^{\beta-1}ds.$$

Posons

$$x=\frac{\ln s}{\ln t}\Rightarrow \ln s = x\ln t \Rightarrow ds = t^{x}\ln t\, dx.$$

Donc

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}(\ln t)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(\ln t - x\ln t)^{\alpha-1} t^{-x}(x\ln t)^{\beta-1} t^{-x}\ln t\, dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(\ln t)^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}(\ln t)^{\beta-1}\ln t\, dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(\ln t)^{\alpha+\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{\alpha+\beta-1}\int_{0}^{1}(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\ln t)^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

Théorème 2.2

Soit $\alpha>0$ et f une fonction continue. Alors

$$\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}f\right)(1) = \lim_{t\to 1}\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}f\right)(t) = 0.$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}\left|\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha} f\right)(t)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{t}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1} f(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{t}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}|f(s)|ds \\ &\leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{t}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}ds.\end{aligned}$$

Prenons

$$I_1 = \int_{1}^{t}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}ds.$$

On pose

$$x = \ln\frac{t}{s} \Rightarrow dx = \frac{-1}{s}ds \Rightarrow s = te^{-x} \Rightarrow ds = -s\,dx.$$

Alors

$$I_1 = \int_{\ln t}^{0} x^{\alpha-1} te^{x}\left(-te^{-x}\right)dx = \int_{0}^{\ln t} x^{\alpha-1}dx = \left[\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right]_{0}^{\ln t} = \frac{(\ln t)^{\alpha}}{\alpha},$$

donc

$$\begin{aligned}\left|\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha} f\right)(t)\right| &\leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\alpha} \\ &\leq \frac{\|f\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)}(\ln t)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite

$$\lim_{t\to 1}\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha} f\right)(t) = 0.$$

2.3 Dérivation fractionnaire au sens de Hilfer

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Hilfer.

Définition 2.3: [5, 10]
Soit $\alpha \in]m-1, m[$, $0 \leq \beta \leq 1$ avec $m \in \mathbb{N}^{*}$ et $f \in C^{m}([a,b];\mathbb{R})$. On appelle dérivation fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre α et de type β, la fonction définie comme suite :

$$\left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} f\right)(t) = \left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m} {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{(1-\beta)(m-\alpha)}\right)f(t).$$

Théorème 2.3
Si $f \in C^{m}([a,b];\mathbb{R})$ ***et*** $\alpha \in]m-1, m[$, $0 \leq \beta \leq 1$, ***avec*** $m \in \mathbb{N}$, ***alors***

$$\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\, {}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} f\right)(t) = f(t) - \sum_{i=1}^{m}\frac{(t-a)^{\gamma-i}}{\Gamma(\gamma-i+1)}\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^{m-i}\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{m-\gamma} f(t)\right)(a)\right\}.$$

Lemme 2.4: Soit $t > a$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ avec $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$, on a

$$\left[{}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}(t-a)^{\gamma-1}\right](t) = 0.$$

Preuve

D'aprés Défintion (2.1) et Lemme (2.2), on a

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}(t-a)^{\gamma-1} &= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(1-\gamma)}\left(\frac{d}{dt}\right){}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma}(t-a)^{\gamma-1} \\
&= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(1-\gamma)}\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{\Gamma(\gamma-1+1)}{\Gamma(1-\gamma+\gamma-1+1)}(t-a)^{1-\gamma+\gamma-1}\right] \\
&= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(1-\gamma)}\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1)}(t-a)^{0}\right] \\
&= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(1-\gamma)}\left(\frac{d}{dt}\right)\Gamma(\gamma) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lemme 2.5: Soit $\alpha > 0$, $0 \leq \beta \leq 1$, on a

$$\left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\,{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}x\right)(t) = x(t).$$

Preuve

Par la Définition (2.1) et Lemme (2.1), on a

$$\begin{aligned}
\left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\,{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}x\right)(t) &= \left[{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{(1-\beta)(m-\alpha)}\,{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\right]x(t) \\
&= \left[{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{-m\beta+m-\alpha+\alpha\beta+\alpha}\right]x(t) \\
&= \left[{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{m}{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{-\beta(m-\alpha)+m}\right]x(t).
\end{aligned}$$

Et comme $\left(\frac{d}{dt}\right)^{m} I^{m} = Id$, alors $\left(\frac{d}{dt}\right)^{m} = I_{a^+}^{-m}$. Donc

$$\begin{aligned}
\left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha\beta}\,{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}x\right)(t) &= \left[{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(m-\alpha)}\,{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{-m}\,{}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{-\beta(m-\alpha)+m}\right]x(t) \\
&= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\beta(m-\alpha)-\beta(m-\alpha)+m-m}x(t) \\
&= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{0}x(t) \\
&= x(t).
\end{aligned}$$

2.4 Dérivation fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 2.4
Soit f une fonction continue, $0 < \alpha < 1$. On définit la dérivation fractionnaire au sens de Hadamard comme suite :

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathscr{D}_1^{\alpha} f(x) &= \left(x\frac{d}{dt}\right)^{n} {}^{H}\mathscr{I}_1^{n-\alpha} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_1^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} t^{-1} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Lemme 2.6: Soit $0 < \alpha < 1, 0 \le \beta \le 1$, on a

$${}^{H}\mathscr{D}_1^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ln x)^{\beta-\alpha-1}, x \in]1, e].$$

Preuve

D'aprés définition (2.4) on a :

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathscr{D}_1^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1} &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^{n} {}^{H}\mathscr{I}_1^{n-\alpha}(\ln x)^{\beta-1} \\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(\ln x)^{n-\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}(\ln x)^{n-\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

D'autre part, calculons $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}(\ln x)^{\lambda} =?$, on a :

$$\begin{aligned} \left(x\frac{d}{dx}\right)(\ln x)^{\lambda} 0 &= x\lambda(\ln x)^{\lambda-1}\frac{1}{x} \\ &= \lambda(\ln x)^{\lambda-1} \\ \left(x\frac{d}{dx}\right)^{2}(\ln x)^{\lambda} &= \left(x\frac{d}{dx}\right)\lambda(\ln x)^{\lambda-1} \\ &= \lambda\left(x\frac{d}{dx}\right)(\ln x)^{\lambda-1} \\ &= \lambda(\lambda-1)(\ln x)^{\lambda-2}x\frac{1}{x} \\ &= \lambda(\lambda-1)(\ln x)^{\lambda-2}, \end{aligned}$$

par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} \left(x\frac{d}{dx}\right)^{m}(\ln x)^{\lambda} &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-m+1)(\ln x)^{\lambda-m} \\ &= \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(m-1))[(\lambda-m)\cdots 3.2.1]}{[(\lambda-m)\cdots 3.2.1]}(\ln x)^{\lambda-m} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)}(\ln x)^{\lambda-m}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathscr{D}_{1}^{\alpha}(\ln x)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1-1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-n+1-1)}(\ln x)^{n-\alpha+\beta-1}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(\ln x)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Lemme 2.7: Soit $\alpha > 0$, on a :

$$\left({}^{H}\mathscr{D}_{1}^{\alpha}\,{}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha} f\right)(x) = f(x)$$

Théorème 2.4

Si $f \in C^{1}([a,b];\mathbb{R})$ ***et*** $\alpha \in]0,1[$, $0 \leq \beta \leq 1$***, alors***

$$\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{\alpha}\,{}^{H}\mathscr{D}_{1}^{\alpha,\beta} f\right)(x) = f(x) - \frac{\left({}^{H}\mathscr{I}_{1}^{1-\gamma} f(x)\right)(1)}{\Gamma(\lambda)}(\ln x)^{\alpha-1}.$$

3

Systèmes différentiels fractionnaires couplés avec effets aléatoires

Dans ce chapitre nous présentons l'étude de l'existence de solutions pour deux classes de systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires aléatoires. L'outil principal utilisé pour effectuer nos résultats est le théorème de point fixe aléatoire 1.4.

3.1 Un premier type de problème

Nous discutons de l'existence de solutions pour le système couplé impliquant la dérivée fractionnaire de Hilfer [2].

$$\begin{cases} \left(\mathscr{D}_0^{\alpha_1,\beta_1} u_1\right)(t,w) = f_1(t, u_1(t,w), u_2(t,w), w), & t \in I, \quad w \in \Omega \\ \left(\mathscr{D}_0^{\alpha_2,\beta_2} u_2\right)(t,w) = f_2(t, u_1(t,w), u_2(t,w), w), & t \in I, \quad w \in \Omega \\ \left(\mathscr{I}_0^{1-\gamma_1} u_1\right)(t,w)\Big|_{t=0} = \phi_1(w), \\ \left(\mathscr{I}_0^{1-\gamma_2} u_2\right)(t,w)\Big|_{t=0} = \phi_2(w) \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $I := [0,T]$, $T > 0$, $\alpha_i \in (0,1)$, $\beta_i \in [0,1]$, $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i - \alpha_i\beta_i$; $i = 1,2$; $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace mesurable, $\phi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, $f_i : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\mathscr{I}_0^{1-\gamma_i}$ est l'intégrale de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $1-\gamma_i$, et $\mathscr{D}_0^{\alpha_i,\beta_i}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer d'ordre α_i et de type β_i.

Dans ce section, nous notons par $C_\gamma(I,\mathbb{R})$, nous désignons l'espaces pondérés de fonctions continues définis par :

$$C_\gamma(I) = \left\{ v : (0,T] \to \mathbb{R} \ : \ t^{1-\gamma} v(t) \in C \right\}$$

avec la norme :

$$\|v\|_{C_\gamma} := \sup_{t\in I} \left\| t^{1-\gamma} v(t) \right\|,$$

et, par $C_{\gamma_1,\gamma_2} := C_{\gamma_1} \times C_{\gamma_2}$, nous désignons l'espace produit pondéré muni de la norme :

$$\|(u,v)\|_{C_{\gamma_1,\gamma_2}} = \|u\|_{C_{\gamma_1}} + \|v\|_{C_{\gamma_2}}.$$

Maintenant, nous prouvons un résultat auxiliaire concernant une variante linéaire du système (3.1).

Lemme 3.1: Soit $f \in C^m([a,b];\mathbb{R})$, $0<\alpha<1$ et $0 \leq \beta \leq 1$,

$$\begin{cases} \left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} x\right)(t) = f(t,x(t)) \\ \left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\alpha} x\right)(a) = x_a. \end{cases} \tag{3.2}$$

si et seulement si c'est la solution de l'équation intégrale :

$$x(t) = \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}(t-a)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a^+}^{t}(t-s)^{\alpha-1} f(s)ds. \tag{3.3}$$

Preuve

Soit x une solution du système (3.2). L'application de l'opérateur d'intégration fractionnaire $\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\right)(.)$ des deux côtés de la première équation du système (3.2), On obtient

$$\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}\, {}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} x\right)(t) = x(t) - \frac{(t-a)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma} x\right)(a),$$

Donc

$$x(t) - \frac{(t-a)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma} x\right)(a) = \left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t), \tag{3.4}$$

En combinant les conditions $\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\alpha} x\right)(a) = x_a$ avec les équations (3.4), nous obtenons

$$x(t) = \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}(t-a)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a^+}^{t}(t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

Réciproquement, supposons que $x(t)$ soit la solution de l'équation (3.3). Alors,

$$x(t) = \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}(t-a)^{\gamma-1} + \left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t). \tag{3.5}$$

En composant les deux membres par $\left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\right)(.)$,

$${}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} x(t) = \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}\, {}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}(t-a)^{\gamma-1} + \left({}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta}\, {}^{H}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t).$$

D'après Lemme (2.2) et Lemme (2.3), on obtient :

$${}^{H}\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} x(t) = f(t).$$

Il reste de montrer que l'équation (3.5) vérifie la condition initiale, on a

$$x(t) = \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}(t-a)^{\gamma-1} + \left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t),$$

En composant les deux membres par $\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma}\right)(.)$,

$$\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma}x\right)(t) = {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma}\left(\frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}(t-a)^{\gamma-1}\right)(t) + {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma}\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t),$$

D'aprés théorème (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}\left({}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma}x\right)(a) &= \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma-1+1)}{\Gamma(1-\gamma+\gamma-1)}(t-a)^{1-\gamma+\gamma-1}\\ &= \frac{x_a}{\Gamma(\gamma)}\Gamma(\gamma)\\ &= x_a.\end{aligned}$$

Cela prouve que $x(t)$ est la solution du problème de Cauchy (3.2), ce qui achève la démonstration.

3.1.1 Existence de solutions

L'objectif est de présenter le résultat, et sa preuve, sur l'existence d'une solution de system (3.1). Dans ce but, nous énumérons les hypothèses suivantes :

(H1) Les fonctions f_1, f_2 sont des fonctions aléatoires de Carathéodory sur $I\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Omega$.

(H2) Il existe des fonctions mesurables et bornées $p_i, q_i : \Omega \to L^{\infty}(I,\mathbb{R}^+)$, $i = 1,2$ tel que

$$|f_i(t,u_1,u_2,w)| \le \frac{p_i(t,w)|u_1| + q_i(t,w)|u_2|}{1+|u_1|+|u_2|}$$

pour chaque $t \in I$ et $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $w \in \Omega$.

Pour simplifie, on pose

$$p_i^* = \sup_{w\in\Omega}\|p_i(w)\|_\infty, q_i^* = \sup_{w\in\Omega}\|q_i(w)\|_\infty, \phi_i^* = \sup_{w\in\Omega}|\,\phi_i(w)\,|_\infty\,.$$

Maintenant, nous allons démontrer le théorème suivant concernant l'existence de solutions aléatoires du système (3.1).

Théorème 3.1
Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) soient vérifiées. Alors, le système (3.1) admet au moins une solution aléatoire définie sur $I\times\Omega$.

Preuve

D'abord, on définie l'espace suivant :

$$C_\gamma([0,T];\mathbb{R}) = \left\{x \in ([0,T],\mathbb{R}),\, t^{1-\gamma}x(\cdot) \in C([0,T];\mathbb{R})\right\},$$

avec la norme

$$\|x\|_{C_\gamma} := \sup_{t\in[0,T]}\left|t^{1-\gamma}x(t)\right|. \tag{3.6}$$

En suit, il est bien connu que l'espace produit $(C_{\gamma_1,\gamma_2}, \|(u,v)\|)$ est un espace de Banach

avec la norme
$$\|(u,v)\|_{C_{\gamma_1,\gamma_2}} = \|u\|_{C_{\gamma_1}} + \|v\|_{C_{\gamma_2}}.$$
En vertu du Lemme 3.1, nous définissons un opérateur $N : \Omega \times C_{\gamma_1,\gamma_2} \to C_{\gamma_1,\gamma_2}$ par
$$N(w, x_1, x_2) = (N_1(w, x_1, x_2), N_2(w, x_1, x_2))$$
avec
$$N_i(w, x_i(t), x_2(t)) = \frac{\phi_i(w)}{\Gamma(\gamma_i)} t^{\gamma_i - 1} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s, x_1(s,w), x_2(s,w), w)ds, \quad i = 1,2. \tag{3.7}$$

Pour chaque $i = 1,2$, l'application ϕ_i est mesurable pour tout $w \in \Omega$. De plus, comme l'intégrale indéfinie est continue sur I, alors $N_i(w)$ définit une application
$$N_i : \Omega \times C_{\gamma_i} \to C_{\gamma_i}.$$
Ainsi, (x_1, x_2) est une solution aléatoire du système (3.1) si et seulement si
$$(x_1, x_2) = N(w)(x_1, x_2).$$
Ensuite, pour tout $x_i \in C_{\gamma_i}$, $i = 1,2$, et pour tout $t \in I$ et $w \in \Omega$, d'aprés l'hypothèse (H2), on a
$$\begin{aligned}
\left|t^{1-\gamma_i}(N(w)x_i)(t)\right| &= \left|\frac{\phi_i(w)}{\Gamma(\gamma_i)} t^{1-\gamma_i} t^{\gamma_i-1} + t^{1-\gamma_i}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} \frac{f_i(s, x_1(s,w), x_2(s,w), w)}{\Gamma(\alpha_i)} ds\right| \\
&\le \frac{|\phi_i(w)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{t^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} |f_i(s, x_1(s,w), x_2(s,w), w)| ds \\
&\le \frac{|\phi_i(w)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{t^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} \frac{p_i(s,w)|x_1| + q_i(s,w)|x_2|}{1+|x_1|+|x_2|} ds \\
&\le \frac{|\phi_i(w)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{t^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} (p_i(s,w) + q_i(s,w)) ds \\
&\le \frac{\phi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{t^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} (p_i^* + q_i^*) \left[-\frac{(t-s)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right]_0^t \\
&\le \frac{\phi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{t^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \frac{t^{\alpha_i}}{\alpha_i} (p_i^* + q_i^*) \\
&\le \frac{\phi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{T^{1-\gamma_i+\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} (p_i^* + q_i^*) := R_i.
\end{aligned}$$
Par passage au sup
$$\|N(w)x_i\|_{C_{\gamma_i}} \le R_i.$$
Donc
$$\|N(w)(x_1, x_2)\|_{C_{\gamma_1,\gamma_2}} \le \sum_{i=1}^{2} R_i.$$
Cela prouve que $N(w)$ transforme la boule
$$\mathbb{B}_R := \mathbb{B}(0,R) = \left\{(x_1, x_2) \in C_{\gamma_1,\gamma_2} : \|(x_1, x_2)\|_{\gamma_1,\gamma_2} \le R\right\}$$

en elle-même. Nous allons montrer que l'opérateur $N : \Omega \times \mathbb{B}_R \longrightarrow \mathbb{B}_R$ satisfait toutes les hypothèses du Théorème 1.4. La démonstration sera donnée en plusieurs étapes.

Étape 1. $N(w)$ est un opérateur aléatoire de $\Omega \times \mathbb{B}_R$ dans $\mathbb{B}_R$.

Puisque pour chaque $i = 1, 2$, $f_i(t, x_1, x_2, w)$ est de type Carathéodory aléatoire, l'application $w \longmapsto f_i(t, x_1, x_2, w)$ est mesurable d'après la Définition 1.3.
De même, le produit $(t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w)$, produit d'une fonction continue et d'une fonction mesurable, est encore mesurable. En outre, l'intégrale étant limite d'une somme finie de fonctions mesurables, l'application

$$w \longmapsto \frac{\phi_i(w)}{\Gamma(\gamma_i)} t^{\gamma_i - 1} + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w)\, ds$$

est mesurable. Par conséquent, $N(w)$ est un opérateur aléatoire de $\Omega \times \mathbb{B}_R$ dans $\mathbb{B}_R$.

Étape 2. $N(w)$ est continu.

Soit une suite $\{(x_{1n}, x_{2n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}_R$ telle que $(x_{1n}, x_{2n}) \longrightarrow (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{B}_R$. Alors, pour chaque $i = 1, 2$, $t \in I$, et $w \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} &\left| t^{1-\gamma_i} (N_i(w) x_{in})(t) - t^{1-\gamma_i} (N_i(w) x_i)(t) \right| \\ &\leq \frac{t^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} \left| f_i(s, x_{1n}(s, w), x_{2n}(s, w), w) - f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w) \right| ds \end{aligned} \tag{3.8}$$

Comme $(x_{1n}, x_{2n}) \longrightarrow (x_1, x_2)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, et que f_i est une fonction de Carathéodory aléatoire, le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique, grâce à l'équation (3.8), que

$$\|N(w)(x_{1n}, x_{2n}) - N(w)(x_1, x_2)\|_{C_{\gamma_1, \gamma_2}} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty$$

Étape 3. $N(w)\mathbb{B}_R$ est uniformément borné.

Ceci est évident puisque $N(w)\mathbb{B}_R \subset \mathbb{B}_R$ et $\mathbb{B}_R$ est bornée.

Étape 4. $N(w)\mathbb{B}_R$ est équicontinu.

Soient $t_1, t_2 \in I$, avec $t_1 < t_2$, et soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{B}_R$. Alors, pour chaque $i = 1, 2$ et $w \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} &|t_2^{1-\gamma_i} (N_i(w) x_i(t_2)) - t_1^{1-\gamma_i} (N_i(w) x_i(t_1))| \\ &= \left| t_2^{1-\gamma_i} t_2^{\gamma_i - 1} \frac{\phi_i(w)}{\Gamma(\gamma_i)} + t_2^{1-\gamma_i} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w) ds \right. \\ &\qquad \left. - t_1^{1-\gamma_i} t_1^{\gamma_i - 1} \frac{\phi_i(w)}{\Gamma(\gamma_i)} - t_1^{1-\gamma_i} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w) ds \right| \\ &= \left| t_2^{1-\gamma_i} \int_0^{t_2} \frac{(t_2 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w) ds \right. \\ &\qquad \left. - t_1^{1-\gamma_i} \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s, x_1(s, w), x_2(s, w), w) ds \right|. \end{aligned}$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
&|t_2^{1-\gamma_i}(N_i(w)x_i(t_2)) - t_1^{1-\gamma_i}(N_i(w)x_i(t_1))| \\
&\quad = |t_2^{1-\gamma_i}\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s,x_1(s,w),x_2(s,w),w)ds \\
&\qquad + t_2^{1-\gamma_i}\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s,x_1(s,w),x_2(s,w),w)ds \\
&\qquad - t_1^{1-\gamma_i}\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} f_i(s,x_1(s,w),x_2(s,w),w)ds| \\
&\quad \le \int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}|f_i(s,x_1(s,w),x_2(s,w),w)|ds \\
&\qquad + \int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - t_1^{1-\gamma_i}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}||f_i(s,x_1(s,w),x_2(s,w),w)\right|ds
\end{aligned}
$$

En utilisant (H2), on peut obtenir

$$
\begin{aligned}
&|t_2^{1-\gamma_i}(N_i(w)x_i(t_2)) - t_1^{1-\gamma_i}(N_i(w)x_i(t_1))| \\
&\quad \le \int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\big(p_i(s,w)+q_i(s,w)\big)ds \\
&\qquad + \int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - t_1^{1-\gamma_i}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\right|\big(p_i(s,w)+q_i(s,w)\big)ds \\
&\quad \le (p_i^*+q_i^*)\int_{t_1}^{t_2} t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}ds \\
&\qquad + (p_i^*+q_i^*)\int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - t_1^{1-\gamma_i}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\right|ds \\
&\quad \le (p_i^*+q_i^*)T^{1-\gamma_i}(t_2-t_1)^{\alpha_i} \\
&\qquad + (p_i^*+q_i^*)\int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - t_1^{1-\gamma_i}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\right|ds.
\end{aligned}
$$

D'autre part, calcuons I_1 tel que

$$
I_1 = \int_0^{t_1}\left|t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} - t_1^{1-\gamma_i}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}\right|ds.
$$

Si $t_2^{1-\gamma_i}(t_2-s)^{\alpha_i-1} > t_1^{1-\gamma_i}(t_1-s)^{\alpha_i-1}$, alors

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{t_1} t_2^{1-\gamma_i}\frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}ds - \int_0^{t_1} t_1^{1-\gamma_i}\frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)}ds \\
&= {}^{RL}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i} t_2^{1-\gamma_i} - {}^{RL}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha_i} t_2^{1-\gamma_i} \\
&= \frac{\Gamma(2-\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_i+1-\gamma_i)} t_2^{1-\alpha_i+\gamma_i} - \frac{\Gamma(2-\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_i+1-\gamma_i)} t_1^{1-\alpha_i+\gamma_i} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Sinon

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{t_1} t_1^{1-\gamma_i} \frac{(t_1-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} ds - \int_0^{t_1} t_2^{1-\gamma_i} \frac{(t_2-s)^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} ds \\
&= {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha_i} t_1^{1-\gamma_i} - {}^{RL}\mathscr{I}_{a^+}^{\alpha_i} t_2^{1-\gamma_i} \\
&= \frac{\Gamma(2-\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_i+1-\gamma_i)} t_1^{1-\alpha_i+\gamma_i} - \frac{\Gamma(2-\gamma_i)}{\Gamma(\alpha_i+1-\gamma_i)} t_2^{1-\alpha_i+\gamma_i} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$|t_2^{1-\gamma_i}(N_i(w)x_i(t_2)) - t_1^{1-\gamma_i}(N_i(w)x_i(t_1))| \to 0, \quad \text{quand } t_2 \to t_1.$$

Et comme l'opérateur N est borné et équicontinue, donc N est relativement compact (D'aprés Ascoli-Arzila). On conclut que : $N : \Omega \times B_R \to B_R$ est continue et compact, donc l'opérateur N admet une solution aléatoire.

3.1.2 Exemple

$$\begin{cases}
\left({}^{H}\mathscr{D}_0^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} u\right)(t,\omega) & = f_1(t,u(t,\omega),v(t,\omega),\omega); \\
\left({}^{H}\mathscr{D}_0^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} u\right)(t,\omega) & = f_2(t,u(t,\omega),v(t,\omega),\omega), ; \omega \in \mathbb{R}^*, t \in [0,1], \\
\left({}^{H}\mathscr{I}_0^{\frac{1}{4}} u\right)(0,\omega) & = \left({}^{H}\mathscr{I}_0^{\frac{1}{4}} u\right)(0,\omega) = \dfrac{1}{\omega+1}.
\end{cases}$$

avec $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = \dfrac{3}{4}$, $n = 1$, et

$$f_1(t,u,v,\omega) = \frac{t\cos t|u| + \sin t|v|}{16(1+t)(1+\omega)(1+|u|+|v|)}; \omega \in \mathbb{R}^*, t \in [0,1],$$

$$f_2(t,u,v,\omega) = \frac{t^2|v|}{32(1+\omega)(1+|u|+|v|)}; \omega \in \mathbb{R}^*, t \in [0,1].$$

On a :

$$\left|f_1(t,u,v,\omega)\right| \le \frac{p_1(t,\omega)|u| + q_1(t,\omega)|v|}{1+|u|+|v|},$$

$$\left|f_2(t,u,v,\omega)\right| \le \frac{p_2(t,\omega)|u| + q_2(t,\omega)|v|}{1+|u|+|v|}.$$

Donc

$$p_1(t,\omega) = \frac{t\cos t}{16(1+t)(1+\omega)}, q_1(t,\omega) = \frac{\sin t}{16(1+t)(1+\omega)}, p_2(t,\omega) = 0, q_2(t,\omega) = \frac{t^2}{32(1+\omega)}.$$

Calculons p_1^*, q_1^*, q_2^*, on a :

$$\|p_1(\omega)\|_{L^\infty} = ess\sup_{\omega\in\Omega} |p_1(\omega)| = ess\sup_{\omega\in\Omega} \frac{|t||\cos t|}{16|1+t||1+\omega|}.$$

Et comme

$$|\cos t| \le 1, \left|\frac{t}{1+t}\right| \le 1, \left|\frac{1}{1+\omega}\right| \le 1.$$

Donc

$$p_1^* = \sup_{\omega\in\Omega} \|p_1(\omega)\|_{L^\infty} = \frac{1}{16}.$$

De la meme manière

$$q_1* = \frac{1}{16}, p_2^* = 0, q_2^* = \frac{1}{32}, \phi_1^* = \sup_{\omega\in\Omega} |\phi_1(\omega)| = \sup_{\omega\in\Omega} \left|\frac{1}{1+\omega}\right| = 1, \phi_2^* = 1.$$

On va calculer :

$$R = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{4})} + \frac{1}{8\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{4})} + \frac{1}{32\Gamma(\frac{3}{2})}.$$

3.2 Un deuxième type de problème

Ensuite, nous considérons le système couplé suivant d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer-Hadamard aléatoires [2] :

$$\begin{cases} \left(\left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_1,\beta_1} x_1\right)(t,w), \left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_2,\beta_2} x_2\right)(t,w)\right) \\ \quad = \left(g_1(t, x_1(t,w), x_2(t,w), w), g_2(t, x_1(t,w), x_2(t,w), w)\right); \quad t\in[1,T], \quad w\in\Omega \\ \left(\left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_1} x_1\right)(t,w), \left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_2} x_2\right)(t,w)\right)\Big|_{t=1} = \left(\psi_1(w), \psi_2(w)\right), \end{cases} \tag{3.9}$$

où $T > 1, \alpha_i \in (0,1), \beta_i \in [0,1], \gamma_i = \alpha_i + \beta_i - \alpha_i\beta_i, \psi_i : \Omega \to \mathbb{R}; i = 1,2$ est une fonction mesurable, $g_i : [1,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, ${}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_i}$ est l'intégrale mixte de Hadamard à gauche d'ordre $1-\gamma_i$, et ${}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_i,\beta_i}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer-Hadamard d'ordre α_i et type β_i.

Dans ce section, nous notons par $C := C([1,T],\mathbb{R})$, nous désignons l'espaces pondérés de fonctions continues définis par :

$$C_{\gamma,\ln}([1,T]) = \left\{ v(t) : (\ln t)^{1-\gamma} v(t) \in C \right\}$$

avec la norme :

$$\|v\|_{C_{\gamma,\ln}} := \sup_{t\in[1,T]} \left\|(\ln t)^{1-\gamma} v(t)\right\|,$$

et, par $C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}([1,T]) := C_{\gamma_1,\ln}([1,T]) \times C_{\gamma_2,\ln}([1,T])$, nous désignons l'espace produit pondéré muni de la norme :

$$\|(u,v)\|_{C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}} = \|u\|_{C_{\gamma_1,\ln}} + \|v\|_{C_{\gamma_2,\ln}}.$$

Maintenant, nous prouvons un résultat auxiliaire concernant une variante linéaire du système (3.9).

Lemme 3.2: Soit $f \in C^m([1,T];\mathbb{R})$, $0<\alpha<1$ et $0\leq\beta\leq 1$,

$$\begin{cases} \left({}^H\mathscr{D}_{a^+}^{\alpha,\beta} x\right)(t) = f(t,x(t)) \\ \left({}^H\mathscr{I}_{a^+}^{1-\gamma} x\right)(1) = x_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

si et seulement si c'est la solution de l'équation intégrale :

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma_1)}(\ln t)^{\gamma_1-1} + \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha_1} f\right)(t), \tag{3.11}$$

Preuve

En composant les deux mombres par $\left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha}\right)(.)$,

$$\left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha}\,{}^H\mathscr{D}_1^{\alpha,\beta} x\right)(t) = \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f\right)(t).$$

D'aprés théorème (2.4), on obtient :

$$x(t) = \left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma} f\right)(1)\frac{(\ln t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f\right)(t),$$

par condition initiale de système (**??**), on obtient :

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f\right)(t).$$

Maintenent montrons l'implication indirècte, on a

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f\right)(t), \tag{3.12}$$

en composant les deux mombres par $\left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha,\beta} x\right)(.)$,

$${}^H\mathscr{D}_1^{\alpha,\beta} x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}\,{}^H\mathscr{D}_1^{\alpha,\beta}(\ln t)^{\gamma-1} + {}^H\mathscr{D}_1^{\alpha,\beta}\,{}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f(t),$$

D'après Lemme (2.4) et Lemme (2.4), on obtient :

$${}^H\mathscr{D}_1^{\alpha,\beta} x(t) = f(t,x(t)).$$

Il reste de montrer que l'équation(3.12) vérifie la condition initiale, on a :

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f\right)(t).$$

En composant les deux membres par $\left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma}\right)(.)$,

$$\left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma} x\right)(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}\,{}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma}(\ln t)^{\gamma-1} + {}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma}\left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha} f\right)(t),$$

d'aprés lemme (2.2)

$$\left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma} x\right)(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma-1+\alpha)}(\ln t)^{1-\gamma+\alpha-1} = x_0.$$

On conclut que

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\gamma)}(\ln t)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1} f(s)ds.$$

3.2.1 Existence de solutions

L'objectif est de présenter le résultat, et sa preuve, sur l'existence d'une solution de system (3.1). Dans ce but, nous énumérons les hypothèses suivantes :

H1) Les fonctions $g_i, i = 1,2,$ sont des fonctions carathéodory aléatoirs sur $[1, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$.

H2) Il existe des fonctions mesurables et bornées $p_i, q_i : \Omega \to L^\infty([1, T], [0, \infty))$, $i = 1,2,$ tel que

$$\left|g_i(t, x_1, x_2, \omega)\right| \leq \frac{p_i(t, \omega)|x_1| + q_i(t, \omega)|x_2|}{1 + |x_1| + |x_2|}, \quad i = 1,2,$$

pour tout $t \in [0, T]$, et chaque $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$.

Théorème 3.2
***On suppose que les hypothèses H1),H2) sont vérifies alors le système** (3.9) **admet une solution sur** $[1, T] \times \Omega$.*

Pour simplifie, on pose

$$p_i^* = \sup_{\omega \in \Omega} \|p_i(\omega)\|_\infty, \quad q_i^* = \sup_{\omega \in \Omega} \|q_i(\omega)\|_\infty, \quad \psi_i^* = \sup_{\omega \in \Omega} |\psi_i(\omega)|_\infty.$$

Preuve

On définie l'opérateur $N : \Omega \times C_{\gamma_1, \gamma_2, \ln} \to C_{\gamma_1, \gamma_2, \ln}$, par

$$N(x_1, x_2) = (N_1(x_1, x_2), N_2(x_1, x_2)),$$

avec

$$(N_i(\omega), x_i)(t) \quad = \frac{\psi_i(\omega)}{\Gamma(\gamma_i)}(\ln t)^{\gamma_i - 1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha_i - 1} s^{-1} g_i(s, x_1(s, \omega), x_2(s, \omega), \omega) ds.$$

Et on définie l'ensemble

$$B_R = (0, R) = \{(x_1, x_2) \in C, \|(x_1, x_2)\|_C \leq R\}.$$

Etape 0 : D'aprés l'hypothèse H2), on a

$$
\begin{aligned}
&|(\ln t)^{1-\gamma_i}(N(\omega)x_i)(t)| \\
&= \left|\frac{\psi_i(\omega)}{\Gamma(\gamma_i)}(\ln t)^{\gamma_i-1}(\ln t)^{1-\gamma_i} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right| \\
&= \left|\frac{\psi_i(\omega)}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right| \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} \left|g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)\right|ds \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} \frac{p_i(s,\omega)|x_1|+q_i(s,\omega)|x_2|}{1+|x_1|+|x_2|}ds \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} (p_i(s,\omega)+q_i(s,\omega))ds \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + (p_i^*+q_i^*)\frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} ds,
\end{aligned}
$$

On va calculer I_1 tel que

$$I_1 = \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} ds.$$

Posons $u = \left(\ln\frac{t}{s}\right)$ $s = te^{-u}$ alors

$$I_1 = \int_{\ln t}^0 -u^{\alpha_i-1}du = \int_0^{\ln t} u^{\alpha_i-1}du = \left[\frac{u^\alpha}{\alpha}\right]_0^{\ln t} = \frac{(\ln t)^\alpha}{\alpha},$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
|(\ln t)^{1-\gamma_i}(N(\omega)x_i)(t)| &\le \frac{\psi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + (p_i^*+q_i^*)\frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}(\ln t)^{\alpha_i} \\
&\le \frac{\psi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + (p_i^*+q_i^*)\frac{(\ln t)^{1+\alpha_i-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
&\le R_i.
\end{aligned}
$$

Par passage au sup,

$$\|N(\omega)x_i\|_{C_\alpha} \le R_i.$$

et

$$\|N(\omega)(x_1,x_2)\|_{C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}} \le R_1 \times R_2 = \sum_{i=1}^2 R_i.$$

Etape 1 : $N(\omega)$ est un opérateur aléatoire :

Pour chaque $i = 1,2$, l'application ψ_i est mesurable pour tout $\omega \in \Omega$, et l'intégrale est continue sur I, alors $N_i(\omega)$ définie une application $N_i : \Omega \times C_{\gamma_i,\ln} \to C_{\gamma_i,\ln}$ ainsi (x_1,x_2) sont des solutions aléatoire pour le système (3.9) ssi

$$(x_1,x_2) = N(\omega)(x_1,x_2).$$

Ensuite, on a pour chaque $i = 1,2$, $g_i(t,x_1,x_2,\omega)$est carathéodory aléatoire, et l'application $\omega \rightarrow g_i(t,x_1,x_2,\omega)$ est mesurable, de meme le produit $\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega))$ de fonction continue et mesurable est fonction mesurable de plus l'intégrale est une limite d'une somme finie de fonction mesurable, par conséquent :

$$\omega \rightarrow \frac{\psi_i(\omega)}{\Gamma(\gamma_i)}(\ln t)^{\gamma_i-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds,$$

est mesurable, donc $N(\omega)$ est un opérateur aléatoire sur $\Omega\times B_R$ dans B_R.

Etape 2 : $N(w)$ est continue

Soit une suite $(x_{1n},x_{2n}) \rightarrow (x_1,x_2) \in C_\gamma$

$$\begin{aligned}
&|(\ln t)^{1-\gamma_i}N_i(\omega)(x_{1n},x_{2n})(t) - (\ln t)^{1-\gamma_i}N_i(\omega)(x_1,x_2)(t)| \\
&\leq \Bigg| \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha_i-1}s^{-1}g_i(s,x_{1n}(s,\omega),x_{2n}(s,\omega),\omega)ds \\
&\quad - \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha_i-1}s^{-1}g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\Bigg| \\
&\leq \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t (\ln\frac{t}{s})^{\alpha_i-1}s^{-1}\Big|g_i(s,x_{1n}(s,\omega),x_{2n}(s,\omega),\omega) - g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)\Big|ds.
\end{aligned}$$

Comme g est continue, alors

$$g_i(s,x_{1n}(s,\omega),x_{2n}(s,\omega),\omega) \rightarrow g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega),$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
&|g_i(s,x_{1n}(s,\omega),x_{2n}(s,w\omega),\omega) - g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)| \\
&\quad \leq |g_i(s,x_{1n}(s,\omega),x_{2n}(s,\omega),\omega)| + |g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)| \\
&\quad \leq 2\|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'aprés lebesgue dominé

$$|g_i(s,x_{1n}(s,\omega),x_{2n}(s,\omega),\omega) - g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)| \rightarrow 0,$$

donc

$$|(\ln t)^{1-\gamma_i}N(\omega)(x_{1n},x_{2n}) - (\ln t)^{1-\gamma_i}N(\omega)(x_1,x_2)| \rightarrow 0.$$

Par passage au sup

$$\|N(\omega)(x_{1n},x_{2n}) - N(\omega)(x_1,x_2)\|_C \rightarrow 0$$

Etape 3 : $N(\omega)$ B_r est borné

$$
\begin{aligned}
&|(\ln t)^{1-\gamma_i}(N(\omega)x_i)(t)| \\
&= \left|\frac{\psi_i(\omega)}{\Gamma(\gamma_i)}(\ln t)^{\gamma_i-1}(\ln t)^{1-\gamma_i} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right| \\
&= \left|\frac{\psi_i(\omega)}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right| \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} |g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)|ds \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} \frac{p_i(s,\omega)|x_1| + q_i(s,\omega)|x_2|}{1+|x_1|+|x_2|}ds \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} (p_i(s,\omega)+q_i(s,\omega))ds \\
&\le \frac{|\psi_i(\omega)|}{\Gamma(\gamma_i)} + (p_i^*+q_i^*)\frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} ds \\
&\le \frac{\psi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + (p_i^*+q_i^*)\frac{(\ln t)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}(\ln t)^{\alpha_i} \\
&\le \frac{\psi_i^*}{\Gamma(\gamma_i)} + (p_i^*+q_i^*)\frac{(\ln t)^{1+\alpha_i-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)} \\
&\le R.
\end{aligned}
$$

Etape 4 : $N(\omega)\ B_R$ est équicontinue.

$$
\begin{aligned}
&|(\ln t_2)^{1-\gamma_i}(N_i(\omega)x_i(t_2)) - (\ln t_1)^{1-\gamma_i}(N_i(\omega)x_i(t_1))| \\
&\le \left|\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^{t_2} \left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds \right. \\
&\left. -\frac{(\ln t_1)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)} s^{-1}\int_1^{t_1} \left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1} s^{-1} g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right|.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
&|(\ln t_2)^{1-\gamma_i}(N_i(\omega)x_i(t_2))-(\ln t_1)^{1-\gamma_i}(N_i(\omega)x_i(t_1))|\\
&=\left|\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right.\\
&\quad+\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}f_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\\
&\quad\left.-\frac{(\ln t_1)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^{t_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)ds\right|\\
&\le\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}\left|g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)\right|ds\\
&\quad+\int_1^{t_1}\left|\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}-\frac{(\ln t_1)^{1-\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}\right|\left|g_i(s,x_1(s,\omega),x_2(s,\omega),\omega)\right|ds\\
&\le\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}(p_i*+q_i*)\left[\frac{\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right]_{t_1}^{t_2}\\
&\quad+(p_i^*+q_i^*)\int_1^{t_1}\left|\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}-\frac{(\ln t_1)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i)}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}s^{-1}\right|ds\\
&\le\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_i}}{\Gamma(\alpha_i+1)}(p_i^*+q_i^*)(\ln t_2)^{\alpha_i}-(\ln t_1)^{\alpha_i}+\frac{(p_i^*+q_i^*)}{\Gamma(\alpha_i)}\int_1^{t_1}\left|(\ln t_2)^{1-\alpha_i}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}\right.\\
&\quad\left.-s^{-1}(\ln t_1)^{1-\alpha_i}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}\right|ds
\end{aligned}
$$

Posons

$$
I=\int_1^{t_1}\left|(\ln t_2)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}-(\ln t_1)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}\right|ds;
$$

si

$$
(\ln t_2)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}\ge(\ln t_1)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}.
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
I&=\int_1^{t_1}\left((\ln t_2)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}-(\ln t_1)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}\right)ds\\
&=(\ln t_2)^{1-\gamma_i}\left[\frac{(\ln t_2)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right]-(\ln t_1)^{1-\gamma_i}\left[\frac{(\ln t_1)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right]\\
&=0,
\end{aligned}
$$

Sinon

$$
\begin{aligned}
I&=\int_1^{t_1}\left((\ln t_1)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}-(\ln t_2)^{1-\gamma_i}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_i-1}s^{-1}\right)ds\\
&=(\ln t_1)^{1-\gamma_i}\left[\frac{(\ln t_1)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right]-(\ln t_2)^{1-\gamma_i}\left[\frac{(\ln t_2)^{\alpha_i}}{\alpha_i}\right]\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
|(\ln t_2)^{1-\gamma_i}(N_i(\omega)x_i(t_2))-(\ln t_1)^{1-\gamma_i}(N_i(\omega)x_i(t_1))|\longrightarrow 0,
$$

quand $t_2\longrightarrow t_1$.

Et comme N est borné et équicontinue donc N est relativement compact (D'aprés Ascoli-Arzila), on conclut que :$N : \Omega \times B_R \longrightarrow B_R$, est continue et compact, donc l'opérateur N admet une solution aléatoire.

4

Systèmes différentiels fractionnaires couplés aléatoires dans des espaces de Banach généralisés

Dans ce chapitre nous présentons résultats d'existence et d'unicité des solutions aléatoires pour des systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer et de Hilfer–Hadamard avec des effets aléatoires. Des applications sont faites des généralisations des théorèmes classiques des points fixes aléatoires dans des espaces de Banach généralisés.

Dans ce chapitre, nous notons par C l'espace de Banach des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^m$, muni de la norme uniforme (ou norme du supremum)

$$\|v\|_\infty = \sup_{t\in I} |v(t)|.$$

Comme d'habitude, $AC(I)$ désigne l'espace des fonctions absolument continues de I dans $\mathbb{R}^m$.

Par $L^1(I)$, nous désignons l'espace des fonctions de Lebesgue intégrables $v : I \to \mathbb{R}^m$, muni de la norme :

$$\|v\|_1 = \int_0^T \|v(t)\| dt.$$

4.1 Un premier type de problème

Considérons le système couplé suivant d'équations différentielles fractionnaires de Hilfer [1]

$$\begin{cases} \left(\mathscr{D}_0^{\alpha_1,\beta_1} u\right)(t,w) = f_1(t, u(t,w), v(t,w), w), \\ \left(\mathscr{D}_0^{\alpha_2,\beta_2} v\right)(t,w) = f_2(t, u(t,w), v(t,w), w) \end{cases} ; \quad t \in I := [0,T],\ w \in \Omega \tag{4.1}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} \left(\mathscr{I}_0^{1-\gamma_1} u\right)(0,w) = \phi_1(w), \\ \left(\mathscr{I}_0^{1-\gamma_2} v\right)(0,w) = \phi_2(w) \end{cases} ; \quad w \in \Omega \tag{4.2}$$

où $T > 0$, $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace mesurable, $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i - \alpha_i \beta_i$, $\phi_i : \Omega \to \mathbb{R}^m$, et $f_i : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, sont des fonctions données. $\mathscr{I}_0^{1-\gamma_i}$ est l'intégrale mixte à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $1-\gamma_i$, et $\mathscr{D}_0^{\alpha_i, \beta_i}$ est l'opérateur dérivatif généralisé de Riemann-Liouville (Hilfer) d'ordre $\alpha_i \in (0,1)$ et de type $\beta_i \in [0,1]$, $i = 1, 2$.

Dans ce section, nous notons par $C_\gamma(I)$, nous désignons l'espaces pondérés de fonctions continues définis par :

$$C_\gamma(I) = \left\{ v : (0, T] \to \mathbb{R}^m \ : \ t^{1-\gamma} v(t) \in C \right\}$$

avec la norme :

$$\|v\|_{C_\gamma} := \sup_{t \in I} \left\| t^{1-\gamma} v(t) \right\|,$$

et, par $C_{\gamma_1, \gamma_2} := C_{\gamma_1} \times C_{\gamma_2}$, nous désignons l'espace produit pondéré muni de la norme :

$$\|(u, v)\|_{C_{\gamma_1, \gamma_2}} = \|u\|_{C_{\gamma_1}} + \|v\|_{C_{\gamma_2}}.$$

4.1.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous nous intéressons aux résultats d'existence et d'unicité pour le système (4.1)-(4.2).

Définition 4.1
Par une solution du problème (4.1)-(4.2), on entend une paire de fonctions mesurables couplées $(u, v) \in C_{\gamma_1} \times C_{\gamma_2}$, qui satisfont l'équation (1) sur I, et les conditions initiales suivantes :

$$\left(I_0^{1-\gamma_1} u\right)(0^+) = \phi_1, \quad \left(I_0^{1-\gamma_2} v\right)(0^+) = \phi_2.$$

Les hypothèses suivantes seront utilisées dans la suite :

(H1) Les fonctions f_i, $i = 1, 2$, sont des fonctions de Carathéodory.

(H2) Il existe des fonctions mesurables $p_i, q_i : \Omega \to (0, \infty)$, $i = 1, 2$, telles que :

$$\left\| f_i(t, u_1, v_1) - f_i(t, u_2, v_2) \right\| \leq p_i(w) \|u_1 - u_2\| + q_i(w) \|v_1 - v_2\|$$

pour presque tout $t \in I$, et pour tous $u_i, v_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$.

(H3) Il existe des fonctions mesurables $a_i, b_i : \Omega \to (0, \infty)$, $i = 1, 2$, telles que :

$$\left\| f_i(t, u, v) \right\| \leq a_i(w) t^{1-\gamma_1} \|u\| + b_i(w) t^{1-\gamma_2} \|v\|,$$

pour presque tout $t \in I$, et pour tous $u, v \in \mathbb{R}^m$.

Nous prouvons d'abord un résultat d'existence et d'unicité pour le système couplé (4.1)-(4.2) en utilisant le théorème du point fixe aléatoire de Banach dans des espaces de Banach généralisés.

Théorème 4.1
Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) soient vérifiées. Si, pour tout $w \in \Omega$, la

matrice suivante :

$$M(w) := \begin{pmatrix} p_1(\omega)\dfrac{T^{\alpha_1}\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_1)} & q_1(\omega)\dfrac{T^{\alpha_1+\gamma_2-\gamma_1}\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2+\alpha_1)} \\ p_2(\omega)\dfrac{T^{\alpha_2+\gamma_1-\gamma_2}\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)} & q_2(\omega)\dfrac{T^{\alpha_2}\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2+\alpha_2)} \end{pmatrix}$$

converge vers zéro, alors le système couplé (4.1) et (4.2) admet une solution aléatoire unique.

Preuve

Selon Lemme 3.1, introduisons les opérateurs suivants : $N_1 : C_{\gamma_1,\gamma_2} \times \Omega \longrightarrow C_{\gamma_1}$ et $N_2 : C_{\gamma_1,\gamma_2} \times \Omega \longrightarrow C_{\gamma_2}$ par :

$$(N_1(u,v))(t,w) = \frac{\phi_1(w)}{\Gamma(\gamma_1)} t^{\gamma_1-1} + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} \frac{f(s,u(s,w),v(s,w),w)}{\Gamma(\alpha_1)} ds,$$

et :

$$(N_2(u,v))(t,w) = \frac{\phi_2(w)}{\Gamma(\gamma_2)} t^{\gamma_2-1} + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} \frac{f(s,u(s,w),v(s,w),w)}{\Gamma(\alpha_2)} ds,$$

Considérons l'opérateur $N : C_{\gamma_1,\gamma_2} \times \Omega \longrightarrow C_{\gamma_1,\gamma_2}$ défini par :

$$(N(u,v))(t,w) = ((N_1(u,v))(t,w), (N_2(u,v))(t,w)) \tag{4.3}$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur N sont des solutions aléatoires du système (4.1) et (4.2).

Étape 1. Montrons que N est un opérateur aléatoire sur C_{γ_1,γ_2}.

Puisque les fonctions f_i ; $i = 1,2$ sont des fonctions de Carathéodory, alors les applications $w \longmapsto f_i(t,u,v,w)$ sont mesurables. On en conclut que les applications :

$$w \longmapsto N_i(u,v)(\cdot,w)$$

sont mesurables de Ω vers les espaces de Banach C_{γ_i} pour $i = 1,2$. Par conséquent, l'opérateur N est un opérateur aléatoire de $C_{\gamma_1,\gamma_2} \times \Omega$ dans C_{γ_1,γ_2}.

Étape 2. Nous montrons que N satisfait toutes les conditions du Théorème 1.4.

Pour $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in C_{\gamma_1,\gamma_2}$ et $(t,\omega) \in I \times \Omega$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\|t^{1-\gamma_1}(N_1(u_1,v_1)(t,\omega)-t^{\gamma_1-1}(N_1(u_2,v_2)(t,\omega))\| \\
&=\left\| t^{1-\gamma_1}\frac{\phi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)}t^{\gamma_1-1}+\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}f_1(s,u_1(s,\omega),v_1(s,\omega),\omega)ds\right.\\
&\qquad\left.-t^{1-\gamma_1}\frac{\phi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)}t^{\gamma_1-1}+\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}f_1(s,u_2(s,\omega),v_2(s,\omega),\omega)ds\right\|\\
&=\left\|\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}f_1(s,u_1(s,\omega),v_1(s,\omega),\omega)ds\right.\\
&\qquad\left.-\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}f_1(s,u_2(s,\omega),v_2(s,\omega),\omega)ds\right\|\\
&=\left\|\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}[f_1(s,u_1(s,\omega),v_1(s,\omega),\omega)-f_1(s,u_2(s,\omega),v_2(s,\omega),\omega)]ds\right\|\\
&\le\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}\|f_1(s,u_1(s,\omega),v_1(s,\omega),\omega)-f_1(s,u_2(s,\omega),v_2(s,\omega),\omega)\|ds.
\end{aligned}
$$

D'après (H2) et l'inégalité ci-dessus, il en résulte que

$$
\begin{aligned}
&\|t^{1-\gamma_1}(N_1(u_1,v_1)(t,\omega)-t^{\gamma_1-1}(N_1(u_2,v_2)(t,\omega))\|\\
&\quad\le\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}[p_1(\omega)s^{1-\gamma_1}s^{\gamma_1-1}\|u_1(s,\omega)-v_1(s,\omega)\|\\
&\qquad\quad+q_1(\omega)s^{1-\gamma_2}s^{\gamma_2-1}\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|]ds\\
&\quad\le\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}[p_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u_1(s,\omega)-v_1(s,\omega)\|_{C_{\gamma_1}}\\
&\qquad\quad+q_1(w)s^{1-\gamma_2}\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|_{C_{\gamma_2}}]ds\\
&\quad\le T^{1-\gamma_1}p_1(\omega)\|u_1(.,\omega)-v_1(.\omega)\|_{C_{\gamma_1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}s^{\gamma_1-1}ds\\
&\qquad\quad+T^{1-\gamma_1}q_1(\omega)\|u_2(.,\omega)-v_2(.\omega)\|_{C_{\gamma_1}}\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}s^{\gamma_2-1}ds
\end{aligned}
$$

En utilisant Lemme 2.2, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\|t^{1-\gamma_1}(N_1(u_1,v_1)(t,\omega)-t^{\gamma_1-1}(N_1(u_2,v_2)(t,\omega))\|\\
&\quad\le T^{1-\gamma_1}p_1(\omega)\frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_1)}T^{\alpha_1+\gamma_1-1}\|u_1(.,\omega)-v_1(.,\omega)\|_{C_{\gamma_1}}\\
&\qquad\quad+T^{1-\gamma_1}q_1(\omega)\frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2+\alpha_1)}T^{\alpha_1+\gamma_2-1}\|u_2(.,\omega)-v_2(.\omega)\|_{C_{\gamma_2}}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\|(N_1(u_1,v_1))(.,\omega)-(N_1(u_2,v_2))(.,\omega)\|_{C_{\gamma_1}}\\
&\quad\le p_1(\omega)\frac{T^{\alpha_1}\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_1)}\|u_1(.,\omega)-v_1(.,\omega)\|_{C_{\gamma_1}}+q_1(\omega)\frac{T^{\alpha_1+\gamma_2-\gamma_1}\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2+\alpha_1)}\|u_2(.,\omega)-v_2(.\omega)\|_{C_{\gamma_2}}.
\end{aligned}
$$

De la même manière,

$$\|(N_2(u_1,v_1))(.,\omega)-(N_2(u_2,v_2))(.,\omega)\|_{C_{\gamma_2}}$$
$$\leq p_2(\omega)\frac{T^{\alpha_2+\gamma_1-\gamma_2}\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\gamma_1+\alpha_2)}\|u_1(.,\omega)-v_1(.,\omega)\|_{C_{\gamma_1}}+q_2(\omega)\frac{T^{\alpha_2}\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2+\alpha_2)}\|u_2(.,\omega)-v_2(.\omega)\|_{C_{\gamma_2}}.$$

Ainsi,

$$d\left((N(u_1,v_1))(\cdot,w),(N(u_2,v_2))(\cdot,w)\right)\leq M(w)\,d\left((u_1(\cdot,w),v_1(\cdot,w)),(u_2(\cdot,w),v_2(\cdot,w))\right),$$

où :

$$d\left((u_1(\cdot,w),v_1(\cdot,w)),(u_2(\cdot,w),v_2(\cdot,w))\right)=\begin{pmatrix}\|u_1(\cdot,w)-v_1(\cdot,w)\|_{C_{\gamma_1}}\\ \|u_2(\cdot,w)-v_2(\cdot,w)\|_{C_{\gamma_2}}\end{pmatrix}.$$

Puisque pour tout $w\in\Omega$, la matrice $M(w)$ converge vers zéro, alors le Théorème 1.4 implique que l'opérateur N admet un point fixe unique, qui est une solution aléatoire du système (4.1) et (4.2).

Maintenant, nous démontrons un **résultat d'existence** pour le système couplé (4.1) et (4.2) en utilisant l'**alternative non linéaire aléatoire de type Leray-Schauder** (Théorème 1.4) dans un espace de Banach **généralisé**.

Théorème 4.2
Supposons que les hypothèses (H1) et (H3) soient vérifiées. Alors, le système couplé (4.1) et (4.2) admet au moins une solution aléatoire.

Preuve

Nous montrons que l'opérateur $N: C_{\gamma_1,\gamma_2}\times\Omega\to C_{\gamma_1,\gamma_2}$ défini en (4.3) satisfait toutes les conditions du Théorème 1.4. La démonstration sera donnée en quatre étapes.

Étape 1. $N(\cdot,\cdot,w)$ est continu.

Soit $(u_n,v_n)_n$ une suite telle que $(u_n,v_n)\to(u,v)\in C_{\gamma_1,\gamma_2}$ quand $n\to\infty$. Pour tout $w\in\Omega$ et chaque $t\in I$, on a :

$$\left\|t^{1-\gamma_1}(N_1(u_n,v_n))(t,w)-t^{1-\gamma_1}(N_1(u,v))(t,w)\right\|$$
$$\leq\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}\left\|f_1(s,u_n(s,w),v_n(s,w),w)-f_1(s,u(s,w),v(s,w),w)\right\|ds$$
$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}s^{1-\gamma_1}\left\|f_1(s,u_n(s,w),v_n(s,w),w)-f_1(s,u(s,w),v(s,w),w)\right\|ds$$
$$\leq\frac{T^{\alpha_1}}{\Gamma(1+\alpha_1)}\left\|f_1(\cdot,u_n(\cdot,w),v_n(\cdot,w),w)-f_1(\cdot,u(\cdot,w),v(\cdot,w),w)\right\|_{C_{\gamma_1}}.$$

Comme f_1 est de Carathéodory, on a :

$$\|(N_1(u_n,v_n))(\cdot,w)-(N_1(u,v))(\cdot,w)\|_{C_{\gamma_1}}\to 0\quad\text{lorsque } n\to\infty$$

D'autre part, pour tout $w \in \Omega$ et chaque $t \in I$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left\| t^{1-\gamma_2}(N_2(u_n, v_n))(t,w) - t^{1-\gamma_2}(N_2(u,v))(t,w) \right\| \\
\leq &\frac{T^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} \left\| f_2(\cdot, u_n(\cdot,w), v_n(\cdot,w), w) - f_2(\cdot, u(\cdot,w), v(\cdot,w), w) \right\|_{C_{\gamma_2}}
\end{aligned}$$

De plus, du fait que f_2 est de Carathéodory, on obtient :

$$\|(N_2(u_n, v_n))(\cdot,w) - (N_2(u,v))(\cdot,w)\|_{C_{\gamma_2}} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

Par conséquent, $N(\cdot,\cdot,w)$ est continue.

Étape 2. $N(\cdot,\cdot,w)$ envoie les ensembles bornés dans C_{γ_1,γ_2} sur des ensembles bornés.

Soit $R > 0$, et posons :

$$B_R := \left\{ (\mu, v) \in C_{\gamma_1,\gamma_2} : \|\mu\|_{C_{\gamma_1}} \leq R, \|v\|_{C_{\gamma_2}} \leq R \right\}.$$

Pour tout $w \in \Omega$, chaque $(u,v) \in B_R$ et tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| t^{1-\gamma_1}(N_1(u,v))(t,w) \right\| &\leq \frac{\left\|\phi_1(w)\right\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} \left\| f_1(s, u(s,w), v(s,w), w) \right\| ds \\
&\leq \frac{\left\|\phi_1(w)\right\|}{\Gamma(\gamma_1)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} s^{1-\gamma_1} (a_1(w)\|u(s,w)\| + b_1(w)\|v(s,w)\|) ds \\
&\leq \frac{\left\|\phi_1(w)\right\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{R}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} s^{1-\gamma_1} (a_1(w) + b_1(w)) ds \\
&\leq \frac{\left\|\phi_1(w)\right\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{T^{\alpha_1}(a_1(w)+b_1(w))}{\Gamma(1+\alpha_1)} \\
&:= \ell_1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|(N_1(u,v))(\cdot,w)\|_{C_{\gamma_1}} \leq \ell_1.$$

De plus, pour tout $w \in \Omega$, chaque $(u,v) \in B_R$ et tout $t \in I$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(N_2(u,v))(\cdot,w)\|_{C_{\gamma_2}} &\leq \frac{\left\|\phi_2(w)\right\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{(a_2(w)+b_2(w))T^{\alpha_2}}{\Gamma(1+\alpha_2)} \\
&:= \ell_2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|(N(u,v))(\cdot,w)\|_{\mathscr{C}} \leq \ell := (\ell_1, \ell_2)$$

Étape 3. $N(\cdot,\cdot,w)$ envoie les ensembles bornés dans C_{γ_1,γ_2} sur des ensembles équicontinus.

Soit B_R la boule définie à l'Étape 2. Pour tous $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 \leq t_2$, pour tout $(u,v) \in B_R$ et $w \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
&\|t_2^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_2,\omega) - t_1^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_1,\omega))\| \\
&\quad = \left\| t_2^{1-\gamma_1}\frac{\phi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)} t_2^{\gamma_1-1} + \frac{t_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1} f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds \right. \\
&\qquad \left. + t_1^{1-\gamma_1}\frac{\phi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)} t_1^{\gamma_1-1}\frac{t_1^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds \right\| \\
&\quad = \left\| \frac{t_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1} f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds \right. \\
&\qquad \left. + \frac{t_1^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds \right\|,
\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
&\|t_2^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_2,\omega) - t_1^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_1,\omega))\| \\
&\quad \leq \frac{t_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\left\| f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)\right\| ds \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_1}\left| t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} - t^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1}\right| \left\| f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)\right\| ds \\
&\quad \leq \frac{t_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\left[a_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|\right]ds \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_1}|t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} - t^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1}| \\
&\qquad \left[a_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|\right]ds \\
&\quad \leq I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{t_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\left[a_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|\right]ds \\
&= \frac{T_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\left[a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1}} + b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2}}\right]ds \\
&= \frac{T_2^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left[a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1}} + b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2}}\right]\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}ds \\
&= \left[a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1}} + b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2}}\right]T_2^{1-\gamma_1}\frac{(t_2-t_1)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)},
\end{aligned}$$

et

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_1} \left| t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} - t_1^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} \right|$$
$$\left[a_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|\right] ds$$
$$= \left[a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1}} + b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2}}\right]$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_1} \left| t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} - t^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} \right| ds,$$

prenons

$$I_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_1} \left| t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} - t^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} \right| ds.$$

Si $t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} \geq t_1^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1}$, alors

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_1} t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_1} t_1^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \left[t_2^{1-\gamma_1} \frac{-(t_2-s)^{\alpha_1}}{\alpha_1} \right]_0^{t_1} + \left[t_2^{1-\gamma_1} \frac{-(t_2-s)^{\alpha_1}}{\alpha_1} \right]_0^{t_1} \\
&= \frac{-(t_2-t_1)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} t_2^{1-\gamma_1} + \frac{t_2^{1-\gamma_1+\alpha_1} - t_1^{1-\gamma_1+\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

quand $t_2 \longrightarrow t_1$. Sinon,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_1} t_1^{1-\gamma_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1} ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_2} t_2^{1-\gamma_1}(t_2-s)^{\alpha_1-1} ds \\
&= \left[-t_1^{1-\gamma_1} \frac{(t_1-s)^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \right]_0^{t_1} + \left[t_2^{1-\gamma_1} \frac{(t_2-s)^{\alpha_1}}{\Gamma+(\alpha_1+1)} \right]_0^{t_2} \\
&= \frac{t_1^{\alpha_1+1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} - \frac{t_2^{1-\gamma_1+\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+1)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

quand $t_2 \longrightarrow t_1$, donc

$$\| t_2^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_2,\omega) - t_1^{\gamma_1-1}(N_1(u,v)(t_1,\omega))\| \longrightarrow 0.$$

De plus, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\| t_1^{1-\gamma_2}(N_2(u,v))(t_1,w) - t_2^{1-\gamma_2}(N_2(u,v))(t_2,w) \right\| &\leq \frac{RT^{\alpha_2}(a_2(w)+b_2(w))}{\Gamma(1+\alpha_2)}(t_2-t_1)^{\alpha_2} \\
&\to 0 \quad \text{lorsque } t_1 \longrightarrow t_2.
\end{aligned}$$

En conséquence des Étapes 1 à 3, et par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on conclut que $N(\cdot,\cdot,w)$ envoie B_R dans un ensemble précompact de C_{γ_1,γ_2}.

Étape 4. L'ensemble M constitué des fonctions $(u(\cdot,w), v(\cdot,w)) \in C_{\gamma_1,\gamma_2}$ telles que

$$(u(\cdot,w), v(\cdot,w)) = \lambda(w) N((u,v))(\cdot,w)$$

pour une certaine fonction mesurable $\lambda : \Omega \to (0,1)$ est borné dans C_{γ_1,γ_2}.

Soit $(u(\cdot,w), v(\cdot,w)) \in C_{\gamma_1,\gamma_2}$ tel que

$$(u(\cdot,w), v(\cdot,w)) = \lambda(w) N((u,v))(\cdot,w).$$

Alors, on a :

$$u(\cdot,w) = \lambda(w) N_1((u,v))(\cdot,w), \quad v(\cdot,w) = \lambda(w) N_2((u,v))(\cdot,w).$$

Ainsi, pour tout $w \in \Omega$ et chaque $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
&t^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega)\| \\
&\le \left\| t^{1-\gamma_1}\frac{\phi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)}t^{\gamma_1-1} + \frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds \right\| \\
&\le \frac{\|\phi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}\left\| f_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)\right\| ds \\
&\le \frac{\|\phi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}(a_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|)ds \\
&\le \frac{\|\phi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}(a_1(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|)ds.
\end{aligned}$$

De plus, on obtient :

$$\begin{aligned}
&t^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| \\
&\le \left\| t^{1-\gamma_2}\frac{\phi_2(\omega)}{\Gamma(\gamma_2)}t^{\gamma_2-1} + \frac{t^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} f_2(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds \right\| \\
&\le \frac{\|\phi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{t^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}\left\| f_2(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)\right\| ds \\
&\le \frac{\|\phi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{t^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}(a_2(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|)ds \\
&\le \frac{\|\phi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{t^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}(a_2(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_2(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|)ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
&t^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega) + t^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| \\
&\le \frac{\|\phi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}(a_2(\omega)s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + b_2(\omega)s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\|)ds \\
&\le a + \left[\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{t^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\right]\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \\
&\quad \left[(a_1(\omega)+a_2(w))s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + (b_2(\omega)+b_1(w))s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\| ds\right] \\
&\le a + \left[\frac{t^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{t^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\right] c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\| ds\right] \\
&\le a + \left[\frac{T^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{T^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\right] c \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[s^{1-\gamma_1}\|u(s,\omega)\| + s^{1-\gamma_2}\|v(s,\omega)\| ds\right],
\end{aligned}$$

avec
$$a = \frac{\|\phi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{\|\phi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)}, \quad \alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\},$$
et
$$c = \max\{a_1(w) + a_2(w), b_1(w) + b_2(w)\}.$$

Le Lemme 1.4 (Gronwall) implique qu'il existe une constante $K := K_{1-\alpha}$ telle que :

$$\begin{aligned} t^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega)\| + t^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| &\leq a + \left[\frac{T^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{T^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\right] C\, a\, K_{1-\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq a + \left[\frac{T^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{T^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)}\right] C\, a\, K_{1-\alpha} \frac{T^{\alpha}}{\alpha} := L. \end{aligned}$$

Donc
$$\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1}} + \|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2}} \leq L,$$
alors
$$\|(u(\cdot,\omega), v(\cdot,\omega))\|_{C_{\gamma_1,\gamma_2}} \leq L.$$
Cela montre que l'ensemble M est borné.

En conséquence des Étapes 1 à 4, ainsi que du Théorème 1.4, on peut conclure que l'opérateur N admet au moins un point fixe dans B_R, lequel constitue une solution du système (4.1)-(4.2).

4.1.2 Exemple

On munit l'espace $\mathbb{R}_-^* := (-\infty, 0)$ de la σ-algèbre usuelle constituée des parties mesurables au sens de Lebesgue de $\mathbb{R}_-^*$. Considérons le système différentiel fractionnaire aléatoire couplé suivant de Hilfer :

$$\begin{cases} \left(\mathscr{D}_0^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} u\right)(t,w) = f(t, u(t,w), v(t,w), w), \\ \left(\mathscr{D}_0^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} v\right)(t) = g(t, u(t,w), v(t,w), w), \\ \left(\mathscr{I}_0^{\frac{1}{4}} u\right)(0,w) = \dfrac{1}{\omega+1}, \\ \left(\mathscr{I}_0^{\frac{1}{4}} v_n\right)(0,w) = \omega + \omega^2 \end{cases} ; \ w \in \mathbb{R}_-^*, \ t \in [0,1] \tag{4.4}$$

avec $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}, \gamma = \dfrac{3}{4}, n = 2, u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$ et

$$\begin{cases} f(t,u,v,w) = \begin{pmatrix} |t|(|x_1(t)| + |x_2(t)|) \\ \dfrac{\cos t}{\omega+2}|y_1(t)| \end{pmatrix}; & t \in [0,1], \\ g(t,u,v) = \begin{pmatrix} t^{\frac{1}{4}} \cos t |x_1(t)| \\ t^{\frac{1}{4}}(|y_1(t)| + |y_2(t)|) \end{pmatrix}; & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Elle est claire que f_1, f_2 sont des fonctions carathéodory.

On a :

$$\left\| f_1(u_1,v_1) - f_1(t,u_2,v_2) \right\| \le p_1(\omega)\|u_1-u_2\| + q_1(\omega)\|v_1-v_2\|,$$
$$\left\| f_2(u_1,v_1) - f_2(t,u_2,v_2) \right\| \le p_2(\omega)\|u_1-u_2\| + q_2(\omega)\|v_1-v_2\|.$$

où $\|\cdot\|$ est une norme dans $\mathbb{R}^2$ définie comme suite :

$$\|u\|_1 = |x_1(t)| + |x_2(t)|, \quad \|v\|_1 = |y_1(t)| + |y_2(t)|.$$

Alors

$$\left\| f_1(u_1,v_1) - f_1(t,u_2,v_2) \right\| \le |t|\|u_1-u_2\| + \frac{\cos t}{\omega+2}\|v_1-v_2\|,$$
$$\left\| f_2(u_1,v_1) - f_2(t,u_2,v_2) \right\| \le t^{\frac{1}{4}}\cos t\|u_1-u_2\| + t^{\frac{1}{4}}\|v_1-v_2\|.$$

Donc $p_1(\omega)=1$, $q_1(\omega)=\dfrac{1}{\omega+2}$, $p_2(\omega)=1$, $q_2(\omega)=1$.
Donc la matrice M est donnée par

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} & \dfrac{1}{\omega+2}\dfrac{\Gamma\frac{3}{4}}{\Gamma(\frac{5}{4})} \\ \\ \dfrac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} & \dfrac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \end{pmatrix}.$$

D'aprés (H3), on a :

$$\|f_1(t,u,v)\| \le a_1(\omega)t^{1-\gamma_1}\|u\| + b_1(\omega)t^{1-\gamma_2}\|v\|,$$
$$\|f_2(t,u,v)\| \le a_2(\omega)t^{1-\gamma_1}\|u\| + b_2(\omega)t^{1-\gamma_2}\|v\|.$$

Donc $a_1(\omega)=1$, $b_1(\omega)=1$, $a_2(\omega)=\dfrac{1}{\omega+2}$, $b_2(\omega)=1$.

On va calculer

$$L = \frac{2}{(\omega+1)\Gamma(\frac{1}{2})}\exp(2(\ln t)^{\frac{1}{2}})).$$

4.2 Un deuxième type de problème

Ensuite, nous considérons le système couplé suivant d'équations différentielles fractionnaires aléatoires de Hilfer-Hadamard [1] :

$$\begin{cases} \left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_1,\beta_1} u\right)(t,\omega) & = g_1(t,u(t,\omega),v(t,\omega),\omega), \\ \left({}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_2,\beta_2} v\right)(t,\omega) & = g_2(t,u(t,\omega),v(t,\omega),\omega). \end{cases} \tag{4.5}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_1} u\right)(1,\omega) & = \psi_1(\omega), \\ \left({}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_2} v\right)(1,\omega) & = \psi_2(\omega). \end{cases} \tag{4.6}$$

où $T>0$, $(\Omega,\mathscr{A})$ est un espace mesurable, $\gamma_i = \alpha_i+\beta_i-\alpha_i\beta_i$, $\psi_i:\Omega\to\mathbb{R}^m$, et $g_i: I\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega\to\mathbb{R}^m$, $i=1,2$, sont des fonctions données. ${}^H\mathscr{I}_1^{1-\gamma_i}$ est l'intégrale mixte à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $1-\gamma_i$, et ${}^H\mathscr{D}_1^{\alpha_i,\beta_i}$ est l'opérateur dérivatif de Hilfer-Hadamard d'ordre $\alpha_i \in (0,1)$ et de type $\beta_i \in [0,1]$, $i=1,2$.

Nous notons par $C := C([1,T])$, nous désignons l'espaces pondérés de fonctions continues définis par :

$$C_{\gamma,\ln}([1,T]) = \left\{v(t) : (\ln t)^{1-\gamma} v(t) \in C\right\}$$

avec la norme :

$$\|v\|_{C_{\gamma,\ln}} := \sup_{t\in[1,T]} \left\|(\ln t)^{1-\gamma} v(t)\right\|,$$

et, par $C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}([1,T]) := C_{\gamma_1,\ln}([1,T]) \times C_{\gamma_2,\ln}([1,T])$, nous désignons l'espace produit pondéré muni de la norme :

$$\|(u,v)\|_{C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}} = \|u\|_{C_{\gamma_1,\ln}} + \|v\|_{C_{\gamma_2,\ln}}.$$

D'après Lemma 3.2, nous concluons le lemme suivant.

Lemme 4.1: Soit $g_i : [1,T] \times E \times E \to E$ telle que $g_i(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)) \in C_{\gamma_i,\ln}([1,T])$ pour tout $u \in C_{\gamma_1,\ln}([1,T])$, $v \in C_{\gamma_2,\ln}([1,T])$. Alors, le Problème (4.5)-(4.6) est équivalent à l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(t) = \frac{\psi_1}{\Gamma(\gamma_1)}(\ln t)^{\gamma_1-1} + \left({}^H\mathscr{I}_1^{\alpha_1} g_1(\cdot, u(\cdot), v(\cdot))\right)(t)$$

Définition 4.2
Par une solution aléatoire du système couplé (4.5)-(4.6), on entend une fonction mesurable couplée $(u,v) \in C_{\gamma_1,\ln} \times C_{\gamma_2,\ln}$ qui satisfait les conditions (4.6) et l'Équation (4.5) sur l'intervalle $[1,T]$.

4.2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette subsection, nous nous intéressons aux résultats d'existence et d'unicité pour le système (4.5)-(4.6).

On suppose les hypothèse suivants :

H1) Les fonctions g_i, $i=1,2$ sont des fonctions carathéodory.

H2) Il existent des fonctions mesurables et continues $p_i, q_i : \Omega \to (0,\infty)$; $i=1,2$ telque :

$$\|g_i(t,u_1,v_1) - g_i(t,u_2,v_2)\| \le p_i(\omega)\|u_1-u_2\| + q_i(\omega)\|v_1-v_2\|;$$

pour tout $t \in I = [1,e]$, et chaque $u_i, v_i \in \mathbb{R}^m$, $i=1,2$.

H3) Il existent des fonctions mesurables et continues $a_i, b_i : \Omega \to (0,\infty)$; $i=1,2$ telque :

$$\|g_i(t,u,v)\| \le a_i(\omega)(\ln t)^{1-\gamma_1}\|u\| + b_i(\omega)(\ln t)^{1-\gamma_2}\|v\|,$$

pour tout $t \in I$, et chaque $u, v \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 4.3
Supposons que les hypothèses (H1) et (H2) soient vérifiés, si pour tout $\omega\in\Omega$, la matrice

$$M(\omega)=\begin{pmatrix} p_1(\omega)\dfrac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1+\gamma_1)}(\ln T)^{\alpha_1} & q_1(\omega)\dfrac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_2+\alpha_1)}(\ln T)^{\alpha_1+\gamma_2-\gamma_1} \\ p_2(\omega)\dfrac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_2+\gamma_1)}(\ln T)^{\alpha_2+\gamma_1-\gamma_2} & q_2(\omega)\dfrac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\alpha_2+\gamma_2)}(\ln T)^{\alpha_2} \end{pmatrix},$$

converge vers 0, alors le système (4.5)-(4.6) admet une solution aléatoire unique .

Preuve

On définie les opérateurs $N_1 : C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}\times\Omega\longrightarrow C_{\gamma_1,\ln}$ et $N_2 : C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}\times\Omega\longrightarrow C_{\gamma_2,\ln}$, par :

$$\begin{aligned}(N_1(u,v)(t,\omega))&=\frac{\psi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)}(\ln t)^{\gamma_1-1}+\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\frac{g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)}{\Gamma(\alpha_1)}ds,\\ (N_2(u,v)(t,\omega))&=\frac{\psi_2(\omega)}{\Gamma(\gamma_2)}(\ln t)^{\gamma_2-1}+\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_2-1}s^{-1}\frac{g_2(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)}{\Gamma(\alpha_2)}ds.\end{aligned}\tag{4.7}$$

On considère l'opérateur $N : C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}\times\Omega\longrightarrow C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}$ définie par :

$$(N(u,v)(t,\omega))=(N_1(u,v)(t,\omega),N_2(u,v)(t,\omega)).$$

Soit $(u_1,u_2),(v_1,v_2)\in C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}$ et $(t,\omega)\in I\times\Omega$, on a :

$$\begin{aligned}&\|(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u_1,v_1)(t,\omega)-(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u_2,v_2)(t,\omega))\|\\ &=\Bigg\|(\ln t)^{1-\gamma_1}\frac{\psi_1(\omega)}{\Gamma(\alpha_1)}(\ln t)^{\alpha_1-1}+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\\ &\quad g_1(s,u_1(s,\omega),v_1(s,\omega),\omega)ds-(\ln t)^{1-\alpha_1}\frac{\psi_1(\omega)}{\Gamma(\alpha_1)}(\ln t)^{\alpha_1-1}+\frac{(\ln t)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\\ &\quad\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}g_1(s,u_2(s,\omega),v_2(s,\omega),\omega)ds\Bigg\|\\ &\le\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\Big\|g_1(s,u_1(s,\omega),v_1(s,\omega),\omega)-g_1(s,u_2(s,\omega),v_2(s,\omega),\omega)\Big\|ds.\end{aligned}$$

En utilisant (H2), nous avons

$$\begin{aligned}
&\|(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u_1,v_1)(t,\omega)-(\ln t)^{1-\alpha_1}(N_1(u_2,v_2)(t,\omega))\| \\
&\leq \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}(p_1(\omega)\|u_1(s,\omega)-v_1(s,\omega)\|+q_1(\omega)\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|)ds \\
&\leq \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}(p_1(\omega)(\ln s)^{1-\gamma_1}(\ln s)^{\gamma_1-1})\|u_1(s,\omega)-v_1(s,\omega)\| \\
&\quad+q_1(\omega)(\ln s)^{1-\gamma_2}(\ln s)^{\gamma_2-1})\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|)ds \\
&\leq \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\gamma_1-1}s^{-1}(p_1(\omega)(\ln s)^{\gamma_1-1})\|u_1(\cdot,\omega)-v_1(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}} \\
&\quad+q_1(\omega)(\ln s)^{\gamma_2-1})\|u_2(\cdot,\omega)-v_2(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}})ds \\
&\leq \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}p_1(\omega)\|u_1(\cdot,\omega)-v_1(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}(\ln s)^{\gamma_1-1}ds \\
&\quad+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}q_2(\omega)\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_2-1}s^{-1}(\ln s)^{\gamma_2-1}ds
\end{aligned}$$

Par suit

$$\begin{aligned}
&\|(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u_1,v_1)(t,\omega)-(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u_2,v_2)(t,\omega))\| \\
&\quad\leq(\ln t)^{1-\gamma_1}p_1(\omega)\|u_1(\cdot,\omega)-v_1(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}}I_1^{\alpha_1}(\ln t)^{\gamma_1-1} \\
&\qquad+(\ln t)^{1-\gamma_1}q_1(\omega)\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}}I_1^{\alpha_1}(\ln t)^{\gamma_2-1} \\
&\quad\leq(\ln t)^{1-\gamma_1}p_1(\omega)\|u_1(\cdot,\omega)-v_1(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}}\frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1+\gamma_1)}(\ln t)^{\alpha_1+\gamma_1-1} \\
&\qquad+(\ln t)^{1-\gamma_1}q_1(\omega)\|u_2(\cdot,\omega)-v_2(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}}\frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\alpha_1+\gamma_2)}(\ln t)^{\gamma_2+\alpha_1-1}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|N_1(u_1,v_1)(.,\omega)-N_1(u_2,v_2)(.,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}}&\leq p_1(\omega)\frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1+\gamma_1)}(\ln t)^{\alpha_1}\|u_1(s,\omega)-v_1(s,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}} \\
&\quad+q_2(\omega)\frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\alpha_1+\gamma_2)}(\ln t)^{\alpha_1+\gamma_2-\gamma_1}\|u_2(s,\omega)-v_2(s,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}},
\end{aligned}$$

De la même maniére

$$\begin{aligned}
\|N_2(u_1,v_1)(\cdot,\omega)-N_2(u_2,v_2)(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}}&\leq p_2(\omega)\frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_2+\gamma_1)}(\ln t)^{\alpha_2+\gamma_1-\gamma_2}\|u_1(\cdot,\omega)-v_1(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}} \\
&\quad+q_2(\omega)\frac{\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\alpha_2+\gamma_2)}(\ln t)^{\alpha_2}\|u_2(\cdot,\omega)-v_2(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}}.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$d((N(u_1,v_1))(\cdot,\omega),(N(u_2,v_2))(\cdot,\omega))\leq M(\omega)d((u_1(\cdot,\omega),v_1(\cdot,\omega)),(u_2(\cdot,\omega),v_2(\cdot,\omega))).$$

Puisque pour tout $\omega\in\Omega$, la matrice $M(\omega)$ converge vers 0, alors l'opérateur N admet un point fixe unique, qu'est une solution aléatoire.

Maintenant, nous prouvant un résultat d'existence pour notre système, en utilisant l'altèrmative de Leray-Schauder dans l'espace de Banach généralisé.

Théorème 4.4
Supposons que les hypothèses (H1) et (H3) soient vérifiées, alors le système (4.5)-(4.6) admet au moins une solution aléatoire.

Preuve

Etape 1, $N(\cdot,\cdot,\omega)$ est continue

Soit $(u_n, v_n)_n$ dans $C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}$ tel que $(u_n, v_n)_n \to (u, v)$, quand $n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u_n, v_n))(t,\omega) - (\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v))(t,\omega)\right\| \\
&= \left\|\frac{\psi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)}(\ln t)^{1-\gamma_1}(\ln t)^{\gamma_1-1} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1} s^{-1} g_1(s, u_n(s,\omega), v_n(s,\omega),\omega)ds\right. \\
&\quad \left. - \frac{\psi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)}(\ln t)^{1-\gamma_1}(\ln t)^{\gamma_1-1} - \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1} s^{-1} g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega),\omega)ds\right\| \\
&\le \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1} s^{-1}\left\|g_1(s, u_n(s,\omega), v_n(s,\omega),\omega) - g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega),\omega)\right\| ds \\
&\le \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1} s^{-1}(\ln s)^{1-\alpha_1}(\ln s)^{\alpha_1-1} \\
&\quad \left\|g_1(s, u_n(s,\omega), v_n(s,\omega),\omega) - g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega),\omega)\right\| ds \\
&\le \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\gamma_1)}\left\|g_1(\cdot, u_n(\cdot,\omega), v_n(\cdot,\omega),\omega) - g_1(\cdot, u(\cdot,\omega), v(\cdot,\omega),\omega)\right\|_{C_{\alpha_1}}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1} s^{-1}(\ln s)^{\alpha_1-1}ds \\
&\le \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1+\gamma_1)}(\ln t)^{1-\gamma_1+\alpha_1}\left\|g_1(s, u_n(s,\omega), v_n(s,\omega),\omega) - g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega),\omega)\right\|_{C_{\alpha_1}}
\end{aligned}$$

et comme g_1 est carathèodory,

$$\|g_1(\cdot, u_n(\cdot,\omega), v_n(\cdot,\omega),\omega) - g_1(\cdot, u(\cdot,\omega), v(\cdot,\omega),\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}} \to 0,$$

donc

$$\|(N_1(u_n, v_n))(\cdot,\omega) - (N_1(u,v))(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_1,\ln}} \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

De la même manière,

$$\|(N_2(u_n, v_n))(\cdot,\omega) - (N_2(u,v))(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}} \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Etape 2. $N(\cdot,\cdot,\omega)$ est bornée.

On définie l'ensemble $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$:

$$\mathbb{B}_R = \{(u,v) \in C_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}, \|u\|_{C_{\gamma_1,\ln}} \le R, \|v\|_{C_{\gamma_2,\ln}} \le R\},$$

pour tout $\omega\in\Omega$ et $(u,v)\in\mathbb{B}_R$, on a

$$
\begin{aligned}
&\|(\ln t)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v))(t,\omega)\|\\
&=\left\|\frac{\psi_1(w)}{\Gamma(\gamma_1)}(\ln t)^{\gamma_1-1}(\ln t)^{1-\gamma_1}+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\right.\\
&\quad\left.g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds\right\|\\
&=\left\|\frac{\psi_1(w)}{\Gamma(\gamma_1)}+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds\right\|\\
&\leq\frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)}+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\\
&\quad(a_1(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\|+b_1(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|)ds\\
&\leq\frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)}+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}(a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\alpha_1}}+b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\alpha_2}})ds\\
&\leq\frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)}+\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}R(a_1(\omega)+b_1(\omega))\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}ds\\
&\leq\frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)}+(a_1(\omega)+b_1(\omega))\frac{R(\ln t)}{\Gamma(\alpha_1+1)}\\
&\leq L_1.
\end{aligned}
$$

De la même manière

$$\|(N_2(u,v))(\cdot,\omega)\|_{C_{\gamma_2,\ln}}\leq\frac{\|\psi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)}+(a_2(\omega)+b_2(\omega))\frac{R(\ln t)}{\Gamma(\alpha_2+1)}=L_2,$$

alors

$$\|(N(u,v))(\cdot,\omega)\|_{\gamma_1,\gamma_2,\ln}\leq L=L_1+L_2.$$

Etape 3 : $N(\cdot,\cdot,\omega)$ est équicontinue

$$
\begin{aligned}
&\|(\ln t_2)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_2,\omega)-(\ln t_1)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_1,\omega))\|\\
&=\left\|\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\gamma_1-1}s^{-1}g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds\right.\\
&\quad\left.-\frac{(\ln t_1)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds\right\|.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
&\|(\ln t_2)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_2,\omega)-(\ln t_1)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_1,\omega))\|\\
&=\Bigg\|\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds+\\
&\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds\\
&-\frac{(\ln t_1)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)ds\Bigg\|\\
&\le\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\Big\|g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)\Big\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^{t_1}\left|(\ln t_2)^{1-\alpha_1}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}-(\ln t_1)^{1-\alpha_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\right|\\
&\Big\|g_1(s,u(s,\omega),v(s,\omega),\omega)\Big\|ds\\
&\le\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left[a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\alpha_1}}+b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\alpha_2}}\right]\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left[a_1(\omega)\|u(\cdot,\omega)\|_{C_{\alpha_1}}+b_1(\omega)\|v(\cdot,\omega)\|_{C_{\alpha_2}}\right]\\
&\int_1^{t_1}\left|(\ln t_2)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}-(\ln t_1)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\right|ds\\
&\le\frac{(\ln t_2)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)}\left[a_1(\omega)\|u(s,\omega)\|_{C_{\alpha_1}}+b_1(\omega)\|v(s,\omega)\|_{C_{\alpha_2}}\right]\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left[a_1(\omega)\|u(s,\omega)\|_{C_{\alpha_1}}+b_1(\omega)\|v(s,\omega)\|_{C_{\alpha_2}}\right]I,
\end{aligned}
$$

avec

$$I=\int_1^{t_1}\left|(\ln t_2)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}-(\ln t_1)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\right|ds;$$

si

$$(\ln t_2)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\ge(\ln t_1)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
I&=\int_1^{t_1}\left((\ln t_2)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}-(\ln t_1)^{1-\gamma_1}\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha_1-1}s^{-1}\right)ds\\
&=(\ln t_2)^{1-\gamma_1}\left[\frac{(\ln t_2)^{\alpha_1}}{\alpha_1}\right]-(\ln t_1)^{1-\gamma_1}\left[\frac{(\ln t_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1}\right]\\
&=0,
\end{aligned}
$$

Sinon

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^{t_1} \left((\ln t_1)^{1-\gamma_1} \left(\ln \frac{t_1}{s} \right)^{\alpha_1 - 1} s^{-1} - (\ln t_2)^{1-\gamma_1} \left(\ln \frac{t_2}{s} \right)^{\alpha_1 - 1} s^{-1} \right) ds \\
&= (\ln t_1)^{1-\gamma_1} \left[\frac{(\ln t_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1} \right] - (\ln t_2)^{1-\gamma_1} \left[\frac{(\ln t_2)^{\alpha_1}}{\alpha_1} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|(\ln t_2)^{1-\gamma_1}(N_1(u,v)(t_2,\omega) - (\ln t_1)^{1-\gamma_2}(N_1(u,v)(t_1,\omega))\| \longrightarrow 0,
$$

quand $t_2 \longrightarrow t_1$. De la même manière

$$
\|(\ln t_2)^{1-\gamma_2}(N_2(u,v)(t_2,\omega) - (\ln t_1)^{1-\gamma_2}(N_2(u,v)(t_1,\omega))\| \longrightarrow 0.
$$

Etape 4 : L'ensemble M de Théorème (4.2.1) est bornée.

Pour une fonction mesurable $\lambda(w) : \omega \longrightarrow (0,1)$ on a :

$$
\begin{aligned}
\|u(t,\omega)\| &= \lambda(\omega)\|N_1(u,v)(t,\omega)\|, \\
\|v(t,\omega)\| &= \lambda(\omega)\|N_1(u,v)(t,\omega)\|.
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&(\ln t)^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega)\| \\
&\leq (\ln t)^{1-\gamma_1} \left\| \frac{\psi_1(\omega)}{\Gamma(\gamma_1)} (\ln t)^{\gamma_1 - 1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha_1 - 1} s^{-1} g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega), \omega) ds \right\| \\
&\leq \frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha_1 - 1} s^{-1} \left\| g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega), \omega) \right\| ds \\
&\leq \frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{(\ln t)^{1-\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha_1 - 1} s^{-1} \\
&\quad (a_1(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|) ds.
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
&(\ln t)^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| \\
&\leq (\ln t)^{1-\gamma_2} \left\| \frac{\psi_2(\omega)}{\Gamma(\gamma_2)} + (\ln t)^{\gamma_2 - 1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha_2 - 1} s^{-1} g_2(s, u(s,\omega), v(s,\omega), \omega) \right\| ds \\
&\leq \frac{\|\psi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha_2 - 1} s^{-1} \left\| g_1(s, u(s,\omega), v(s,\omega), \omega) \right\| ds \\
&\leq \frac{\|\psi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha_2 - 1} s^{-1} \\
&\quad (a_2(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\| + b_2(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|) ds
\end{aligned}
$$

On trouve :

$$
\begin{aligned}
&(\ln t)^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega)\| + (\ln t)^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| \\
&\quad \le \frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{\|\psi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha_1-1} s^{-1} \\
&\qquad (a_1(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\| + b_1(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|)ds \\
&\qquad + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha_2-1} s^{-1} \\
&\qquad (a_2(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\| + b_2(\omega)(\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|)ds \\
&\quad \le \frac{\|\psi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{\|\psi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1} \\
&\qquad ((a_1(\omega)+a_2(\omega)) + (\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\| + (b_1(\omega)+b_2(\omega))(\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|)ds,
\end{aligned}
$$

avec

$$
a = \frac{\|\phi_1(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_1)} + \frac{\|\phi_2(\omega)\|}{\Gamma(\gamma_2)}, \quad \alpha = max\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad c = max\{a_1(w)+a_2(w), b_1(w)+b_2(w)\}.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&(\ln t)^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega)\| + (\ln t)^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| \\
&\quad \le a + c\frac{(\ln t)^{1-\gamma_1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{(\ln t)^{1-\gamma_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1}((\ln s)^{1-\alpha_1}\|u(s,\omega)\| + (\ln s)^{1-\alpha_2}\|v(s,\omega)\|)ds.
\end{aligned}
$$

D'après Lemme de Gronwall

$$
(\ln t)^{1-\gamma_1}\|u(t,\omega)\| + (\ln t)^{1-\gamma_2}\|v(t,\omega)\| \le a + \exp\left(\int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} s^{-1} ds\right) \le a.e^{\frac{(\ln t)^{\alpha}}{\alpha}}.
$$

Elle est bornée, donc N admet un point fixe qu'est solution du problème.

Bibliographie

[1] S. Abbas, N. Arifi, M. Benchohra, & Y. Zhou, Random coupled Hilfer and Hadamard fractional differential systems in generalized Banach spaces. *Mathematics.* **7**, 285 (2019)

[2] S. Abbas, M. Benchohra, & Y. Zhou, Coupled Hilfer fractional differential systems with random effects. *Advances In Difference Equations.* **2018** pp. 1-12 (2018)

[3] G. Allaire, S.M. Kaber, Numerical Linear Algebra ; Ser. Texts in Applied Mathematics ; Springer : New York, NY, USA, 2008.

[4] H.W. Engl, A general stochastic fixed-point theorem for continuous random operators on stochastic domains. J. Math. Anal. Appl. 1978, 66, 220-231.

[5] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics ; World Scientific : Singapore, 2000.

[6] J.R. Graef, J. Henderson, A. Ouahab, Some Krasnosel'skii type random fixed point theorems. J. Nonlinear Funct. Anal. 2017, 2017, 46.

[7] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland mathematics studies, vol. 207. Amsterdam : Elsevier ; 2006 .

[8] M.D. Qassim, N.E. Tatar, Well-posedness and stability for a differential problem with Hilfer-Hadamard fractional derivative. Abstr. Appl. Anal. 2013, 2013, 605029.

[9] V.E. Tarasov, Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media ; Springer : Heidelberg, Germany ; Higher Education Press : Beijing, China, 2010

[10] Ž. Tomovski, R. Hilfer, H.M. Srivastava, Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions. Integral Transforms Spec. Funct. 21, 797-814 (2010)

[11] R.S. Varga, Matrix Iterative Analysis ; Second Revised and Expanded Edition ; Springer Series in Computational Mathematics 27 ; Springer : Berlin, Germany, 2000.

[12] O. Zentar, M. Al Horani, M. Ziane, A study of a coupled system involving tempered Caputo derivatives with respect to functions. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 74, No. 1, Paper No. 17, 19 p. (2025).

[13] M. Ziane, O. Zentar, M. Al Horani, On the φ-tempered fractional differential systems of Riemann–Liouville type. *J. Anal.* pp. 1-20 (2024).

[14] O. Zentar, M. Ziane and M. Al Horani, Theoretical study of a φ-Hilfer fractional differential system in Banach spaces, *Can. Math. Bull.*, Accepted, pp. 1 - 18, DOI : 10.4153/S0008439524000134

[15] M. Ziane, On the Solution Set for Weighted Fractional Differential Equations in Banach Spaces. *Differ. Equ. Dyn. Syst.* **28**, 419-430 (2020).