RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUES
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Spécialité :
« Mathématique »

Option :
«Analyse fonctionnelle et équations différentielles »

Présenté Par :
Meguenniyasser et Zerrouki chahrazed

Sous L'intitulé :

Systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires avec conditions aux limites non locales

Soutenu publiquement le../ .. /2025 à Tiaret
Devant le jury composé de :

MlleKHELIFA Hizia	MCB	Université de Tiaret	Présidente
Mr BENALIHalim	MCA	Université de Tiaret	Examinateur
Mr BAGHDAD Said	MCA	Université de Saida	Encadrant

Année universitaire : 2024/2025

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles fractionnaires constituent un outil mathématique essentiel pour la modélisation et l'analyse, car elles apparaissent largement dans divers domaines scientifiques et techniques. Leur capacité à décrire avec précision des phénomènes complexes dépasse celle des modèles classiques. Elles se sont révélées particulièrement efficaces dans l'étude des systèmes physiques et chimiques, ainsi que dans la modélisation de l'aérodynamique des milieux complexes, entre autres applications avancées. De ce fait, les équations différentielles fractionnaires suscitent un intérêt croissant dans les milieux académiques et de recherche [26].

Le sujet principal de ce travail de recherche est l'étude d'un système couplé d'équations différentielles fractionnaires non linéaires muni de conditions aux limites non locales. Ce type de problème n'est pas simple en raison de la présence simultanée de plusieurs éléments tels que la non-linéarité, l'interdépendance entre les équations, la nature fractionnaire des dérivées et le caractère non local des conditions aux limites [27, 28]. Ces particularités nécessitent l'utilisation d'outils mathématiques avancés, notamment l'analyse fonctionnelle et les théories des points fixes.

Notre travail se compose de quatre chapitre :

> Dans le premier chapitre, nous avons présenté les notions de base nécessaires pour la suite du travail, notamment les espaces de Banach, les fonctions continues, les applications continues, ainsi que des éléments d'analyse fonctionnelle et de calcul différentiel et intégral fractionnaire. Nous avons également rappelé plusieurs théorèmes de point fixe importants, comme ceux de Banach, Schauder et Schaefer, qui seront utilisés pour démontrer l'existence de solutions.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour des systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires, munis de conditions aux limites non locales à trois points, données par :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f\big(t,\, v(t), D^{p}v(t)\big), \quad t \in [0,1] \\ D^{\beta}v(t) = g\big(t,\, u(t), D^{q}u(t)\big), \\ u(0) = 0,\ u(1) = \gamma u(\eta),\ v(0) = 1,\ v(1) = \gamma v(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

${}^{RL}D$ est la dérivée fractionnaires de Riemann Liouville avec $1 < \alpha, \beta < 2$, $p, q, \gamma > 0$, $0 < \eta < 1$, $\alpha - q \geq 1$, $\beta - p \geq 1$, $\gamma\eta^{\alpha-1} < 1$, $\gamma\eta^{\beta-1} < 1$ et $f, g : [0,1] \times R \times R \to \times R$ sont des fonctions continue est non linéaires.

Dans le troisième chapitre, nous étudions un système couplé d'équations différentielles fractionnaires de type Hadamard avec des conditions aux limites non locales exprimées sous forme intégrale.

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), v(t)), \quad 1 < t < e,\ 1 < \alpha \leq 2, \\ {}^{H}D^{\beta}v(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad 1 < t < e,\ 1 < \beta \leq 2, \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \Gamma^{\gamma}u(\sigma_1) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{u(s)}{s}\, ds, \\ v(1) = 0, \quad v(e) = \Gamma^{\gamma}v(\sigma_2) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_2} \left(\log \frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{v(s)}{s}\, ds, \end{cases} \tag{2}$$

où $\gamma > 0$, $1 < \sigma_1 < e$, $1 < \sigma_2 < e$, ${}^{H}D^{(\cdot)}$ désigne la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre fractionnaire, Γ^{γ} est l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre γ, et f, g : $[1, e] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces vectoriels normés

On considère E un K-espace vectoriel (ev) avec $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle norme sur E une appliction de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

L'espace vectoriel E muni de la norme $\|\cdot\|$ est appelé **espace vectoriel normé** (evn), et noté $(E, \|\cdot\|_E)$ voir [7].

Exemple 1.1.1. *[7] Sur $\mathbb{R}^n$ on définit les trois applications suivantes :*

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} (|x_i|)$$

Ces trois applications sont des normes et donc $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *sont des espaces vectoriels normés.*

Proposition :

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel (E)sont équivalentes si il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que, pour tout $x \in E$,

$$C_1 \|x\|_1 \ \leq \ \|x\|_2 \ \leq \ C_2 \|x\|_1.$$

Exemple 1.1.2. *Dans* $\mathbb{R}^n$ *les trois normes* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *sont équivalentes.*

Exemple 1.1.3. *[7] On définit trois normes sur l'espace* $C([a,b],\mathbb{R})$ *de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)|\, dx \\ \|f\|_2 &= \left(\int_a^b |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{aligned}$$

Proposition :

Soient $(E_i, \|\cdot\|_i)$ une famille d'e.v.n, $i = 1, \ldots, n$. En notant $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace vectoriel produit des E_i, alors les applications

$$N_1 : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto N_1(x) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_i$$

$$N_2 : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_\infty : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto N_\infty(x) = \sup_{i=1,\ldots,n} \|x_i\|_i$$

sont des normes sur l'espace produit E.

Remarque 1.1.1. *Un evn est naturellement un espace métrique.*

Proposition :

La distance d associée à une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $(E, \|\cdot\|_E)$ vérifie, pour tout $x, y, z \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les deux propriétés suivantes

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$,
4. $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$
5. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, (inégalité triangulaire).

Définition

On appelle distance d associée à la norme $\|\cdot\|$ sur E l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \mapsto & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) = \|x - y\|. \end{array}$$

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

– **la boule ouverte** de centre a et de rayon r par

$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$

– **la boule fermée** de centre a et de rayon r par

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

– **la sphère** de centre a et de rayon r par

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

Remarque 1.1.2. *[16] On a $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ (union disjointe).*

Définition

Une partie C de $(E, \|\cdot\|_E)$ est dite **convexe** si, pour tout couple (x, y) d'éléments de C, le segment $[x, y]$ est entièrement contenu dans C. Autrement dit, C est convexe lorsque pour tous $x, y \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Exemple 1.1.4. *Les parties convexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Proposition :

- Toute boule (ouverte ou fermée) d'un evn est convexe [24].

Définition

Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn. Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in A, \|x\| \leq r$.

Exemple 1.1.5. *Une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire* $\exists m, M \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\forall x \in A : m \leq x \leq M$$

Définition

Soient $(E, \|.\|_E)$ un evn et I un ensemble non vide quelconque. Une application f de I dans E est **bornée** lorsque l'ensemble image $f(I)$ est une partie bornée de E. Autrement dit,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall x \in I, \|f(x)\| \leq M.$$

Définition

Si A une partie bornée non vide de $(E, \|.\|_E)$. On appelle diamètre de A le nombre positive : $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$ [13].

1.1.1 Suites et convergence dans un evn

Définition

Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite dans $(E, \|\cdot\|_E)$. On dit que (x_n) est converge vers $a \in E$ si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - a\| = 0.$$

Proposition :

> Toute suite convergente de E est bornée.

1.1.2 Séries dans un evn

Définition

Soit E un evn et (x_n) une suite dans E.

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est **convergente** si et seulement si la suite des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

est convergente.

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est **normalement convergente** si et seulement si la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$$

est convergente dans $\mathbb{R}^+$.

1.2 Complétude

Définition

On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de $(E, \|\cdot\|_E)$ est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \quad \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Proposition :

> (i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
>
> (ii) Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

Définition

Un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ est dit **complet**, si toute suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E est une suite convergente dans E.

Théorème 1.2.1. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn complet et F un sous-espace de E. Alors F muni de la norme induite est complet si et seulement si F est fermé dans E.*

1.3 Espace de Banach

Définition

On appelle espace de Banach tout evn complet.

Exemple 1.3.1. *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ pour $1 \leq p \leq \infty$, définie par :*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Proposition :

Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E équivalentes, alors $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach, voir [12].

1.4 Espace normé de dimension finie

Théorème 1.4.1. *[8] Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemple 1.4.1. *$\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach.*

Corollaire 1.4.1. *[12] Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes .*

Théorème 1.4.2. ***(Heine Borel)***
Dans un espace de Banach de dimension finie tout ensemble fermé bornée est compact.

Exemple 1.4.2. *[12]*

1. *La Boule unité fermée* $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ *est compacte.*
2. *La sphére fermée dans* $\mathbb{R}^3$ *l'ensemble* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *est compacte.*

1.5 Espace normé de dimension infinie

Exemple 1.5.1. *[12]* ***L'espace*** ℓ^p ***:*** *pour* $1 \leq p < \infty$, *est défini comme l'ensemble des suites sommable* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que :*

$$||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{P}} < \infty.$$

L'espace ℓ^∞ ***:*** *est l'ensemble des suites bornées muni de la norme*

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ ***:*** *appelé espace de Lebesgue, est défini comme suit : Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$ *tel que :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Avec : $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition

Espace des fonctions continues : Soit $[a, b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$. Notons $C([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{ continues}\}. \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

$(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Remarque : L'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ avec la norme $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$ n'est pas complet.

1.5.1 Espace des fonctions continues bornées :

Définition

On considère $C_b(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

$(C_b(R^+, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, voir [21].

1.5.2 Espace des fonctions absolument continues

Définition

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur $[a, b]$ et on note $f \in AC([a, b])$ si :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, $[a_k, b_k]_{k=1,2,\ldots,n}$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Proposition :

Si $f \in AC([a, b])$, alors presque partout sur $[a, b]$, elle admet une dérivée intégrable sur cet intervalle et

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

L'espace $AC([a, b])$ muni de la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^1}$$

est un espace de Banach,
voir [24].

1.5.3 Espace des fonctions m-fois continûment dérivables

Définition

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est de classe C^m sur Ω si et seulement si toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant m$ existent et sont continues sur Ω.

Proposition :

L'espace $C^m([a, b], \mathbb{R})$, doté de la norme

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in [a, b] \\ 0 \leq k \leq m}} |f^{(k)}(x)|$$

est un espace de Banach,
voir [19].

Définition

Soit A un sous-ensemble de $C([a, b], \mathbb{R})$. A est dit **equi-continu** si :

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 : |t_2 - t_1| < \delta \Longleftrightarrow |x(t_2) - x(t_1)| \leq \xi, \ \forall x \in A.$$

Théorème 1.5.1. *[10]* ***Ascoli-Arzélà***
Une partie $A \subset C([a, b], \mathbb{R})$ est relativement compacte si et seulement si :
- *A est bornée.*
- *A est équicontinue.*

1.6 Compacité

Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un evn sur $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $v_n = u_{\phi(n)}$.

Exemple 1.6.1. *(Suites extraites)*
considérons les applications ϕ et ψ, de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, définies par

$$\phi(n) = 2n \quad \textit{et} \quad \psi(n) = 2n + 1.$$

Il est clair que ϕ et ψ sont strictement croissantes. Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = u_{2n} \quad et \quad w_n = u_{2n+1}$$

sont donc des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 1.6.1. ***Bolzano-Weierstrass***
Une partie A de E est dite compacte, si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A.

Définition

Soit E un evn et A une partie de E, on dit que A est compacte si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que :

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

on peut extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire :

$$\exists J \subset I \text{ fini tel que } A \subset \bigcup_{j\in J} U_j.$$

Cette propriété est appelée **propriété de Borel-Lebesgue** [14].

Ensembles relativement compacts

Définition

Un ensemble M est dit **relativement compact** si son adhérence $\overline{M}$ est compacte.

Opérateurs compacts

Définition

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire. On dit que A est **compact** si l'image de toute partie bornée de E est relativement compacte dans F [17].

Opérateurs complètement continus

Définition

Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **complètement continue** si elle est continue et transforme toute partie bornée de E en un ensemble relativement compact dans F [22].

1.7 Applications continues

Applications continues

Définition

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn. Une application $f : E \to F$ est dite **continue en un point** $x_0 \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon$$

Remarque 1.7.1. *Une application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point $x \in E$.*

Applications uniformément continues

Définition

On dit que f est **uniformément continue** sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in I^2,\ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

Remarque 1.7.2. *Si f est uniformément continue sur E, alors f est continue sur E, mais la réciproque est fausse.*

Théorème 1.7.1. *[9]**Théorème de Heine***
Soit A un compact de E. Alors toute application continue $f : A \to F$ est uniformément continue sur A.

Application Lipschitzien

Définition

Un opérateur $A : E \to F$ est dit **Lipschitzienne** s'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\|A(x) - A(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Exemple 1.7.1. *Les applications* 0-*Lipschitziennes sont les applications constantes.*

Proposition :

$$(f \text{ lipschitzienne}) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue}) \Rightarrow (f \text{ continue})$$

Proposition :

La norme $\|\cdot\|$ est une application $1-$ *Lipschitzienne* de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in E, \quad |\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|.$$

Voir [13].

Applications contractantes

Définition

Soient E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est une **contraction** (ou opérateur contractant) s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que :

$$\|A(x) - A(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Voir [8].

1.8 Opérateurs fractionnaires

Fonctions Spéciales

Dans cette section, nous présentons certaines fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition

On appelle la **fonction Gamma d'Euler**, notée Γ est définie pour tout nombre complexe de partie réel strictement positif $Re(z) > 0$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}. \tag{1.1}$$

Proposition :

La fonction $g : z \to e^{-t} \cdot t^{z-1}$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Propriétés 1.8.1. *[20, 25] La fonction Gamma* $\Gamma(\cdot)$ *possède les propriétés fondamentales suivantes :*

- $\Gamma(1) = 1$,
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,
- $\Gamma(0^+) = +\infty$,
- *Une propriété importante de la fonction Gamma est la relation de récurrence suivante :*
$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z). \tag{1.2}$$
- *La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle, car :*
$$\Gamma(n+1) = n! \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
- *Pour tout* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on a :*
$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}$$
- $\Gamma'(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,ln(t)dt$, *pour* $\alpha > 0$.

Fonction Bêta

Définition

La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante, dite d'Euler du premier type :

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt,\quad \text{pour } \alpha,\beta>0. \tag{1.3}$$

Propriétés 1.8.2. *[20] La fonction Bêta vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour $\alpha,\beta>0$, on a la relation suivante :*

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.4}$$

- *La fonction Bêta est symétrique :*

$$B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha).$$

1.8.1 Opérateurs fractionnaires de Riemann-Liouville (RL)

Dans cette partie, nous présentons deux opérateurs fractionnaires dans le sens de Riemann-Liouville, ainsi que certaines de leurs propriétés.

Intégrale de Riemann–Liouville

Définition

Soient α un réel positif et $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre a de f l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds. \tag{1.5}$$

Exemple 1.8.1. *Soient $\alpha>0$, $\beta>-1$, et $f(t)=(t-a)^{\beta}$. Alors :*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}.$$

Proposition :

Soit $f \in L^1([a,b])$. Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $A, B \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left[Af(t) + Bg(t)\right] = A\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(t) + B\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} g(t).$$

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t), \qquad \text{Propriété du semi-groupe}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(x)\right) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-1} f(x), \quad \text{pour } \alpha > 1. \tag{1.6}$$

Théorème 1.8.1. *Soit $\alpha > 0$. Supposons que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continue uniformément convergente sur $[a, +\infty]$. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} u_n(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left(\lim_{n\to\infty} u_n(t)\right)$$

En particulier, la suite de fonctions $(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} u_n)_{n\geq 1}$ est uniformément convergente.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition

Soit $f \in L^1_{loc}([a,b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville de f est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{a^+}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \qquad n-1 < \alpha < n,\, n \in \mathbb{N}^* \\ &= \left[\frac{d}{dt}^n \circ \mathcal{I}_a^{n-\alpha}\right] f(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Exemple 1.8.2. *On considère la fonction $f : t \mapsto (t-a)^{\beta}$, pour $t > a$.*

Alors,

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Si on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, alors :

$$\mathcal{D}_{a^+}^{1/2} (t-a)^{3/2} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} (t-a)^1.$$

donc :

$$\mathcal{D}_{a^+}^{1/2} (t-a)^{3/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (t-a).$$

Et pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, on aura le résultat suivant :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}(t-a)^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

C'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Proposition :

1. composition avec l'intégrale fractionnaire
Soient $\beta > \alpha > 0$, alors :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\mathcal{I}^{\beta}_{a^+}f\right)(t) = \mathcal{I}^{\beta-\alpha}_{a^+}f(t). \tag{1.8}$$

En particulier, si $\alpha = \beta$, alors :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}f\right)(t) = f(t). \tag{1.9}$$

Proposition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 < \alpha, \beta < n$, $f, g \in C([a,b])$. Alors, l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville $\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}$ possède les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}[f(t)] + \mu \mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}[g(t)]$.

2. $\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left[\mathcal{D}^{\beta}_{a^+}[f(t)]\right] \neq \mathcal{D}^{\beta}_{a^+}[\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}[f(t)]] \neq \mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{a^+}[f(t)]$.

3. $\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}$,

   où les c_j sont des constantes quelconques.

Lemme 1.8.1. *Soit $\alpha > 0$ et $f \in C([a,b]) \cap L^1([a,b])$. Alors :*

$$\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + \cdots + c_n t^{\alpha-n}, \tag{1.10}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entier) ne commutent que si :

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(t)\right) = \mathcal{D}^{n+\alpha} f(t),$$

mais

$$\mathcal{D}^{\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = \mathcal{D}^{n+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

1.8.2 Opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo

Définition

Soit $f \in C_b^{n+1}([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \geq 0$ au sens de Caputo de la fonction f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{n}(s)\, ds, \qquad n-1 < \alpha < n \\ &= \left[\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+} \circ \frac{d}{dt} f(t)\right] \end{aligned} \tag{1.11}$$

Exemple 1.8.3. *On reprend la fonction $f : t \mapsto (t-a)^{\frac{3}{2}}$ et on calcule ${}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a^+} f(t)$.*

$${}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a^+}(t-a)^{\frac{3}{2}} = (\mathcal{I}^{1-\frac{1}{2}})\left(\frac{d}{dt}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$${}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a^+}(t-a)^{\frac{3}{2}} = (\mathcal{I}^{\frac{1}{2}})\left(\frac{d}{dt}(t-a)^{\frac{3}{2}}\right)$$

en tenant compte de la relation (1.11) *on aura :*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{a^+}(t-a)^{\frac{3}{2}} = (\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}(\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+1-1)}(t-a)^{\frac{3}{2}-1}) $$

$$ = \frac{3}{2}(\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}(t-a)^{\frac{1}{2}}) $$

$$ = \frac{3}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2})}(t-a)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} $$

$$ = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(t-a) $$

Remarque 1.8.1. *La dérivée fractionnaire d'une fonction* ***constante*** *au sens de Caputo est nulle :*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}c = 0. $$

Propriétés 1.8.3. ***Composition avec l'intégrale fractionnaire***
Soient $\alpha > \beta > 0$, *alors :*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{I}^{\beta}_{a^+}f(t) = \mathcal{I}^{\beta-\alpha}_{a^+}f(t). \tag{1.12} $$

En particulier, si $\alpha = \beta$, *alors :*

$$ {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(t). \tag{1.13} $$

Propriétés 1.8.4. *Soient* $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *et* $f, g \in C([a,b])$. *La dérivation fractionnaire de Caputo est un possède les propriétés suivantes :*

1. ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) = \lambda\, {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f(t) + \mu\, {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}g(t).$

2. $\left({}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} \circ {}^{C}\mathcal{D}^{\beta}_{a^+}\right) f = {}^{C}\mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{a^+}f = \left({}^{C}\mathcal{D}^{\beta}_{a^+} \circ \mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\right) f$

3. *Si* ${}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f = 0$, *alors* $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x-a)^j$.

4. $\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+}\left[{}^{C}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}f\right](x) = f(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)$.

1.8.3 Opérateurs fractionnaires de Hadamard

Intégrale fractionnaire de type Hadamard

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $0 < a < b \leq \infty$ et $\alpha > 0$. L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Hadamard de la fonction f est définie par :

$$({}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\log\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\, dt. \tag{1.14}$$

Exemple 1.8.4. *Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, alors :*

$$\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}.$$

Propriétés 1.8.5. *Pour $\alpha, \beta > 0$, on a :*

1. $\quad {}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = {}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t)$

2. $\quad {}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left[Af(t) + Bg(t)\right] = A\,{}^{H}I_{a}^{\alpha} f(t) + B\,{}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} g(t)$

Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard

Définition

Soit $f \in AC_{\delta}^{n}([a,b])$ et $\alpha > 0$,$\delta = x\frac{d}{dx}$,tel que $n-1 < \alpha < n, n = \mathbb{N}^*$ la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(x) &= \delta^n({}^{H}I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^n {}^{H}I_{a+}^{n-\alpha} f(x) \qquad (1.15) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \int_1^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt.\end{aligned}$$

Proposition :

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a :

$$^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\left(\log\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{B-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > \alpha.$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $\alpha \geq 0$, alors les dérivées fractionnaires de Hadamard d'une constante, en général, ne sont pas égaux à zéro :

$$^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}1(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(log\frac{x}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Propriétés 1.8.6. *Une propriété importante qui lie la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard avec l'intégrale fractionnaire de Hadamard est la suivante :*

Si $\alpha > 0$, alors, pour la fonction $f(x)$, on a :

$$\left({}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+} \circ {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = f(x).$$

Lemme 1.8.2. *Si $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a,b])$, alors l'équation différentielle*

$$^{H}\mathcal{D}^{+}_{a+}f(t) = 0$$

admet unique solution

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(\log\frac{t}{a}\right)^{j},$$

Lemme 1.8.3. *pour $\alpha > 0$, on a :*

$$^{H}I^{\alpha}_{a+}\,{}^{H}D^{\alpha}_{a+}f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{1.16}$$

où $n = \alpha + 1$ et $c_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Voir [4, 15, 25].

1.9 Théorèmes du point fixe

Définition

Soit T un opérateur défini sur un espace de Banach E dans lui-même. Un point $x \in E$ est dit *point fixe* de T si $T(x) = x$.

1.9.1 Principe de la contraction de Banach

Théorème 1.9.1. *[23] Soit T une application d'un espace de Banach E dans lui-même. Si T est une contraction, alors T admet un point fixe unique dans E, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $T(x) = x$.*

1.9.2 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.9.2. *[11] Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach E, et soit $T : C \to C$ un opérateur complètement continu. Alors T admet au moins un point fixe dans C.*

1.9.3 Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.9.3. *[6] Soient E un espace de Banach et C un ensemble convexe dans E tel que U un ensemble ouvert dans C et $0 \in U$ et $T : \overline{U} \to E$ une application complètement continue. Alors, exactement l'une des deux alternative suivantes est vraie :*

i) T admet un point fixe dans U, c'est-à-dire, il existe $x \in U$ tel que

$$T(x) = x.$$

ii) Il existe $y \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que

$$y = \lambda T(y).$$

1.9.4 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 1.9.4. *Soit E un espace de Banach, et $T : E \to E$ un opérateur complètement continu. Alors, l'une des deux alternatives suivantes est vraie :*

1. T admet un point fixe dans E, c'est-à-dire, il existe $x \in E$ tel que

$$T(x) = x.$$

2. *L'ensemble*

$$\xi = \{x \in E \mid x = \lambda T(x) \text{ pour un certain } \lambda \in [0,1]\}$$

est non borné.

Chapitre 2

Résultats d'existence pour un système couplé d'équations différentielles fractionnaires avec conditions aux limites en trois points

Dans ce chapitre , on va étudier l'existence des solutions pour les systèmes couplés d'équations différentielles fractionnaires avec une condition aux limites a trois points non locales donner par :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t) = f\big(t,\, v(t), D^{p}v(t)\big), \quad t \in [0,1] \\ D^{\beta}v(t) = g\big(t,\, u(t), D^{q}u(t)\big), \\ u(0) = 0,\; u(1) = \gamma u(\eta),\; v(0) = 1,\; v(1) = \gamma v(\eta) \end{cases} \tag{2.1}$$

${}^{RL}D$ est la dérivée fractionnaires de Riemann Liouville avec $1 < \alpha, \beta < 2$, $p, q, \gamma > 0$, $0 < \eta < 1$, $\alpha - q \geq 1$, $\beta - p \geq 1$, $\gamma\eta^{\alpha-1} < 1$, $\gamma\eta^{\beta-1} < 1$ et $f, g : [0,1] \times R \times R \to \times R$ sont des fonctions continue est non linéaires.
Le but de ce travail est de montrer que le système admet au moins une solution en utilisant le théorème du **point fixe de Schauder.**

2.1 Résultats d'existence

Soit $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. On définit deux espaces de Banach X et Y comme suivant :

$$X = \left\{ u \in C([0,1],\mathbb{R}); D^q u \in C([0,1],\mathbb{R})\,, 0 < q \leq \alpha - 1 \right\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{C_q[0,1]} \;=\; \max_{t\in[0,1]} |u(t)| \;+\; \max_{t\in[0,1]} |D^q u(t)|.$$

$$Y[0,1] = \left\{ v \in C([0,1],\mathbb{R}); D^p v \in C([0,1],\mathbb{R}), 0 < p \leq \beta - 1 \right\}$$

et doté par :

$$\|v\|_{C_p[0,1]} \;=\; \max_{t\in[0,1]} |v(t)| \;+\; \max_{t\in[0,1]} |D^p v(t)|.$$

L'espace $(X[0,1] \times Y[0,1], \|\cdot\|_{C_q[0,1]\times C_p[0,1]})$ est un espace produit de deux espaces de Banach muni de la norme :

$$\|(u,v)\|_{C_q[0,1]\times C_p[0,1]} = \max_{t\in[0,1]}(\|u(t)\|_{C_q[0,1]}, \|v(t)\|_{C_p[0,1]}).$$

Lemme 2.1.1. *Soit $h \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $1 < \alpha < 2$. On considère le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = h(t), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = \gamma u(\eta). \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors la solution unique du problème est

$$u(t) \;=\; \int_0^1 K_1(t,s)\, h(s)\, \mathrm{d}s,$$

avec $K_1(t,s)$ est la fonction de Green donnée par :

$$K_1(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \begin{cases} K_{11}(t,s), & 0 \leq t \leq \eta, \\ K_{12}(t,s), & \eta < t \leq 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

où

$$K_{11}(t,s)=\begin{cases}(t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma\,\eta^{\alpha-1})-\,t^{\alpha-1}\big[(1-s)^{\alpha-1}-\gamma\,(\eta-s)^{\alpha-1}\big] & 0\leq s\leq t,\\ -\,t^{\alpha-1}\big[(1-s)^{\alpha-1}-\gamma\,(\eta-s)^{\alpha-1}\big], & t<s\leq\eta,\\ -\big(t(1-s)^{\alpha-1}\big), & \eta<s\leq 1,\end{cases}$$

et

$$K_{12}(t,s)=\begin{cases}(t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma\,\eta^{\alpha-1})-\,t^{\alpha-1}\big[(1-s)^{\alpha-1}-\gamma\,(\eta-s)^{\alpha-1}\big] & 0\leq s\leq\eta,\\ (t-s)^{\alpha-1}\,(1-\gamma\,n^{\alpha-1})-\big(t\,(1-s)\big)^{\alpha-1}, & \eta<s\leq t\\ -\big(t\,(1-s)\big)^{\alpha-1} & t<s\leq 1,\end{cases}$$

Démonstration. On peut transformer notre problème en une équation intégrale en composant les deux nombres par l'intégrale de Riemann Liouville

$$I^{\alpha}D^{\alpha}u(t)=I^{\alpha}h(t)$$

d'après le lemme (1.8.1) on a

$$u(t)=I^{\alpha}h(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}$$

en utilisant les condition (2.2) on trouve :

$$c_2=0$$

et

$$c_1=-\frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})}\left[\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds-\gamma\int_0^{\eta}\frac{(\eta-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\right]$$

on déduit la solution sous la forme

$$u(t)=\int_0^t\left[(t-s)^{\alpha-1}-\frac{(t(1-s))^{\alpha-1})}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})}\right]\frac{h(s)}{\Gamma(\alpha)}ds-\int_t^1\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})}\frac{h(s)}{\Gamma(\alpha)}+\gamma\int_0^{\eta}\frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})}\frac{h(s)}{\Gamma(\alpha)}ds$$

$$=\int_0^1K_1(t,s)h(s)ds$$

De la même manière, on va déterminer la solution générale du problème :

$$\begin{cases} D^{\beta} = z(t), & t \in [0,1], \\ v(0) = 0, & v(1) = \gamma v(\eta), \end{cases} \tag{2.4}$$

sous la forme suivante :

$$v(t) = \int_0^1 K_2(t,s)\, h(s)\, \mathrm{d}s.$$

□

Remarque 2.1.1. *$K_2(t,s)$ peut être obtenu à partir de $K_1(t,s)$ en remplaçant α par β.*

Lemme 2.1.2. *Supposons que $f, g : [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soient des fonctions continues. Alors $(u,v) \in X \times Y$ est une solution de (2.1) si et seulement si $(u,v) \in X \times Y$ est une solution du système couplé d'équations intégrales :*

$$\begin{cases} u(t) = \displaystyle\int_0^1 K_1(t,s)\, f\big(s,\, v(s),\, D^p v(s)\big)\, \mathrm{d}s, \\ v(t) = \displaystyle\int_0^1 K_2(t,s)\, g\big(s,\, u(s),\, D^q u(s)\big)\, \mathrm{d}s. \end{cases} \tag{2.5}$$

Démonstration. La démonstration est une conséquence directe du Lemme (2.1.1). En construisant l'opérateur

$$\begin{aligned} F : X \times Y &\to X \times Y, \\ (u,v) &\to F(u,v)(t) = \big(F_1 v(t),\, F_2 u(t)\big), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où

$$F_1 v(t) = \int_0^1 K_1(t,s)\, f\big(s,\, v(s),\, D^p v(s)\big)\, \mathrm{d}s, \quad F_2 u(t) = \int_0^1 K_2(t,s)\, g\big(s,\, u(s),\, D^q u(s)\big)\, \mathrm{d}s.$$

Remarque 2.1.2. *Les points fixes de l'opérateur F sont exactement les solutions du problème intégrales (2.5), ainsi, l'existence de solutions du problème (2.2) revient à l'existence de points fixes de l'opérateur F.*

Dans le but de démontrer que le système possède au moins un point fixe, nous allons supposer que :

$$\lambda_1 = \frac{\alpha(1-\gamma\eta^{\alpha})\Gamma(\alpha-q+1) + [2\alpha - \gamma q\eta^{\alpha} + \alpha\gamma(\eta^{\alpha} - \eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha+1)]}{\alpha(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-q+1)}$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta(1-\gamma\eta^\beta)\Gamma(\beta-p+1) + [2\beta - \gamma p\eta^\beta + \beta\gamma(\eta^\beta - \eta^{\beta-1})\Gamma(\beta+1)]}{\beta(1-\gamma\eta^{\beta-1})\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta-p+1)}.$$

Les notations suivantes sont aussi utilisées :

$$\mu = \max_{t\in J}\left\{\int_0^1 \left|k_1(t,s)\,a(s)\right| \mathrm{d}s \;+\; \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)\left(1-\gamma\,\eta^{\alpha-1}\right)}\Big[\left(2-\gamma\,\eta^{\alpha-1}\right)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-q-1}\,a(s)\,\mathrm{d}s \right.$$
$$\left. +\,\gamma\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1}\,a(s)\,\mathrm{d}s\Big]\right\}$$

$$\nu = \max_{t\in J}\left\{\int_0^1 \left|k_2(t,s)\,b(s)\right| \mathrm{d}s \;+\; \frac{1}{\Gamma(\beta-p)\left(1-\gamma\,\eta^{\beta-1}\right)}\Big[\left(2-\gamma\,\eta^{\beta-1}\right)\int_0^1 (1-s)^{\beta-p-1}\,a(s)\,\mathrm{d}s \right.$$
$$\left. +\,\gamma\int_0^\eta (\eta-s)^{\beta-1}\,b(s)\,\mathrm{d}s\Big]\right\}.$$

□

Théorème 2.1.1. *Supposons que*

(A_1) *Il existe une fonction $a(t) \in L(0,1)$, non négative, telle que :*

$$|f(t,x,y)| \;\le\; a(t) \;+ w_1|x|^{\rho_1} + w_2|y|^{\rho_2}, \quad w_1 w_2 > 0$$

(A_2) *Il existe une fonction $b(t) \in L(0,1)$, non négative, telle que :*

$$|g(t,x,y)| \;\le\; b(t) \;+ \delta_1|x|^{\sigma_1} + \delta_2|y|^{\sigma_2}, \qquad \delta_1, \delta_2 \ge 0.$$

Si

$$0 < \rho_1, \rho_2 < 1 \qquad et \qquad 0 < \sigma_1, \sigma_2 < 1,$$

alors il existe au moins une solution du problème de valeur limite à trois points (2.2).

Démonstration. Montrons que F vérifié les hypothèses de Schauder. Définissons une boule W dans l'espace de Banach $X \times Y$ de la manière suivante :

$$W \;=\; \left\{(u(t),v(t))\big/(u(t),v(t)) \in X\times Y : \|(u(t),v(t)\|_{X\times Y} \le R, t\in[0,1]\right\},$$

$$R \;\geqslant\; \max\left\{(3\,\lambda_1 w_1)^{\frac{1}{1-\rho_1}}, (3\,\lambda_1 w_2)^{\frac{1}{1-\rho_2}}, (3\,\lambda_2\delta_1)^{\frac{1}{1-\sigma_1}}, (3\,\lambda_2\delta_2)^{\frac{1}{1-\sigma_2}}, 3\mu,\, 3\nu\right\}.$$

Il est évident que l'ensemble $W \subset X\times Y$ est fermé, borné et convexe. Pour prouver l'existence d'une solution la preuve sera donnée en deux étapes :

Étape 01 : $F : W \to W$ pour tout $t \in [0,1]$
Soit $(u,v) \in W$ nous allons montrer que $F(u,v) \in W$ en se basant sur la propriété (1.6) et (1.9) ainsi que la résultat

$$D^q t^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha).t^{\alpha-q-1}}{\Gamma(\alpha-q)}$$

$$F_1 v(t) = \int_0^1 K_1(t,s)\, f\big(s, v(s), D^p v(s)\big)\, \mathrm{d}s.$$

$$\begin{aligned}
|F_1 v(t)| &= \left| \int_0^1 K_1(t,s) f(s, v(s), D^p v(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |K_1(t,s)a(s)|\, ds + (\omega_1 |R|^{\rho_1} + \omega_2 |R|^{\rho_2}) \int_0^1 |K_1(t,s)|\, ds \\
&= \int_0^1 |K_1(t,s)a(s)|\, ds + (\omega_1 |R|^{\rho_1} + \omega_2 |R|^{\rho_2}) \left[-\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \{ \int_0^1 \left(\frac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \gamma \int_0^\eta \frac{(t(\eta-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \} \right] \\
&= \int_0^1 |K_1(t,s)a(s)|\, ds + (\omega_1 |R|^{\rho_1} + \omega_2 |R|^{\rho_2}) \left[-t^\alpha + \frac{(1-\gamma\eta^\alpha)\, t^{\alpha-1}}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})} \right] \\
&\leq \int_0^1 |K_1(t,s)a(s)|\, ds + (\omega_1 |R|^{\rho_1} + \omega_2 |R|^{\rho_2}) \left(\frac{(1-\gamma\eta^\alpha)}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha+1)} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|D^q F_1 v(t)\right| &= \Big| D^q I^\alpha f\big(t, v(t), D^p v(t)\big) - \frac{1}{1-\gamma\,\eta^{\alpha-1}} \\
&\quad \big[I^\alpha f\big(1, v(1), D^p v(1)\big) - \gamma\, I^\alpha f\big(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)\big)\big] D^q t^{\alpha-1}\Big| \\
&= \Big| I^{\alpha-q} f\big(t, v(t), D^p v(t)\big) \\
&\quad - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-q)\,(1-\gamma\,\eta^{\alpha-1})}\big[I^\alpha f\big(1, v(1), D^p v(1)\big) - \gamma\, I^\alpha f\big(\eta, v(\eta), D^p v(\eta)\big)\big] t^{\alpha-q-1}\Big| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)}\Bigg[\int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1} a(s)\,ds + (\omega_1|R|^{\rho_1} + \omega_2|R|^{\rho_2})\int_0^t (t-s)^{\alpha-q-1}\,ds \\
&\quad + \frac{1}{1-\gamma\,\eta^{\alpha-1}}\Bigg(\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} a(s)\,ds + (\omega_1|R|^{\rho_1} + \omega_2|R|^{\rho_2})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\,ds \\
&\quad\quad + \gamma\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} a(s)\,ds + (\omega_1|R|^{\rho_1} + \omega_2|R|^{\rho_2})\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1}\,ds\Bigg)\Bigg] \qquad \le \\
&\quad + (\omega_1|R|^{\rho_1} + \omega_2|R|^{\rho_2})\left((2-\gamma\,\eta^{\alpha-1})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-q-1}\,ds + \gamma\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1}\,ds\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-q)(1-\gamma\,\eta^{\alpha-1})}\left[(2-\gamma\,\eta^{\alpha-1})\int_0^1 (1-s)^{\alpha-q-1} a(s)\,ds + \gamma\int_0^\eta (\eta-s)^{\alpha-1} a(s)\,ds\right] \\
&\quad + (\omega_1|R|^{\rho_1} + \omega_2|R|^{\rho_2}) \cdot \left[\frac{2\alpha - \gamma q \eta^\alpha + \alpha\gamma(\eta^\alpha - \eta^{\alpha-1})}{\alpha(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha-q+1)}\right].
\end{aligned}
$$

ainsi

$$
\begin{aligned}
\|F_1 v(t)\|_X &= \max_{t\in[0,1]}\left|F_1 v(t)\right| + \max_{t\in[0,1]}\left|D^q F_1 v(t)\right| \\
&\le \mu + \big(\omega_1\,|R|^{\rho_1} + \omega_2\,|R|^{\rho_2}\big)\,\lambda_1 \\
&\le \frac{R}{3} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} \;=\; R.
\end{aligned}
$$

De même, il peut être démontré que

$$
\|F_2 u(t)\|_Y \;\le\; \nu \;+\; \big(\delta_1\,|R|^{\sigma_1} + \delta_2\,|R|^{\sigma_2}\big)\,\lambda_2 \;\le\; R,
$$

par conséquent, nous concluons que

$$
\|F(u,v)\|_{X\times Y} \;\le\; R.
$$

Puisque les fonctions $F_1 v(t), F_2 u(t), D^q F_1 v(t), D^p F_2 u(t)$ sont continues sur $[0,1]$, il suit que

$$\boldsymbol{F(W) \subset W.}$$

Étape 02 : Montrons que F est un opérateur complètement continu. Pour cela, nous fixons :

$$M = \max_{t\in[0,1]} \left| F(t, v(t), D^p v(t)) \right|$$

$$N = \max_{t\in[0,1]} \left| g(t, u(t), D^q u(t)) \right|$$

Premièrement : $F : W \to W$ est continue.

Étant donné que l'intégrale implique des fonctions continues K_1, K_2, f, g, on en déduit que F est continue.

Deuxièmement : $F(W)$ est équicontinue.
pour toutes $t, \tau \in [0,1]$ avec $(t < \tau)$ et $(u, v) \in W$ d'où

$$|f_1 v(t) - f_1 v(\tau)| = \left| \int_0^1 (k_1(t,s) - k_1(\tau,s)) f(s, v(s), D^p v(s)) ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \left[\int_0^t |K_1(t,s) - K_1(\tau,s)|\, ds + \int_t^\tau |K_1(t,s) - K_1(\tau,s)|\, ds \right.\\
&\quad \left. + \int_\tau^\eta |K_1(t,s) - K_1(\tau,s)|\, ds + \int_\eta^1 |K_1(t,s) - K_1(\tau,s)|\, ds \right]\\
&= \frac{M}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left\{ ((\tau - s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1})(1-\gamma\eta^{\alpha-1}) \right. \right.\\
&\quad \left. + (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta - s)^{\alpha-1}) \right\} ds\\
&\quad + \int_t^\tau \left\{ (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta-s)^{\alpha-1}) + (\tau - s)^{\alpha-1}(1-\gamma\eta^{\alpha-1}) \right\} ds\\
&\quad \left. + \int_\tau^\eta (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta-s)^{\alpha-1})\, ds + \int_\eta^1 (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1} ds \right]\\
&= \frac{M}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1}(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\, ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\, ds \right.\\
&\quad \left. + \int_0^\eta (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})((1-s)^{\alpha-1} - \gamma(\eta-s)^{\alpha-1})\, ds + \int_\eta^1 (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1})(1-s)^{\alpha-1} ds \right]\\
&= \frac{M}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha+1)} \left[(1-\gamma\eta^{\alpha})(\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) + (1-\gamma\eta^{\alpha-1})(\tau^\alpha - t^\alpha) \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|D^qF_1v(t)-D^qF_1v(\tau)| && (2.7)\\
&=\left|I^{\alpha-q}f(t,v(t),D^pv(t))-\frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha-q)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})}\left[I^{\alpha}f(1,v(1),D^pv(1))\right.\right. && (2.8)\\
&\quad\left.-\gamma I^{\alpha}f(\eta,v(\eta),D^pv(\eta))\right]t^{\alpha-q-1}-I^{\alpha-q}f(\tau,v(\tau),D^pv(\tau)) && (2.9)\\
&\quad\left.+\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-q)(1-\gamma\eta^{\alpha-1})}\left[I^{\alpha}f(1,v(1),D^pv(1))-\gamma I^{\alpha}f(\eta,v(\eta),D^pv(\eta))\right]\tau^{\alpha-q-1}\right| && (2.10)\\
&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha-q)}\left|\int_0^t(t-s)^{\alpha-q-1}f(s,v(s),D^pv(s))\,ds-\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-q-1}f(s,v(s),D^pv(s))\,ds\right| && (2.11)\\
&\quad+\frac{M}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha-q)}\left|(\tau^{\alpha-q-1}-t^{\alpha-q-1})\left\{\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\,ds-\gamma\int_0^{\eta}(\eta-s)^{\alpha-1}\,ds\right\}\right| && (2.12)\\
&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha-q)}\left[\left|\int_0^t(t-s)^{\alpha-q-1}f(s,v(s),D^pv(s))\,ds-\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-q-1}f(s,v(s),D^pv(s))\,ds\right|\right. && (2.13)\\
&\quad\left.+\left|\int_0^{\tau}(t-s)^{\alpha-q-1}f(s,v(s),D^pv(s))ds-\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-q-1}f(s,v(s),D^pv(s))ds\right|\right] && (2.14)\\
&\quad+\frac{M(1-\gamma\eta^{\alpha})}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha-q)\alpha}(\tau^{\alpha-q-1}-t^{\alpha-q-1}) && (2.15)\\
&\le\frac{M}{\Gamma(\alpha-q)}\left[\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-q-1}-(t-s)^{\alpha-q-1}ds+\int_{\tau}^{t}(t-s)^{\alpha-q-1}\right]ds && (2.16)\\
&\quad+\frac{M(1-\gamma\eta^{\alpha})}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha-q)\alpha}(\tau^{\alpha-q-1}-t^{\alpha-q-1}) && (2.17)\\
&=\frac{M}{\Gamma(\alpha-q+1)}(\tau^{\alpha-q}-t^{\alpha-q})+\frac{M(1-\gamma\eta^{\alpha})}{(1-\gamma\eta^{\alpha-1})\Gamma(\alpha-q)\alpha}(\tau^{\alpha-q-1}-t^{\alpha-q-1}). && (2.18)
\end{aligned}
$$

de la même façon, on peut montrer que

$$|F_2u(t)-F_2u(\tau)|\le\frac{N}{(1-\gamma\eta^{\beta-1})\Gamma(\beta+1)}\left[(1-\gamma\eta^{\beta})(\tau^{\beta-1}-t^{\beta-1})+(1-\gamma\eta^{\beta-1})(\tau^{\beta}-t^{\beta})\right],$$

$$|D^pF_2u(t)-D^qF_2u(\tau)|\le\frac{N}{\Gamma(\beta-p+1)}(\tau^{\beta-p}-t^{\beta-p})+\frac{N(1-\gamma\eta^{\beta})}{(1-\gamma\eta^{\beta-1})\Gamma(\beta-p)\beta}(\tau^{\beta-p-1}-t^{\beta-p-1})$$

Les fonctions $t^{\alpha}, t^{\alpha-1}, t^{\beta}, t^{\beta-1}$, $t^{\alpha-q}$,$t^{\alpha-q-1}$,$t^{\beta-p}$,$t^{\beta-p-1}$ sont toutes uniformément continues sur $[0, 1]$. Alors, quand $t \to \tau$, le terme considéré tend vers zéro, ce qui implique que $F(W)$ est équicontinue, de plus, elle est uniformément bornée puis que $F(W) \subset W$. Par le théorème **d'Ascoli-Arzelà**, $F(W)$ est relativement compact pour toutes ensemble borné. Alors, F est complètement continue. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Schauder, il existe au mois une solution au problème (1.1).

avec $0 < \rho_i, \sigma_i < 1$ $(i = 1, 2)$ et ρ, σ sont des constantes non nulles.

$\square$

Chapitre 3

Étude d'un système couplé d'équations différentielles fractionnaires avec conditions intégrales aux limites de type Hadamard

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un nouveau problème mathématique portant sur un système couplé d'équations différentielles fractionnaires de type Hadamard, avec des conditions aux limites intégrales explicitement données :

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),v(t)), \quad 1 < t < e, \ 1 < \alpha \leq 2, \\ {}^{H}D^{\beta}v(t) = g(t,u(t),v(t)), \quad 1 < t < e, \ 1 < \beta \leq 2, \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \Gamma^{\gamma}u(\sigma_1) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_1}\left(\log\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma-1}\frac{u(s)}{s}\,ds, \\ v(1) = 0, \quad v(e) = \Gamma^{\gamma}v(\sigma_2) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_2}\left(\log\frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1}\frac{v(s)}{s}\,ds, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\gamma > 0$, $1 < \sigma_1 < e$, $1 < \sigma_2 < e$, ${}^{H}D^{(\cdot)}$ désigne la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre fractionnaire, Γ^{γ} est l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre γ, et $f, g : [1,e] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

L'objectif principal de ce chapitre est d'établir l'existence et l'unicité des solutions de ce système couplé. Pour atteindre cet objectif, nous nous appuyons sur un outil puissant de l'analyse classique : le **théorème du point fixe de Schaefer**, qui permet de démontrer l'existence de la solution. L'unicité, quant à elle, sera prouvée en utilisant le **principe de contraction de Banach**.

Ce travail s'inscrit dans la continuité du chapitre précédent, où un autre type de systèmes fractionnaires, basé sur les dérivées de Riemann-Liouville, a été examiné, ce qui ajoute une nouvelle dimension et une dynamique particulière au système étudié.

3.1 Résultats d'existence

On introduit $C^1([0,1])$, l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$. Les espaces de Banach X et Y sont définis comme suit :

$$X = \{u(t) \mid u(t) \in C^1([0,1])\}$$

doté de la norme :

$$\|u\|_X = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

$$Y = \{v(t) \mid v(t) \in C^1([0,1])\}$$

avec la norme :

$$\|v\|_Y = \max_{t\in[0,1]} |v(t)|$$

Alors, le produit des deux espaces $X \times Y$ est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|(u,v)\|_{X\times Y} = \|u\|_X + \|v\|_Y$$

Lemme 3.1.1. *Soit $h \in C([1,e],\mathbb{R})$ et $1 < \alpha \le 2$. On s'intéresse au problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = h(t), \quad 1 < t < e, \\ u(1) = 0, \\ u(e) = I^\gamma u(\sigma_1), \end{cases}$$

La solution unique du problème est

$$u(t) = I^\alpha h(t) + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{A}[I^{\gamma+\alpha}h(\sigma_1) - I^\alpha h(e)]$$

avec

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_1}(\log\frac{\sigma_1}{s})^{\gamma-1}\frac{(\log s)^{\alpha-1}}{s}ds}$$

Démonstration. À ce stade, nous procédons à l'application de l'intégrale de Hadamard des deux côtés de l'équation :

$$I^\alpha D^\alpha u(t) = I^\alpha h(t),$$

ce qui donne

$$u(t) = I^\alpha h(t) + C_1(\log t)^{\alpha-1} + C_2(\log t)^{\alpha-2}.$$

En utilisant les deux conditions données :

$u(1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$

$$\begin{aligned}
u(e) = I^{\gamma}u(\sigma_1) &\Longleftrightarrow I^{\alpha}h(e) + C_1 = I^{\gamma}\left[I^{\alpha}h(\sigma_1) + C_1(\log\sigma_1)^{\alpha-1}\right].\\
&\Longleftrightarrow I^{\gamma-\alpha}h(\sigma_1) + \frac{c_1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_1}(\log\frac{\sigma_1}{s})^{\gamma-1}\frac{(\log s)^{\alpha-1}}{s}ds.\\
C_1 &= \frac{1}{1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_1}(\log\frac{\sigma_1}{s})^{\lambda-1}\frac{(\log s)^{\alpha-1}}{s}ds}[I^{\gamma+\alpha}h(\sigma_1) - I^{\alpha}h(e)]
\end{aligned}$$

De la même manière, on peut déterminer la solution générale du problème :

$$\begin{cases} D^{\beta}v(t) = z(t), \quad 1 < t < e,\\ v(1) = 0,\\ v(e) = I^{\gamma}v(\sigma_2),\end{cases}$$

sous l'expression suivante

$$v(t) = I^{\beta}z(t) + \frac{(\log t)^{\beta-1}}{B}[I^{\gamma+\beta}z(\sigma_2) - I^{\beta}z(e)],$$

avec

$$B = \frac{1}{1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_2}\left(\log\frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1}\frac{(\log s)^{\beta-1}}{s}ds}.$$

□

Lemme 3.1.2. *Soient f, g deux fonctions continues. $(u, v) \in X \times Y$ est une solution du problème si et seulement si $(u, v) \in X \times Y$ est une solution du système couplé d'équations intégrales :*

$$\begin{cases}
u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s),v(s))}{s}ds\\
\quad +\frac{(\log t)^{\alpha-1}}{A}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)}\int_1^{\sigma_1}\left(\log\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1}\frac{f(s,u(s),v(s))}{s}ds\right.\\
\quad \left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{f(s,u(s),v(s))}{s}ds\right],\\
v(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_1^t\left(\log\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}\frac{g(s,u(s),v(s))}{s}ds\\
\quad +\frac{(\log t)^{\beta-1}}{B}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\beta)}\int_1^{\sigma_2}\left(\log\frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma+\beta-1}\frac{g(s,u(s),v(s))}{s}ds\right.\\
\quad \left.-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\beta-1}\frac{g(s,u(s),v(s))}{s}ds\right].
\end{cases}$$

On construisent l'opérateur

$$T : X \times Y \to X \times Y$$

$$T(u,v)(t) = \begin{pmatrix} T_1(u,v)(t) \\ T_2(u,v)(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_1(u,v)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,u(s),v(s))}{s} ds \\ & + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{A} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{f(s,u(s),v(s))}{s} ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s,u(s),v(s))}{s} ds \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(u,v)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{g(s,u(s),v(s))}{s} ds \\ & + \frac{(\log t)^{\beta-1}}{B} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\beta)} \int_1^{\sigma_2} \left(\log \frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma+\beta-1} \frac{g(s,u(s),v(s))}{s} ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} \frac{g(s,u(s),v(s))}{s} ds \right] \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_1} (\log \frac{\sigma_1}{s})^{\gamma-1} \frac{(\log s)^{\alpha-1}}{s} ds}$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_2} \left(\log \frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{(\log s)^{\beta-1}}{s} ds}.$$

Pour démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe, nous appliquerons d'abord le lemme du point fixe de Schaefer, puis le théorème du point fixe de Banach. Ainsi, nous posons :

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{|A|} \left(\frac{(\log \sigma_1)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right), \tag{3.1}$$

$$M_2 = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{|B|} \left(\frac{(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right), \tag{3.2}$$

$$M_0 = \min \left\{ 1 - (M_1 k_1 + M_2 \lambda_1),\ 1 - (M_1 k_2 + M_2 \lambda_2) \right\}, \quad k_i,\ \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1,2). \tag{3.3}$$

Théorème 3.1.1. *Supposons qu'il existe des constantes réelles $k_i, \lambda_i \geq 0$, et $x_i \in \mathbb{R}$*

pour $(i = 1, 2)$,$k_0, \lambda_0 > 0$ *telles que :*

$$|f(t, x_1, x_2)| \leq k_0 + k_1|x_1| + k_2|x_2|,$$

$$|g(t, x_1, x_2)| \leq \lambda_0 + \lambda_1|x_1| + \lambda_2|x_2|,$$

si :

$$M_1k_1 + M_2\lambda_1 < 1, \quad M_1k_2 + M_2\lambda_2 < 1.$$

Alors, le problème aux limites (3.1) *admet au moins une solution.*

Démonstration. montrons que F vérifie les hypothéses du théoréme de schaefer,pour cela,prenonsdeux constantes positives L_1 et L_2 telles que

$$|f(t, u(t), v(t))| \leq L_1, \quad |g(t, u(t), v(t))| \leq L_2, \quad \forall(u, v) \in \Omega$$

Contrôler que l'opérateur $T : X \times Y \to X \times Y$ est complètement continus.

Premièrement : T'est continue.
Par la continuité des fonctions f et g, l'opérateur Test continue.

Deuxièmement : $\Omega \subset X \times Y$ borné, $F(\Omega)$ est borné pour touts $(u, v) \in \Omega$

$$\begin{aligned}
|T_1(u, v)(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \\
& + \frac{1}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right] \\
\leq & \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \\
& + \frac{L_1}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right]
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|T_1(u, v)\| \leq L_1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{|A|} \left(\frac{(\log \sigma_1)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\} = L_1M_1.$$

De même,on obtient

$$\|T_2(u,v)\| \leq L_2 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{|B|} \left(\frac{(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right) \right\} = L_2 M_2.$$

Ainsi, il découle des inégalités ci-dessus que l'opérateur T est uniformément borné.

Troisièmement : soient $\tau_1, \tau_2 \in [1, e]$ avec $\tau_1 < \tau_2$. L'opérateur T est équicontinue.

$$\begin{aligned}
&|T_1(u(t_2), v(t_2)) - T_1(u(t_1), v(t_1))| \\
&\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{\tau_1} \left(\log \frac{\tau_1}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds - \int_1^{\tau_2} \left(\log \frac{\tau_2}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds \right| \\
&\quad + L_1 \left| \frac{(\log \tau_2)^{\alpha-1} - (\log \tau_1)^{\alpha-1}}{A} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s} \right)^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{e} \left(\log \frac{e}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds \right] \right| \\
&\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{\tau_1} \left[\left(\log \frac{\tau_1}{s} \right)^{\alpha-1} - \left(\log \frac{\tau_2}{s} \right)^{\alpha-1} \right] \frac{1}{s}\, ds \right| \\
&\quad + \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\log \frac{\tau_2}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds \right| \\
&\quad + L_1 \left| \frac{(\log \tau_2)^{\alpha-1} - (\log \tau_1)^{\alpha-1}}{A} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s} \right)^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{e} \left(\log \frac{e}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s}\, ds \right] \right|.
\end{aligned}$$

De manière analogue , on peut obtenir

$$\begin{aligned}
&|T_2(u(t_2), v(t_2)) - T_2(u(t_1), v(t_1))| \\
&\leq \frac{L_2}{\Gamma(\beta)} \left| \int_1^{\tau_1} \left[\left(\log \frac{\tau_1}{s} \right)^{\beta-1} - \left(\log \frac{\tau_2}{s} \right)^{\beta-1} \right] \frac{1}{s}\, ds \right| \\
&\quad + \frac{L_2}{\Gamma(\beta)} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\log \frac{\tau_2}{s} \right)^{\beta-1} \frac{1}{s}\, ds \right| \\
&\quad + L_2 \left| \frac{(\log \tau_2)^{\beta-1} - (\log \tau_1)^{\beta-1}}{B} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\beta)} \int_1^{\sigma_2} \left(\log \frac{\sigma_2}{s} \right)^{\gamma+\beta-1} \frac{1}{s}\, ds \right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^{e} \left(\log \frac{e}{s} \right)^{\beta-1} \frac{1}{s}\, ds \right] \right|
\end{aligned}$$

Lorsque $\tau_1 \to \tau_2$, le terme correspondant tend vers zéro, ce qui implique l'équi continuité de $T(u,v)$. Par conséquent, l'opérateur $T(u,v)$ est complètement continue.

Enfin, on vérifiera que l'ensemble

$$E = \{(u,v) \in X \times Y \mid (u,v) = \lambda T(u,v),\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est borné.

Soit $(u,v) \in E$, alors on a $(u,v) = \lambda T(u,v)$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$u(t) = \lambda T_1(u,v)(t), \quad v(t) = \lambda T_2(u,v)(t).$$

Alors,

$$|u(t)| \leq \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{|A|} \left(\frac{(\log \sigma_1)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\} (k_0 + k_1\|u\| + k_2\|v\|),$$

et

$$|v(t)| \leq \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{|B|} \left(\frac{(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right) \right\} (\lambda_0 + \lambda_1\|u\| + \lambda_2\|v\|).$$

Ainsi, nous avons

$$\|u\| \leq M_1(k_0 + k_1\|u\| + k_2\|v\|),$$

et

$$\|v\| \leq M_2(\lambda_0 + \lambda_1\|u\| + \lambda_2\|v\|),$$

ce qui implique que

$$\|u\| + \|v\| \leq (M_1k_0 + M_2\lambda_0) + (M_1k_1 + M_2\lambda_1)\|u\| + (M_1k_2 + M_2\lambda_2)\|v\|.$$

Par conséquent,

$$\|(u,v)\| \leq \frac{M_1k_0 + M_2\lambda_0}{M_0},$$

M_0 est défini par (3.3). Pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble E est borné. Étant donné que les hypothèses du théorème de Schaefer sont vérifiées, on en déduit que l'opérateur T possède au moins un point fixe.

Par conséquent, le problème aux limites (3.1) admet au moins une solution.

□

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 3.2.1. *Supposons que* $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions continues, et qu'il existe des constantes* $m_i, n_i, , i = 1,2 \geq 0$*, telles que pour tous* $u_i, v_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 1,2$*, on ait :*

$$|f(t,u_1,u_2) - f(t,v_1,v_2)| \leq m_1|u_1 - v_1| + m_2|u_2 - v_2|,$$

et

$$|g(t,u_1,u_2) - g(t,v_1,v_2)| \leq n_1|u_1 - v_1| + n_2|u_2 - v_2|.$$

Si

$$M_1(m_1 + m_2) + M_2(n_1 + n_2) < 1,$$

alors, le probléme de valeur au bord (3.1) *admet une solution unique .*

Démonstration. Vérifions que l'opérateur T satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Banach.
Définissons

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t,0,0)| = N_1 < \infty, \quad \sup_{t\in[0,1]} |g(t,0,0)| = N_2 < \infty,$$

et

$$r \geq \frac{M_1N_1 + M_2N_2}{1 - M_1(m_1 + m_2) - M_2(n_1 + n_2)}.$$

Montrons que $T(B_r) \subset B_r$, où $B_r = \{(u,v) \in X \times Y : \|(u,v)\| \leq r\}$. Pour $(u,v) \in B_r$, on a

$$\begin{aligned}|T_1(u,v)(t)| \leq \max_{t\in[1,e]} \Bigg\{ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,u(s),v(s))|}{s} ds \\ &+ \frac{1}{|A|}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{|f(s,u(s),v(s))|}{s} ds \right.\\ &\left.+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{e} \left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s,u(s),v(s))|}{s} ds\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|f(s,u(s),v(s))| \leq |f(s,u(s),v(s)) - f(s,0,0)| + |f(s,0,0)|,$$

on obtient

$$|T_1(u,v)(t)| \leq \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{|A|}\left(\frac{(\log\sigma_1)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\}(m_1\|u\|+m_2\|v\|+N_1),$$

$$\leq M_1[(m_1+m_2)r+N_1].$$

Donc,

$$\|T_1(u,v)\| \leq M_1[(m_1+m_2)r+N_1].$$

De même, on montre que

$$\|T_2(u,v)\| \leq M_2[(n_1+n_2)r+N_2].$$

Par conséquent,

$$\|T(u,v)\| \leq r.$$

Ainsi, $T(B_r) \subset B_r$, et T est une contraction d'après la condition imposée. Par le théorème du point fixe de Banach, T admet un unique point fixe. D'où, le problème de valeur au bord (1.1) admet une solution unique.

Pour $(u_2,v_2),(u_1,v_1) \in X \times Y$, et pour tout $t \in [1,e]$, on a

$$\begin{aligned}
|T_1(u_2,v_2)(t) - T_1(u_1,v_1)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,u_2(s),v_2(s)) - f(s,u_1(s),v_1(s))|}{s}ds \\
&+\frac{1}{|A|}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)}\int_1^{\sigma_1}\left(\log\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1}\frac{|f(s,u_2(s),v_2(s)) - f(s,u_1(s),v_1(s))|}{s}ds\right. \\
&\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^e\left(\log\frac{e}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{|f(s,u_2(s),v_2(s)) - f(s,u_1(s),v_1(s))|}{s}ds\right] \\
&\leq \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{|A|}\left(\frac{(\log\sigma_1)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\}(m_1\|u_2-u_1\| + m_2\|v_2-v_1\|) \\
&\leq M_1(m_1\|u_2-u_1\| + m_2\|v_2-v_1\|) \leq M_1(m_1+m_2)(\|u_2-u_1\| + \|v_2-v_1\|),
\end{aligned}$$

et par conséquent, on obtient

$$\|T_1(u_2,v_2)(t) - T_1(u_1,v_1)(t)\| \leq M_1(m_1+m_2)(\|u_2-u_1\| + \|v_2-v_1\|). \tag{3.4}$$

De même,

$$\|T_2(u_2,v_2)(t) - T_2(u_1,v_1)(t)\| \leq M_2(n_1+n_2)(\|u_2-u_1\| + \|v_2-v_1\|). \tag{3.5}$$

Il résulte de (3.4) et (3.5) que

$$\|T(u_2,v_2)(t)-T(u_1,v_1)(t)\| \leq [M_1(m_1+m_2)+M_2(n_1+n_2)](\|u_2-u_1\|+\|v_2-v_1\|).$$

Puisque $M_1(m_1+m_2)+M_2(n_1+n_2)<1$, alors T est un opérateur de contraction. Ainsi, par le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur T admet un point fixe unique, qui est la solution unique du problème (1.1).

□

Exemple 3.2.1. *Considérons le système suivant de problème de valeur au bord fractionnaire :*

$$\begin{cases} {}^cD^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{4(t+2)^2}\cdot\dfrac{|u(t)|}{1+|u(t)|}+\dfrac{1}{32}\sin^2(v(t)), & t\in[0,1], \\ {}^cD^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{32\pi}\sin(2\pi u(t))+\dfrac{|v(t)|}{16(1+|v(t)|)}+\dfrac{1}{2}, & t\in[0,1], \\ u(1)=0, \quad u(e)=t^{3/2}u(2), \\ v(1)=0, \quad v(e)=t^{3/2}v(5/2). \end{cases} \tag{3.6}$$

Here $\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=\frac{3}{2},\ \gamma=\frac{3}{2},\ \sigma_1=2,\ \sigma_2=\frac{5}{2}$,

$$A=\frac{1}{1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_1}\left(\log\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma-1}\frac{(\log s)^{\alpha-1}}{s}ds}=\frac{4}{4-\sqrt{\pi}(\log 2)^2}\approx 1.27,$$

and

$$B=\frac{1}{1-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_1^{\sigma_2}\left(\log\frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1}\frac{(\log s)^{\beta-1}}{s}ds}=\frac{4}{4-\sqrt{\pi}(\log\frac{5}{2})^2}\approx 1.59.$$

Also,

$$f(t,u,v)=\frac{1}{4(t+2)^2}\frac{|u|}{1+|u|}+1+\frac{1}{32}\sin^2 v$$

and

$$g(t,u,v)=\frac{1}{32\pi}\sin(2\pi u)+\frac{|v|}{16(1+|v|)}+\frac{1}{2}.$$

Note that

$$|f(t,u_1,u_2)-f(t,v_1,v_2)|\leq\frac{1}{16}|u_1-v_1|+\frac{1}{16}|u_2-v_2|,$$

$$|g(t,u_1,u_2)-g(t,v_1,v_2)| \leq \frac{1}{16}|u_1-v_1|+\frac{1}{16}|u_2-v_2|,$$

and

$$M_1(m_1+m_2)+M_2(n_1+n_2) \approx 0.43 < 1.$$

Chapitre 4

Étude d'un systéme couplé d'équations différentielles fractionnaires de type Caputo avec conditions aux limites non locales

4.1 Existence et unicité de la solution

Dans ce chapitre nous étudion un travail de recherche publié en 2025 dans le journal of interdisciplinary mathematics , Elle est consacrée à l'étude d'un nouveau système couplé d'équations différentielles fractionnaires, muni de conditions aux limites non locales de type intégral, et donné sous la forme suivante.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{2} D^{\beta_i+k}x_i(t) = f_i\left(t, D^{\beta_i+\alpha}x_i(t), x_{3-i}(t)\right), & 0<\alpha<\beta_i<1,\ 0\le t\le 1,\ i=1,2, \\ x_i(0)=0, \quad x_i(\eta_i)=0, \quad x_i(1)=\lambda_i \int_0^{\iota_i} x_i(s)\,ds, & 0<\iota_i<\eta_i<1,\ \lambda_i\in\mathbb{R},\ i=1,2. \end{cases}$$

$D^{()}$ designe la dérivée fractionnaire de caputo , et $f_i : [0,1]\times R\times R$ pour $i=1,2$ sont des fonctions continues

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'éxistence et l'unicité des solutions de ce système en utilisent les théorème de point fixe de banach Cette étude permet de mieux comprendre le comportement de solutions dans des systèmes où les effets de mémoire et de non-localité jouent un rôle essentiel.

Lemme 4.1.1.

: On s'intéresse au problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2} D^{\beta_i+k_i}x_i(t) = u_i(t), & 0<\beta_i<1, 0\le t\le 1,\\ x_i(0)=0, x_i(\eta_i)=0, x_i(1)=\lambda_i\int_0^{\iota_i}x_i(s)ds, & 0<\iota_i<\eta_i<1, \lambda_i\in\mathbb{R}\\ \text{où } u_1(t)=f_1(t,D^{\beta_1-\alpha}x_1(t),x_2(t)),\ \text{et } u_2(t)=f_2(t,x_1(t),D^{\beta_2-\alpha}x_2(t)), & ,i=1,2, \end{cases}$$

La solution générale s'écrit sous la forme

$$x_i(t)=\frac{1}{c_2}\left[\int_0^t\int_0^s \Phi(t)\frac{(s-w)^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)}u_i(w)dwds+\varpi_{1i}(t)\int_0^{\eta_i}\int_0^s\Phi(\eta_i)\frac{(s-w)^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)}u_i(w)dwds\right.$$

$$+\varpi_{2i}(t)\left[\int_0^1\int_0^s\Phi(1)\frac{(s-w)^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)}u_i(w)dwds-\right.$$

$$\frac{\lambda_i}{c_1^2+c_2^2}\int_0^{\iota_i}\int_0^s(c_2+c_2e^{-c_1(\iota_i-s)}\cos c_2(\iota_i-s)-c_1e^{-c_1(\iota_i-s)}\sin c_2(\iota_i-$$

$$\left.\left.s))\frac{(s-w)^{\beta_i-1}}{\Gamma(\beta_i)}u_i(w)dwds\right]\right], i=1,2.$$

Nous avons pour $i=1,2$ où $\Phi(j)=e^{-c_1(j-s)}-\sin c_2(j-s), j=t,\eta_i,1,$

$$c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_1(t)=\frac{c_2+c_2e^{-c_1t}\cos c_2t-c_1e^{-c_1t}\sin c_2t}{c_1^2+c_2^2},\quad v_2(t)=c_2e^{-c_1t}\sin c_2t,$$

$$q_{1i}=\frac{c_2+c_2e^{-c_1\eta_i}\cos c_2\eta_i-c_1e^{-c_1\eta_i}\sin c_2\eta_i}{c_1^2+c_2^2},\qquad q_{2i}=c_2e^{-c_1\eta_i}\sin c_2\eta_i.$$

$$q_{3l}=\frac{1}{c_1^2+c_2^2}[c_2-c_2e^{-c_1}\cos c_2-c_1e^{-c_1}\sin c_2-c_2\lambda_i\iota_i+\frac{c_2\lambda_i}{c_1^2+c_2^2}(c_1-c_1e^{-c_1\iota_i}\times$$

$$\cos c_2\iota_i-c_2e^{-c_1\iota_i}\sin c_2\iota_i)+\frac{c_1\lambda_i}{c_1^2+c_2^2}(c_2-c_2e^{-c_1\iota_i}\cos c_2\iota_i-c_1e^{-c_1\iota_i}\sin c_2\iota_i)],$$

$$q_{4l} = c_2[e^{-c_1} \sin c_2 - \frac{\lambda_i}{c_1^2 + c_2^2}(c_2 - c_2 e^{-c_1 \iota_i} \cos c_2 \iota_i - c_1 e^{-c_1 \iota_i} \sin c_2 \iota_i)],$$

$$\varpi_{1l}(t) = \frac{q_{3i} v_2(t) - q_{4i} v_2(t)}{N_3}, \quad \varpi_{2l}(t) = \frac{q_{2i} v_1(t) - q_{1i} v_2(t)}{N_3},$$

où $N_{3i} = q_{1i} q_{4i} - q_{2i} q_{3i} \neq 0$.

Soit $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur [0, 1], et la norme $\|.\|_\infty = \sup_{t \in J} |.|$.
Introduisons les deux espaces de Banach suivants X_1, X_2 par :

$$X_1 := \{x_1 \in C, D^{\beta_1 - \alpha} x_1 \in C\},$$

avec la norme $\|x_1\|_{X_1} = \max(\|x_1\|_\infty, \|D^{\beta_1 - \alpha} x_1\|_\infty)$.

$$X_2 := \{x_2 \in C, D^{\beta_2 - \alpha} x_2 \in C\},$$

avec la norme $\|x_2\|_{X_2} = \max(\|x_2\|_\infty, \|D^{\beta_2 - \alpha} x_2\|_\infty)$.

Le couple $(X_1 \times X_2, \|.\|)$ est un espace produit de deux espaces de Banach associe à la norme

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_1 \times X_2} = \max(\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}).$$

Nous prenons l'opérateur non linéaire

$$T : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$$

$T(x_1,x_2)(t) := (T_1(x_1,x_1)(t), T_1(x_1,x_1)(t))$, Où

$$\begin{aligned}
T_1(x_1,x_2)(t) = \frac{1}{c_2}\Bigg[&\int_0^t\int_0^s \Phi(t)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))dwds+\\
&\varpi_{11}(t)\int_0^{\eta_1}\int_0^s \Phi(\eta_1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))dwds+\\
&\varpi_{21}(t)\Bigg[\int_0^1\int_0^s \Phi(1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))dwds-\\
&\frac{\lambda_1}{c_1^2+c_2^2}\int_0^{\iota_1}\int_0^s (c_2+c_2e^{-c_1(\iota_1-s)}\cos c_2(1-s)) - c_1e^{-c_1(\iota_1-s)}\sin c_2(\iota_1-s))\\
&\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))dwds\Bigg]\Bigg].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2(x_1,x_2)(t) = \frac{1}{c_2}\Bigg[&\int_0^t\int_0^s \Phi(t)\frac{(s-w)^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} f_2(w, x_1(w), D^{\beta_2-\alpha}x_2(w))dwds+\\
&\varpi_{12}(t)\int_0^{\eta_2}\int_0^s \Phi(\eta_2)\frac{(s-w)^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} f_2(w, x_1(w), D^{\beta_2-\alpha}x_2(w))dwds+\\
&\varpi_{22}(t)\Bigg[\int_0^1\int_0^s \Phi(1)\frac{(s-w)^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} f_2(w, x_1(w), D^{\beta_2-\alpha}x_2(w))dwds-\\
&\frac{\lambda_2}{c_1^2+c_2^2}\int_0^{\iota_2}\int_0^s (c_2+c_2e^{-c_1(\iota_2-s)}\cos c_2(\iota_2-s) - c_1e^{-c_1(\iota_2-s)}\sin c_2(\iota_2-s))\\
&\frac{(s-w)^{\beta_2-1}}{\Gamma(\beta_2)} f_2(w, x_1(w), D^{\beta_2-\alpha}x_2(w))dwds\Bigg]\Bigg].
\end{aligned}$$

La démonstration de l'existante et de l'unicité de la solution se ramène à celle de l'existence et de l'unicité du point fixe de l'opérateur T,Cela s'appuie sur la condition de Lipschitz imposée à la fonction f,ce qui permet d'appliquer le théorème de point fixe de Banach.

Nous commençons par établir les notations fondamentales nécessaires a la suit de l'étude :

$$\varkappa = \sup_{t\in J}\left|\frac{\cos(c_2t)-1}{c_2} - \frac{\exp(-c_1t)-1}{c_1}\right|,$$

$$\tilde{\theta} = \frac{N_2[\varkappa + \varpi_{12}^*\eta_2^{\beta_2}\varkappa_1^* + \varpi_{22}^*\varkappa_2 + \varpi_{22}^*\iota_2^{\beta_2}\zeta^*]}{c_2\Gamma(\beta_2+1)\Gamma(1+\alpha-\beta_2)},$$

$$\varpi_{1i}^* = \sup_{t\in J}|\varpi_{1i}'(t)|, i=1,2,$$

$$\varkappa_1 = \left| \frac{\cos(c_2\eta_1) - 1}{c_2} - \frac{\exp(-c_1\eta_1) - 1}{c_1} \right|,$$

$$\varkappa_1^* = \left| \frac{\cos(c_2\eta_2) - 1}{c_2} - \frac{\exp(-c_1\eta_2) - 1}{c_1} \right|,$$

$$\varpi_{2i} = \sup_{t\in J} |\varpi_{2i}(t)|, i = 1, 2,$$

$$\widetilde{\phi}_1 = \frac{K^*[\varkappa + \varpi_{12}\eta_2^{\beta_2}\varkappa_1^* + \varpi_{22}\varkappa_2 + \varpi_{22}\iota_2^{\beta_2}\zeta^*]}{c_2\Gamma(\beta_2 + 1)},$$

$$\varkappa_2 = \left| \frac{\cos(c_2 l) - 1}{c_2} \right|, \zeta = \frac{|\lambda_1|}{c_1^2 + c_2^2} \left| c_2\iota_1 + \frac{\sin c_2 l\iota_1}{\exp c_1 l\iota_1} \right|,$$

$$\phi_1 = \frac{K[\varkappa + \varpi_{11}\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1 + \varpi_{21}\varkappa_2 + \varpi_{21}\iota_1^{\beta_1}\zeta]}{c_2\Gamma(\beta_1 + 1)},$$

$$\phi = \frac{N_1[\varkappa + \varpi_{11}\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1 + \varpi_{21}\varkappa_2 + \varpi_{21}\iota_1^{\beta_1}\zeta]}{c_2\Gamma(\beta_1 + 1)},$$

$$\zeta^* = \frac{|\lambda_2|}{c_1^2 + c_2^2} \left| c_2\iota_2 + \frac{\sin c_2\iota_2}{\exp c_1\iota_2} \right|,$$

$$\theta_1 = \frac{K[\varkappa + \varpi_{11}^*\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1 + \varpi_{21}^*\varkappa_2 + \varpi_{21}^*\iota_1^{\beta_1}\zeta]}{c_2\Gamma(\beta_1 + 1)\Gamma(1 + \alpha - \beta_2)},$$

$$\theta = \frac{N_1[\varkappa + \varpi_{11}^*\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1 + \varpi_{21}^*\varkappa_2 + \varpi_{21}^*\iota_1^{\beta_1}\zeta]}{c_2\Gamma(\beta_1 + 1)\Gamma(1 + \alpha - \beta_2)}, \varpi_{2i}^* = \sup_{t\in J} |\varpi_{2i}'(t)|, i = 1, 2,$$

$$\tilde{\phi} = \frac{N_2[\varkappa + \varpi_{12}\eta_2^{\beta_2}\varkappa_1^* + \varpi_{22}\varkappa_2 + \varpi_{22}\iota_2^{\beta_2}\zeta^*]}{c_2\Gamma(\beta_2+1)},$$

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{K^*[\varkappa + \varpi_{12}^*\eta_2^{\beta_2}\varkappa_1^* + \varpi_{22}^*\varkappa_2 + \varpi_{22}^*\iota_2^{\beta_2}\zeta^*]}{c_2\Gamma(\beta_2+1)\Gamma(1+\alpha-\beta_2)},$$

$$\varpi_{1i} = \sup_{t\in J}|\varpi_{1i}(t)|, i = 1, 2.$$

Théorème 4.1.1. *Supposons les deux hypothèses*

(H_1) *Les fonctions* f_1, f_2 *sont continues sur* $J \times \mathbb{R}^2$ *et il existe* $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que pour* $t \in J, w, y, \tilde{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$

$$|f_1(t,x,y) - f_1(t,\tilde{x},\tilde{y})| \leq K_1|x-\tilde{x}| + K_2|y-\tilde{y}|,$$
$$|f_2(t,x,y) - f_2(t,\tilde{x},\tilde{y})| \leq K_3|x-\tilde{x}| + K_4|y-\tilde{y}|.$$

(H_2) *Il existe des nombres réels positifs* N_1, N_2 *tels que pour tout* $t \in J$,

$$|f_1(t,0,0)| \leq N_1 < \infty, |f_2(t,0,0)| \leq N_2 < \infty.$$

Si $max(\phi_1, \theta_1, \tilde{\phi}_1, \tilde{\theta}_1) < 1, i = 1, 2$, *alors,le problème aux limites admet une solution couplée unique définie sur* J.

Démonstration. Il s'agit à présenter de vérifie que la condition de contraction dans le théorème de Banach est bien vérifiée.Pour cela,nous choisissons r par

$$r > max\left(\frac{\Phi}{1-\Phi_1}, \frac{\theta}{1-\theta_1}, \frac{\tilde{\Phi}}{1-\tilde{\Phi}_1}, \frac{\tilde{\theta}}{1-\tilde{\theta}_1}\right)$$

Nous définissons la boule $B_r := \{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 : \|(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2} \leq r\}$, et nous prouvons que $TB_r \in B_r$.
soit $(x_1,x_2) \in B_r$ et Pour tout $t \in J$, , nous avons

$$|T_1(x_1,x_2)(t)| = \frac{1}{c_2}\left[\int_0^t \int_0^s |\Phi(t)| \frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} \left|f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))\right| dwds + \right.$$

$$|\varpi_{11}(t)| \int_0^{\eta_1} \int_0^s |\Phi(\eta_1)| \frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} \left| f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w)) \right| dwds +$$

$$|\varpi_{21}(t)| \left[\int_0^1 \int_0^s |\Phi(1)| \frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} \left| f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w)) \right| dwds - \right.$$

$$\frac{|\lambda_1|}{c_1^2+c_2^2} \int_0^{\iota_1} \int_0^s \left| c_2 + c_2 e^{-c_1(\iota_1-s)} \cos c_2(\iota_1-s)) - c_1 e^{-c_1(\iota_1-s)} \sin c_2(\iota_1-s)) \right|$$

$$\left. \left. \frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} |f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))| dwds \right] \right] .$$

En utilisant (H.1) et (H.2), nous obtenons que

$$|f_1(t, D^{\beta_1-\alpha}x_1(t), x_2(t))| \leq |f_1(t, D^{\beta_1-\alpha}x_1(t), x_2(t)) - f_1(t,0,0) + f_1(t,0,0)|$$

$$\leq K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1| + K_2|x_2| + N_1.$$

$$|f_2(t, x_1(t), D^{\beta_2-\alpha}x_2(t))| \leq |f_2(t, x_1(t), D^{\beta_2-\alpha}x_2(t)) - f_2(t,0,0) + f_2(t,0,0)|$$

$$\leq K_3|x_1| + K_4|D^{\beta_2-\alpha}x_2| + N_2.$$

D'où

$$\|T_1(x_1,x_2)\|_\infty \leq \frac{(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1| + K_2|x_2| + N_1)}{c_2\Gamma(\beta_1+1)} [\varkappa + \varpi_{11}\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1 + \varpi_{21}\varkappa_2 + \varpi_{21}\iota_1^{\beta_1}\zeta].$$

Nous définissons la quantité $K = \max(K_1, K_2)$, nous obtenons

$$\|T_1(x_1,x_2)\| \leq \phi_1 r + \phi. \quad (4)$$

D'autre part

$$D^{\beta_1-\alpha}T_1(x_1,x_2)(t) = \frac{1}{c_2} \left[\int_0^t \int_0^s \frac{(t-s)^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(1+\alpha-\beta_1)} \Phi(t) \frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)} f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w)) dwds + \right.$$

$$\frac{(t-s)^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(1+\alpha-\beta_1)}\varpi'_{11}(t)\int_0^{\eta_1}\int_0^s \Phi(\eta_1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}f_1(w,D^{\beta_1-\alpha}x_1(w),x_2(w))dwds+$$

$$\frac{(t-s)^{\alpha-\beta_1}}{\Gamma(1+\alpha-\beta_1)}\varpi'_{21}(t)\left[\int_0^1\int_0^s \Phi(1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}f_1(w,D^{\beta_1-\alpha}x_1(w),x_2(w))dwds-\right.$$
$$\frac{\lambda_1}{c_1^2+c_2^2}\int_0^{\iota_1}\int_0^s \left(c_2+c_2e^{-c_1(\iota_1-s)}\cos c_2(\iota_1-s)\right)-c_1e^{-c_1(\iota_1-s)}\sin c_2(\iota_1-s))$$

$$\left.\left.\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}f_1(w,D^{\beta_1-\alpha}x_1(w),x_2(w))dwds\right]\right].$$

donc

$$\|D^{\beta_1-\alpha}T_1(x_1,x_2)\|_\infty \leq \frac{(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1|+K_2|x_2|+N_1)}{c_2\Gamma(\beta_1+1)}[\varkappa+\varpi_{11}\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1+\varpi_{21}\varkappa_2+\varpi_{21}\iota_1^{\beta_1}\zeta].$$

$$\|D^{\beta_1-\alpha}T_1(x_1,x_2)\|_\infty \leq \theta_1 r+\theta. \quad (5)$$

De même avec $T_2(x_1,x_2)$. Nous avons

$$\|T_2(x_1,x_2)\|_\infty \leq \frac{(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1|+K_2|x_2|+N_1)}{c_2\Gamma(\beta_1+1)}[\varkappa+\varpi_{12}\eta_1^{\beta_1}\varkappa_1^*+\varpi_{22}\varkappa_2+\varpi_{22}\iota_1^{\beta_1}\zeta^*].$$

Nous définissons $K^*=\max(K_3,K_4)$, ainsi nous obtenons

$$\|T_2(x_1,x_2)\|_\infty \leq \tilde{\phi}_1 r+\tilde{\phi}.\|D^{\beta_1-\alpha}T_2(x_1,x_2)\|_\infty \leq \tilde{\theta}_1 r+\tilde{\theta}.$$

Grâce à (4), (5), (6) et (7) nous obtenons

$$\|T(x_1,x_2)\|_{X_1\times X_2} \leq r$$

De plus, pour tout $t\in J,(x_1,x_2),(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\in X_1\times X_2$ nous avons

$$|T_1(x_1,x_2)(t)-T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(t)| \leq \left|\frac{1}{c_2}\left[\int_0^t\int_0^s \Phi(t)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\left(f_1(w,D^{\beta_1-\alpha}x_1(w),x_2(w))\right.\right.\right.$$

$$\left.-f_1(w,D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1(w),\tilde{x}_2(w))\right)dwds+$$

$$\varpi_{11}(t)\int_0^{\eta_1}\int_0^s \Phi(\eta_1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\left(f_1(w,D^{\beta_1-\alpha}x_1(w),x_2(w))-\right.$$

$$f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1(w), \tilde{x}_2(w))\big)\, dwds+$$

$$\varpi_{21}(t)\left[\int_0^1\int_0^s \Phi(1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\big(f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))\right.$$

$$-f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1(w), \tilde{x}_2(w))\big)\, dwds - \frac{\lambda_1}{c_1^2+c_2^2}\int_0^{\iota_1}\int_0^s (c_2 + c_2 e^{-c_1(\iota_1-s)}\cos c_2(\iota_1-s))$$

$$-c_1 e^{-c_1(\iota_1-s)}\sin c_2(\iota_1-s))\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\big(f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}x_1(w), x_2(w))$$

$$-f_1(w, D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1(w), \tilde{x}_2(w))\big)\, dwds]]\big|$$

Grâce à (H.1)

$$|T_1(x_1,x_2)(t) - T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(t)| \leq \frac{1}{c_2}\left[\int_0^t\int_0^s \Phi(t)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}\right.$$

$$(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1 - D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1| + K_2|x_2-\tilde{x}_2|)dwds+$$

$$\varpi_{11}(t)\int_0^{\eta_1}\int_0^s \Phi(\eta_1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1 - D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1| + K_2|x_2-\tilde{x}_2|)dwds$$

$$+\left[\varpi_{21}(t)\int_0^1\int_0^s \Phi(1)\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1 - D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1| + K_2|x_2-\tilde{x}_2|)dwds\right.$$

$$-\frac{\lambda_1}{c_1^2+c_2^2}\int_0^{t_1}\int_0^s (c_2 + c_2 e^{-c_1(t_1-s)}\cos c_2(t_1-s)) - c_1 e^{-c_1(t_1-s)}\sin c_2(t_1-s))$$

$$\frac{(s-w)^{\beta_1-1}}{\Gamma(\beta_1)}(K_1|D^{\beta_1-\alpha}x_1 - D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1| + K_2|x_2-\tilde{x}_2|)dwds\Bigg]\Bigg].$$

Donc

$$\|T_1(x_1,x_2)(t) - T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(t)\|_\infty \leq \phi_1(|D^{\beta_1-\alpha}x_1 - D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1| + |x_2-\tilde{x}_2|).$$

Aussi, nous avons

$$\|D^{\beta_1-\alpha}(T_1(x_1,x_2)(t) - T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(t))\|_\infty \leq \theta_1(|D^{\beta_1-\alpha}x_1 - D^{\beta_1-\alpha}\tilde{x}_1| + |x_2-\tilde{x}_2|).$$

$$\|T_1(x_1,x_2)(t) - T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\|_\infty \leq \tilde{\phi}_1(|x_1-\tilde{x}_1| + |D^{\beta_2-\alpha}x_2 - D^{\beta_2-\alpha}\tilde{x}_2|),$$

$$\|D^{\beta_1-\alpha}(T_1(x_1,x_2)(t) - T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)(t))\|_\infty \leq \tilde{\theta}_1(|x_1-\tilde{x}_1| + |D^{\beta_2-\alpha}x_2 - D^{\beta_2-\alpha}\tilde{x}_2|).$$

Donc

$$\|(T_1(x_1,x_2) - T_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2))\|_{X_1\times X_2} \leq \max(\phi_1,\theta_1,\tilde{\phi}_1,\tilde{\theta}_1)\|(x_1,x_2)-(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)\|_{X_1\times X_2}.$$

Finalement, l'opérateur T est une contraction.Et d'après le théorème de Banach T admet une seule point fixe qui est une solution unique du problème (3).

$\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté des résultats d'existence et de l'unicité des solutions pour des systèmes couplés de problèmes aux limites d'ordre fractionnaire dans des espaces de Banach appropriés. Cette étude a été basée sur les théorèmes du point fixe sous des hypothèses suffisantes. Ce sujet reste très riche, et plusieurs pistes peuvent être explorées dans des futurs travaux, notamment les généralisations aux espaces vectoriels seminormés et les systèmes infinis.

Bibliographie

[1] A.Bashir, K.N.Sotiris, A fully Hadamard type integral boundary value problem of a coupled system of fractional differential equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **17** (2014), no. 2, 348–360.

[2] A.Bashir, J.J.Nieto, Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions. *Comput. Math. Appl.* **58** (2009), no. 9, 1838–1843.

[3] A.Ghanmi, S.Horrigue, Existence of positive solutions for a coupled system of nonlinear fractional differential equations. *Ukrainian Math. J.* **71** (2019), no. 1, 39–49.

[4] A.A.kilbas,H.M.Srivastava,J.J.Trujillo, *Theory and applications to fractionnal differential equations*, in : North-hollande mathematics studies,vol.204 ,Elservier sience B.V.Amsterdam (2006).

[5] A.Bachir, K.N.Sotiris, K.Jessada, T.Ntouyas Hadamard-type Fractional Differential Equations,inclusions and Inequalities , (2017) *Springer, Cham*, 2017. xiii+414 pp. ISBN : 978-3-319-52140-4 ; 978-3-319-52141-1.

[6] A.Canada,P.Drabek,A.Fonda, *Hand Book of ordinary differential equations* : Volume I.New York .North Holland : Library of congress cataloging (2004).

[7] B.Vincent, *Topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés* : en 148 exercices corrigés et 55 question vrai faux , Paris édition Markting S.T.(2018).

[8] B.Stéphane,L.chupin, *Analyse et algèbre* : cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustration avec maple . Presses polytechnique et universitaires (2008).

[9] C.Marie, R.Jean, *Analyse pour licence* : cours complet plus de 200 exercices , tous les corrigés détailles.Bibliothèques national,Paris : Boech supérieur S A (2020).

[10] Ch.Josette,M.Mbekhta.H,Queffélec.(2010), *Analyse fractionnelle et théorie des opérateurs* : Exercices corrigés .Dunod ,Paris.Grands-Augustins.

[11] D.R.Smart, *Fixed point theorems* Combridge Uni.Press.Combridge, (1974).

[12] E.Kreyzig,J.Wiley,Sons, Intro ductory Functional Analysis with applications, New York.Simul Taneously in Canada (1978). *

[13] G.Ivan,G.Michel,L.Olivier, *Mathématique* $UP \setminus MP^*$ 3 éditions actualisée,édition Marketing S.A,Paris (2017).

[14] H.Mohamed, *Thémes pour l'agrégation de mathématiques* : élements de cours , développements et exercices corrigés .Paris : édition Marketing S.A (2019).

[15] I.Podlubny, *Fractional Differential Equations*,ACademic Press,New York.

[16] J.Jasques,J.Marie, J.Morran.(2010), *Topologie des espaces vectoriels normés* : Exercices corrigés avec rappels de cours , centre Francais d'exploitaion du droit copie , Paris.

[17] K.Michel, Méthodes numériques pour les problèmes inverses, London,Great Britain by ISTE.cataloguing-inpublication (2016).

[18] L.Daniel, *Notions fondamentales d'analyse réelle et complexe* ; Espace de Hordy et interpolation avec exercices corrigées. Paris , Ellipes édition Marketing S.A. (2022).

[19] M.Jean,cours d'analyse : théorie des distribution et analyse de Fourier .éditions de l'école polytechnique.Paris (2001).

[20] M.Constantin,M.Gheorghe,J.Tenriero, Introduction to fractional Differential equations .The registred company spinger nature switreland AG (2019).

[21] P.Colmez, *Eléments d'analyse et d'algèbre* : et de théorie des nombres paris .Grands-augustins (2009).

[22] R.E.meggison, *An introduction to Banach space theory*, springer.

[23] R.Agarwal, M.Meehan, D.O'regan, *Fixed point theory and applications* cam bridge.university .Press (1998).

[24] S.Daniel, J.Marie, Bien Maitriser les mathématiques : Espace vectoriels normés , banachiques et hilbertien .Introduction a la topologi .centre francion du droit de d'exploitationt du droit de copie (2012).

[25] Shantanu Das, *Functional fractional calculs* .Verlage Berlin Heidelberg, congress (2011).

[26] Z.Bai, H.Lu, positive solution for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, *J.Math.Anal.Appl.* **311** (2005) 495-505.

[27] B.Ahmad, J.J.Nieto, Existence of solutions for nonlocal boundary value probleme of higher - order nonlinear fractional differential equation *Apple . Math . comput* **150** (2004) 611-621.

[28] Su, Xinwei. Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations. *Appl. Math. Lett.* **22** (2009), no. 1, 64–69.

[29] Z.Bekkouche, H.Yfrah, Z.Dahmani, A study of coupled fractional differential system with nonlocal integral conditions : Existence and uniqueness, Ulam-Hyers stabilty. *Journal of Interdisciplinary Mathematics* Vol. **28** (2025), No. 2, pp. 473-484.