



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET

FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

DÉPARTEMENT GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Présenté par :

SAFA FATIMA ZOHRA

&

ZEGAI HAYET

Sujet du mémoire

*Etude de la stabilité des plaques FGM en utilisant une  
nouvelle théorie raffinée d'ordre élevé*

Soutenu publiquement le 24 juin 2023 devant le jury composé de :

Mme. KHELIFA Zoubida

Président

Mr. DRAICHE Kada

Encadreur

Mr. TLIDJI Youcef

Examineur

Mlle. OUAZIR Khatima

Examinatrice

PROMOTION : 2022/2023

*Remerciements*

قال تعالى : { رَبِّهِ أَوْذَعْتَنِي أَنْ أَعْصِرَ نَعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَى وَالِدَيَّ وَأَنْ أَمْقَلَ حَالِيًا تَرْخَاءً وَأَخْلَقَ لِي فِي حُرِّيَّتِي إِيَّيْ تَنْبُذَ إِلَيْكَ وَإِيَّي مِنَ الْمُسْلِمِينَ } سورة الأحقاف: ( 15 )

*Nous remercions Allah le tout-puissant, qui aidez et donnez-nous la force et la persévérance de mener à bien ce travail, puisque sans lui rien de tout cela ne serait possible. Nos reconnaissance envers Dieu est sans limite.*

*Nous tenons tout d'abord à remercier infiniment, notre promoteur Mr.Draiche Kada, encadreur de notre projet de fin de cycle, pour la confiance qu'il nous a accordé en nous proposant ce fameux sujet. De plus, son enthousiasme, encouragement et son entière disponibilité au cours de ce projet et ses judicieux conseils.*

*Nous tenons à remercier les membre de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner et évaluer notre travail et de l'enrichir par leurs propositions*

*Nous portons avec gratitude de reconnaissance pour l'ensemble des enseignants du département de Génie Civil qui ont contribué à notre formation du master en Génie Civil.*

*Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble du personnel technique et administratif du département de génie civil de Tiaret ainsi que tous nos collègues.*

*A tous ceux ou celles qui nous apportés leur soutien, trouvent ici, l'expression de nos vive et sincère reconnaissances.*

*Enfin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous nos amies et collègues pour leur soutien.*

*Dédicaces*

*J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste Travail, comme un geste de gratitude :  
A mon très cher père qui a toujours su me donner les meilleurs conseils pour ma  
réussite.*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie  
et mon bonheur ; maman que je l'adore.*

*A mes sœurs de cœur, Mamia, Wiam, Salsabil, Israa, Amel.*

*A ma meilleure amie, qui m'a accompagné durant mon chemin d'études supérieures,  
Noura et ma très chère sœur et binôme Matita.*

*A Tous ma famille Zegai et Haoua.*

*Et en ce tous nos amis, professeurs, travailleurs et collègues du département de  
génie civil.*

*Hayet*

*Dédicaces*

*J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste Travail, comme un geste de gratitude :  
A mon très cher père qui a toujours su me donner les meilleurs conseils pour ma  
réussite.*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie  
et mon bonheur ; maman que je l'adore.*

*A mes sœurs de cœur, Amina, Hayet.*

*A mes frères, Mohamed Amine, Slimane.*

*A ma meilleure amie, qui m'a accompagné durant mon chemin d'études supérieures,  
Noura et Fatima et ma très chère sœur et binôme Amira.*

*A Tous ma famille Safa.*

*Et en ce tous nos amis, professeurs, travailleurs et collègues du département de  
génie civil.*

*Fatima Zohra*

### Résumé

Dans la présente étude, une nouvelle théorie raffinée de plaque à quatre variables est développée pour analyser le comportement de flambement des plaques rectangulaires à gradient fonctionnel (FG) dont tous les bords sont simplement appuyés et qui sont soumises à un chargement mécanique dans le plan. Le présent modèle prend en compte d'une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et s'adapte correctement aux conditions de contrainte nulle sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Les propriétés du matériau sont supposées varier de façon continue dans le sens de l'épaisseur selon la règle de mélange "loi de puissance". Les équations différentielles d'équilibre sont formulées sur la base du principe de l'énergie potentielle totale et résolues pour des conditions aux limites simplement appuyées en mettant en œuvre la méthode de Navier. Afin de vérifier la précision de la solution analytique proposée, les résultats numériques du flambement élastique dans la présente théorie ont été calculés et comparés à ceux publiés dans la littérature. Les effets de la variation de l'exposant de la loi de puissance, rapport géométrique et du rapport d'épaisseur/longueur sur la charge critique de flambement des plaques FG sous différentes conditions de chargement dans le plan sont étudiés en détail. De plus, il a été constaté que le paramètre géométrique et l'exposant de la loi de puissance ont des influences significatives sur le comportement de la stabilité des plaques FG.

**Mots-clés:** Théorie raffinée de plaque ; Flambement; Plaques FG; Principe de l'énergie potentielle totale.

**Abstract**

In the present study, a new refined four-variable plate theory is developed to analyze the buckling behavior of functional gradient (FG) rectangular plates with all edges simply supported and subjected to in-plane mechanical loading. The present model takes into account a parabolic variation in transverse shear stress across the thickness, and correctly adapts to zero stress conditions on the top and bottom faces of the plate. Material properties are assumed to vary continuously in the thickness direction according to the mixing rule "power law". The differential equilibrium equations are formulated on the basis of the total potential energy principle and solved for simply supported boundary conditions using Navier's method. In order to verify the accuracy of the proposed analytical solution, the numerical results for elastic buckling in the present theory have been calculated and compared with those published in the literature. The effects of varying the power-law exponent, aspect ratio, and thickness ratio on the critical buckling load of FG plates under different in-plane loading conditions are investigated in detail. Furthermore, it was found that the aspect ratio and the power-law exponent have significant influences on the stability behavior of FG plates.

**Keywords:** Refined plate theory; Buckling; FG plates; Total potential energy principle.

## المخلص

في هذه الدراسة، تم تطوير نظرية لوحة جديدة رباعية المتغيرات لتحليل سلوك الانحناء للألواح الوظيفية المتدرجة المستطيلة (FG) التي يتم دعم حوافها ببساطة وإخضاعها للتحميل الميكانيكي في المستوى. يأخذ هذا النموذج في الاعتبار الاختلاف المكافئ لإجهاد القص المستعرض عبر السماكة ويتكيف بشكل صحيح مع ظروف الإجهاد الصفري على الوجوه العلوية والسفلية للصفحة. يُفترض أن خصائص المادة تختلف باستمرار في اتجاه السماكة وفقاً لقاعدة الخلط «قانون القوة». تتم صياغة المعادلات التفاضلية التوازنية على أساس مبدأ الطاقة الكامنة الكلية ويتم حلها لشروط الحدود المدعومة ببساطة من خلال تنفيذ طريقة Navier. من أجل التحقق من دقة الحل التحليلي المقترح، تم حساب النتائج العددية للانبعاج المرن في هذه النظرية ومقارنتها بتلك المنشورة في الأدبيات. وتدرس بالتفصيل آثار اختلاف أس قانون الطاقة، والنسبة الهندسية، ونسبة السمك/الطول على حمل الانحناء الحرج لألواح FG في ظل ظروف تحميل مختلفة في المستوى. بالإضافة إلى ذلك، وجد أن المعامل الهندسي وأس قانون الطاقة لهما تأثيرات كبيرة على سلوك استقرار لوحات FG.

**الكلمات المفتاحية:** نظرية لوحة جديدة؛ الانبعاج؛ لوحات FG؛ مبدأ الطاقة الكامنة الكلية.

## Sommaire

<b>Résumé</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>ملخص</b>	<b>III</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>VII</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>IX</b>
<b>Liste des notations</b>	<b>X</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre I : Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel "FGM"</b>	
I.1. Introduction	6
I.2. Définition des FGMs	7
I.3. Historique sur les FGM	7
I.4. Concept des matériaux à gradient fonctionnel	8
I.5. Comparaison entre FGM et les matériaux composites traditionnels	10
I.6. Avantages et Inconvénients des FGMs	10
I.6.1. Avantage de FGM	10
I.6.2. Inconvénients de FGM	11
I.7. Procédés d'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel	12
I.7.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	13
I.7.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	14
I.7.3. Compactage sèche des poudres	15
I.7.4. Projection Plasma	15
I.7.5. Frittage et Infiltration	16
I.7.6. Dépôt par moulage Centrifuge	16
I.7.7. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)	17



## Sommaire

---

I.7.8. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	18
I.7.9. Dépôt assisté par poutre d'ions (IBAD)	19
I.8. Propriété physique et mécanique des FGMs	20
I.8.1. Propriétés de la céramique	20
I.8.2. Propriétés de l'aluminium	21
I.9. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	21
I.9.1. Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM	22
I.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	23
I.9.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM	24
I.10. Domaine d'applications des FGMs	24
I.11. Conclusion	25
 <b>Chapitre II : Différentes Théories des plaques</b>	
II.1. Introduction	27
II.2. Définition d'une plaque	27
II.3. Domaine d'utilisation	28
II.4. Histoire de la théorie des plaques	29
II.4.1. Théorie classique des plaques (CPT)	30
II.4.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)	31
II.4.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	33
II.4.4. Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	34
II.4.5. La théorie de déformation des plaques quasi-3D	35
II.5. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	36
II.6. Conclusion	38
 <b>Chapitre III : Analyse de la stabilité des plaques FGM</b>	
III.1. Introduction	40

## Sommaire

---

III.2. Formulation théorique	40
III.3. Modèle de plaque fonctionnellement graduée	40
III.4. Champ de déplacement	41
III.5. Relations constitutives	43
III.6. Équations de mouvement	43
III.7. Solution d'une plaque FG simplement appuyée	46
III.8. Conclusion	48
<b>Chapitre IV : Résultats et discussions</b>	
IV.1. Introduction	50
IV.2. Résultats numériques et discussions	50
IV.3. Etude comparative	51
IV.4. Étude paramétrique	61
IV.5. Conclusion	66
<b>Conclusion général</b>	<b>68</b>

## Liste des figures

<b>Chapitre I</b>	<b>+</b>
<b>Figure I.1 :</b> Différents types des FGM : (a) fraction du volume (b) gradient de forme (c) gradient d'orientation (d) taille en matière	<b>7</b>
<b>Figure I.2 :</b> Variation des propriétés dans un FGM composé de céramique et de métal : a) Variation continue, b) Variation discrète (Miyamoto, 1999)	<b>9</b>
<b>Figure I.3 :</b> Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées dans une seule direction (Yin <i>et al</i> , 2004)	<b>9</b>
<b>Figure I.4:</b> Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1996)	<b>10</b>
<b>Figure I.5:</b> Classification des matériaux à gradient fonctionnel sur la base du type de gradients FGM (Mohammadi <i>et al</i> , 2021)	<b>12</b>
<b>Figure I.6:</b> Principe de la méthode de coulage en bande (Bulatova, 2014)	<b>13</b>
<b>Figure I.7 :</b> Schéma du processus de production de matériaux gradué par Slip Casting (Marple. R. B, 1997)	<b>14</b>
<b>Figure I.8 :</b> Concept de la technique de projection du plasma (Tan <i>et al</i> , 2017)	<b>16</b>
<b>Figure I.9:</b> Schéma du Procédé Dépôt par Centrifugation (ABDI, 1997)	<b>17</b>
<b>Figure I.10 :</b> Schéma d'un faisceau d'électrons - PVD coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz, 1997)	<b>18</b>
<b>Figure I.11 :</b> Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	<b>19</b>
<b>Figure I.12 :</b> Processus de dépôt assisté par poutre d'ions (IBAD : Ion Beam Assisted Deposition IBAD) (Nakatani <i>et al</i> , 2014)	<b>20</b>
<b>Figure I.13 :</b> Variation de la fraction de volume dans une plaque "P-FGM "	<b>22</b>
<b>Figure I.14:</b> Variation de la fraction de volume dans une plaque "S-FGM"	<b>23</b>
<b>Figure I.15 :</b> Variation de la fraction de volume dans une plaque " E-FGM"	<b>24</b>
<b>Figure I.16:</b> Les principaux domaines d'application des FGM (Miyamoto, 1997)	<b>25</b>
<b>Chapitre II</b>	
<b>Figure II.1 :</b> Schéma d'un élément de plaque	<b>28</b>

<b>Figure II.2 :</b> Les différents domaines d'utilisation des plaques	<b>29</b>
<b>Figure II.3:</b> Schéma de la déformation d'une plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Love-Kirchhoff "CPT" (Reddy, 1997)	<b>31</b>
<b>Figure II.4:</b> Schéma de la déformation d'une plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin "FSDT" (Reddy, 1997)	<b>32</b>
<b>Figure II.5 :</b> Schéma de la déformation d'une plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé de Reddy "HSDT" (Reddy, 1997)	<b>33</b>
<b>Chapitre III</b>	
<b>Figure III.1:</b> Plaque rectangulaire FG soumis à des charges mécaniques dans le plan	<b>41</b>
<b>Chapitre IV</b>	
<b>Figure IV.1:</b> L'influence des rapports d'élanement ( $a/h$ ) sur charge critique du flambement adimensionnelle ( $N_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression uniaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque $a/b=1$	<b>62</b>
<b>Figure IV.2:</b> L'influence des rapports d'élanement ( $a/h$ ) sur charge critique du flambement adimensionnelle ( $N_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression biaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $k$ ) lorsque $a/b=1$	<b>62</b>
<b>Figure IV.3 :</b> L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $N_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression uniaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque $a/h = 10$	<b>63</b>
<b>Figure IV.4 :</b> L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $N_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression biaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque $a/h = 10$	<b>64</b>
<b>Figure IV.5 :</b> L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $N_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression uniaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque $a/h = 5$	<b>65</b>
<b>Figure IV.6 :</b> L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $N_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression biaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque $a/h = 5$	<b>65</b>

## Liste des tableaux

### Chapitre II

<b>Tableau II.1 :</b> Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories d'ordre élevé des plaques	<b>37</b>
---	-----------

### Chapitre IV

<b>Tableau IV.1:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe $x$ ( $a/b=0.5$ )	<b>51</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.2:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe $x$ ( $a/b=1$ )	<b>52</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.3:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe $x$ ( $a/b=1.5$ )	<b>53</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.4:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe $x$ ( $a/b=2$ )	<b>54</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.5:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=0.5$ )	<b>55</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.6:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=1$ )	<b>55</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.7:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=1.5$ )	<b>56</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.8:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=2$ )	<b>57</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.9:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=0.5$ )	<b>58</b>
---	-----------

<b>Tableau IV.10:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=1$ )	<b>59</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.11:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=1.5$ )	<b>60</b>
--	-----------

<b>Tableau IV.12:</b> Charge critique de flambement adimensionnelle $N_{cr}$ d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=2$ )	<b>61</b>
--	-----------

## Liste des notations

$E$	Le module de Young.
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z ».
$E_1, E_2$	Module de Young.
$Al_2O_3$	Alumine ou oxyde d'aluminium.
$Al$	Aluminium.
$u, v, w$	Composantes du vecteur des déplacements dans les directions x, y, z.
$u_0, v_0, w_0$	Les composantes du champ de déplacement du plan moyen de la plaque ( $z=0$ ).
$\phi_x, \phi_y$	Les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes x et y.
$\varphi_x, \varphi_y$	Les rotations autour des axes x et y.
$\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$	Les déformations de cisaillement transverse mesurées.
$f(z)$	Une fonction de cisaillement (fonction de forme).
$w_b, w_s$	Les composantes de la flexion et du cisaillement du déplacement transversal.
$C_{ij}$	Coefficients de la matrice de rigidité [C].
$a$	Longueur de la plaque.
$b$	Largeur de la plaque.
$p$	paramètre matériel.
$h$	L'épaisseur de la plaque.
$Q_{ij}$	Les coefficients de rigidité de plaque.
$M_x, M_y$	Moment de flexion.
$M_{xy}$	Moment de torsion.
$N_x, N_y, N_{xy}$	Efforts normaux.
$M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b$	Moments de flexion.

## Liste des notations

---

$M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s$	Moment du au cisaillement transverse.
$S_{xz}^s, S_{yz}^s$	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse.
<b>U</b>	L'énergie de déformation potentielle.
<b><math>\rho</math></b>	Densité du matériau.
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Les composants des contraintes.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Les vecteurs de déformations.
<b>i et j</b>	Nombres naturelles.
<b><math>k_1, k_2</math></b>	Des coefficients dépendent de la géométrie.
<b><math>A', B'</math></b>	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier).
<b><math>\delta</math></b>	Opérateur variationnel.
<b><math>U\delta</math></b>	La variation de l'énergie de déformation de la plaque.
$\partial/\partial_x$	Dérivée partielle par rapport à x.
$\partial/\partial_y$	Dérivée partielle par rapport à y.
$q_{mn}$	Le coefficient d'expansion de Fourier.
$U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ et $\Phi_{mn}$	Les variables inconnues.
<b><math>P_1, P_2</math></b>	Les propriétés des phases en haut et en bas de la plaque, respectivement.
<b>{ }</b>	Vecteur colonne.
<b>[ ]</b>	Matrice.
<b><math>\Sigma</math></b>	Sommation.

# **INTRODUCTION GENERALE**

---



### Introduction générale

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM: Functionally Graded Material) constituent la nouvelle génération de nouveaux matériaux composites, dont les propriétés sont modifiées en douceur et de manière continue d'un point à un autre dans la direction spatiale à l'échelle microscopique afin d'améliorer les performances structurelles globales. Face aux problèmes liés à la durabilité des matériaux conventionnels tels que la dégradation due au vieillissement, à la corrosion, à l'exposition à des températures élevées et à d'autres phénomènes de dégradation, les FGMs possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Ces matériaux sont très performants dans les environnements à haute température, par exemple, les revêtements résistants à l'usure pour la manipulation de grosses particules abrasives de minerai, les boucliers thermiques de fusées, les tubes d'échangeurs de chaleur, les générateurs thermoélectriques, les composants de moteurs thermiques, les revêtements de plasma pour les réacteurs de fusion et les joints métal/céramique électriquement isolants. Ils sont également largement utilisés dans de nombreuses applications structurelles telles que la mécanique, le génie civil, l'optique, l'électronique, la chimie, la mécanique, le biomédical, les sources d'énergie, le nucléaire, l'automobile et la construction navale afin de minimiser les décalages thermomécaniques dans la liaison métal-céramique. La plupart des structures, quelle que soit leur utilisation, seront soumises à des charges extérieures au cours de leur vie opérationnelle. L'utilisation accrue des FGM dans diverses applications structurelles nécessite le développement de modèles théoriques précis pour prédire leur réponse.

Dans les années antérieures, plusieurs théories des plaques ont été proposées pour étudier le comportement de flambement des plaques en FGM. La théorie classique des plaques (CPT) fournit des résultats acceptables uniquement pour l'analyse des plaques minces et néglige les effets de cisaillement transverse. Javaheri et Eslami (2002), Abrate (2008), Mohammadi *et al.* (2010), Mahdavian (2009), Feldman et Aboudi (1997) ont utilisé cette théorie pour analyser le comportement de flambement des plaques FGM. Cependant, pour les plaques moyennement épaisses, la théorie classique sous-estime les flèches et surestime les charges de flambement et les fréquences naturelles. Les théories de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) sont basées sur le principe de Reissner (1945) et Mindlin (1951) expliquent l'effet de déformation de cisaillement transversal au moyen d'une variation linéaire des déplacements et des contraintes dans le plan à travers l'épaisseur de la

plaque, mais nécessitent un facteur de correction pour satisfaire les conditions de contrainte de cisaillement transversal nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Bien que la théorie du premier ordre fournisse une description suffisamment précise de la réponse pour les plaques minces à moyennement épaisses, il n'est pas pratique à utiliser en raison de la difficulté à déterminer la valeur correcte du facteur de correction de cisaillement (Thai and Vo 2013). Plusieurs chercheurs (Yang *et al.* 2005, Mohammadi *et al.* 2010, Zhao *et al.* 2009, Naderi and Saidi 2010, Saha and P. R. Maiti 2012) ont utilisé la théorie FSDT pour analyser le flambement des plaques FGM. Afin de surmonter les limitations de FSDT, de nombreuses théories d'ordre élevé (HSDT) ont été développées qui impliquent des termes d'ordre élevé dans les expansions de Taylor pour les déplacements dans la coordonnée d'épaisseur.

Javaheri et Eslami (2002), Najafizadeh et Heydari (2004), Bodaghi et Saidi (2010), Bagherizadeh et al. (2011), et Mozafari et Ayob (2012) ont utilisé la théorie HSDT pour analyser le comportement de flambement des plaques FGM. Ma et Wang (2003) ont étudié le comportement de flexion et de post-flambement à grande déflexion axisymétrique d'une plaque circulaire à gradient fonctionnel sous une charge mécanique, thermique et thermomécanique combinée basée sur la théorie classique des plaques non linéaires de Von Karman. Ils ont observé à partir de leur enquête que l'indice de loi de puissance " $p$ " a un effet significatif sur la température du plan médian, la température de flambement critique et sur le comportement thermique post-flambement de la plaque FGM. Hosseini-Hashemi *et al.* (2008) ont développé des solutions analytiques pour étudier le comportement de flambement des plaques rectangulaires en FGM chargées dans le plan sans utiliser des approximations pour différentes conditions aux limites en utilisant la théorie des plaques de Mindlin. Saïdi *et al.* (2009) ont utilisé la théorie de la déformation en cisaillement de troisième ordre sans contrainte pour analyser la flexion et le flambement axisymétriques de plaques circulaires pleines en FGM dans lesquelles il existe un couplage flexion-étirement. Oyekoya *et al.* (2009) ont développé des éléments de type Mindlin et de type Reissner pour la modélisation de plaques composites FGM soumises au flambement et aux vibrations libres. En outre, ils ont étudié la plaque pour l'effet de différents cas de distribution de fibres et les effets de la distribution du feu sur le flambement et les vibrations libres. Ghannadpour *et al.* (2012) ont appliqué la méthode des bandes finies pour analyser le comportement de flambement des plaques rectangulaires en FMG sous chargement thermique. Thai et Choi (2012) ont présenté une théorie simple et raffinée pour analyser le comportement de flambement des plaques FGM qui présente une forte similitude avec la théorie classique des plaques, tient compte

d'une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de contrainte nulle sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser de facteurs de correction du cisaillement. Les équations de mouvement ont été dérivées du principe de l'énergie potentielle totale minimale. Les effets des conditions de chargement et des variations de puissance du matériau fonctionnellement gradué, du rapport de module, du rapport géométrique et du rapport d'épaisseur ont également été étudiés par ces auteurs. Thai et Vo (2013) ont développé une nouvelle théorie de déformation de cisaillement sinusoïdale pour étudier la flexion, le flambement et la vibration des plaques FGM en tenant compte de la distribution sinusoïdale de la contrainte de cisaillement transversale et satisfait les conditions de contrainte de cisaillement transversale libre sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans utiliser d'un facteur de correction de cisaillement.

La présente mémoire s'articule sur quatre chapitres répartis comme suit :

Après une introduction générale où nous évoquons une synthèse bibliographique sur les différents travaux qui ont été effectués pour l'analyse des matériaux à gradient fonctionnel nous présentons dans un premier chapitre, un ensemble de généralités sur les matériaux en FGM qui ont prouvés leurs utilisations dans plusieurs domaines industriels, leurs propriétés effectives et les différentes lois qui gèrent la variation des propriétés matérielles des FGMs ainsi que leurs méthodes de fabrication.

Le deuxième chapitre, nous exposons une synthèse bibliographique sur les différentes théories existantes, qui permettent la modélisation des plaques à savoir la théorie classique des plaques minces (CPT), La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation RPT et la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

Le troisième chapitre, on présente les étapes de formulation d'un modèle analytique basé sur une théorie raffinée de déformation de cisaillement pour étudier le flambement des plaques FGM sous différentes conditions de chargement mécanique.

Le quatrième chapitre est consacré aux calculs numérique et discussions des résultats obtenus par le modèle proposé tout en les comparants avec les résultats obtenus à l'aide des théories disponibles dans la littérature pour vérifier l'exactitude de la présente solution.

Enfin, une conclusion générale est proposée pour mettre l'accent sur les différents résultats obtenus dans cette étude et on termine par des perspectives envisagées pour des futurs travaux.

# **CHAPITRE I**

---

## **GENERALITES SUR LES MATERIAUX A GRADIENT FONCTIONNEL "FGM"**

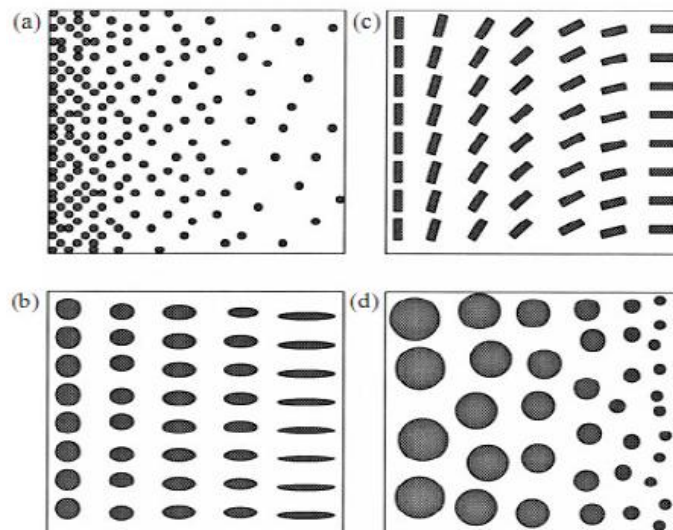
## I.1. Introduction

Les matériaux composites les plus légers présentant des rapports résistance/poids et rigidité/poids élevés ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et d'autres applications techniques. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont incapables d'être utilisés dans des environnements à haute température. En général, les métaux sont utilisés dans le domaine de l'ingénierie depuis de nombreuses années en raison de leur excellente résistance et ténacité. Dans des conditions de haute température, la résistance du métal est réduite, tout comme celle du matériau composite traditionnel. La céramique présente d'excellente caractéristique de résistance à la chaleur. Cependant, les applications de la céramique sont généralement limitées en raison de leur faible ténacité (Shen, 2009).

L'introduction d'une nouvelle classe de matériaux composites connus sous le nom de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) est le résultat de la défaillance des matériaux composites traditionnels lorsqu'ils sont utilisés dans des environnements de travail difficiles. La défaillance des matériaux composites traditionnels s'est produite le long de l'interface distincte et bien définie qui existe entre les matériaux composites stratifiés. L'interface provoque une forte concentration de contraintes à cet endroit et favorise l'apparition et la propagation de fissures qui aboutissent à la rupture du matériau composite. Ce processus est appelé "délaminage". Le problème auquel les chercheurs japonais ont été confrontés au cours d'un projet d'avion spatial (lorsque le matériau à gradient fonctionnel a été mis au point) était de savoir comment éliminer cette interface pour que le composite puisse survivre à l'application de barrière thermique prévue. Les chercheurs ont réussi à éliminer systématiquement l'interface tranchante du matériau composite traditionnel en modifiant progressivement l'interface, réduisant ainsi la concentration de contraintes à cette interface, et le matériau à gradation fonctionnelle mis au point a pu résister aux conditions de travail extrêmes sans défaillance. Par la suite, les matériaux fonctionnellement gradués ont été utilisés pour diverses applications techniques, en dehors de la barrière thermique, pour laquelle le matériau a été développé à l'origine. Les FGMs sont des matériaux composites avancés composés de différentes phases de constituants matériels (généralement de la céramique et du métal), dont les propriétés varient progressivement en douceur et d'une façon continue d'une surface à l'autre à travers l'épaisseur de la structure. Ce nouveau concept marque le commencement d'une révolution dans les domaines de la science et de mécanique des matériaux, car les FGMs possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application (Mahamood et Akinlabi, 2017).

## I.2. Définition des FGMs

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux intelligents composés de deux ou plusieurs matériaux relatifs à des fractions volumiques et microstructures qui sont conçus pour avoir une continuité spatiale des variables. Un FGM est produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur (Panjehpour, 2014) pour obtenir un profil bien déterminé. Ces matériaux FGMs sont généralement fait à partir d'un mélange de métal et de céramique (Figure I.1) par un processus de métallurgie de poudre, le coté métal riche est typiquement placé dans les régions où les propriétés mécaniques, comme la dureté doivent être élevés. En revanche, la céramique riche qui a une faible conductivité et peut résister aux températures plus élevées, est placée dans les régions à grand gradient de température (Boussoula, 2020).



**Figure I.1** : Différents types des FGM : (a) fraction du volume (b) gradient de forme (c) gradient d'orientation (d) taille en matière.

## I.3. Historique sur les FGM

Au environ de 1984-1985, dans une université Japonaise, les chercheurs Niino et ses collègues, l'un dans le domaine de l'aéronautique et l'autre dans le domaine des sciences des matériaux rêvent de concevoir un engin spatial dont le revêtement pourrait résister à un environnement thermique très sévère. Il n'existe alors pas de matériau métallique ni de matériau composite capable de répondre à la fois aux exigences environnementales telles que décrites tout en gardant d'excellentes propriétés mécaniques. Ils échangent alors l'idée du concept FGM. En 1987, le programme national de recherche et de développement sur les

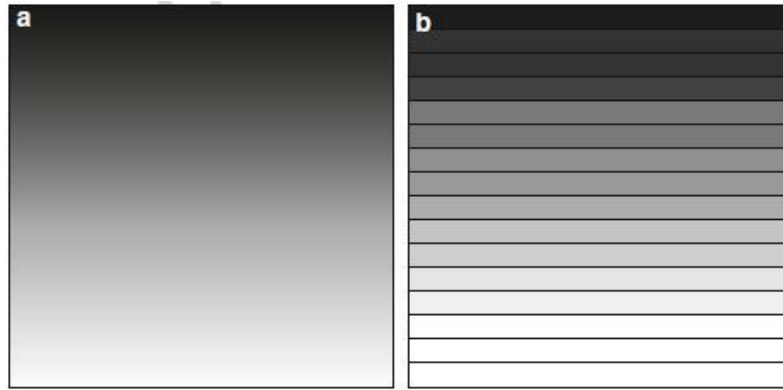
FGM a vu le jour au Japon. Beaucoup de chercheurs des institutions publiques et de l'industrie ont uni leurs efforts pour créer un nouveau type de matériau, il s'est focalisé sur le développement de cette technologie de matériaux à gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques. Plusieurs laboratoires de recherche ont imprégné dans ce programme dans le but de développer des matériaux dans leurs structures, servants comme barrières thermiques dans le domaine de l'aérospatial. Pendant la période de 1987 jusqu'à 1989, c'est née la première innovation des pièces expérimentales d'une section de 10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre qui peuvent résister à des températures de surface de 2000 K avec un gradient de température de 1000 K.

La fabrication des matériaux présentant un gradient de composition et de structure passe par quatre procédés qui sont :

- Système SiC/C par C.V.D ;
  - Système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
  - Système TiB<sub>2</sub>/Cu par synthèse à haute température par auto-propagation;
  - Enfin le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO<sub>2</sub>-Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) par projection plasma à double torches.
- Durant la deuxième période de 1990 jusqu'à 1991 c'est la phase où ils ont peu conçu des pièces de sections plus grandes avec des formes plus complexes qui induisent un champ d'application plus vaste. Ce n'est qu'en 1992 qu'un nouveau projet de recherche a été né, dans un but de développer les matériaux fonctionnellement gradués afin d'améliorer leur efficacité dans la conservation d'énergie dont l'intitulé est : «recherche sur les matériaux pour une conservation d'énergie en tenant compte de la structure à gradient de propriété».

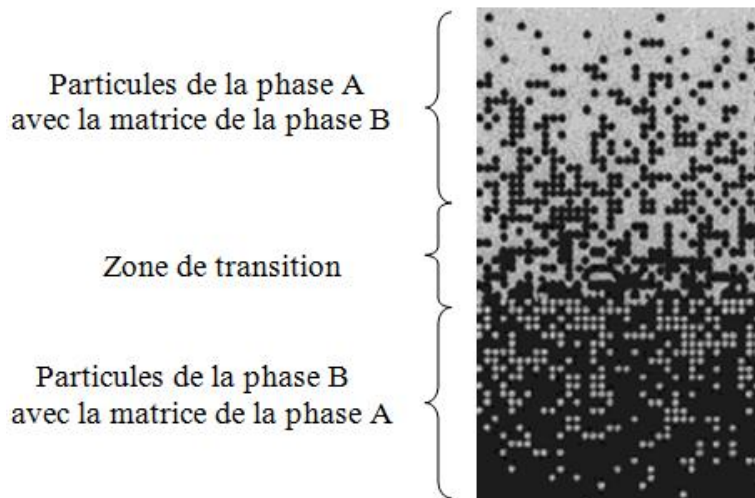
#### **I.4. Concept des matériaux à gradient fonctionnel**

Les matériaux à gradient fonctionnel sont une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient selon une loi de fonction continue ou discrète à travers l'épaisseur (Figure I.2). Grâce à la structure spéciale de ces matériaux, il est possible d'éviter les concentrations de contraintes au niveau des interfaces et d'améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces par association de matériaux.



**Figure I.2 :** Variation des propriétés dans un FGM composé de céramique et de métal :  
 a) Variation continue, b) Variation discrète (Miyamoto, 1999).

La variation continue (Figure I.2) des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100 % céramique et la face inférieure est à 100 % métal, avec une transition graduelle entre les deux.



**Figure I.3 :** Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées dans une seule direction (Yin *et al*, 2004).

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels



que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

### I.5. Comparaison entre FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les FGMs sont des matériaux intelligents constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGMs des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure I.4 (Koizumi, 1993). Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente (Boch, 1986).

<b>Propriétés</b>	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
<b>Structure</b>	<p><b>Eléments constitutifs:</b></p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ◯</p> <p>Fibre ◇*</p>		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

**Figure I.4:** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels (Koizumi, 1996).

### I.6. Avantages et inconvénients des FGMs

#### I.6.1. Avantages de FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires

de la FGM. Ils énumèrent Certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par la différence entre les coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- Permettent de créer un accroissement du périmètre fonctionnel et cela en amont d'atteindre la limite de déformation plastique ;
- Ont une capacité à amoindrir les contraintes thermiques qui sont causées par les diversités des coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés ;
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes ;
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique ;
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique ;
- Suppression de délaminage ;
- Augmentation de la ténacité à la rupture ;
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, ...etc.

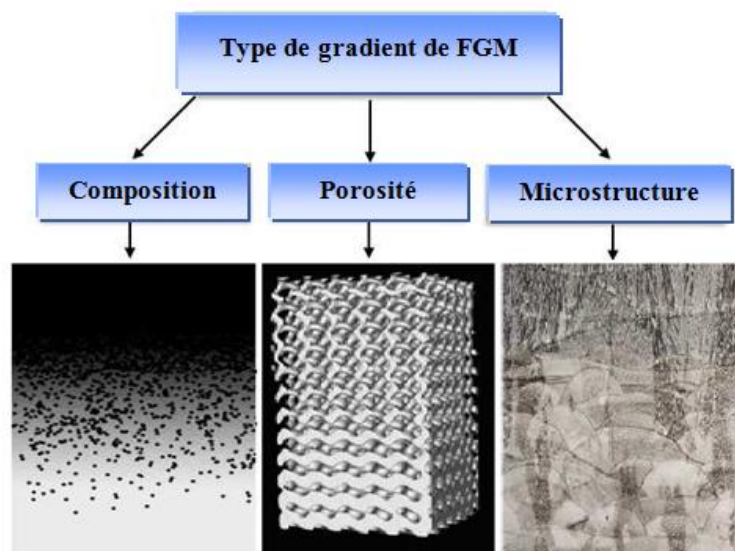
### **I.6.2. Inconvénients de FGM**

La fabrication des matériaux fonctionnellement gradués pose un grand obstacle et cela à cause de l'inadéquation entre les différentes propriétés des matériaux utilisés, on peut évoquer la taille des particules, la morphologie et la température, ...etc. Et afin d'être plus explicite on présume que le matériau fonctionnellement gradué est composé de deux matériaux, l'un est la céramique avec une température ( $T_1$ ) et l'autre le métal avec une température de ( $T_2$ ). Généralement, un tel mélange est couramment défini par  $T_2$  inférieur à  $T_1$ , alors une semblable composition présente en premier lieu une porosité élevée et une faible adhérence entre les différents constituants et en second lieu une application bornée de ce matériau. De ce fait la fabrication de ce type de matériau doit être dans des conditions comme une atmosphère protectrice ou à une pression basse mais malheureusement ces deux procédés sont très onéreux (Narottam *et al*, 2011).

### I.7. Procédés d'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel

Avec le développement croissant des techniques de traitement automatisé des matériaux, des techniques appropriées ont été construites afin d'obtenir diverses structures graduées indépendamment de la géométrie et de la taille des composants. L'utilisation de ces techniques est basée sur la position de la gradation souhaitée. Il existe deux types de gradation dans un composant. La gradation fine est principalement située dans la partie supérieure du composant tandis que la gradation en vrac est efficace dans l'intégralité du composant. Une gradation fine peut être obtenue par pulvérisation au plasma, synthèse à haute température auto-développée et dépôts en phase vapeur (chimiques ou physiques). La méthode centrifuge, la métallurgie des poudres, le pressage à chaud et à froid, la méthode de frittage, la méthode d'infiltration et les techniques de forme solide libre sont des techniques typiques de gradation en masse pour fabriquer les FGMs (Aysha *et al.* 2014). En outre, les méthodes à base solide qui comprennent le frittage par plasma d'étincelles et la métallurgie des poudres, comme le montre la figure I.5, qui sont également des méthodes de fabrication très souvent utilisées pour les FGMs (Mohammadi *et al.* 2021).

Il existe différents techniques de traitement et typiques adoptées dans la fabrication des FGM sont discutées ci-dessous en fonction de leurs domaines d'application. Avec l'amélioration de ces procédés, l'application des FGM et leur importance ont augmenté d'une manière considérable, car le coût global de la fabrication est réduit.



**Figure I.5:** Classification des matériaux à gradient fonctionnel sur la base du type de gradients FGM (Mohammadi *et al.*, 2021).

### I.7.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le schéma général des étapes de traitement de la coulée en bande (Tape Casting) est illustré à la figure I.6. Dans le processus de mise en forme de la céramique, la première étape consiste en un traitement de la poudre dans le but d'obtenir une poudre avec la teneur en phase requise ainsi que la distribution de la taille des particules et la morphologie. De plus, la poudre est stabilisée avec un dispersant, qui est préalablement dilué dans un solvant. La suspension obtenue est broyée et mélangée pour assurer l'homogénéisation et la destruction des agglomérats. Après l'ajout de liant et de plastifiants, le lisier est homogénéisé normalement pendant un jour de plus. La suspension est ensuite tamisée pour éliminer les agglomérats éventuels et désaérée dans une chambre à vide dans le but d'éliminer les bulles d'air du volume de suspension. La suspension homogénéisée stable est ensuite versée manuellement ou pompée dans un réservoir fixe de coulée de bande sous lequel se trouve un support de type bande (qui peut être une bande en acier ou, un film polyester avec un nom commercial Mylar enduit d'un revêtement adhésif en silicone). La coulée de bande est initiée lorsqu'un support en mouvement entraîne la suspension de céramique sous l'ouverture de la lame du réservoir, qui "mécanise" ou décharge une fine pellicule de céramique derrière elle. Le ruban coulé, alors qu'il est encore sur le support, sèche dans une chambre de séchage ventilée, après quoi il est retiré du support puis traité par poinçonnage, métallisation, empilage et laminage si nécessaire (Bulatova, 2014).

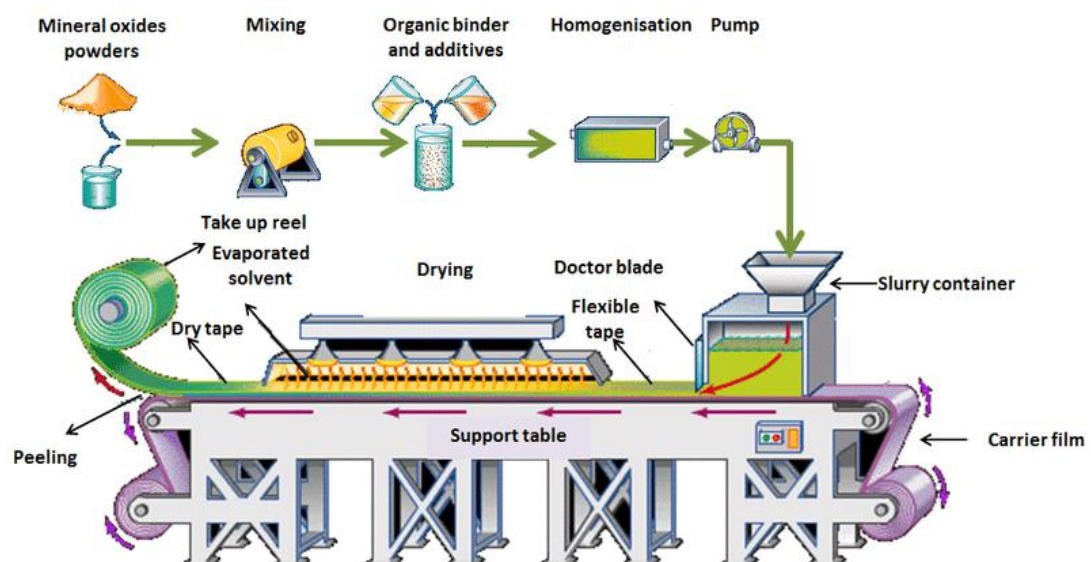
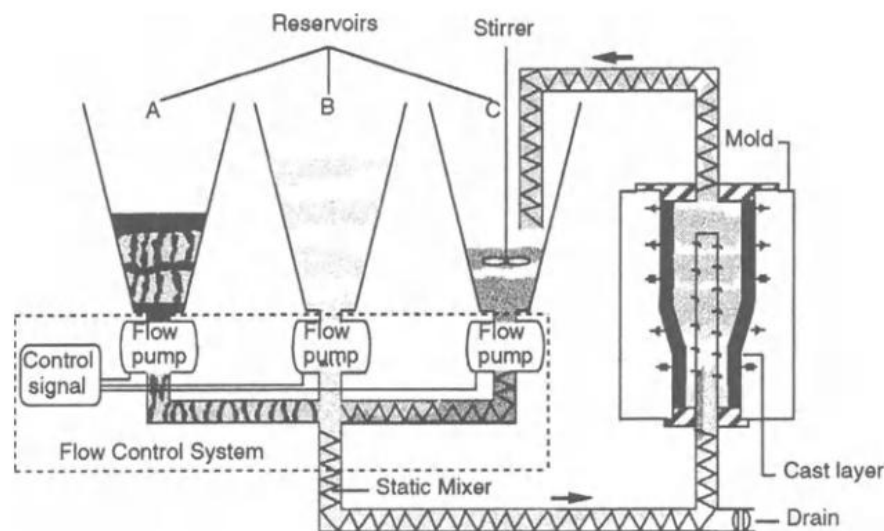


Figure I.6: Principe de la méthode de coulage en bande (Bulatova, 2014).

A ce stade du procédé, le ruban séché, également appelé ruban vert, est toujours flexible car il contient un pourcentage élevé de matières organiques sous forme de dispersant, de liant et de plastifiants. Enfin, pendant les processus de combustion et de frittage, le liant et tout excès d'agents sont brûlés, laissant une bande dense, solide et dure composée principalement de céramique. Un facteur clé pour l'obtention d'un matériau céramique avec la géométrie et les propriétés requises est un contrôle élevé de chaque étape du processus.

### I.7.2. Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip Casting) est une méthode de mise en forme à base de poudre traditionnellement appliquée dans l'industrie céramique (figure I.7). En général, la coulée en barbotine est un processus de filtration où la suspension de poudre est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires qui en résultent, le liquide est retiré de la suspension (barbotine) et les particules de poudre sont poussées vers les parois. Un gradient sera formé en changeant la composition ou la granulométrie de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Cette technique nécessite également une étape de consolidation ultérieure, où la poudre est densifiée (frittée) et une structure en gradient des résultats FGM (Tomoyuki *et al.* 2009).



**Figure I.7 :** Schéma du processus de production de matériaux gradués par Slip Casting (Marple. B.R, 1997).

Tomoyuki et ses collègues ont fabriqué un matériau à gradient fonctionnel (FGM) à partir de poudres de tungstène et d'alumine (Saiyathibrahim *et al.*, 2015). Deux types de poudre W, avec des propriétés oxydantes différentes, ont été utilisés comme poudres brutes

pour le FGM  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-W}$ . Le "W oxydé" a été préparé par traitement thermique à  $200^\circ\text{C}$  pendant 180 min à l'air. Les compacts verts ont ensuite été séchés, puis frittés à l'aide d'un four sous vide à  $1600^\circ\text{C}$  pendant un temps fixe. Le compact vert obtenu avec la poudre W telle que reçue a montré une interface claire entre  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et W en raison de l'énorme différence entre les densités des poudres. Cependant, avec la poudre W oxydée, le compact vert a révélé une distribution de particules W qui variait progressivement, entraînant un gradient de composition microscopique (Tomoyuki *et al*, 2011).

### I.7.3. Compactage sèche des poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale (Bishop, 1993). Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

### I.7.4. Projection Plasma

Les procédés de projection thermique sont généralement désignés par différents noms, tels que la projection de plasma, la projection de métal, la projection de combustible oxygéné à haute vitesse (HVOF : high velocity oxygen fuel), la projection à l'arc,...etc. Si l'on considère un revêtement céramique poreux appliqué à un composant peu résistant à la corrosion, un composite typique des zones chaudes des moteurs aéronautiques, des particules de poudre à haute vitesse possédant un point de fusion élevé sont fondues et accélérées par la chaleur générée par le nuage de plasma vers le substrat. L'épaisseur requise du revêtement est obtenue par des actions successives du nuage de plasma. Cette technique permet d'obtenir des revêtements durs, à faible frottement et plus résistants à la fatigue pour des applications telles que les surfaces de pistons de trains d'atterrissage d'avions (Khor *et al*, 1999).

Il a été rapporté que les classiques projetés à chaud (TBC : Conventional thermal-sprayed) s'écaillaient lorsqu'ils étaient soumis à une charge mécanique à des températures ultra-élevées en raison de leurs faibles forces de liaison et de leurs contraintes résiduelles. Les TBC à gradation fonctionnelle sont des matériaux appropriés pour résister à de tels défis. Dans le travail effectué par Khor et ces collègues, un revêtement à gradient fonctionnel de  $\text{ZrO}_2/\text{NiCo-CrAlY}$  stabilisé a été utilisé comme TBC.



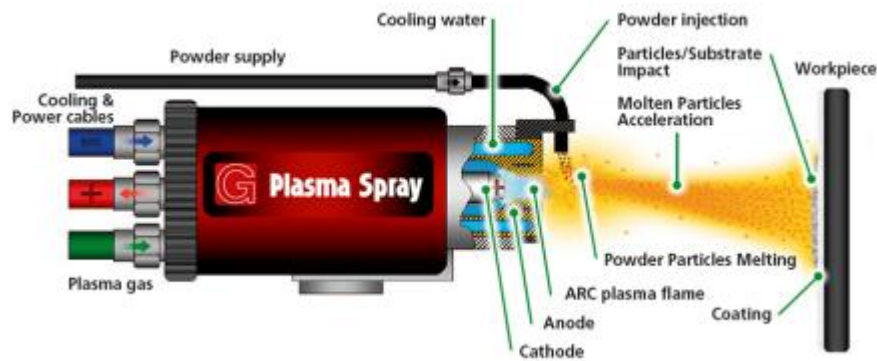


Figure I.8 : Concept de la technique de projection du plasma (Tan *et al*, 2017).

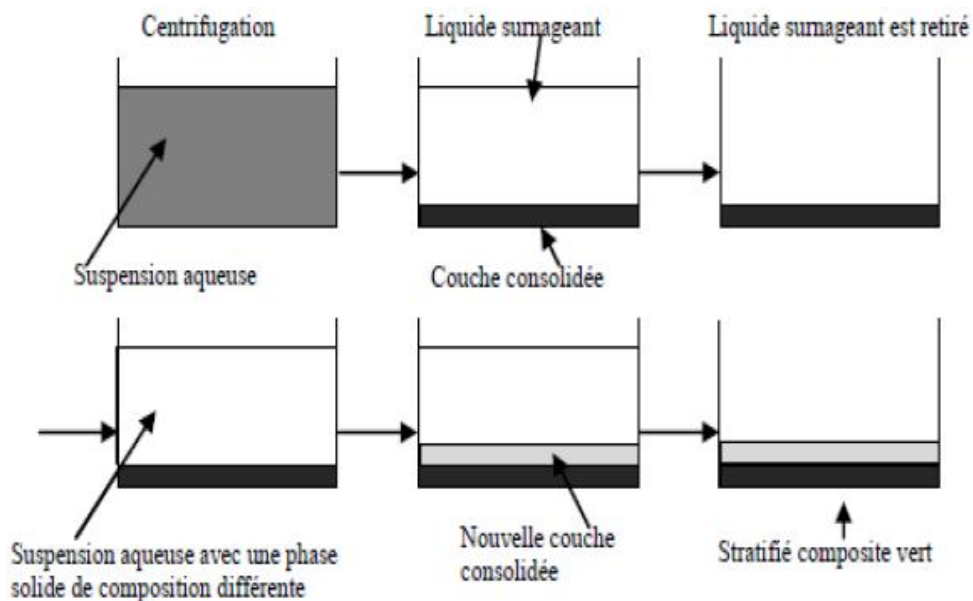
### I.7.5. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi.M, 1990). Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

### I.7.6. Dépôt par moulage centrifuge

Les FGM fabriquées par la force centrifuge peuvent être soumises à la méthode de la centrifugation, de la boue centrifuge, de la pression centrifuge ou de la coulée centrifuge (Watanabe *et al*, 2009). La gradation se produit lorsqu'un métal fondu homogène, dispersé avec des particules de céramique, est agité et laissé à se déposer en fonction des différences de densité. Des études ont montré que les méthodes centrifuges conviennent à différents matériaux ; par exemple, la méthode centrifuge des particules solides convient aux FGMs Al/SiC et Al/Al<sub>3</sub>Ti et la méthode centrifuge in situ est utilisée pour le traitement des FGMs Al/Al<sub>3</sub>Ni. Contrairement à la gradation par étapes qui se produit dans la technique de la métallurgie des poudres, les FGMs traitées avec cette technique présentent une gradation continue (Bohidar *et al*, 2014). La coulée centrifuge des FGMs dépend de la teneur en matrice fondue, de la vitesse de rotation et du taux de sédimentation des particules pour obtenir une

production de masse contrôlée et souhaitée. Toutefois, cette technique est limitée à la production de composants de FGM de forme géométrique régulière.



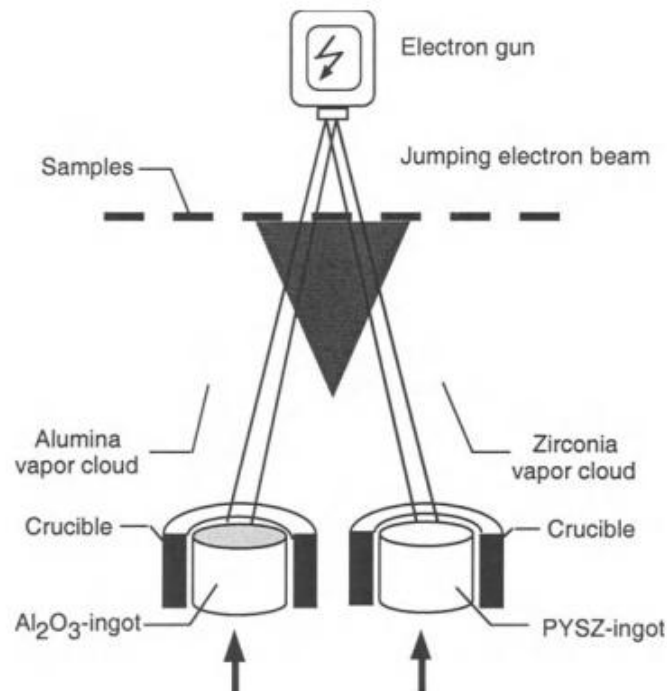
**Figure I.9:** Schéma du Procédé Dépôt par Centrifugation (ABDI, 1997).

### I.7.7. Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (PVD : Physical Vapor Deposition) est une technologie nécessaire pour la production de revêtements de barrière thermique (Figure I.10). Parmi les avantages de PVD, les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie considérablement plus longue. L'équipement utilisé par PVD pour déposer les revêtements d'isolation thermiques, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. (Miyamoto, 1999). Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source (Miyamoto, 1999). Si les taux d'évaporation de deux composants, par exemple alumine et zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM. Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à des environnements oxydant, notamment



les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone  $ZrO_2$ , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique (Mévrel, 2009).

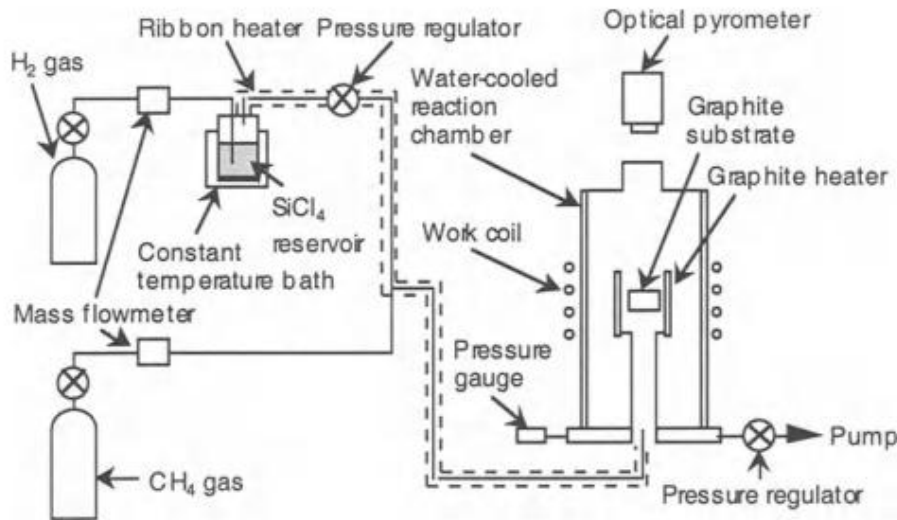


**Figure I.10 :** Schéma d'un faisceau d'électrons - PVD coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz, 1997).

### I.7.8. Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

La technique de dépôt chimique en phase vapeur (CVD : Chemical Vapor Deposition) est importante en raison de son concept de pressage à chaud isostatique ou sous vide des alliages souhaités pour former un produit composite (figure I.11). Cette technique permet de contrôler le dépôt et l'épaisseur du dépôt, ainsi que la précision de l'espacement des couches pour le classement stratifié. La pulvérisation cathodique (Bunshah, 1994), le dépôt thermique et le dépôt chimique en phase vapeur sont des formes de dépôt direct en phase vapeur qui ont été jugées intéressantes pour les micro-stratifiés (Groves *et al*, 1997). Le dépôt par jet de vapeur (JVDTM) est une forme plus récente qui dépose des niveaux concentrés de différents matériaux dans des situations de vide réduit à l'aide d'un jet de gaz non réactif. Le jet de gaz

non réactif est associé à une source d'évaporation résistive qui concentre les dépôts Hsiung *et al.* (1993). Le dépôt en phase vapeur peut être adopté pour déposer des revêtements à gradation fonctionnelle avec une microstructure fine exceptionnelle sur les surfaces des composants de moteurs aéronautiques. Les plaquettes Mitsubishi Miracle ont été graduées fonctionnellement par dépôt chimique en phase vapeur d'une structure à trois couches sur un substrat en carbure. Cela a considérablement réduit le défi de la déformation plastique et d'endommagement.

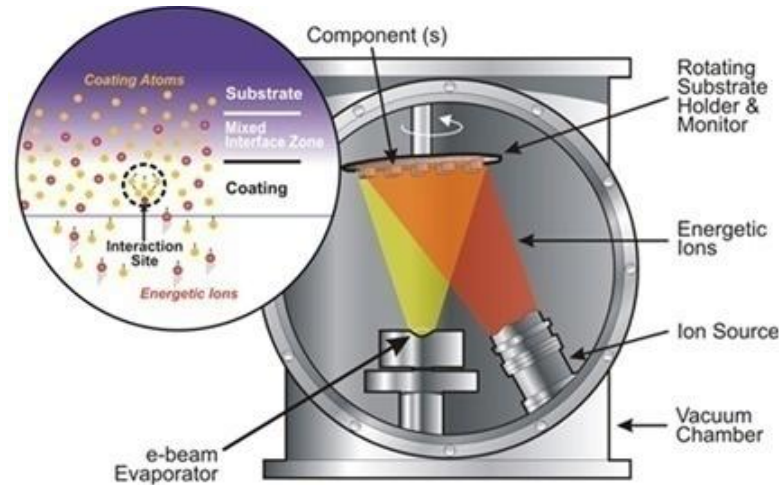


**Figure I.11 :** Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD).

### I.7.9. Dépôt assisté par poutre d'ions (IBAD)

Le dépôt assisté par poutre d'ions (IBAD) peut être considéré comme le dépôt de couches minces par le mélange de l'évaporation et du bombardement simultané dans des environnements sous vide poussé. Le bombardement simultané impliqué dans cette technique la différencie des autres techniques de dépôt. Une modification efficace peut être obtenue par le bombardement de films en développement avec des particules à grande vitesse dans différentes morphologies qui sont cruciales pour l'activité des revêtements minces. Ces modifications peuvent être obtenues par un changement d'orientation, une densification des films de développement à basse température et une altération de la taille des grains et des propriétés mécaniques. Cette technique peut être utilisée pour déposer des revêtements à forte adhérence, en faisant varier la concentration de particules pour chaque couche successive par bombardement simultané. Les revêtements à gradation fonctionnelle fabriqués par la technique de dépôt assisté par poutre d'ions conviennent aux applications à basse température,

avec un contrôle élevé du film/revêtement développé, tandis que le mélange chimique du substrat avec le film offre une meilleure adhérence par rapport aux équivalents déposés en phase vapeur (Nakatani *et al*, 2014). Le dépôt assisté par faisceau d'ions peut être limité par la géométrie du substrat et la faible résistance mécanique du dépôt.



**Figure I.12** : Processus de dépôt assisté par poutre d'ions (IBAD : Ion Beam Assisted Deposition IBAD) (Nakatani *et al*, 2014).

## I.8. Propriétés physiques et mécaniques des FGMs

La plupart des FGM sont constitués de céramique et de métal. L'Aluminium est un métal blanc qui après polissage peut devenir réfléchissant, par contre La céramique résulte des terres et des roches broyées (matériaux géologiques) ou bien d'une argile qui sera modelée puis cuite sous haute température (transformation irréversible) ce qui fait perdre au matériau sa plasticité donc il ne peut plus se réhydrater.

### I.8.1 Propriétés de la céramique

La propriété physique de la céramique résulte dans la facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. La masse volumique de la céramique est de 3800 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de la céramique s'impose dans les domaines de l'habitat et du design, l'industrie céramique et métallurgique, aéronautique et spatial, médicale et dans les revêtements. En outre les propriétés mécaniques du céramique dépendent des :

- Matières première employées ;
- Méthodes de fabrication qui fixent les microstructures finales et déterminent la répartition des différentes phases en présence ;

- Un module de YOUNG élevé (Liaisons, covalente, ioniques) ;
- Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, résistance mécanique élevée, bonne résistance thermique, rigidité élevée) ;
- Une très bonne résistance à la compression non à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa) ;
- Bonne résistance à l'oxydation ;
- Faible conductivité thermique

### I.8.2. Propriétés de l'aluminium

Physiquement l'Aluminium à une température de fusion relativement basse d'environ 660°. Il en résulte une facilité de fusion qui présente un avantage certain pour les opérations de fonderie. Ce matériau est très ductile, on peut aisément le mettre en forme. La masse volumique du matériau est de 2700 kg/m<sup>3</sup>. L'utilisation de l'Aluminium s'impose donc dans les domaines aéronautiques et du transport.

Les propriétés mécaniques des métaux présentent un grand intérêt dans la vie quotidienne, elles peuvent être classées en deux groupes :

- ✓ Celles qui se rapportent à la résistance mécanique du métal :
  - Bon rapport force/poids ;
  - Résistance à la traction ;
  - Résistance à la pénétration (dureté) ;
  - Très bonne résistance à la corrosion ;
  - Très bonnes solidités, dureté et rigidité.
  - Bonne conductivité thermique et électrique;
- ✓ Celles qui concernent les modifications de forme que le métal peut subir sans se briser :
  - La malléabilité (mises en feuilles) ;
  - La ductilité (mise en fils) ;
  - Bonnes caractéristiques de finition ;
  - Entièrement recyclable.

### I.9. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être

assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

Les chercheurs indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la structure FGM varie en fonction des trois fonctions citées ci-dessous.

### I.9.1. Les propriétés matérielles de la plaque P-FGM

Les propriétés matérielles des plaques P-FGM sont liées directement à leur fraction volumique (obéit à une fonction en loi de puissance).

$$V(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges (Bao, 1995) :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_1$  et  $E_2$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure  $z = -h/2$  et de la surface supérieure  $z = h/2$  de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.13, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .

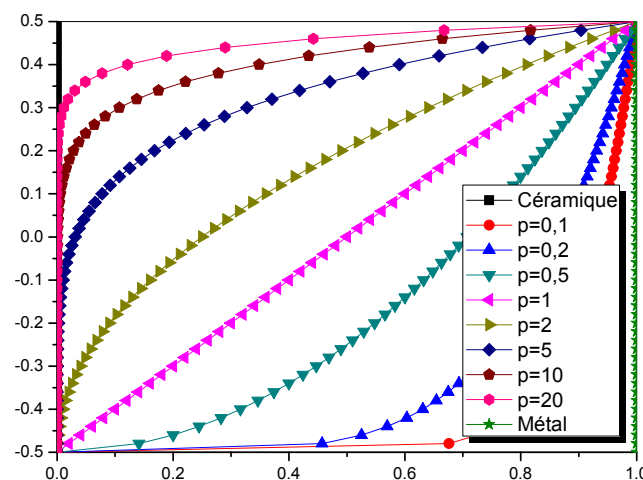


Figure I.13 : Variation de la fraction de volume dans une plaque "P-FGM".

### I.9.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

En 2003, Chi and Chung ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces, car Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement (Bao, 1995). Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3})$$

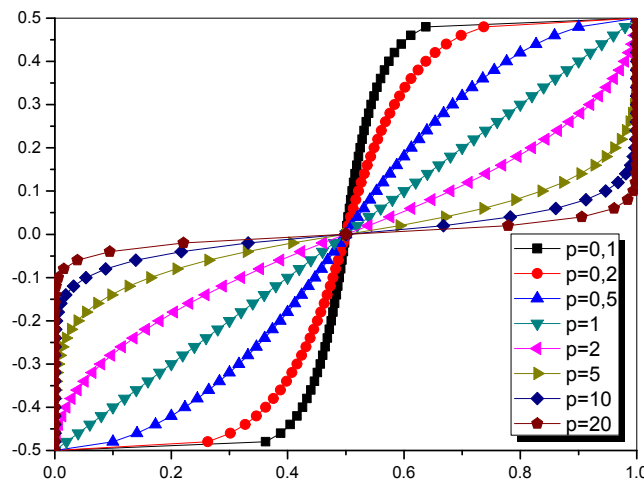
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.5})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.6})$$

La figure I.14 illustre que la distribution de la fraction volumique  $V(z)$  dans les équations (I.3) et (I.4) représente les courbes sigmoïdes, et cette plaque FGM est également appelée une plaque S-FGM.



**Figure I.14:** Variation de la fraction de volume dans une plaque "S-FGM".

### I.9.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, on peut utiliser la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme (Delale and Erdogan, 1983):

$$V(z) = e^{p\left(\frac{z+1}{h}\right)} \quad (\text{I.7})$$

$$E(z) = E_2 V(z) \quad (\text{I.8})$$

Où  $E_2$  représente la propriété de la surface inférieure de la plaque FGM et  $p$  est le paramètre qui définit le profil de variation du matériau le long de l'épaisseur et prend des valeurs supérieures à zéro. La variation de la fraction volumique  $V(z)$  à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.15.

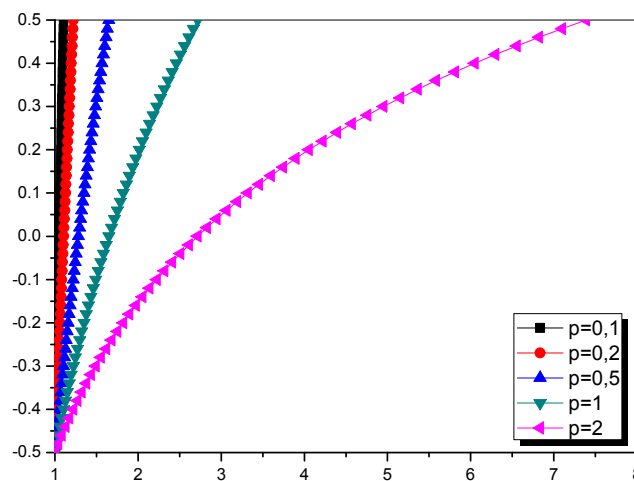
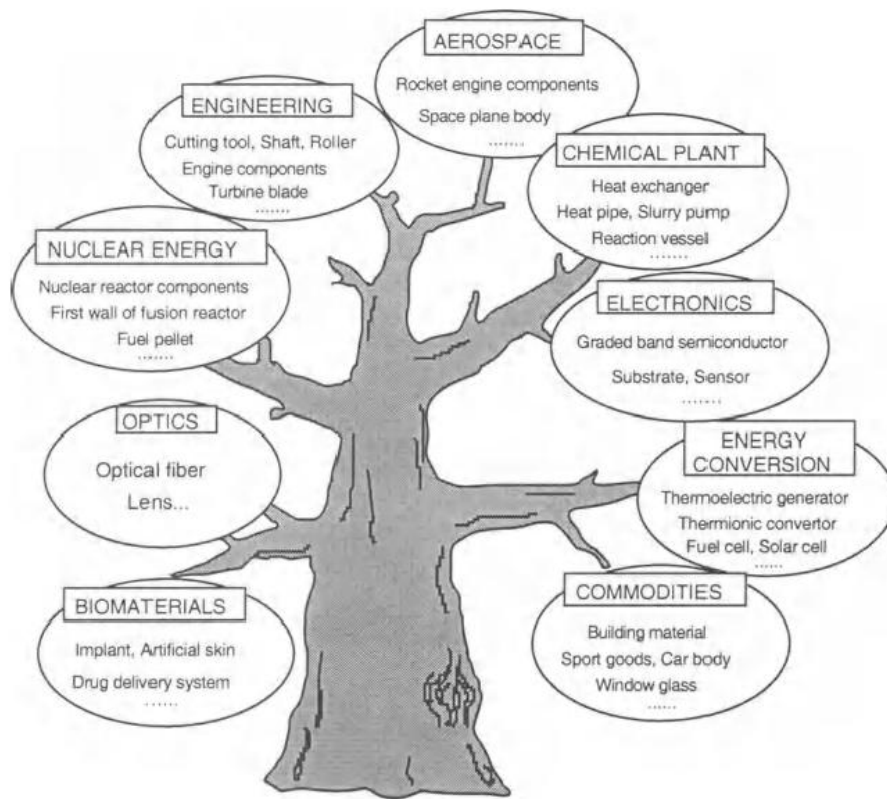


Figure I.15 : Variation de la fraction de volume dans une plaque " E-FGM".

### I.10. Domaine d'applications des FGMs

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans (Figure I.16). Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de

conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.



**Figure I.16:** Les principaux domaines d'application des FGM (Miyamoto, 1997).

### I.11.Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de donner une vue générale des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) et de leur concept, ainsi que l'histoire de leur origine et de leur évolution. Ces matériaux composites avancés sont aujourd'hui des matériaux de plus en plus répandus dans plusieurs domaines ; on a parlé d'une façon générale de ces domaines et leurs applications, et on a cité également des méthodes de fabrication des matériaux FGM qu'on a jugé importantes. Les différentes lois possibles pour décrire la variation des propriétés matérielles des FGMs (module d'Young, densité et coefficient de Poisson) en fonction de l'épaisseur d'une plaque de FGM ont été présentées. Ces lois peuvent être de puissances, exponentielles et sigmoïdes ; ces derniers qui peuvent être améliorés et élargies en abaissant les coûts de fabrication et en améliorant les méthodes d'élaboration. A la fin nous avons terminé par leurs domaines d'application.





# **CHAPITRE II**

---

## **DIFFERENTES THEORIES DES PLAQUES**

## II.1. Introduction

Les plaques sont des éléments de structures indispensables dans plusieurs domaines tels que l'aérospatiale, génie civil, énergétique et industriel. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. L'utilisation des plaques est très répandue en génie civil, car elles font partie de nombreuses structures, notamment, les dalles, les parois, les réservoirs, les enceintes de réacteurs, barrages, les ouvrages d'art...etc. Les plaques utilisées en génie civil présentent certaines particularités de calcul et de modélisation et afin de résoudre les problèmes liés à ce type d'élément dans le domaine élastique, il est impératif de choisir une théorie reflétant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

Ce chapitre est consacré à la présentation des différentes théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements afin de mieux étudier les différentes structures à gradient fonctionnel. A cet effet il est important de sélectionner le meilleur model de calcul dans un but de décrire les réponses statiques des plaques en FGM sous différents conditions de chargement mécanique. Il est bien connu que ces modèles structurels sont basés sur des hypothèses relatives à la cinématique des déformations ou des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque. Dans un premier temps nous rappellerons l'historique et la définition des plaques qui nous donne une idée sur les théories des plaques. Ensuite nous présentons les différentes théories utilisées pour l'étude de comportement mécanique des plaques FGM.

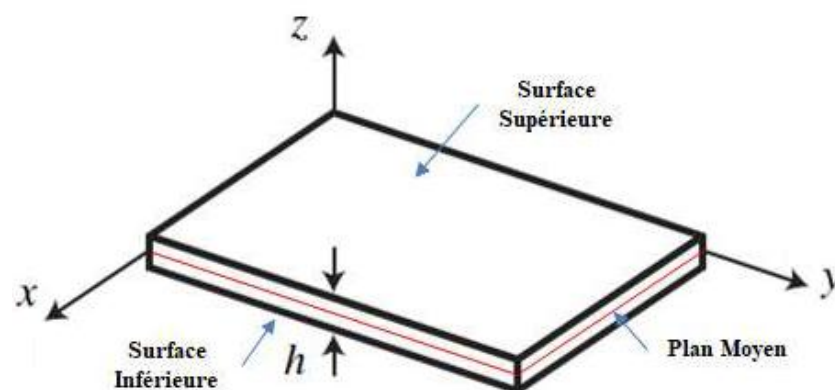
La théorie classique des plaques (CPT) qui est dédiée aux plaques minces, la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) qui est dédiée aux plaques moyennement épaisses, les théories d'ordre élevé de la déformation en cisaillement (HSDT) qui est dédiée aux plaques dans leur épaisseur est plus important, ensuite vient la théorie raffinée des plaques (RPT) et enfin la théorie HSDT quasi-3D qui tient en considération de l'effet d'étirement de l'épaisseur des plaques.

## II.2. Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par deux plans parallèles appelés faces et dont l'épaisseur  $h$  est petite par rapport aux deux autres dimensions (Figure II.1). Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres. Par contre, si la structure présente une courbure géométrique, ce sont les éléments de coque qui sont privilégiés plutôt que les éléments de

plaque qui sont plans. Autrement dit, si l'élément n'est pas plan au repos, nous parlons de coque plutôt que de plaque (Zara, 2017), et là on doit savoir que les éléments de coque sont des éléments courbes alors que les éléments de plaques sont plans, et la variation de métrique de la géométrie (c'est à dire son rayon de courbure) en fonction de son épaisseur est prise en compte pour les éléments de coques mais pas pour les éléments de plaques. Après, et suivant l'ordre de grandeur de l'épaisseur par rapport aux autres dimensions, on introduit les termes mince ou épais aux plaques et coques. Pour cela, on distingue différents types de plaques qui sont disponibles dans la littérature, ou différents hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique de leurs comportements :

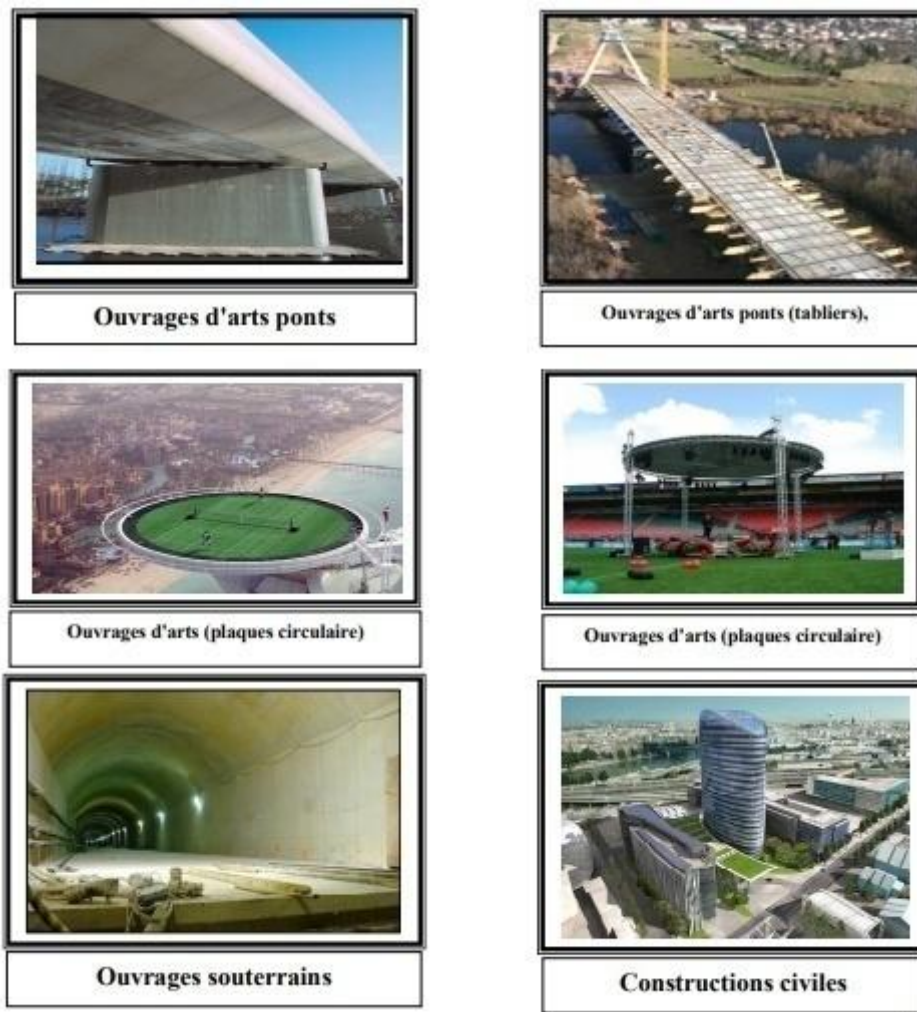
- Les plaques minces avec de petites flèches où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée devant la flèche générée par la courbure de la plaque ;
- Les plaques minces avec de grandes flèches (Karman) ;
- plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.



**Figure II.1** : Schéma d'un élément de plaque.

### II.3. Domaine d'utilisation

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandue dans tous les secteurs, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage, Comme celle-est représenté dans Figure II.2.



**Figure II.2 :** Les différents domaines d'utilisation des plaques.

#### II.4. Histoire de la théorie des plaques

Du point de vue historique, le mathématicien anglais Edward Love a développé une nouvelle théorie pour des plaques minces connue sous le nom de la théorie classique des plaques "Classical plate theory (CPT)", c'est Love qui utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff en 1888, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les théories des poutres, pour fonder une théorie des plaques minces, appelée théorie classique ou la théorie élémentaire de Love-Kirchhoff (Love, 1888). La théorie des plaques modérées ou semi-épaisses, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de (Rayleigh, 1877, Timoshenko, 1921, Reissner, 1945) et (Uflyand, 1948, Mindlin, 1951). Cette théorie utilise un coefficient de correction pour obtenir des résultats plus exacts ( $K_c = 5/6$ ). Ensuite, des théories d'ordre élevé sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi une théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle (théorie

3-D) qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque (Bachir Bouiadjra, 2015). On compte plusieurs articles relatifs aux sujets des plaques, certains présentant l'état de l'art, et d'autres précisant des problèmes de stabilité qui intéressent les ingénieurs constructeurs.

#### II.4.1. Théorie classique des plaques (CPT)

La théorie classique des plaques CPT "Classical Plate Theory" se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff. Lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque, donc on parle d'une plaque mince.

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement ( $L/h$ ). La théorie élémentaire des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, d'où :

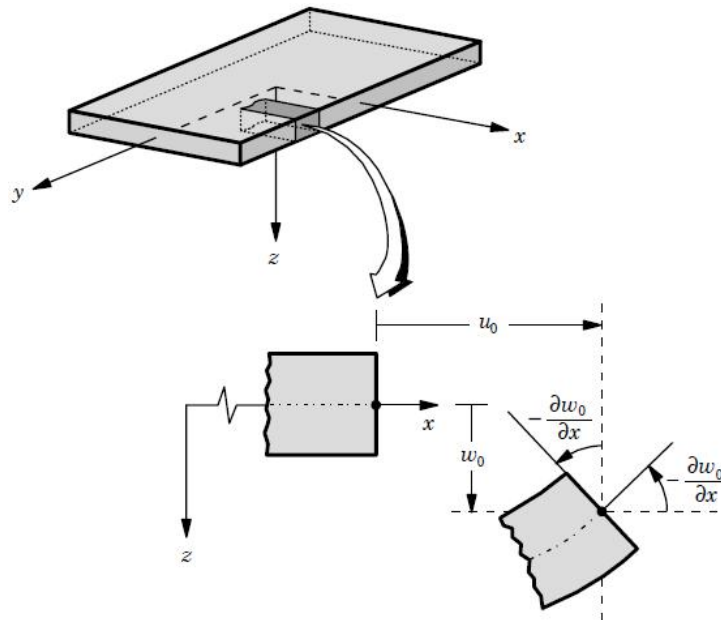
- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen ;
- Le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan; on ne considère que le déplacement transversal des points du plan neutre ;
- Les lignes droites qui sont perpendiculaires au plan moyen de la plaque avant la déformation restent droites après la déformation (voir Figure II.3);
- Les normales transversales ne subissent pas d'allongement ;
- L'effet de l'inertie de rotation est négligeable ;
- Les contraintes de cisaillement transversal sont nulles ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ).

Basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Où  $u_0, v_0, w_0$  sont les composantes de déplacement le long des directions de coordonnées  $(x, y, z)$ , respectivement, d'un point matériel situé sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ). L'effet de cisaillement transversal n'est pas pris en compte dans cette théorie, de ce fait les résultats pour les plaques épaisses seront surestime et inexacts.

La CPT est le modèle le plus simple et il ne convient qu'aux plaques et coques minces en FGM où les effets de cisaillement et de déformation normale sont négligeables. Javaheri et Eslami (2002) ont utilisé cette théorie pour étudier le comportement au flambement des plaques FGM sous quatre types de charges thermiques et de compression. Woo *et al.* (2006) ont étudié la vibration non linéaire des structures FGM dans des environnements thermiques.



**Figure II.3:** Schéma de la déformation d'une plaque selon les hypothèses de la théorie classique de Love-Kirchhoff "CPT" (Reddy, 1997).

#### II.4.2. Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de la déformation de cisaillement transversal. Toutefois, cette théorie nécessite un facteur de correction pour corriger la distribution des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) peuvent être référées dans Reissner (1945), Mindlin (1951) qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959), Reddy (1997).

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses suivantes :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque,
- La contrainte normale est négligeable devant les autres composantes,

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée (voir Figure II.4),
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus.

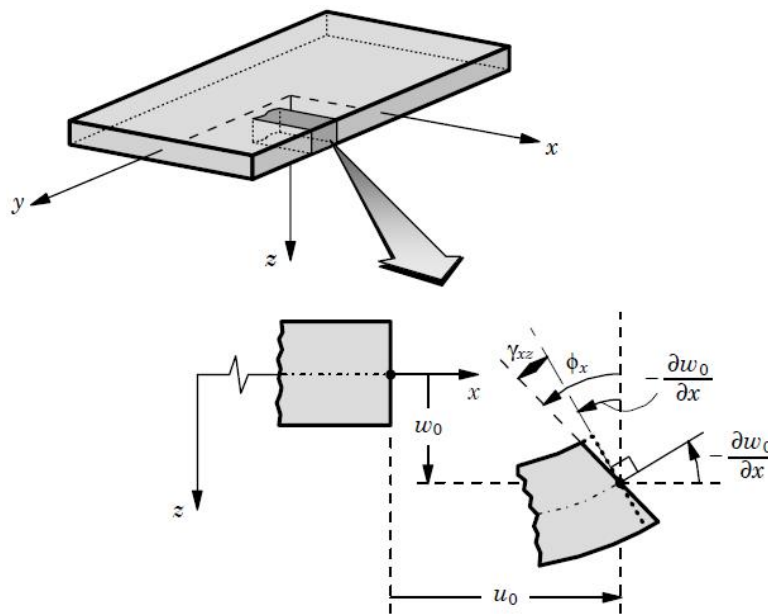
Du fait de ces nouvelles hypothèses, le champ de déplacement doit être reformulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

Avec  $\phi_x, \phi_y$  représentent les angles de rotation totale de la normale au plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement, de tel sorte que :

$$\begin{aligned}
 \phi_x &= \gamma_{xz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \phi_y &= \gamma_{yz}^0 + \frac{\partial w_0}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

Où  $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$  sont les déformations de cisaillement transverse mesurées sur le plan moyen.



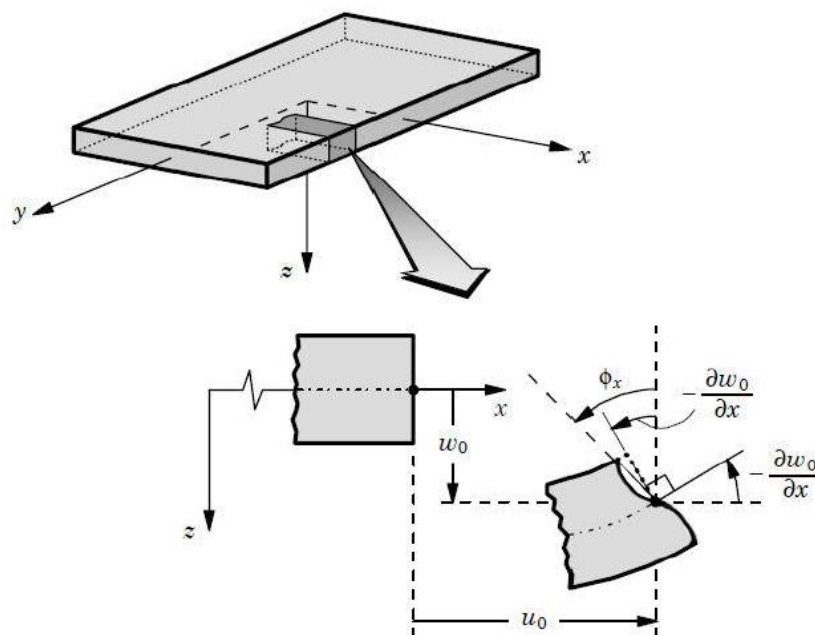
**Figure II.4:** Schéma de la déformation d'une plaque selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin "FSDT" (Reddy, 1997).



La théorie FSDT est largement appliquée pour étudier le comportement des plaques FGM épaisses et minces. Liew *et al.* (1993) ont appliqué la théorie des plaques de Mindlin pour analyser la vibration des plaques rectangulaires épaisses avec différentes conditions aux limites. Dans une autre étude, la FSDT a été appliquée dans le comportement de flexion des plaques FGM soumises à une charge mécanique dans un environnement thermique (Croce et Venini, 2004). Cependant, Fallah *et al.* (2013) ont utilisé la FSDT et la méthode étendue de Kantorovich pour analyser la vibration libre de plaques modérément épaisses en FGM reposant sur une fondation élastique. Dans le cadre de leurs travaux approfondis Hosseini-Hashemi *et al.* (2011) ont développé et proposé une nouvelle approche analytique précise sur la base de la théorie des plaques de Reissner-Mindlin pour analyser la vibration libre des plaques rectangulaires en FGM. Afin d'éviter les difficultés de la correction de cisaillement, les théories de la déformation en cisaillement d'ordre élevé des plaques ont été développées.

#### II.4.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

L'évolution de la théorie classique des plaques (CPT) et celle du premier ordre (FSDT) a conduit à la théorie HSDT. Elle est basée sur le développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Contrairement aux précédentes théories, la HSDT s'appuie sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur (Figure II.5). Ces modèles n'exigent pas de facteurs de correction en tenant compte de l'effet de cisaillement.



**Figure II.5 :** Schéma de la déformation d'une plaque selon les hypothèses de la théorie d'ordre élevé de Reddy "HSDT" (Reddy, 1997).

Les théories d'ordre élevé s'appliquent à certains types de problèmes (statique, dynamique, flambement). La HSDT développée par Reddy (1997) a été utilisée par de nombreux chercheurs pour étudier la flexion statique, la vibration libre et le flambement des plaques en FGM. On peut citer quelques travaux y afférant à la HSDT. Javaheri et Eslami, (2002) ont appliqué la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre (TSDT) et la solution Navier pour étudier le flambement thermique des plaques en FGM simplement appuyées. Shen (2002) a utilisé une théorie d'ordre élevé pour l'analyse non linéaire des plaques FGM soumises à des charges transversales dans l'environnement thermique. Récemment, Belkhouja *et al.* (2020) ont proposé une théorie de déformation en cisaillement trigonométrique pour l'analyse du comportement mécanique des plaques en FGM.

Le champ de déplacement de la théorie d'ordre élevé est généralement donné comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où  $f(z)$  est la fonction de cisaillement transverse (fonction de forme) caractérisant les théories correspondantes contrairement à la théorie de Love-Kirchhoff  $f(z) = 0$ , alors que dans la théorie de Reissner-Mindlin  $f(z) = z$ .

#### II.4.4. Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi a pu développer en 2002, un modèle raffiné pour les plaques isotropes et qui a été nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory) (Shimpi, 2002). Cette théorie propose des caractéristiques très intéressantes telles que la non-nécessité d'un coefficient de correction pour les contraintes de cisaillement et les similitudes avec la théorie classique des plaques (CPT) quant aux équations du mouvement, les conditions aux limites et les expressions des moments. Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre d'inconnues dans la présente théorie est égal à quatre, par contre, égal à cinq ou plus pour d'autres théories d'ordre élevé (Ait Atmane *et al.*, 2010, Reddy, 1984, Touratier, 1991, Karama *et al.*, 2003). Cette théorie repose sur le modèle du champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

Où  $(u_0, v_0)$  sont les déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  d'un point situé sur le plan médian de la plaque et  $(w_b, w_s)$  sont respectivement les composantes du déplacement dû à la flexion et au cisaillement transverse.

#### II.4.5. La théorie de déformation des plaques quasi-3D

Afin d'éviter de recourir à une analyse tridimensionnelle, l'approche quasi tridimensionnelle est devenue une alternative importante, cette approche consiste en introduisant l'effet de déformation normale transverse (c'est-à-dire l'effet de l'étirement de l'épaisseur de la plaque), afin de définir un état de contraintes correct et évaluer exactement les fréquences propres en analyse vibratoire.

De façon générale, toutes les contributions et les recherches récentes sur cette approche se basent sur la jonction d'une fonction non-linéaire à la coordonnée de l'épaisseur ( $z$ ) de telle sorte que le déplacement transversal sera exprimé et dépend d'une variation non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque. En procédant de la sorte, le but est de réduire le nombre des variables et de formuler une théorie efficace pour pouvoir analyser des plaques plus générales en analyse statique ou dynamique. Dans la littérature, plusieurs travaux ont porté sur les théories quasi-3D.

Thai et Kim (2013) ont proposé une théorie de déformation des plaques quasi-3D à cinq variables comme la théorie de la déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT), contrairement à 6 pour les autres théories conventionnelles. Hebali *et al.* (2014), Belabed *et al.* (2014), Hamidi *et al.* (2015) et Bennoun *et al.* (2016) ont proposée à l'aide de différentes fonctions de forme plusieurs méthodes analogiques de cinq-inconnues quasi-3D, En apportant des nouvelles hypothèses pour les théories quasi-3D à six-variables que Zenkour (2013) a pu proposer une nouvelle théorie quasi-3D à quatre variables pour les plaques FGM. Mantari et Guedes Soares (2014) ont aussi proposé une théorie quasi-3D simples à quatre variables pour des plaques fonctionnellement gradués en combinant l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal à l'aide d'une fonction hyperbolique.

Cette théorie est exprimée par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \\
 w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

Où  $\varphi(x, y)$  est une composante de déplacement supplémentaire qui prend en considération l'effet de la contrainte normale (l'effet d'étirement de l'épaisseur).

### II.5. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour surmonter les limites de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, plusieurs auteurs ont apporté d'importantes contributions au développement de modèles d'ordre élevé, qui se distinguent dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Reddy 1997, Touratier 1991, Whitney. J.M, 1973, Nelson. R. B & D.R. Lorch, 1974 et, Lo. K.H & R.M. Christensen, 1977). Nous citons en particulier :

La fonction de forme fondée sur la base de la théorie de déformation en cisaillement de troisième ordre de Reddy (TSDT : Third Shear Deformation Theory) est donnée par :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \tag{II.7}$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur, ainsi que les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (1991) a proposé le modèle sinusoïdal (SSDT : Sinusoidal Shear Deformation Theory) qui est différent des autres modèles d'ordre élevé puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de forme s'écrit comme suite :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.8})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinus à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version hyperbolique de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HySDT : Hyperbolic Shear Deformation Theory) développée par Soldatos (Soldatos, 1992) est obtenue en prenant :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{\pi}{h}\right) - z \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{II.9})$$

Le modèle exponentiel de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (ESDT : Exponential Shear Deformation Theory) développée par Karma en 2003 (Karma *et al*, 2003) est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.10})$$

Nous regroupons dans le tableau II.1 ci-dessous les différentes fonctions de cisaillement transverse utilisées dans la littérature, ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

**Tableau II.1** : Différentes fonctions de cisaillement utilisées dans les théories d'ordre élevé des plaques.

Théorie	Modèle	Fonction de cisaillement	Domaine de validité
Kirchhoff (1850)	CPT	$f(z) = 0$	Plaques minces
Mindlin (1951)	FSDT	$f(z) = z$	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsumian (1969)	HSDT	$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	
Reissner (1975)	HSDT	$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques minces et épaisses
Reddy (1984)	TSDT	$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Plaques épaisses
Touratier (1991)	SSDT	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{z}{h}\right)$	
Karama (2003)	ESDT	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$	

Aydogdu (2009)	HSDT	$f(z) = z^3 \frac{-2(z/h)^2}{\ln^3}$	Plaques épaisses
Mantari and Soares (2013)	HySDT	$f(z) = \sin\left(\frac{z}{h}\right) e^{m \cosh(z/h)}$	
Zenkour (2015)	HySDT	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	
Nguyen (2015)	IHySDT	$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z\left(\frac{6}{h\sqrt{13}}\right)$	
Présente théorie	PSDT	$f(z) = \frac{9}{8}z - \frac{3}{2}\frac{z^3}{h^2}$	

## II.6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, un aperçu général sur les différentes théories des plaques à savoir la théorie classique (CPT) de Love-Kirchhoff utilisée pour l'étude des plaques minces, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et les théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Ensuite nous avons présenté la théorie raffinée des plaques avec seulement quatre variables qui tient en considération l'effet de déformation en cisaillement à travers l'épaisseur. Cette dernière a été développée afin de surpasser les limitations des théories existantes. En général, il est rare de trouver une théorie qui soit applicable à tous les cas possibles (plaque mince ou épaisse constituée d'un matériau isotrope, matériau multicouche, sandwich ou FGM) et aux différents comportements (flexion, dynamique et flambement) et qui soit simple et facile et ne coûte pas chère en temps de calcul. En effet, chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Un aperçu sur les travaux d'analyse de différents comportements structurels des FGM basé sur les théories de déformation a été aussi présenté ainsi que les modèles possibles qui interviennent dans la description de la variation des propriétés matérielles à travers l'épaisseur pour les plaques FGM. Dans le chapitre suivant nous nous attacherons à présenter une nouvelle théorie raffinée de déformation en cisaillement pour étudier le phénomène d'instabilité des plaques en FGM sous différentes conditions de chargement mécanique.

# **CHAPITRE III**

---

## **ANALYSE DE LA STABILITE DES PLAQUES FGM**

### III.1. Introduction

Le but de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

En ce chapitre on va présenter une formulation analytique pour étudier la réponse de flambement des plaques épaisses en FGM et soumises au plan aux différentes conditions de chargement mécanique. La méthode de Navier est utilisée pour résoudre les réponses de flambement de ces plaques FG simplement appuyées. Les équations de mouvement sont obtenues à partir du principe de l'énergie potentielle totale. Des solutions analytiques pour la réponse mécanique du flambement des plaques FG sont déterminées. Des exemples numériques sont calculés et discutés pour démontrer l'exactitude de la présente théorie.

### III.2. Formulation théorique

Dans cette étude, un champ de déplacement 2D amélioré et les équations constitutives des plaques rectangulaires FG sont développés. Ensuite, leur énergie de déformation, la variation virtuelle de l'énergie de déformation et la variation du travail effectué par des forces externes sont calculées. La méthode de Navier est employée pour résoudre les problèmes de flambement des plaques FG soumises aux différentes conditions de chargement mécanique.

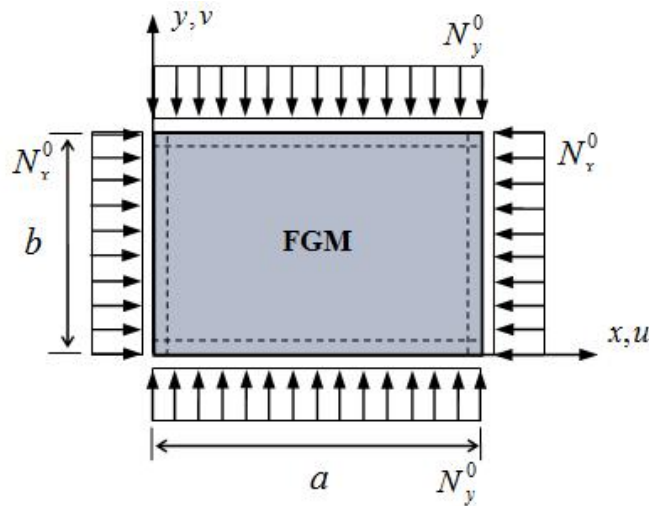
### III.3. Modèle de plaque fonctionnellement graduée

Considérons une plaque rectangulaire FG avec l'épaisseur uniforme «  $h$  », la longueur «  $a$  » et la largeur «  $b$  » comme le montre la Fig. 1. Le plan central de la plaque a été adopté comme le plan  $x-y$  du système de coordonnées cartésien, tandis que les axes  $x$  et  $y$  sont parallèles aux bords de la plaque. La plaque se compose d'un mélange entre deux constituants isotropes distribués (céramique-Métal). Par conséquent, dans les études antérieures les plus publiées trouvées dans la littérature, on suppose que la variation des propriétés mécaniques des FGM sur l'épaisseur de la plaque, telles que le module de Young, le coefficient de Poisson, la conductivité thermique et le coefficient de dilatation thermique, sont données par Reddy et Chin (1998) dans la gradation la plus simple de la loi de puissance tel que

$$P(z) = (P_1 - P_2)V(z) + P_2, \quad V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^p \quad (\text{III.1})$$



Dans lequel le paramètre " $p$ " est l'exposant de la loi de puissance et il peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre  $0$  et  $\infty$  (indiquant le changement de phase de l'entièrement céramique à entièrement métallique, et " $P_1$ " et " $P_2$ " désignent les propriétés respectives des phases en haut et en bas de la plaque, respectivement), permettant à l'utilisateur de déterminer la gradation des propriétés du matériau dans le sens de l'épaisseur.



**Figure III.1:** Plaque rectangulaire FG soumis à des charges mécaniques dans le plan.

#### III.4. Champ de déplacement

La formulation analytique de la présente théorie raffinée des plaques d'ordre élevé est basée sur les hypothèses cinématiques suivantes :

- 1) Les déplacements axiaux dans les directions  $x$  et  $y$  sont constitués de composants d'extension, de flexion et de cisaillement intégral ;
- 2) Les déplacements axiaux ont pris en compte l'effet de la déformation transversale par cisaillement selon une nouvelle fonction de forme parabolique du troisième ordre ;
- 3) Le déplacement transversal dans la direction  $z$  consiste uniquement en une composante de flexion ;
- 4) L'effet de la déformation normale transversale ( $\varepsilon_z = 0$ ) est négligé. Par conséquent, le champ de déplacement simple  $2D$  de la théorie proposée ne peut être écrit qu'avec des variables à quatre inconnues sous la forme améliorée suivante :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{III.2}$$

Où  $u, v$  et  $w$  représentent les composants de déplacement à travers les directions et les coordonnées, respectivement, alors que  $u_0, v_0, w_0$  et  $\theta$  sont les variables inconnues de la surface moyenne de la plaque FG. Par conséquent,  $f(z)$  représente une fonction de forme en termes de coordonnées d'épaisseur  $z$  qui contrôle la distribution des contraintes transversales en cisaillement dans la direction d'épaisseur. Dans cette étude, nous adoptons la fonction de forme polynomiale en posons :

$$f(z) = \frac{9}{8}z - \frac{3}{2}\frac{z^3}{h^2} \tag{III.3}$$

La fonction de forme est choisie pour satisfaire les conditions suivantes :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz = 0, \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{9}{8} - \frac{9}{2}\frac{z^2}{h^2}, \quad g(z) \Big|_{z=\pm h/2} = 0 \tag{III.4}$$

Les intégrales de l'équation (III.2) doivent être résolues en utilisant la méthode de type Navier et donc le champ de déplacement en tout point de la plaque FG peut être reformulé comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 B' f(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{III.5}$$

Où les coefficients  $A', B', k_1$  et  $k_2$  peuvent être exprimés comme suit :

$$A' = -1/\lambda^2, \quad B' = -1/\mu^2, \quad k_1 = \lambda^2, \quad k_2 = \mu^2 \tag{III.6}$$

Et les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont considérés comme

$$\lambda = \frac{m\pi}{a}, \quad \mu = \frac{n\pi}{b} \tag{III.7}$$

### III.5. Relations constitutives

Les équations non-linéaires de déformations-déplacements sont données comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial}{\partial z} \\ k_1 A' \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Pour les plaques FG isotropes, les équations constitutives 2D peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Dans laquelle  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  et  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  sont les contraintes et les vecteurs de déformations par rapport au système de coordonnées de la plaque. Les expressions  $Q_{ij}$  en termes de constantes d'ingénieur sont données comme suit :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \quad Q_{12} = \nu Q_{11}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.11})$$

### III.6. Équations de mouvement

Dans la présente étude, le principe de l'énergie potentielle totale des déplacements virtuels peut être utilisé pour obtenir les équations d'équilibre de mouvement sous une forme variationnelle comme donné par Fellah *et al.* (2019)

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz - \int_A q \delta w_0 dA + \int_A \left( N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) dA = 0 \quad (\text{III.12})$$

Dans laquelle  $A$  est la surface supérieure de la plaque,  $q$  et  $(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)$  sont des charges distribuées transversales et dans le plan, respectivement. En remplaçant l'équation (III.8) par l'équation (III.11), le principe de l'énergie potentielle totale peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\int_A \left\{ N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_y^b \delta \varepsilon_y^1 + M_{xy}^b \delta \gamma_{xy}^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + M_y^s \delta \varepsilon_y^2 + M_{xy}^s \delta \gamma_{xy}^2 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 - q \delta w_0 + N_x^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_y^0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right\} dA = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où  $N, M^b, M^s$  et  $S^s$  sont les contraintes résultantes et peuvent être exprimées par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} N_y \\ M_y^b \\ M_y^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} N_{xy} \\ M_{xy}^b \\ M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) g(z) dz \quad (\text{III.14})$$

En substituant les relations constitutives de l'équation (III.10) à l'équation (III.14), les contraintes résultantes peuvent être trouvées en termes de déformations généralisées comme suit :

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + B_{11}\varepsilon_x^1 + B_{12}\varepsilon_y^1 + E_{11}\varepsilon_x^2 + E_{12}\varepsilon_y^2, \\
N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + B_{12}\varepsilon_x^1 + B_{22}\varepsilon_y^1 + E_{12}\varepsilon_x^2 + E_{22}\varepsilon_y^2, \\
N_{xy} &= A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{66}\gamma_{xy}^1 + E_{66}\gamma_{xy}^2, \\
M_x^b &= B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + D_{11}\varepsilon_x^1 + D_{12}\varepsilon_y^1 + F_{11}\varepsilon_x^2 + F_{12}\varepsilon_y^2, \\
M_y^b &= B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0 + D_{12}\varepsilon_x^1 + D_{22}\varepsilon_y^1 + F_{12}\varepsilon_x^2 + F_{22}\varepsilon_y^2, \\
M_{xy}^b &= B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{66}\gamma_{xy}^1 + F_{66}\gamma_{xy}^2, \\
M_x^s &= E_{11}\varepsilon_x^0 + E_{12}\varepsilon_y^0 + F_{11}\varepsilon_x^1 + F_{12}\varepsilon_y^1 + H_{11}\varepsilon_x^2 + H_{12}\varepsilon_y^2, \\
M_y^s &= E_{12}\varepsilon_x^0 + E_{22}\varepsilon_y^0 + F_{12}\varepsilon_x^1 + F_{22}\varepsilon_y^1 + H_{12}\varepsilon_x^2 + H_{22}\varepsilon_y^2, \\
M_{xy}^s &= E_{66}\gamma_{xy}^0 + F_{66}\gamma_{xy}^1 + H_{66}\gamma_{xy}^2, \\
S_{yz}^s &= A_{44}^s\gamma_{yz}^0, \\
S_{xz}^s &= A_{55}^s\gamma_{xz}^0
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Où  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$  et  $A_{ij}^s$  sont les coefficients de la rigidité de la plaque définie par :

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \\
A_{ij}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} g^2(z) dz, \quad i, j = 4, 5
\end{aligned} \tag{III.16}$$

En remplaçant les équations (III.8) et (III.10) dans l'équation (III.12) et en intégrant par parties par rapport à  $x$  et  $y$  et en fixant les coefficients de  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$  et  $\delta \theta$  à zéro, séparément. Les équations d'équilibre régissant la stabilité en termes de contraintes résultantes sont trouvées comme suit

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2 N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = 0 \\
\delta \theta : \quad & k_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - k_1 A' \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{III.17}$$

En remplaçant l'équation (III.15) par l'équation (III.17), nous pouvons obtenir les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\ & + k_1 A' E_{11} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + k_2 B' E_{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.18a})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ & + k_1 A' E_{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} + k_2 B' E_{22} \frac{\partial^3 \theta}{\partial y^3} + (k_1 A' + k_2 B') E_{66} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.18b})$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\ & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1 A' F_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + k_2 B' F_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} + (k_1 A' + k_2 B') F_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 2(k_1 A' + k_2 B') F_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + q = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.18c})$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & k_1 A' \left[ E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - F_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + k_1 A' H_{11} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} + E_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - F_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_2 B' H_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ & + k_2 B' \left[ E_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - F_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + k_1 A' H_{12} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - F_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + k_2 B' H_{22} \frac{\partial^4 \theta}{\partial y^4} \right. \\ & + (k_1 A' + k_2 B') \left[ E_{66} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2F_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + (k_1 A' + k_2 B') H_{66} \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + E_{66} \right. \\ & \left. \left. + (k_1 A')^2 A_{55}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 A_{44}^s \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \right. \right. \end{aligned} \quad (\text{III.18d})$$

### III.7. Solution d'une plaque FG simplement appuyée

La procédure de solution de Navier est utilisée pour l'analyse du flambement de la plaque rectangulaire FG simplement appuyée soumise à des forces distribuées dans le plan ( $N_x^0 = \gamma_1 N_0, N_y^0 = \gamma_2 N_0, N_{xy}^0 = 0$ ). Toutefois, dans le cas d'un problème de flambement statique, toutes les autres forces agissant sur la plaque sont supposées être nulles ( $q=0$ ). Les conditions aux limites sur les quatre bords simplement appuyés de la plaque peuvent être définies comme suit :

Sur les bords ( $x = 0, a$ )

$$v_0 = w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \theta = 0 \quad (\text{III.19a})$$

Sur les bords ( $y = 0, b$ )

$$u_0 = w_0 = N_y = M_y^b = M_y^s = \theta = 0 \quad (\text{III.19b})$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges mécaniques transversales  $q$  et les déplacements sous forme de séries trigonométriques doubles, qui satisfont aux conditions aux limites ci-dessus données par l'équation (III.19)

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ \Phi_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \quad (\text{III.21})$$

Où  $q_{mn}$  est le coefficient d'expansion de Fourier et  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont les variables inconnues. En remplaçant cette solution d'équation (III.20) dans les équations différentielles d'équilibre données dans l'équation (III.18), les charges critiques de flambement des plaques FG peuvent être trouvées à partir de la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{Bmatrix} - N_0 \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où  $K_{ij}$  se réfère aux éléments de la matrice de rigidité qui peuvent être définis comme suit

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, & K_{12} &= \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\
K_{13} &= -\alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}) - \alpha^3 B_{11}, \\
K_{14} &= k_1 A' \alpha(\alpha^2 E_{11} + \beta^2 E_{66}) + k_2 B' \alpha\beta^2(E_{12} + E_{66}), \\
K_{22} &= \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, & K_{23} &= -\alpha^2 \beta(B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, \\
K_{24} &= k_1 A' \alpha^2 \beta(E_{12} + E_{66}) + k_2 B' \beta(\beta^2 E_{22} + \alpha^2 E_{66}), \\
K_{33} &= 2\alpha^2 \beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22}, \\
K_{34} &= -k_1 A' \alpha^2 \beta^2(F_{12} + 2F_{66}) - k_2 B' \alpha^2 \beta^2(F_{12} + 2F_{66}) - k_1 A' \alpha^4 F_{11} - k_2 B' \beta^4 F_{22}, \\
K_{44} &= k_1 A' \alpha^2 (k_1 A' \alpha^2 H_{11} + k_2 B' \beta^2 H_{12}) + k_2 B' \beta^2 (k_1 A' \alpha^2 H_{12} + k_2 B' \beta^2 H_{22}) \\
&\quad + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')(k_1 A' + k_2 B') H_{66} + (k_2 B')^2 \beta^2 A_{44}^s + (k_1 A')^2 \alpha^2 A_{55}^s \\
N_{11} &= \gamma_1 \alpha^2 + \gamma_2 \beta^2
\end{aligned} \tag{III.23}$$

### III.8. Conclusion

Dans le présent travail, on combine cette idée pour développer la théorie de la déformation du cisaillement d'ordre élevé avec le champ de déplacement modifié à son optimisation. La théorie actuelle ne contient que quatre variables et quatre équations d'équilibre, mais elle satisfait les conditions aux limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter d'un facteur de correction de cisaillement. Les solutions sont obtenues en utilisant les équations de Navier. Une étude comparative du travail réalisé avec les solutions existantes ont permis la validation des solutions acquises.



# CHAPITRE IV

---

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

### IV.1. Introduction

Cette étude a pour objectif d'analyser le comportement du flambement statique des plaques rectangulaires simplement appuyées à gradient fonctionnel (FGM). A cet effet, une approche analytique a été utilisée et développée sur la base d'une théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de la charge critique de flambement de ces plaques FGM soumises aux différentes conditions de chargement mécanique dans le plan. Cette théorie satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieures et inférieures de la plaque FGM sans avoir recours à un éventuel facteur de correction de cisaillement. Les propriétés du matériau sont supposées varier en douceur dans le sens de l'épaisseur selon la loi de mélange appelée gradation en loi de puissance. Les équations différentielles d'équilibre sont formulées sur la base du principe de l'énergie potentielle totale et résolues pour des conditions aux limites simplement appuyées en mettant en œuvre la méthode de Navier.

Dans la présente analyse, en vue de vérifier l'exactitude de la théorie proposée, les résultats numériques de la charge critique de flambement des plaques simplement appuyées en FGM sous à un chargement mécanique sont présentés et comparés avec ceux existants dans la littérature.

### IV.2. Résultats numériques et discussions

Dans cette partie, un certain nombre d'exemples numériques sont présentés pour vérifier l'adéquation de la présente formulation. Les effets de l'exposant de loi de puissance, des paramètres géométriques, du rapport d'élancement et des conditions de chargement sur les charges critiques de flambement des plaques en FGM simplement appuyées sont examinés en détail. La plaque considérée est constituée d'une combinaison de deux matériaux Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (c'est-à-dire un mélange de métal et de céramique). Le module d'Young du métal et de la céramique sont  $E_m = 70GPa$  et  $E_c = 380GPa$ , respectivement. Par conséquent, le coefficient de Poisson est donc égal à 0,3 pour les deux matériaux. Pour tous les exemples, lors du calcul de la charge critique de flambement à l'aide de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la valeur du facteur de correction du cisaillement est égale à 5/6. Pour des raisons de commodité, la charge critique de flambement adimensionnelle suivante est utilisée pour présenter les résultats numériques

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_0 a^2}{E_m h^3} \quad (\text{IV.1})$$

**Tableau IV.1:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe  $x$  ( $a/b=0.5$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	6.7190	3.4158	2.6617	2.2025	1.9740	1.738
	Thai et Choi (2012)	6.7203	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	1.7115
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	6.714	3.39	2.61	2.124	1.90	1.705
	Zenkour et Aljadani (2018)	6.7203	3.4164	2.6451	2.1484	1.9212	1.7115
	Présente	6.7203	3.4164	2.6451	2.1484	1.9213	1.7115
10	FSDT	7.4052	3.711	2.895	2.433	2.2066	1.9473
	Thai et Choi (2012)	7.405	3.71	2.88	2.41	2.18	1.93
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	7.397	3.70	2.87	2.40	2.18	1.93
	Zenkour et Aljadani (2018)	7.405	3.7110	2.8896	2.4164	2.1895	1.9387
	Present	7.4053	3.7111	2.8896	2.4164	2.1896	1.9387
20	FSDT	7.599	3.793	2.960	2.499	2.274	2.008
	Thai et Choi (2012)	7.599	3.79	2.95	2.49	2.26	2.00
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	7.590	3.78	2.95	2.48	2.26	2.00
	Zenkour et Aljadani (2018)	7.5992	3.7930	2.9581	2.4944	2.2690	2.0054
	Présente	7.5993	3.7930	2.9582	2.4944	2.2690	2.0054
50	FSDT	7.655	3.817	2.978	2.518	2.293	2.025
	Thai et Choi (2012)	7.65	3.81	2.97	2.51	2.29	2.025
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	7.64	3.81	2.973	2.51	2.28	2.02
	Zenkour et Aljadani (2018)	7.6554	3.8166	2.9779	2.5171	2.2922	2.0249
	Présente	7.6554	3.8166	2.9779	2.5172	2.2923	2.025
100	FSDT	7.664	3.82	2.981	2.521	2.296	2.028
	Thai et Choi (2012)	7.66	3.82	2.98	2.52	2.29	2.028
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	7.65	3.81	2.97	2.51	2.292	2.02
	Zenkour et Aljadani (2018)	7.6635	3.8200	2.9807	2.5204	2.2956	2.0277
	Présente	7.6635	3.8200	2.9808	2.5205	2.2957	2.0278

#### IV.2.1. Etude comparative

Afin de valider la précision de la présente théorie raffinée de déformation en cisaillement d'ordre élevé dans la prédiction de la charge critique de flambement adimensionnel des plaques à gradient fonctionnel. Plusieurs résultats sous forme des tableaux et des graphes sont présentés pour les plaques en FGM soumises à différentes conditions de chargement mécanique; une compression uniaxiale dans le plan ( $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0$ ) ; compression

biaxiale ( $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$ ); compression et traction ( $\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 1$ ). Les résultats calculés à l'aide de la théorie proposée sont comparés à ceux calculés à l'aide de la théorie de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) de Mindlin (1951) et de la solution présentée par Thai et Choi (2012) sur la base de la théorie raffinée des plaques (RPT), de la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) développée par Sidda Reddy *et al.* (2013) et de la théorie raffinée de la déformation en cisaillement du troisième ordre (RTSDT) présentée par Zenkour et Aljadani (2018).

**Tableau IV.2:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe  $x$  ( $a/b=1$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	16.0132	8.2210	6.4018	5.2407	4.6606	4.0970
	Thai et Choi (2012)	16.0211	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	4.0070
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	16.00	8.146	6.23	4.97	4.44	3.9887
	Zenkour et Aljadani (2018)	16.0210	8.2244	6.3431	5.0530	4.4806	4.0069
	Présente	16.0211	8.2245	6.3432	5.0531	4.4807	4.0070
10	FSDT	18.578	9.339	7.283	6.102	5.519	4.868
	Thai et Choi (2012)	18.5785	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	4.8346
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	18.54	9.299	7.21	5.99	5.42	4.82
	Zenkour et Aljadani (2018)	18.5785	9.3391	7.2630	6.0353	5.4528	4.8346
	Présente	18.5785	9.3391	7.2631	6.0353	5.4528	4.8346
20	FSDT	19.353	9.667	7.543	6.363	5.785	5.108
	Thai et Choi (2012)	19.3528	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	5.0988
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	19.31	9.649	7.51	6.32	5.75	5.08
	Zenkour et Aljadani (2018)	19.3527	9.6674	7.5371	6.3447	5.7668	5.0988
	Présente	19.3528	9.6675	7.5371	6.3448	5.7668	5.0988
50	FSDT	19.581	9.764	7.619	6.44	5.864	5.18
	Thai et Choi (2012)	19.5814	9.7636	7.6177	6.4373	5.8614	5.1782
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	19.54	9.743	7.601	6.42	5.84	5.16
	Zenkour et Aljadani (2018)	19.5814	9.7636	7.6176	6.4372	5.8613	5.1781
	Présente	19.5814	9.7636	7.6177	6.4373	5.8614	5.1782
100	FSDT	19.615	9.778	7.63	6.451	5.88	5.19
	Thai et Choi (2012)	19.6145	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752	5.1897
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	19.57	9.75	7.61	6.43	5.86	5.17
	Zenkour et Aljadani (2018)	19.6145	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752	5.1896
	Présente	19.6145	9.7775	7.6293	6.4507	5.8752	5.1897

Nous attirons l'attention à travers cette étude sur le fait que la solution exacte d'élasticité pour le problème de flambement des plaques FG n'est pas disponible dans la littérature. L'examen de ces tableaux révèle que la présente théorie des plaques raffinée est en excellent accord pour tous les modes de flambement par rapport aux résultats obtenus par Thai et Choi (2012) et Zenkour et Aljadani (2018) qui confirment la validation de l'approche analytique proposée pour différents cas de chargement. On peut également voir que la charge de flambement critique diminue puisque l'exposant de la loi de puissance augmente et que le tout en céramique a le plus grand flambement critique de tous. Cela peut être attendu car la céramique a une résistance inférieure à celle du métal.

**Tableau IV.3:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe  $x$  ( $a/b=1.5$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	28.103	14.988	11.64	9.140	7.898	6.905
	Thai et Choi (2012)	28.19	15.03	11.4234	8.47	7.29	6.61
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	28.15	14.76	11.06	8.25	7.20	6.56
	Zenkour et Aljadani (2018)	28.1995	15.0343	11.4233	8.4727	7.2952	6.6105
	Présente	28.1996	15.0344	11.4234	8.4727	7.2952	6.6106
10	FSDT	40.735	20.797	16.20	13.344	11.92	10.487
	Thai et Choi (2012)	40.74	20.80	16.07	12.95	11.53	10.29
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	40.58	20.57	15.81	12.74	11.42	10.22
	Zenkour et Aljadani (2018)	40.7475	20.8024	16.0792	12.9500	11.537	10.2957
	Présente	40.7476	20.8024	16.0793	12.9501	11.5379	10.2958
20	FSDT	45.892	23.028	17.96	15.07	13.66	12.05
	Thai et Choi (2012)	45.89	23.02	17.92	14.94	13.52	11.98
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	45.64	22.85	17.75	14.81	13.425	11.90
	Zenkour et Aljadani (2018)	45.8930	23.0285	17.9221	14.947	13.5273	11.9843
	Présente	45.8930	23.0286	17.9221	14.947	13.5273	11.9843
50	FSDT	47.579	23.74	18.524	15.646	14.23	12.574
	Thai et Choi (2012)	47.57	23.74	18.51	15.628	14.21	12.56
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	47.29	23.59	18.39	15.51	14.12	12.48
	Zenkour et Aljadani (2018)	47.5786	23.7414	18.5177	15.6237	14.2156	12.5628
	Présente	47.5786	23.7414	18.5177	15.624	14.2156	12.5629
100	FSDT	47.83	23.847	18.608	15.73	14.326	12.653
	Thai et Choi (2012)	47.82	23.84	18.60	15.72	14.31	12.65
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	47.53	23.69	18.48	15.62	14.23	12.57
	Zenkour et Aljadani (2018)	47.8297	23.8469	18.6061	15.7255	14.3198	12.6501
	Présente	47.8297	23.8469	18.6061	15.726	14.3198	12.6502

<sup>a</sup>Mode :  $(m, n) = (2, 1)$

D'autre part, l'augmentation du rapport géométrique et du rapport côté sur épaisseur conduit à une augmentation du flambement critique et peut également modifier les modes de flambement. De plus, il est évident que la charge critique de flambement sous compression uniaxiale dans les tableaux IV.1 à IV.4 avait des valeurs plus élevées que le flambement critique sous compression biaxiale dans les tableaux IV.5 à IV.8 et la compression et la tension dans les tableaux IV.9 à IV.12.

**Tableau IV.4:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression uniaxiale le long de l'axe  $x$  ( $a/b=2$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	37.35 <sup>b</sup>	20.55 <sup>b</sup>	15.92 <sup>b</sup>	12.09 <sup>b</sup>	10.16 <sup>c</sup>	8.83 <sup>c</sup>
	Thai et Choi (2012)	37.74 <sup>b</sup>	20.74 <sup>b</sup>	15.58 <sup>b</sup>	10.95 <sup>b</sup>	9.15 <sup>c</sup>	8.39 <sup>c</sup>
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	37.67 <sup>b</sup>	20.29 <sup>b</sup>	14.99 <sup>b</sup>	10.65 <sup>b</sup>	9.04 <sup>c</sup>	8.317 <sup>c</sup>
	Zenkour et Aljadani (2018)	37.740 <sup>b</sup>	20.749 <sup>b</sup>	15.581 <sup>b</sup>	10.955 <sup>b</sup>	9.150 <sup>c</sup>	8.398 <sup>c</sup>
	Présente	37.741 <sup>b</sup>	20.749 <sup>b</sup>	15.582 <sup>b</sup>	10.955 <sup>b</sup>	9.151 <sup>c</sup>	8.399 <sup>c</sup>
10 <sup>a</sup>	FSDT	64.053	32.884	25.607	20.963	18.642	16.39
	Thai et Choi (2012)	64.08	32.89	25.37	20.21	17.92	16.02
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	63.78	32.46	24.86	19.84	17.72	15.90
	Zenkour et Aljadani (2018)	64.0842	32.8979	25.3726	20.2122	17.9227	16.0279
	Présente	64.0842	32.898	25.3727	20.2123	17.9227	16.028
20 <sup>a</sup>	FSDT	74.31	37.36	29.132	24.41	22.075	19.47
	Thai et Choi (2012)	74.3	37.35	29.05	24.14	21.81	19.33
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	73.80	37.00	28.71	23.86	21.61	19.18
	Zenkour et Aljadani (2018)	74.3140	37.3564	29.0522	24.1412	21.811	19.3385
	Présente	74.3140	37.3564	29.0523	24.141	21.8113	19.3385
50 <sup>a</sup>	FSDT	77.80	38.83	30.30	25.58	23.275	20.55
	Thai et Choi (2012)	77.80	38.83	30.28	25.53	23.227	20.53
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	77.20	38.51	30.02	25.32	23.04	20.36
	Zenkour et Aljadani (2018)	77.8003	38.8337	30.2857	25.5363	23.2278	20.5301
	Présente	77.8004	38.8338	30.2858	25.536	23.2278	20.5301
100 <sup>a</sup>	FSDT	78.33	39.05	30.47	25.76	23.46	20.72
	Thai et Choi (2012)	78.32	39.05	30.47	25.74	23.45	20.71
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	77.71	38.74	30.22	25.54	23.26	20.55
	Zenkour et Aljadani (2018)	78.3256	39.0545	30.4707	25.7491	23.4455	20.7126
	Présente	78.3257	39.0546	30.4707	25.749	23.4455	20.7126

<sup>a</sup>Mode:  $(m, n) = (2, 1)$ , <sup>b</sup>Mode:  $(m, n) = (3, 1)$ , <sup>c</sup>Mode:  $(m, n) = (4, 1)$

**Tableau IV.5:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=0.5$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	5.375	2.73	2.13	1.762	1.579	1.39
	Thai et Choi (2012)	5.376	2.733	2.116	1.719	1.537	1.369
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	5.371	2.715	2.092	1.700	1.527	1.364
	Zenkour et Aljadani (2018)	5.3762	2.7330	2.1160	1.7187	1.5370	1.3692
	Présente	5.3764	2.7331	2.1161	1.7187	1.5370	1.3692
10	FSDT	5.924	2.969	2.316	1.947	1.765	1.558
	Thai et Choi (2012)	5.926	2.969	2.312	1.933	1.752	1.551
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	5.918	2.961	2.302	1.925	1.747	1.548
	Zenkour et Aljadani (2018)	5.9242	2.9688	2.3117	1.9331	1.7516	1.5509
	Présente	5.9243	2.9689	2.3117	1.9332	1.7517	1.551
20	FSDT	6.079	3.034	2.368	1.999	1.819	1.606
	Thai et Choi (2012)	6.079	3.034	2.367	1.996	1.815	1.604
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	6.072	3.029	2.362	1.991	1.812	1.602
	Zenkour et Aljadani (2018)	6.0794	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152	1.6043
	Présente	6.0794	3.0344	2.3665	1.9955	1.8152	1.6044
50	FSDT	6.124	3.053	2.382	2.014	1.834	1.620
	Thai et Choi (2012)	6.124	3.053	2.382	2.014	1.834	1.620
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	6.117	3.049	2.379	2.011	1.831	1.618
	Zenkour et Aljadani (2018)	6.1243	3.0533	2.3823	2.0137	1.8338	1.6199
	Présente	6.1244	3.0533	2.3823	2.0137	1.8338	1.618
100	FSDT	6.131	3.056	2.385	2.016	1.837	1.622
	Thai et Choi (2012)	6.131	3.056	2.385	2.016	1.837	1.622
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	6.123	3.052	2.32	2.014	1.834	1.620
	Zenkour et Aljadani (2018)	6.1308	3.0560	2.3846	2.0163	1.8365	1.6222
	Présente	6.1308	3.0560	2.3846	2.0164	1.8365	1.6222

**Tableau IV.6:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=1$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	8.006	4.11	3.201	2.620	2.330	2.048
	Thai et Choi (2012)	8.011	4.112	3.172	2.527	2.240	2.004
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	8.001	4.073	3.120	2.487	2.221	1.994
	Zenkour et Aljadani (2018)	8.0105	4.1122	3.1715	2.5265	2.2403	2.0034
	Présente	8.011	4.1122	3.1716	2.5265	2.2403	2.0035
10	FSDT	9.289	4.670	3.641	3.051	2.76	2.434
	Thai et Choi (2012)	9.289	4.670	3.632	3.018	2.726	2.417
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	9.273	4.650	3.608	2.998	2.715	2.410
	Zenkour et Aljadani (2018)	9.2892	4.6695	3.6315	3.0176	2.7264	2.4173
	Présente	9.2892	4.6696	3.6315	3.0177	2.7264	2.4173

## Suite Tableau IV.6

20	FSDT	9.676	4.834	3.771	3.182	2.893	2.554
	Thai et Choi (2012)	9.676	4.834	3.769	3.172	2.883	2.549
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	9.658	4.821	3.757	3.162	2.876	2.544
	Zenkour et Aljadani (2018)	9.6763	4.8337	3.7685	3.1723	2.8834	2.5494
	Présente	9.6764	4.8337	3.7686	3.1724	2.8834	2.5494
50	FSDT	9.791	4.882	3.809	3.220	2.932	2.590
	Thai et Choi (2012)	9.791	4.882	3.809	3.219	2.931	2.589
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	9.772	4.872	3.801	3.212	2.925	2.584
	Zenkour et Aljadani (2018)	9.7907	4.8818	3.8088	3.2186	2.9306	2.5890
	Présente	9.7907	4.8818	3.8088	3.2186	2.9307	2.5891
100	FSDT	9.807	4.889	3.815	3.226	2.938	2.595
	Thai et Choi (2012)	9.807	4.889	3.815	3.225	2.938	2.595
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	9.788	4.879	3.807	3.219	2.932	2.590
	Zenkour et Aljadani (2018)	9.8072	4.8887	3.8146	3.2253	2.9375	2.5948
	Présente	9.8073	4.8888	3.8147	3.2254	2.9376	2.5948

**Tableau IV.7:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=1.5$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	11.668	6.074	4.725	3.81	3.352	2.941
	Thai et Choi (2012)	11.682	6.080	4.664	3.618	3.172	2.851
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	11.665	6.000	4.559	3.544	3.138	2.833
	Zenkour et Aljadani (2018)	11.6819	6.0799	4.6636	3.6175	3.1718	2.8510
	Présente	11.682	6.0799	4.6637	3.6176	3.1718	2.8510
10	FSDT	14.607	7.379	5.752	4.794	4.318	3.806
	Thai et Choi (2012)	14.608	7.379	5.728	4.712	4.238	3.766
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	14.571	7.331	5.671	4.666	4.212	3.749
	Zenkour et Aljadani (2018)	14.6084	7.3793	5.7278	4.7124	4.2384	3.7657
	Présente	14.6084	7.3793	5.7279	4.7124	4.2384	3.7657
20	FSDT	15.589	7.798	6.083	5.124	4.654	4.108
	Thai et Choi (2012)	15.589	7.798	6.076	5.101	4.630	4.096
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	15.542	7.766	6.046	5.075	4.611	4.082
	Zenkour et Aljadani (2018)	15.5887	7.7976	6.0761	5.1006	4.6299	4.0961
	Présente	15.5887	7.7977	6.0761	5.1006	4.63	4.0961
50	FSDT	15.888	7.924	6.183	5.225	4.757	4.201
	Thai et Choi (2012)	15.888	7.924	6.182	5.221	4.753	4.200
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	15.837	7.897	6.160	5.203	4.737	4.186
	Zenkour et Aljadani (2018)	15.8875	7.9235	6.1815	5.2212	4.7530	4.1994
	Présente	15.8876	7.9236	6.1815	5.2212	4.7531	4.1995
100	FSDT	15.931	7.942	6.197	5.240	4.772	4.215
	Thai et Choi (2012)	15.931	7.942	6.197	5.239	4.771	4.215
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	15.880	7.916	6.177	5.222	4.756	4.201
	Zenkour et Aljadani (2018)	15.9311	7.9419	6.1968	5.2389	4.7712	4.2146
	Présente	15.9312	7.9419	6.1969	5.2389	4.7712	4.2147



**Tableau IV.8:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression biaxiale ( $a/b=2$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	15.686	8.291	6.443	5.11	4.44	3.889
	Thai et Choi (2012)	15.724	8.309	6.335	4.775	4.138	3.739
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	15.698	8.172	6.156	4.661	4.088	3.712
	Zenkour et Aljadani (2018)	15.7234	8.3091	6.3353	4.7753	4.1382	3.7392
	Présente	15.7235	8.3092	6.3353	4.7754	4.1382	3.7392
10	FSDT	21.50	10.930	8.518	7.048	6.317	5.562
	Thai et Choi (2012)	21.505	10.932	8.464	6.875	6.148	5.477
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	21.429	10.830	8.345	6.782	6.095	5.444
	Zenkour et Aljadani (2018)	21.5049	10.9323	8.4643	6.8749	6.1481	5.4768
	Présente	21.505	10.9323	8.4644	6.875	6.1481	5.4769
20	FSDT	23.697	11.875	9.263	7.787	7.061	6.231
	Thai et Choi (2012)	23.697	11.875	9.247	7.737	7.007	6.204
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	23.590	11.802	9.177	7.674	6.964	6.171
	Zenkour et Aljadani (2018)	23.6970	11.8755	9.2469	7.7326	7.0067	6.2039
	Présente	23.6970	11.8755	9.2469	7.7327	7.0067	6.204
50	FSDT	24.394	12.170	9.496	8.022	7.302	6.449
	Thai et Choi (2012)	24.394	12.170	9.493	8.013	7.293	6.444
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	24.276	12.108	9.442	7.970	7.255	6.412
	Zenkour et Aljadani (2018)	24.3944	12.1699	9.4931	8.0132	7.2925	6.4440
	Présente	24.3944	12.167	9.4931	8.0132	7.2926	6.4440
100	FSDT	24.497	12.213	9.530	8.0573	7.338	6.481
	Thai et Choi (2012)	24.497	12.213	9.529	8.055	7.335	6.480
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	24.378	12.153	9.482	8.015	7.299	6.448
	Zenkour et Aljadani (2018)	24.4974	12.2132	9.5293	8.0549	7.3353	6.4798
	Présente	24.4974	12.2132	9.5294	8.055	7.3353	6.4799

**Tableau IV.9:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=0.5$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	8.96	4.554	3.549	2.937	2.632	2.317
	Thai et Choi (2012)	8.960	4.555	3.527	2.865	2.562	2.282
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	8.953	4.525	3.487	2.833	2.545	2.274
	Zenkour et Aljadani (2018)	8.9604	4.5551	3.5268	2.8645	2.5617	2.2820
	Présente	8.9604	4.5551	3.5268	2.8646	2.5617	2.2820
10	FSDT	9.874	4.948	3.860	3.245	2.942	2.596
	Thai et Choi (2012)	9.874	4.948	3.853	3.222	2.919	2.585
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	9.863	4.934	3.837	3.208	2.911	2.580
	Zenkour et Aljadani (2018)	9.8737	4.9481	3.8528	3.2219	2.9194	2.5849
	Présente	9.8738	4.9481	3.8529	3.2219	2.9195	2.5849
20	FSDT	10.132	5.057	3.946	3.332	3.031	2.677
	Thai et Choi (2012)	10.132	5.057	3.944	3.326	3.025	2.674
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	10.120	5.049	3.936	3.319	3.020	2.670
	Zenkour et Aljadani (2018)	10.132	5.0573	3.9442	3.3259	3.0253	2.6739
	Présente	10.1323	5.0574	3.9442	3.3259	3.0253	2.6739
50	FSDT	10.207	5.089	3.971	3.357	3.057	2.700
	Thai et Choi (2012)	10.207	5.089	3.971	3.356	3.056	2.700
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	10.195	5.082	3.965	3.352	3.052	2.697
	Zenkour et Aljadani (2018)	10.2072	5.0888	3.9705	3.3562	3.0563	2.6999
	Présente	10.2073	5.0888	3.9706	3.3562	3.0564	2.700
100	FSDT	10.218	5.093	3.974	3.361	3.061	2.704
	Thai et Choi (2012)	10.218	5.093	3.974	3.361	3.061	2.704
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	10.206	5.087	3.969	3.356	3.057	2.700
	Zenkour et Aljadani (2018)	10.2180	5.0933	3.9743	3.3606	3.0608	2.7037
	Présente	10.2181	5.0934	3.9744	3.3606	3.0609	2.7037

**Tableau IV.10:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=1$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5 <sup>a</sup>	FSDT	26.143	13.82	10.74	8.515	7.406	6.482
	Thai et Choi (2012)	26.20	13.84	10.55	7.95	6.89	6.23
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	26.16	13.62	10.26	7.76	6.81	6.18
	Zenkour et Aljadani (2018)	26.2057	13.8486	10.5589	7.9589	6.8970	6.2320
	Présente	26.2058	13.8486	10.5589	7.959	6.8970	6.2320
10 <sup>a</sup>	FSDT	35.83	18.22	14.20	11.75	10.53	9.27
	Thai et Choi (2012)	35.84	18.22	14.10	11.45	10.24	9.12
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	35.71	18.04	13.90	11.30	10.15	9.07
	Zenkour et Aljadani (2018)	35.8416	18.2205	14.1072	11.4582	10.2468	9.1281
	Présente	35.8416	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468	9.1281
20 <sup>a</sup>	FSDT	39.49	19.79	15.44	12.98	11.77	10.38
	Thai et Choi (2012)	39.49	19.79	15.41	12.88	11.67	10.34
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	39.31	19.67	15.29	12.79	11.60	10.28
	Zenkour et Aljadani (2018)	39.4950	19.7925	15.4115	12.8877	11.6778	10.3399
	Présente	39.4951	19.7925	15.4115	12.887	11.6779	10.3399
50 <sup>a</sup>	FSDT	40.66	20.28	15.83	13.37	12.17	10.75 <sup>b</sup>
	Thai et Choi (2012)	40.65	20.283	15.82	13.35	12.15	10.74 <sup>b</sup>
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	40.46	20.179	15.73	13.28	12.09	10.68 <sup>b</sup>
	Zenkour et Aljadani (2018)	40.6573	20.2832	15.8218	13.355	12.1542	10.740 <sup>b</sup>
	Présente	40.6573	20.2833	15.8219	13.355	12.1543	10.740 <sup>b</sup>
100 <sup>a</sup>	FSDT	40.83	20.36	15.88	13.43	12.23	10.80 <sup>b</sup>
	Thai et Choi (2012)	40.82	20.35	15.88	13.42	12.22	10.79 <sup>b</sup>
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	40.62	20.25	15.80	13.35	12.16	10.74 <sup>b</sup>
	Zenkour et Aljadani (2018)	40.8290	20.3553	15.8822	13.4249	12.2255	10.799 <sup>b</sup>
	Présente	40.8291	20.3554	15.8823	13.425	12.2255	10.799 <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Mode :  $(m, n) = (2, 1)$ , <sup>b</sup>Mode :  $(m, n) = (1, 2)$

**Tableau IV.11:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=1.5$ ).

$a/h$	Théories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5 <sup>a</sup>	FSDT	28.82	15.68	12.16	9.34	7.96	6.94
	Thai et Choi (2012)	29.02	15.78	11.90	8.52	7.24	6.60
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	28.97	15.45	11.47	8.29	7.15	6.54
	Zenkour et Aljadani (2018)	29.0249	15.7822	11.9008	8.5249	7.2421	6.6007
	Présente	29.0249	15.7823	11.9009	8.525	7.2422	6.6008
10	FSDT	37.98	19.18	14.96	12.46	11.23	9.90
	Thai et Choi (2012)	37.982	19.186	14.893	12.252	11.020	9.791
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	37.884	19.060	14.745	12.133	10.650	9.748
	Zenkour et Aljadani (2018)	37.9819	19.1862	14.8924	12.2522	11.0198	9.7909
	Présente	37.9819	19.1863	14.8925	12.2523	11.020	9.7909
20	FSDT	40.53	20.27	15.82	13.323	12.1	10.68
	Thai et Choi (2012)	40.531	20.274	15.798	13.262	12.038	10.650
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	40.408	20.190	15.718	13.194	11.988	10.612
	Zenkour et Aljadani (2018)	40.5306	20.2739	15.7979	13.2615	12.0378	10.6499
	Présente	40.5307	20.274	15.798	13.262	12.0379	10.650
50	FSDT	41.31	20.60	16.07	13.58	12.37	10.92
	Thai et Choi (2012)	41.308	20.601	16.072	13.575	12.358	10.919
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	41.177	20.532	16.016	13.528	12.317	10.883
	Zenkour et Aljadani (2018)	41.3076	20.6013	16.0719	13.575	12.3580	10.9186
	Présente	41.3076	20.6013	16.0719	13.575	12.3580	10.9186
100	FSDT	41.42	20.65	16.11	13.62	12.41	10.96
	Thai et Choi (2012)	41.421	20.649	16.112	13.621	12.405	10.958
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	41.289	20.582	16.059	13.577	12.365	10.923
	Zenkour et Aljadani (2018)	41.4210	20.6489	16.1118	13.621	12.4051	10.9581
	Présente	41.4211	20.6489	16.1118	13.621	12.4052	10.9581

<sup>a</sup>Mode : (m, n)=(1,2)

**Tableau IV.12:** Charge critique de flambement adimensionnelle  $\bar{N}_{cr}$  d'une plaque FGM sous compression et traction ( $a/b=2$ ).

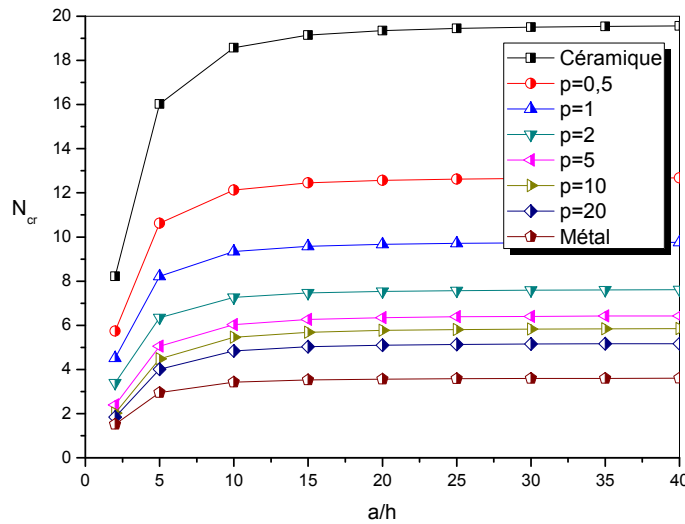
$a/h$	Theories	$P$					
		0	1	2	5	10	20
5	FSDT	26.14	13.82	10.74	8.51	7.41	6.48
	Thai et Choi (2012)	26.206	13.849	10.559	7.959	6.897	6.232
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	26.164	13.620	10.261	7.768	6.814	6.187
	Zenkour et Aljadani (2018)	26.2057	13.8486	10.5589	7.9589	6.8970	6.2320
	Présente	26.2058	13.8486	10.5589	7.959	6.8970	6.2320
10	FSDT	35.83	18.22	14.20	11.75	10.53	9.27
	Thai et Choi (2012)	35.842	18.221	14.107	11.458	10.247	9.128
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	35.715	18.050	13.909	11.303	10.159	9.073
	Zenkour et Aljadani (2018)	35.8416	18.2205	14.1072	11.4582	10.2468	9.1281
	Présente	35.8416	18.2206	14.1073	11.4583	10.2468	9.1281
20	FSDT	39.49	19.79	15.44	12.98	11.77	10.38
	Thai et Choi (2012)	39.495	19.793	15.412	12.888	11.678	10.340
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	39.317	19.670	15.295	12.791	11.607	10.286
	Zenkour et Aljadani (2018)	39.4950	19.7925	15.4115	12.887	11.6778	10.3399
	Présente	39.4951	19.7925	15.4115	12.888	11.6779	10.340
50	FSDT	40.66	20.28	15.83	13.37	12.17	10.75
	Thai et Choi (2012)	40.657	20.283	15.822	13.355	12.154	10.740
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	40.460	20.179	15.737	13.284	12.092	10.687
	Zenkour et Aljadani (2018)	40.6573	20.2832	15.8218	13.355	12.1542	10.7400
	Présente	40.6574	20.2833	15.8219	13.355	12.1543	10.7401
100	FSDT	40.83	20.36	15.88	13.43	12.23	10.80
	Thai et Choi (2012)	40.829	20.355	15.882	13.425	12.226	10.800
	Sidda Reddy <i>et al.</i> (2013)	40.629	20.254	15.803	13.358	12.165	10.747
	Zenkour et Aljadani (2018)	40.8290	20.3553	15.8822	13.4249	12.2255	10.7998
	Présente	40.8291	20.3554	15.8823	13.425	12.2256	10.7998

### IV.2.2 Étude paramétrique

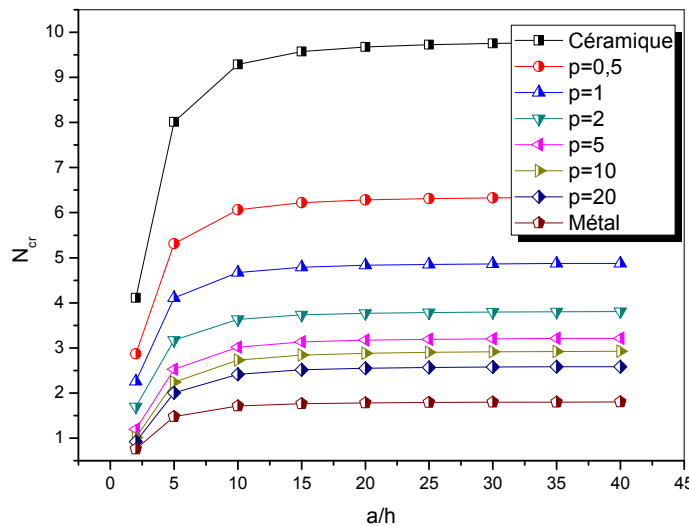
L'influence des paramètres géométriques  $a/h$  et  $a/b$  sur la charge critique de flambement adimensionnelle d'une plaque rectangulaire en FGM, simplement appuyée est présentée avec plusieurs conditions de chargement et diverses valeurs de l'indice de gradient  $p$  dans les figures IV.2 à IV.5. La plaque FGM sous considération est constituée d'Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Les figures IV.1 et IV.2 illustrent la charge critique du flambage adimensionnelle d'une plaque FGM sous un chargement de forme uniaxiale et biaxiale de compression dans le plan, respectivement, en fonction de la variation du rapport d'élancement avec plusieurs valeurs

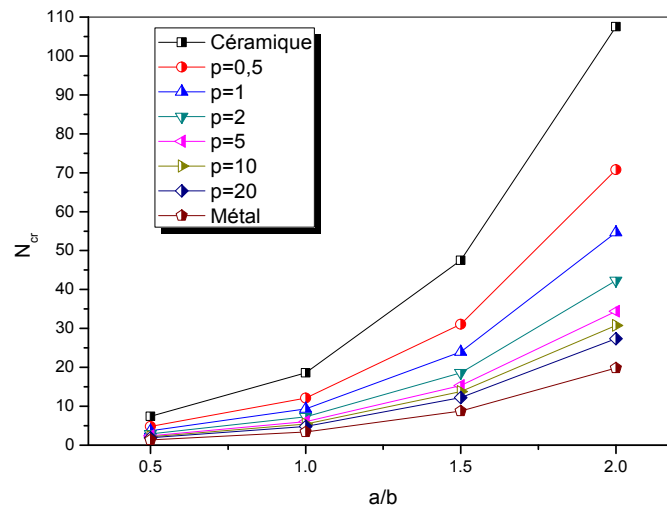
d'indice de gradient  $p$ . L'impact de l'épaisseur de la plaque est perceptible sur le flambement critique lorsque ( $a/h < 10$ ). Le flambement critique augmente à mesure que la valeur du côté sur l'épaisseur augmente. Au fur et à mesure que la plaque devient plus mince, il n'y a pas de changements majeurs dans le flambement. En général, la charge critique du flambement d'une plaque FGM plus fine est supérieure à celle d'une plaque FG épaisse.



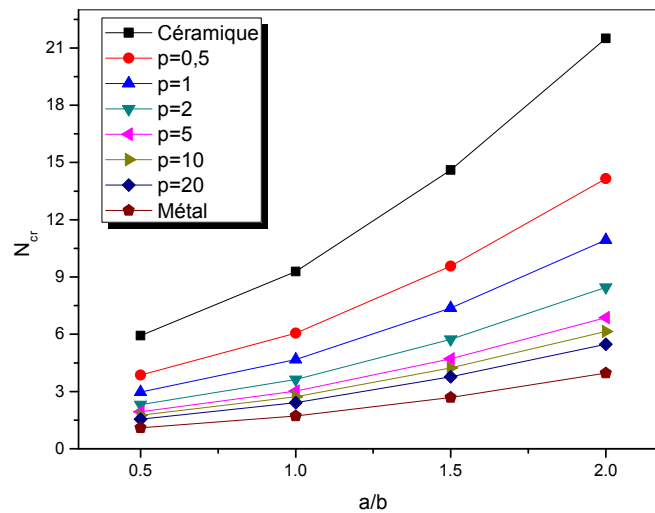
**Figure IV.1:** L'influence des rapports d'élanement ( $a/h$ ) sur charge critique du flambement adimensionnelle ( $\bar{N}_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression uniaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque  $a/b=1$ .



**Figure IV.2:** L'influence des rapports d'élanement ( $a/h$ ) sur charge critique du flambement adimensionnelle ( $\bar{N}_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression biaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $k$ ) lorsque  $a/b=1$ .

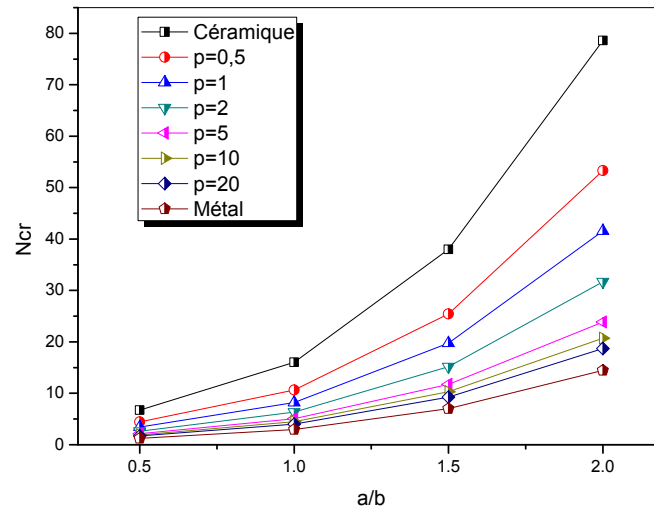


**Figure IV.3** : L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $\bar{N}_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression uniaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque  $a/h = 10$ .

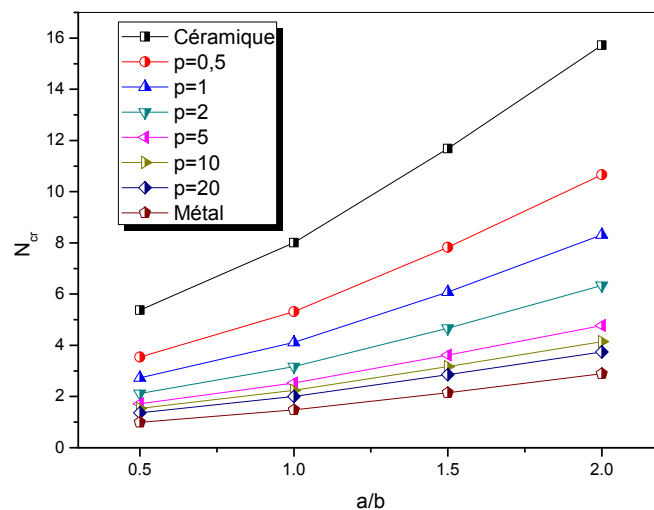


**Figure IV.4** : L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $\bar{N}_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression biaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $n$ ) lorsque  $a/h = 10$ .

Les figures IV.3 et IV.4 illustrent la charge critique du flambement adimensionnelle d'une plaque moyennement épaisse dans le cas d'un chargement mécanique uniaxiale et biaxiale de compression dans le plan, respectivement, en fonction du rapport géométrique avec plusieurs valeurs d'indice de gradient  $p$ . on observe que la charge critique du flambement augmente progressivement à mesure que le rapport augmente. En outre, la compression uniaxiale provoque plus de flambement critique que la compression biaxiale.



**Figure IV.5 :** L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $\bar{N}_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression uniaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque  $a/h = 5$ .



**Figure IV.6 :** L'influence du rapport géométrique ( $a/b$ ) sur la charge critique du flambement adimensionnelle ( $\bar{N}_{cr}$ ) d'une plaque FGM sous compression biaxiale pour plusieurs indices de gradient ( $p$ ) lorsque  $a/h = 5$ .



Les figures IV.5 et IV.6 illustrent la charge critique du flambement adimensionnelle d'une plaque épaisse en FGM dans le cas d'un chargement mécanique uniaxiale et biaxiale de compression dans le plan, respectivement, en fonction du rapport géométrique avec plusieurs valeurs d'indice de gradient  $p$ . on conclut que la charge du flambement pour le type de plaque épaisse est moins que celle induite dans la plaque moyennement épaisse.

### IV.3. Conclusion

L'étude des charges critiques du flambement dans les plaques FGM simplement appuyées a été réalisée en tenant compte de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé HSDT à quatre variables. Les propriétés mécaniques de la plaque ont été prises comme variant à travers l'épaisseur suivant une simple loi de puissance. La méthode de Navier a permis la résolution du système d'équations différentielles et l'obtention des charges critiques. De ce fait, le programme de calcul élaboré a été validé par comparaison avec des résultats déjà publiés. Par la suite, une étude paramétrique de la plaque a été réalisée, en tenant compte des variables suivantes :

- L'indice de gradient qui contrôle la distribution des constituants des matériaux;
- Le rapport d'élanement  $a/h$ ;
- Le rapport géométrique  $a/b$  ;
- La condition de chargement mécanique.

Il a été noté que les charges critiques du flambement des plaques FGM augmentent lorsque l'indice de gradient  $p$  augmente (en augmentant la concentration du métal et en diminuant celle de la céramique). La géométrie de la plaque influe aussi sur les charges critiques calculées : plus le rapport géométrique est grand, plus les charges critiques adimensionnelles sont importantes. L'accroissement de ces charges est toujours significatif pour tous les rapports d'élanement et les indices de gradient.

# CONCLUSION GENERALE

---

### Conclusion générale

Les plaques en matériaux à gradient fonctionnel représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses dans le domaine industriel. Il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir des matériaux avec des meilleures propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail a été d'apporter une contribution à l'étude des plaques à gradient fonctionnel (FGM) sous différentes conditions de chargement mécanique. A cet effet, une nouvelle théorie raffinée de déformation en cisaillement d'ordre élevé a été développée pour analyser le comportement de flambement des plaques simplement appuyées en FGM. En se basant sur des hypothèses simplificatrices, et en introduisant un terme intégral indéterminé dans la cinématique du champ de déplacement proposée, le nombre de variables et les équations de mouvement de la présente théorie sont réduits à quatre, ce qui rend le modèle simple et efficace à utiliser. La théorie tient en compte d'une distribution cubique et parabolique de la contrainte de cisaillement transversale, et répond aux conditions aux limites sans contraintes sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Les propriétés du matériau sont supposées varier en douceur dans le sens de l'épaisseur selon une gradation de la loi de puissance. Les équations différentielles d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe d'énergie potentielle totale, ensuite la méthode de Navier est employée pour résoudre le système équations, dont le but d'examiner le problème de flambement des plaques FGM pour des conditions aux limites simplement appuyées. Les résultats obtenus sont en excellent accord avec celles de différentes théories de la plaque et plus proches de modèles de déformation en cisaillement d'ordre élevé dans de nombreux cas. De plus, à travers cette étude comparative et paramétrique l'influence de divers paramètres sur la charge critique de flambement est validée et clairement discutée. En conclusion, nous pouvons dire que la théorie proposée est simple et efficace dans l'analyse du comportement statique dans le cas du flambement des plaques rectangulaires en FGM.

Les perspectives ouvertes par ce travail sont les suivantes :

- Utilisation de la présente théorie raffinée pour d'autres types d'appuis ;
- Etude de l'effet thermique et hygrothermique, en utilisant la présente approche pour analyser le comportement mécanique des structures FGM ;

## **Conclusion générale**

---

- L'amélioration du modèle analytique afin qu'il permette de déterminer le comportement des plaques FGM en tenant compte l'effet d'étirement de l'épaisseur.
- Il serait intéressant d'élargir les modèles numériques élaborés par des modèles numériques basées sur les éléments finis permettant de résoudre des formes de structure FGM plus complexes.

# REFERENCES

---

### Références

- ABDIZADEH. H, Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex: "Composites Laminaires Tri-Couches à Base D'Alumine", Thèse de Doctorat d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon, France, 212p, 1997.
- Abrate. S, "Functionally graded plates behave like homogeneous plates", *Composites B*, vol. 39, no. 1, pp. 151-158, 2008.
- Ait Atmane. H, Tounsi. A, Mechab. I, Adda Bedia. E. A, "Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory". *Int. J. Mech. Mater.* vol. 6 (2): 113-121, 2010.
- Aysha. C.P.M.S, Varghese. B, and Baby. A, "A Review on Functionally Graded Materials, the International Journal of Engineering and Science", vol. 3(6):90-101, ISSN: 2329-1805, 2014.
- Bagherizadeh.E, Kiani.Y, and Eslami.M. R, "Mechanical buckling of functionally graded material cylindrical shells surrounded by Pasternak elastic foundation", *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3063–3071, 2011.
- Bao. G, Wang. L, "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J. Solids Structures*, vol.32 (19): 2853–2871, 1995.
- Belabed. Z, Houari. M.S.A, Tounsi.A, Mahmoud.S.R and Anwar Bég. O, "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos.: Part B*, vol. 60, 274-283, 2014.
- Belkhouja. Y, et al. « An exponential-trigonometric higher order shear deformation theory (HSDT) for bending, free vibration, and buckling analysis of functionally graded materials (FGMs) plates », *Advanced Composites Letters*, vol. 29, 2020.
- Bennoun. M, Houari. M. S. A, and Tounsi. A, "A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates", *Mech. Adv. Mater. Struct*, vol. 23(4), 423-431, 2016.
- Bishop. A, Lin. C. Y, "Navaratnam.M, Rawlings.R.D, McShane.H.B, A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process", *Journal of Materials Science Letters*; vol. 12(19), 1516-18, 1993.
- Boch. P, Chartier. T, Huttepain. M, "Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram.* Vol. 69 (8):191 -192, 1986.
- Bodaghi. M, and Saidi. A. R, "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory", *Applied*

- Mathematical Modelling*, vol. 34, no. 11, pp. 3659-3673, 2010.
- Bohidar. S. K, Sharma. R, and Mistra. P. R, "Functionally Graded Materials: A Critical Review, *International Journal of Scientific Footprints*", ISSN 2310-4090, 2014.
- Boussoula. A, Boucham. B, Bourada. M, Bourada. F, Tounsi. A, Bousahla. A. A. and Tounsi. A, "A simple nth-order shear deformation theory for thermomechanical bending analysis of different configurations of FG sandwich plates", *Smart Structures and Systems* vol. 25, no. 2, pp. 197-218, 2020.
- Bulatova Regina, PhD Thesis, Experimental Tape Casting of Adjacenty Graded Materials for Magnetic Refrigeration, Department of Energy Conversion and Storage Technical University of Denmark, 2014.
- Bunshah. R. F, (ed.). *Handbook of Deposition Technologies for Films and Coatings*, Second Edition, Noyes Publications, Park Bridge, NJ, 1994.
- Croce. L, Della et Venini. P, "Finite elements for functionally graded Reissner- Mindlin plates", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, 9-11, 2004.
- Fallah. A, Aghdam. M. M. et Kargarnovin. M. H, "Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 83(2), 2013.
- Feldman. E, and Aboudi. J, "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading" , *Composite Structures*, vol. 38, no. 1-4, pp. 29-36, 1997.
- Ghannadpour. S. A. M, Ovesy. H. R, and Nassirnia. M, "Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method", *Computers and Structures*, vol. 108-109, pp. 93-99, 2012.
- Groves J. F. and Wadley H. N. F., *Functionally Graded Materials Synthesis via*, (1997)
- Hamidi. A, Houari. M.S.A, Mahmoud. S.R, and Tounsi. A, "A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates, *Steel Compos. Struct., Int. J*, vol. 18(1), 235-253, 2015.
- Hebali. H, Tounsi. A, Houari. M.S.A, Bessaim. A, and Adda Bedia. E.A, "A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates", *J. Eng. Mech., ASCE*, vol. 140(2), 374- 383, 2014.
- Hosseini-Hashemi. S, Fadaee. M, et Atashipour. S. R, "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53(1), p. 11-22, 2011.
- Hosseini-Hashemi. S, Khorshidi. K, and Amabili. M, "Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, no. 1-2, pp. 318-342,

2008.

Hsiung. L. M, Zang. J. Z, McIntyre. D. C, Golz. J.W, Halpern.B. I, "Schmitt J. J., and Wadley H. N. G., Structure and Properties of Jet Vapour Deposited Aluminium- Aluminium Oxide Nanoscale Laminates", *Journal of Scripta Met.*, vol. 29:293-298. 1993.

Javaheri. R and Eslami. M.R, "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory", *Journal of Thermal Stresses*, vol. 25, no. 7, pp. 603-625, 2002.

Javaheri. R, & Eslami. M.R, "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading". *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 82(4), 277-283, 2002.

Javaheri. R, and Eslami. M. R, "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 82, no. 4, pp. 277-283, 2002.

Karama. M, Afaq. K.S, Mistou. S, "Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity", *Int. J. Solids Structures*; vol. 40 (6): 1525-1546, 2003.

KhorK. A, Dong. L, and Gu Y. W, "Plasma Sprayed Functionally Graded Thermal Barrier Coatings", *Materials Letters*, vol. 38:437-444, 1999.

Koizumi. M, "The concept of FGM", *Ceram Trans, Funct Gradient Mater*, vol. 34, 3-10, 1993.

Liew. K. M, Xiang. Y. et Kitipornchai. S, "Transverse vibration of thick rectangular plates-I. Comprehensive sets of boundary conditions", *Computers and Structures*, vol. 49(1), 1993.

Lo. K.H & Christensen. R.M, "Une théorie d'ordre supérieur de la déformation de la plaque". *Partie 1: plates homogène*, vol. 44, N° 4, pp 669-676, 1977.

Love. A. E. H, "On the small free vibrations and deformations of elastic shells", *Philosophical trans. of the Royal Society. London*, 1888, vol. A, (17), pp. 491-549, 1888.

Ma. L. S. and Wang. T. J, "Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, no. 13-14, pp. 3311-3330, 2003.

Mahamood. R. M, Akinlabi. E. T , "Functionally Graded Materials", Springer International Publishing AG, 118 p, (Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering), 2017.

Mahdavian. M, "Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading" , *Journal of Solid Mechanics*, vol. 1, no. 3, pp. 213-225, 2009.

Mantari. JL, Soares. CG. "A quasi-3D tangential shear deformation theory with four unknowns for functionally graded plates", *Acta Mech*, 2014.



- Marple. B. R, and Tuffe. S, "Graded casting for producing smoothly varying gradients in materials". *Ibid*, 159-166, 1997.
- Mévrel. R, "Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine. *PlastOx 2007 - Mécanismes et Mécanique des Interactions Plasticité - Environnement*, 255-264, 2009.
- Mindlin. R. D, "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- Mindlin. R. D, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- Miyamoto. Y, "Applications of FGM in Japan, in *Functionally Graded Materials: Manufacture, Properties, and Applications*, (eds. A. Ghosh et al.) *Ceramic Transactions, Am. Ceram*", vol, 76, 171-189, 1997.
- Miyamoto. Y, Kaysser. W. A, Rabin. B. H, Kawasaki. A, Ford Renee. G, "FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS, Design, Processing and Applications". [éd.] Miyamoto Y. Media New York : LLC, 1999.
- Miyamoto.Y, Kaysserv W. A, Rabin. B. H, Kawasaki. A, Ford. R. G, "Functionally graded materials: design, processing and applications", *Materials Technology Series*, vol. 5, 1999.
- Mohammadi. M, Rajabi. M, Ghadiri. M, "Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications", *Processing and Application of Ceramics*, vol. 15, no. 4, pp. 319-343, 2021.
- Mohammadi. M, Saidi. A. R, and Jomehzadeh. E, "A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply supported opposite edges", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers C*, vol. 224, no. 9, pp. 1831-1841, 2010.
- Mohammadi. M, Saidi. A. R, and Jomehzadeh. E, "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates", *Applied Composite Materials*, vol. 17, no. 2, pp. 81-93, 2010.
- Mozafari. H and Ayob. A, "Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials", *Procedia Technology*, vol. 1, pp. 496-504, 2012.
- Naderi. A, and Saidi. A. R, "On pre-buckling configuration of functionally graded Mindlin rectangular plates", *Mechanics Research Communications*, vol. 37, no. 6, pp. 535-538, 2010.
- Najafizadeh. M. M and Heydari. H. R, "Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory", *European Journal of Mechanics A*, vol. 23, no. 6, pp. 1085-1100, 2004.

- Nakatani. M, Shimizu. S, and Harada. Y, "Fretting Fatigue Behaviour of Titanium Alloy Coated with Functionally Graded Ti/TiN Film, Fatigue 2014 presentations", [www.fatigue2014.com/presentations/monday-3march-2014/36594.pdf](http://www.fatigue2014.com/presentations/monday-3march-2014/36594.pdf), 2014.
- Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi, "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions", John Wiley & Sons; page 110, 4 août, 2011.
- Nelson. R.B & Lorch. D.R, "Une théorie raffinée pour plates orthotrope stratifié", *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol.41, pp. 177-183, 1974.
- Oyekoya. O.O, Mba. D.U, and El-Zafrany.A.M, "Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method", *Composite Structures*, vol. 89, no. 1, pp. 134-142, 2009.
- Panjehpour. M, "Evaluation of structural insulated wall panels behaviour using various substituted materials", *Journal of Civil Engineering and Architecture Research*, vol. 1(2), 138-142, 2014.
- Rayleigh. J. W. S, "The theory of sound", London: Macmillan and co, 1877.
- Reddy, J. N. and Chin, C. D, "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates", *Journal of thermal stresses*, vol. 21(6), pp. 593-626, 1998.
- Reddy. B. S, Kumar. J. S, Reddy. C. E and. Reddy. K. V, "Buckling analysis of functionally graded material plates using higher order shear deformation theory", *J. Compos.*, 1-12, 2013.
- Reddy. J.N, "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of Applied Mechanics*; vol. 51(4): 745-752, 1984.
- Reddy. J.N, "Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis". CRC Press, Boca Raton, 1997.
- Reissner, E, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Journal of Applied Mechanics-transactions of The ASME*, 69-77, 1945.
- Reissner. E, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, no. 2, pp. 69-77, 1945.
- Saha. R and Maiti. P. R, "Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load", *Int. Journal of Civil and Structural Engineering*, vol. 2, no. 4, pp. 1036-1050, 2012.
- Saidi. A. R, Rasouli. A, and Sahraee. S, "Axisymmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate theory", *Composite Structures*, vol. 89, no. 1, pp. 110-119, 2009.

- Saiyathibrahim. A, Mohamed, Nazirudeenv S. S, Dhanapalv. P, "Processing Techniques of Functionally Graded Materials", A Reviewv, International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology, 2015.
- Schulz. U, et al, "Graded design ofEB-PVD thermal barrier coating systems". AGARD 85th Structures and Materials Panel Meeting, Workshop 3, Thermal Barrier Coatings, Aalborg, Denmark, 1997.
- Shen. H. S, "Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments", International Journal of Mechanical Sciences, vol. 44(3), 2002.
- Shen. H.S, "A comparison of buckling and postbuckling behavior of FGM plates with piezoelectric fiber reinforced composite actuators", Composite Structures, Vol. 91(3), pp. 375-384, 2009.
- Shimpi. R. P, "Refined plate theory and its variants", AIAA Journal, 137-146, 2002.
- Soldatos. K.P, "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", Acta Mech. 94, 195-220, 1992.
- Takahashi. M, Itoh. Y, Kashiwaya. H, "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique". In proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai-Japan, 129-134, 1990.
- Tan. C, Wang. C, Wang. S, Wang. G, Ji. L, Tong. Y, & Duan, X. M, "Investigation on 316L/316L-50W/W plate functionally graded materials fabricated by spark plasma sintering. Fusion Engineering and", vol. 125, 171- 177, 2017.
- Thai, H. T and Vo. T. P, "A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates" , *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 5, pp. 3269-3281, 2013.
- Thai. H. T and Choi. D. H, "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates", *Appl. Math. Model.*, vol. 36(3), 1008-1022, 2012.
- Thai. H.T, Kim. S.E, "A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates", *Composite Structures*, Vol 96, pp. 165-173, 2013.
- Timoshenko. S, "On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars " *Philosophical Magazine* ", vol .41(46), pp.744-746, 1921.
- Timoshenko. S. P, Woinowsky-Krieger. S, "Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill", New York, 1959.

- Tomoyuki. K, Sohei. S, Noritaka. S, Hajime. K, and Kunihiro. N, "Fabrication of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-W Functionally Graded Materials by Slip casting Method", IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 18, 2011.
- Touratier. M, "An efficient standard plate theory", Int. J. Eng. Vol. 29(8): 901-916, 1991.
- Uflyand. Y. S, "The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates", vol.12, pp.287-300, 1948.
- Watanabe.Y, Inaguma.Y, Sato. H, and Miura-Fujiwara.E, "A Novel Fabrication Method for Functionally Graded Materials under Centrifugal Force: The Centrifugal Mixed-Powder Method, Materials", vol. 2(4):2510-2525, EISSN 1996-1944, 2009.
- Whitney, J.M. "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load", J Appl Mech, 40(1), 302-304, 1973.
- Yang.J. K. M. Liew, and S.Kitipornchai. S, "Second-order statistics of the elastic buckling of functionally graded rectangular plates" , *Composites Science and Technology*, vol. 65, no. 7-8, pp. 1165-1175, 2005.
- Yin. M, Sun. Z, and Paulino G.H, Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions, *Acta Materialia*, vol. 52, 3535-3543, 2004.
- Zara. F, "Modèle mécanique d'une plaque mince". 9, France: HAL.archives-ouvertes.fr/cel-01520287, 2017.
- Zenkour. A.M, and Aljadani. M.H, "Mechanical buckling of functionally graded plates using a refined higher-order shear and normal deformation plate theory", *Adv. Aircr. Spacecr. Sci.*, 5(6), pp. 615-632, 2018.
- Zhao. X, Lee. Y. Y, and Liew. K. M, "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Composite Structures*, vol. 90, no. 2, pp. 161-171, 2009.