

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET



FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Génie civil

Option : Structures

Présenté par :

BEN ABOUCHA AHMED
BEN HAOUARI ABDELFAHEM

Sujet du mémoire

**Analyse du flambement des plaques sandwichs
poreuses en FGM**

Soutenu publiquement le 25/06/2023 devant le jury composé de :

Mme. KHELIFA Zoubida	MCA	Président
M. TLIDJI Youcef	MCA	Rapporteur
M. DRAICHE Kada	Professeur	Examineur
Mme. OUAZIR Khatima	MAA	Examinatrice

PROMOTION : 2022/2023

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En seconde lieu, on veut adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances à notre encadreur

Mr : *TLIDJI. Y* pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier nos familles et toutes les personnes qui on participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Merci

Nous dédions ce travail

*À nos chers pères, nos chères mères et nos chers
parents qui ont fait preuve de patience à notre égard,
qui nous ont aimés, soutenus et encouragés.*

À nos frères et soeurs,

*À tous nos proches et bien-aimés, et en particulier à
nos conjoints.*

*Sans oublier tous nos enseignants, tant ceux de
l'enseignement primaire que ceux de l'enseignement
supérieur.*

*BEN HAOUARI ABDELFAH
BEN ABOUCHA AHMED*

Le flambement des plaques sandwichs poreuses fonctionnellement graduées a été étudié en utilisant une théorie des plaques raffinée à quatre variables. Les peaux de la plaque sandwich sont constituées d'un mélange de deux matériaux différents distribués à travers l'épaisseur où les propriétés matérielles tel que le module de Young, sont supposées variables selon une loi de distribution de puissance en fonction des fractions volumiques des constituants. La couche centrale (l'âme) est supposée homogène et les peaux sont considérées en FGM. L'effet de deux formes de distribution de la porosité sur la charge critique de flambement des plaques sandwichs en FGM sous divers condition d'appuis a été analysé, dans ce travail. Les résultats numériques de la charge critique de flambement des plaques sandwichs poreuses fonctionnellement graduées ont été présentés et discutés.

Mots clé : Plaques sandwichs, flambement, modélisation analytique, matériaux à gradient de propriétés.

Abstract

The buckling of functionally graded porous sandwich plates has been studied using a refined four-variable plate theory. The skins of the sandwich plate are composed of a mixture of two different materials distributed throughout the thickness, where material properties such as the Young's modulus are assumed to vary according to a power-law form distribution based on the volume fractions of the constituents. The central layer (the core) is assumed to be homogeneous, and the skins are considered as functionally graded materials (FGM). The effect of two forms of porosity distribution on the critical buckling load of FGM sandwich plates under various support conditions has been analyzed in this study. The numerical results of the critical buckling load of functionally graded porous sandwich plates have been presented and discussed.

Keywords: Sandwich, Plate, buckling, Analytical modelling, Functionally graded material.

تمت دراسة انحناء الألواح الساندويتش المتدرجة وظيفياً باستخدام نظرية لوحة مكونة من أربع متغيرات مكررة. يتكون طبقة جلد اللوحة الرغوية من مزيج من مادتين مختلفتين موزعتين عبر السمك، حيث يفترض تغير خواص المواد مثل معامل يونغ وفقاً لقانون توزيع متعدد الحدود معتمد على نسب الهجوم للعناصر المكونة. يُفترض أن الطبقة المركزية (النواة) متجانسة، وتعتبر الأغلفة مواداً متدرجة وظيفياً. تم تحليل تأثير اثنتين من أشكال توزيع المسامية على الحمل الحرج لانحناء الألواح الرغوية المتدرجة وظيفياً تحت شروط دعم متنوعة في هذه الدراسة. تم عرض ومناقشة النتائج العديدة للحمل الحرج لانحناء الألواح الرغوية المتدرجة وظيفياً.

الكلمات الرئيسية : ساندويتش، لوحة، انحناء، نمذجة تحليلية، مواد متدرجة وظيفياً.

Remerciement.....	i
Dédicaces	i
Résumé	i
Abstract	i
ملخص.....	i
Sommaire	1
Liste des tableaux	i
Liste des figures	i
Introduction générale.....	1
CHAPITRE 1. GENERALITES SUR LES MATERIAUX SANDWICHES.....	1
1.1 Introduction.....	1
1.2 Qu'est-ce qu'un matériau sandwich ?.....	1
1.3 Éléments constituant les matériaux sandwiches	1
1.3.1 Peaux	1
1.3.2 Âme	1
1.3.3 Interface.....	1
1.4 Conception des structures sandwiches.....	1
1.4.1 Sélection des matériaux-âme	1
1.5 Sollicitations et Modes de dégradations des sandwiches	1
1.5.1 Flambement généralisé des peaux	1
1.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression	1
1.5.3 Modes locaux de rupture	1
1.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement	1
1.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping ».....	1
1.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling ».....	1
1.5.7 Dégradation de l'adhésive	1
1.6 Théorie des plaques sandwiches.....	1
1.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches	1
1.7 Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches.....	1

1.7.1	Collage de peau sur l'âme :	1
1.7.2	Technique de pliage :	1
1.8	Intérêt des structures sandwiches.....	1
1.9	Domaines d'application des matériaux sandwiches	1
1.9.1	Construction aérospatiale	1
1.9.2	Construction automobile et ferroviaire.....	1
1.10	Conclusion	1
	CHAPITRE 2. MATERIAUX A GRADIENT DE PROPRIETES	1
2.1	Introduction.....	1
2.2	Concept des matériaux FGM	1
2.3	Idée générale.....	2
2.4	Méthodes d'élaboration des FGM	2
2.4.1	Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)	2
2.4.2	Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	2
2.4.3	Dépôt par Électrophorèse	2
2.4.4	Compaction Sèche Des Poudres :	2
2.4.5	Projection Plasma :	2
2.4.6	Frittage En Infiltration :	2
2.5	Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués.....	2
2.6	Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel	2
2.7	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	2
2.7.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM.....	2
2.7.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.....	2
2.7.3	Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :	2
2.7.4	Gradient de porosité des matériaux FGM.....	2
2.8	Définition d'une porosité.....	2
2.8.2	Causes d'apparition de la porosité.....	2
2.9	Quantification de la porosité.....	2
2.10	Conclusion	2
	CHAPITRE 3. THEORIES DES PLAQUES	2
3.1	Introduction.....	2
3.2	Différents modèles de plaque	2

3.2.1	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff	2
3.2.2	Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	2
3.2.3	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé	2
3.2.4	Théorie raffinée de déformation des plaques :	2
3.2.5	Approche par couche	2
3.2.6	Les modèles zig-zag	2
3.2.7	Modèles couches discrètes.....	2
3.3	Conclusion	2
	CHAPITRE 4. FORMULATION THEORIQUE	2
4.1	Introduction.....	2
4.2	Configuration géométrique	2
4.3	Théorie des plaques raffinée pour les FGM	2
4.3.1	Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT).....	2
4.3.2	Cinématique et équations constitutives	2
4.3.3	Flambement des plaques sandwiches en matériaux FGM avec diverses conditions aux bords	2
4.4	Types de plaques sandwich	2
4.5	Conclusion	2
	CHAPITRE 5. VALIDATION DES RESULTATS	2
5.1	Introduction.....	2
5.2	Flambement des plaques sandwiches en FGM avec diverses conditions aux bords	2
5.3	Validation des résultats.....	2
5.4	Conclusion	2
	Conclusion générale	2
	Références	2

Liste des tableaux

Tableau (4.1) Fonctions admissibles Xmx et Yny	2
Tableau (5.2) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées soumise à une compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0, a/h = 10$).....	2
Tableau (5.3) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression Biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, a/h = 10$).....	2
Tableau (5.4) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression uniaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$	2
Tableau (5.5) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression biaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$	2
Tableau (5.6) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM simplement appuyées soumise à une compression biaxiale (Porosité uniforme).....	2
Tableau (5.7) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM encastre soumise à une compression biaxiale (Porosité uniforme).....	2
Tableau (5.8) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM simplement appuyées soumise à une compression biaxiale (Porosité non uniforme).....	2
Tableau (5.9) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM encastre soumise à une compression biaxiale (Porosité non uniforme).....	2
Tableau (5.10) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM simplement appuyées soumise à une compression uniaxiale (Porosité uniforme).....	2
Tableau (5.11) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM encastre soumise à une compression uniaxiale (Porosité uniforme).....	2
Tableau (5.12) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM e simplement appuyées soumise à une compression uniaxiale (Porosité non uniforme).....	2
Tableau (5.13) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM encastre soumise à une compression uniaxiale (Porosité non uniforme).....	2

Liste des figures

Figure (1.1) Schéma d'un sandwich [15].....	1
Figure (1.2) Matériaux sandwichés à âmes pleines	1
Figure (1.3) Matériaux sandwichés à âmes creuses : (a) nid d'abeilles; (b) âme ondulée.....	1
Figure (1.4) différentes sollicitations (M, N, T) appliquées à un sandwich.....	1
Figure (1.5) Flambement généralisé des peaux du sandwich [17].....	1
Figure (1.6) Rupture des peaux en traction ou en compression [17].....	1
Figure (1.7) Modes locaux de rupture par indentation [17].....	1
Figure (1.8) Rupture de l'âme en cisaillement [18].	1
Figure (1.9) Flambement généralisé de l'âme du sandwich [18].....	1
Figure (1.10) Flambement localisé « wrinkling » [18].....	1
Figure (1.11) Flambement localisé « damping » [18].	1
Figure (1.12) Type de dégradation de l'adhésif.....	1
Figure (1.13) panneaux réalisés par collage à partir de profils divers	1
Figure (1.14) Pliage de panneaux sandwichés.....	1
Figure (2.1) Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.....	2
Figure (2.2) Principe de la méthode coulage en bande.	2
Figure (2.3) Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux	2
Figure (2.4) Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué. (La composition est graduée dans la direction plane)	2
Figure (2.5) Principaux domaines d'application des FGM.	2
Figure (2.6) Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.	2
Figure (2.7) Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	2
Figure (2.8) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	2
Figure (2.9) Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	2
Figure (2.10) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores.....	2

Figure (3.1) Plaque de Love Kirchhoff [28].	2
Figure (3.2) Plaque de Reissner-Mindlin [28].	2
Figure (3.3) Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [28].	2
Figure (3.4) Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [65]	2
Figure (3.5) Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [65]	2
Figure (3.6) Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [65].	2
Figure (3.7) Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [65].	2
Figure (4.1) Système de coordonnées et numérotation des couches	2
Figure (5.1) Effet de l'indice de puissance p sur la charge critique de flambement N des plaques carrées sous chargement de compression biaxial $\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a = 10h$	2
Figure (5.2) Effet du coefficient de porosité sur la charge critique de flambement adimensionnelle d'une plaque sandwich carrée en FG ($p = 2, a/h = 10,30$).	2
Figure (5.3) Effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement N de la plaque (2-2-1) sous chargement de compression uniaxial et biaxiale $p = 5$ et $a/h = 10$	2

Introduction générale

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés prennent une part de plus en plus importante en construction mécanique, tant aujourd'hui pour les véhicules automobiles ; que pour les avions, les véhicules spatiaux et les constructions civiles et industrielles pour lesquels l'expérience acquise avec les composites est très significative. Ils ont très utilisés aussi bien pour les pièces de structure que pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures [1].

Actuellement, la recherche en FGM est activement conduite dans le monde entier. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en 1995 en Allemagne et en 1996 au Japon.

Dans le programme allemand 41 matériaux sont étudiés aux universités et aux instituts nationaux concernant le traitement et la modélisation pour développer des applications en FGM pendant le 21^{ème} siècle. Le programme Japonais a été pris en charge par les universités et qui traite 67 topiques qui ont une relation avec la chimie et la physique des FGM.

Les axes de recherches qui ont conduit à l'établissement de l'architecture des FGM sont les suivants :

- *Établissement des définitions et des théories mathématiques pour les structures FGM.*
- *Développement de systèmes de conception et de modélisation assistés par ordinateur.*
- *Développement de processus rentables.*
- *Évaluation des propriétés graduelles.*
- *Établissement d'une base de données pour l'architecture de FGM.*

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence de la porosité sur le comportement mécanique des structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution de la charge critique de flambement. La détermination celle-ci habituellement effectuée à partir d'hypothèses sur la forme du champ de déplacement a

travers l'épaisseur du modèle choisie. Ces théories étant conçues comme une approximation d'une réalité à trois dimensions, on comprend qu'il puisse exister plusieurs, différant entre elles par la précision des approximations sur lesquelles elles sont fondées [2].

La théorie classique des plaques, basée sur les hypothèses de Kirchhoff, se révèle inexacte lors de l'analyse des plaques FGM. Son inexactitude provient de la négligence des effets de cisaillement transverse dans les plaques FGM. Afin de tenir compte de cet effet, plusieurs théories de déformation de cisaillement de premier ordre a été développée. Cependant, cette théorie suppose une distribution uniforme des déformations en cisaillement transverse à travers l'épaisseur. Pour remédier à ce problème, des facteurs de correction de cisaillement sont introduits.

La précision des solutions de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre dépend fortement de l'estimation optimale des facteurs de correction de cisaillement. Il a été démontré que la théorie classique ainsi que la théorie de premier ordre sont insuffisantes pour prédire avec précision les solutions exactes des plaques FGM.

Plusieurs travaux ont étudié le comportement des plaques en FGM, comme ceux de [1] et [2], [3]. En 1998, Praveen et Reddy [4] ont étudiés le comportement des plaques FGM compose d'un mélange de céramique et de métal en utilisant la méthode des éléments finis. Dans la même année, Reddy et Chin [5] ont présente une étude du comportement thermodynamique des cylindres et des plaques FGM. La vibration des coques cylindrique par la méthode de Love a été étudiier par Loy et al [6] en 1999.

Cheng et Batra [7] ont établies une relation entre la flèche d'une plaque polygonale simplement appuyée en FGM donnée par les théories FSDPT et TSDPT et la flèche d'une plaque équivalente homogène de Kirchhoff. Les propriétés matérielles effectives sont supposées suit une loi de mélange, la fraction volumique de la phase céramique suit une loi de distribution de puissance suivant l'épaisseur. Les mêmes autres [8] ont étudiés les déformations 3D thermo - mécanique d'une plaque elliptique en FGM thermo - élastique isotrope linéaire rigidement encastres sur ces bords, les propriétés matérielles suit aussi une loi de puissance suivant l'épaisseur. Ils obtiennent une solution qui montre que la distribution des déplacements en plane et les contraintes de cisaillement transversale le long de l'épaisseur de la plaque en FGM ne s'accordes par avec ceux supposés par la théorie classique des plaques et les théories de déformation de cisaillement.

Woo et Meguid [9] ont étudiés les déformations non linéaires des plaques épaisses en FGM et des coques basées sur la théorie classique et la non linéarité de von - Karman sous chargement thermomécanique. La solution est obtenue par une double série de Fourier pour la flèche et les contraintes. Les auteurs ont conclu, par des comparaisons des contraintes et des déplacements des plaques purement en métal, purement en céramique et de plaque en FGM, que la flèche des plaques en FGM même avec de petite fraction volumique en céramique est significativement petite a la flèche de la plaque purement en métal

Récemment, une théorie raffinée des plaques à deux variables (RPT) a été développé pour les plaques isotropes par Shimpi [10]. Ensuite cette théorie a été étendue aux plaques orthotropes par Shimpi et Patel [11]. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et possède de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques dans certains aspects tels que les équations d'équilibre, les conditions aux limites et les expressions du moment. La précision de cette théorie a été démontrée pour le comportement statique et thermo-élastique des plaques FGM par Mechab et al. [12] et Houari et al. [13]. Par conséquent, il semble important d'étendre cette théorie à l'analyse de déformation thermomécanique des plaques sandwichs non symétrique en FGM.

Dans ce travail, une théorie des plaques raffinée à quatre variables est utilisée pour étudier flambement des plaques sandwichs poreuses en FGM. Le module de Young variant à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La présente théorie satisfait aux conditions d'équilibre dans les faces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Une solution analytique est utilisée pour obtenir la charge critique du flambement des plaques FGM sous divers condition aux limites. Les effets de la variation de la fraction volumique des matériaux constituants, du rapport épaisseur-longueur, la forme de distribution de la porosité, le taux de la porosité et les conditions d'appuis sur la charge critique de flambement des plaque sandwichs en FGM sont étudiés et discutés a travers des exemples numériques.

L'étude que nous vous présentons comporte cinq volets importants.

Dans le premier chapitre : donne des généralités sur les matériaux sandwichs ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Dans le chapitre II, nous exposons d'une façon claire des généralités sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, leurs méthodes de fabrication, ainsi que leurs domaines d'application.

Nous abordons au chapitre III les différentes approches qui régissent les plaques, en commençant par les théories bidimensionnelles puis nous allons citer les théories par couche.

Le quatrième chapitre présente une formulation théorique du problème flambement des plaques sandwichs poreuses.

Le cinquième chapitre est consacré à la validation du modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter les résultats numériques de l'analyse du flambement des plaques sandwichs en FGM.

Ce travail de mémoire s'achève par des conclusions relatives à ce travail de recherche.

Chapitre 1. Généralités sur les matériaux sandwiches

1.1 Introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures. Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurales, notamment dans le domaine de l'aéronautique. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.).

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwiches. Les structures sandwiches occupent un large créneau dans la construction des pièces composites.

Historiquement, ce sont les premières structures composites allégées et performantes.

L'objectif de ce premier chapitre est de positionner la problématique des matériaux sandwiches. En nous attachant à mettre en évidence toutes leurs particularités propres.

1.2 Qu'est-ce qu'un matériau sandwich ?

Une structure sandwich résulte de l'assemblage par collage ou soudure de deux semelles ou peaux (Figure. 1.1) et d'un matériau d'âme. Les peaux sont de faibles épaisseurs et possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (module élevé, grande résistance).

Entre les deux peaux est intercalé un matériau d'âme de forte épaisseur et de faible densité. En gardant une distance constante entre les deux peaux, l'insertion de cette âme permet d'augmenter le moment d'inertie de la structure, et par conséquent sa rigidité en flexion, tout en minimisant la masse de l'ensemble.

Dans un sandwich, il ne faut pas oublier un troisième composant : l'adhésif. C'est ce dernier qui permet un bon assemblage de la structure et aussi une bonne transmission des contraintes d'un milieu à l'autre. Sa principale caractéristique doit être une bonne résistance en cisaillement. Dans le cas de peaux en matériau composite, l'insertion de cette troisième phase peut être évitée par l'utilisation d'une résine auto-adhésive.

De par la constitution des matériaux sandwichs, on peut adapter leurs propriétés mécaniques en faisant varier la nature des peaux (identiques ou non) et de l'âme ainsi que l'épaisseur de chacune des phases. En règle générale, les peaux ont la même épaisseur t_f . Le rapport t_f/t_c (t_c étant l'épaisseur de l'âme) est compris entre 0,1 et 0,01. D'après Allen [14], on peut classer les sandwichs en trois catégories selon la valeur du rapport d/t_f (d étant la distance séparant l'axe neutre de chacune des peaux). Pour un sandwich symétrique (peaux de même épaisseur) $d = t_c + t_f$.

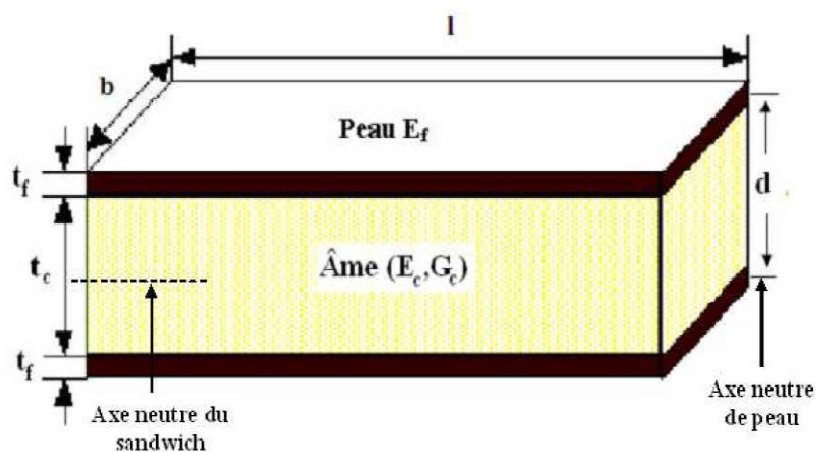


Figure (1.1) Schéma d'un sandwich [15].

En fonction des valeurs du rapport d/t_f , on peut classer les sandwichs de la manière suivante :

- Si le rapport d/t_f est supérieur à 100, on parle de sandwichs à peaux très fines ;

- Pour un rapport d/t_f compris entre 100 et 5,77 le sandwich est considéré comme ayant des peaux fines ;
- Dans le cas où d/t_f est inférieur à 5,77 la structure est dite à peaux épaisses.

On définira les bornes limites par rapport à la contribution de chaque constituant vis-à-vis de la rigidité en flexion et en cisaillement du sandwich.

En plus de leur bonne rigidité en flexion, de leur bonne résistance au flambement et de leur légèreté, les matériaux sandwiches possèdent également de bonnes propriétés d'isolation thermique et phonique. Ceci explique leur emploi de plus en plus fréquent comme cloison. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aéronautique ou l'industrie du transport en tant que structures primaires ou secondaires, comme par exemple les coques de bateaux rapides, les planchers d'avions.

1.3 Éléments constituant les matériaux sandwiches

1.3.1 Peaux

Généralement de faibles épaisseurs, les peaux sont constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche. Elles peuvent être en bois, métal ou matériau composite. Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation des matériaux composites. Les peaux ont pour but de reprendre les efforts de flexion traduit par des contraintes normales (traction ou compression).

1.3.2 Âme

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Elle peut être réalisée avec les matériaux suivants :

- *Mousses* : Ces matériaux légers peu onéreux, facilement usinables et ont cependant de très faibles caractéristiques mécanique.
- *Balsa* : Est un bois bien connu pour ces différentes utilisations et de leurs principales qualités que la légèreté, le haut pouvoir d'isolation thermique et acoustique et la non déformation aux variations thermiques.
- *Nid d'abeille* : Cette structure est réalisée généralement à partir de matériau en plaques minces (alliage d'aluminium, papier polyamide). Des raies de colle sont disposées en bande régulières sur les plaques qui sont collées entre elles pour former un bloc, ce dernier est coupé en tranches qui seront transformées à leur tour en planche de nida ' Nid d'abeille ' par expansion.

Il existe deux types d'âmes :

➤ **Les âmes pleines** [16] parmi laquelle on retrouve :

1. Le Balsa ou bois cellulaires (Figure 1.2 a)
2. Diverses mousses cellulaires (Figure 1.2 b)
3. Des résines chargées de microsphères creuses de verres appelés mousses syntactiques.

Cette âme pleine ou alvéolaire est considérée comme isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent alors pour définir la loi de comportement du matériau).

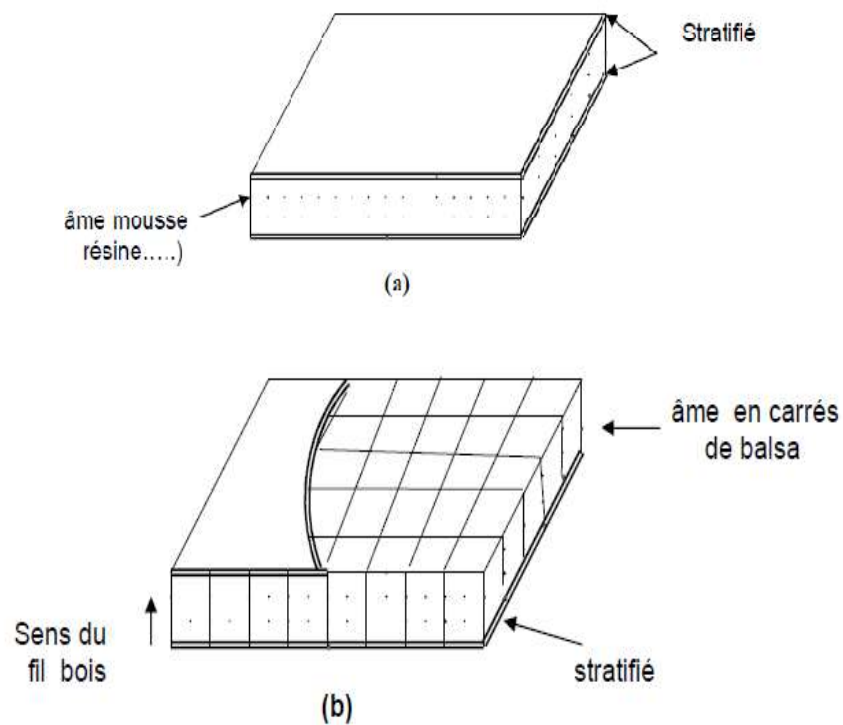


Figure (1.2) Matériaux sandwiches à âmes pleines

➤ **Les âmes creuses** [16], essentiellement de type nid d'abeilles (Figure 1.3) elles sont :

4. Des alliages métalliques légers
5. Des papiers kraft
6. Du papier polyamide, type papier Nomex.

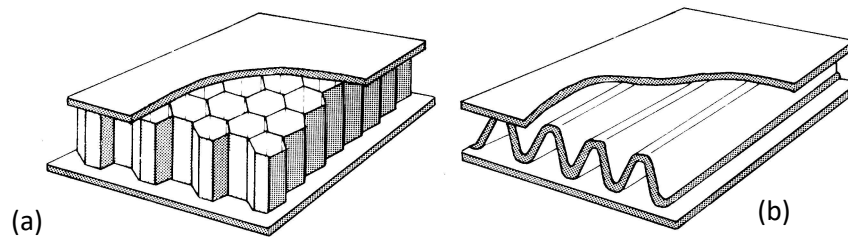


Figure (1.3) Matériaux sandwiches à âmes creuses : (a) nid d'abeilles; (b) âme ondulée

1.3.3 Interface

L'assemblage de la structure sandwich peut être réalisé par collage, soudage ou brasage. Lors des simulations numériques, on suppose que, quel que soit le mode d'assemblage des différentes couches, le lien est parfait entre les constituants.

Les matériaux sandwiches sont caractérisés par :

- Une grande légèreté à titre de comparaison la masse surfacique de la coupole de la basilique Saint – Pierre (45 mètres de portée) et de $2600\text{kg}/\text{m}^2$ (construction en pierre). La masse surfacique d'une même coupole en sandwich acier/ mousse de polyuréthane est de $33\text{kg}/\text{m}^2$
- Une grande rigidité flexionnelle due à l'écartement des peaux.
- Excellentes caractéristiques d'isolation thermiques. En revanche, les matériaux sandwiches n'amortissent pas et leur tenue au feu n'est pas bonne pour certaines catégories d'âmes et le risque de flambement est plus élevé que pour les structures classiques.

1.4 Conception des structures sandwiches

Bien que généralement conçues pour être soumises à des efforts en flexion, les structures sandwiches le sont aussi pour répondre à d'autres exigences, comme l'isolation thermique, acoustique, etc.

Le choix du type de sandwich dépend surtout de son application. Les principaux objectifs du concepteur d'un « sandwich » sont de choisir les matériaux appropriés constituant la structure ainsi que de déterminer les épaisseurs respectives des peaux et de l'âme de façon à résister aux moments fléchisseurs, au cisaillement et aux contraintes axiales induites par les forces appliquées sur elles.

Généralement, la conception est basée sur la théorie des sandwiches (théorème des poutres homogènes) et la sélection de matériaux ayant les propriétés appropriées.

1.4.1 Sélection des matériaux-âme

D'un point de vue mécanique, le critère de sélection du matériau de l'âme est une résistance élevée au cisaillement. Son faible coût de production, sa fiabilité dans le temps, sa faible absorption d'eau ou humidité, son comportement face au feu et à la chaleur, ses capacités d'isolation acoustique et thermique peuvent aussi être des critères décisifs dans le choix du matériau.

Résistance en flexion

Généralement, les structures sandwichs sont plus rigides que les poutres conventionnelles. Cela étant dû à la distribution géométrique efficace et au support des efforts par les peaux qui permettent l'obtention d'un facteur de rigidité $\langle EI \rangle$ plus élevé.

Les peaux doivent adhérer le mieux possible à l'âme puisque le comportement mécanique final de la structure sandwich est directement lié à cette adhérence.

Résistance aux chocs

La résistance à l'impact d'une structure sandwich composite est largement influencée par la capacité d'absorption de l'énergie par l'âme.

Cette capacité d'absorption peut être améliorée en augmentant la densité du matériau qui compose l'âme. Soumis à un impact, on observe un comportement tout à fait différent s'il s'agit d'une âme en mousse ou d'une âme en nid d'abeilles.

L'âme en mousse diffusera l'énergie de l'impact à l'intérieur même du sandwich en l'absorbant dans sa structure cellulaire. C'est pourquoi les mousses PVC d'origine thermoplastique ainsi que les mousses thermodurcissables flexibles ont une bonne capacité d'absorption des chocs.

Dans le cas d'une âme en nid d'abeilles, les parois transfèrent l'énergie perpendiculairement d'une peau à l'autre, ce qui peut donc occasionner la déchirure de la peau opposée.

Résistance à la compression

Les charges de compression sont totalement transférées à l'âme du sandwich. Les structures en nid d'abeilles permettent de supporter des contraintes de compression, normales

aux panneaux, élevées. Par contre leur anisotropie favorise leur rupture lorsqu'elles sont chargées dans plusieurs directions comme dans le cas des pièces soumises à des charges hydrostatiques. On préconise alors comme solution une combinaison nid d'abeilles et mousse.

Résistance au décollement (pelage)

Une résistance insuffisante au décollement peut conduire au délaminage des peaux et être la cause de ruptures catastrophiques. En général, dans les sandwichs à âme en mousse, la résistance du joint de colle entre les peaux et l'âme doit être supérieure à la résistance au cisaillement de l'âme. Les mousses de PVC donnent des forces d'adhésion supérieures à celles obtenues avec le balsa ou le polyméthacrylimide (PMI). Les mousses de polyuréthane (PU), elles, sont fragiles, ce qui rend leur collage difficile. Quant aux âmes en nid d'abeilles, leur surface de contact réduite explique qu'il est difficile d'obtenir une résistance élevée au pelage.

Isolation

La diminution de poids, l'isolation acoustique et thermique ainsi que l'amortissement des vibrations sont nécessaires dans plusieurs applications.

Grâce à leur structure cellulaire, beaucoup de mousses obtiennent de très bons résultats en ce qui a trait à l'isolation thermique et acoustique alors que les structures en nid d'abeilles offrent des performances moins probantes, plus limitées.

Par conséquent, lorsqu'il est nécessaire d'avoir de bonnes propriétés en termes d'isolation thermique et acoustique, les structures sandwichs avec âme en mousse sont des choix judicieux. Lorsque la diminution de poids est le seul objectif, les structures sandwichs avec âme en nid d'abeilles devraient être envisagées.

Absorption d'eau

L'absorption d'humidité et d'eau par l'âme des structures sandwichs peut causer une diminution importante et significative de ses propriétés mécaniques. Dans le cas où les peaux des sandwichs seraient abîmées, l'utilisation d'âmes sensibles à l'eau ou à l'humidité augmente encore plus le risque de délaminage. Même en service normal, l'évaporation interne d'eau absorbée peut causer un délaminage des peaux. Pour solutionner ce problème, un traitement thermique additionnel de l'âme est parfois nécessaire avant la mise en œuvre du sandwich.

1.5 Sollicitations et Modes de dégradations des sandwiches

Les sandwichs peuvent être soumis à un :

- *Moment de flexion,*
- *Moment de torsion,*
- *Effort normal,*
- *Effort tranchant.*

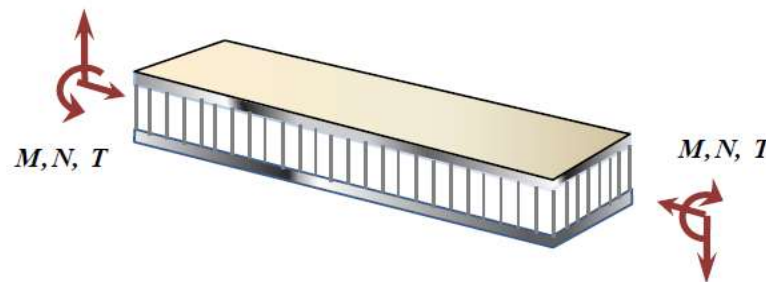


Figure (1.4) différentes sollicitations (M , N , T) appliquées à un sandwich.

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwiches soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécanique de ces structures.

1.1.1 Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Figure. 1.5). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

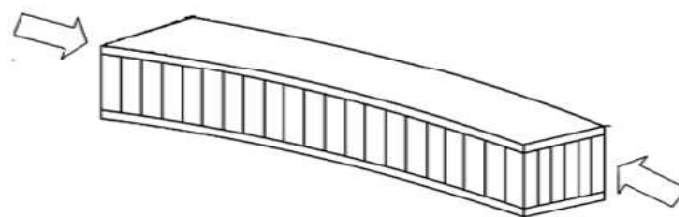


Figure (1.5) Flambement généralisé des peaux du sandwich [17].

Si l'on craint un flambement généralisé, on peut utiliser des peaux ayant un module d'élasticité plus élevé, augmenter l'épaisseur des peaux, augmenter l'épaisseur de l'âme, ou encore utiliser pour l'âme un matériau avec un module de cisaillement plus élevé.

1.5.2 Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Figure.1.6). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), ou en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.

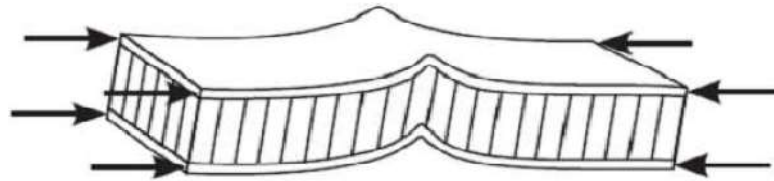


Figure (1.6) Rupture des peaux en traction ou en compression [17].

1.5.3 Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Figure. 1.7).

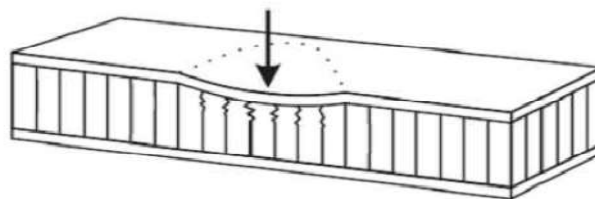


Figure (1.7) Modes locaux de rupture par indentation [17].

1.5.4 Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Figure. 1.8). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus

élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

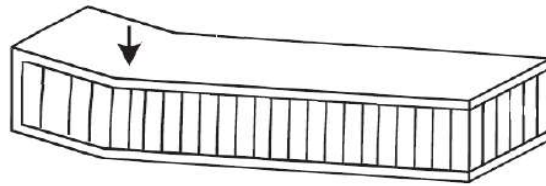


Figure (1.8) Rupture de l'âme en cisaillement [18].

1.5.5 Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.

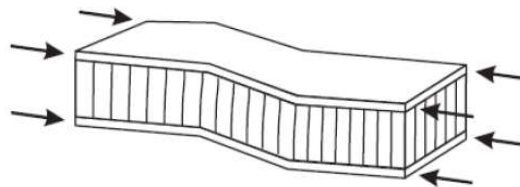


Figure (1.9) Flambement généralisé de l'âme du sandwich [18].

1.5.6 Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Figure. 1.10), se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de

l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Figure. 1.11).

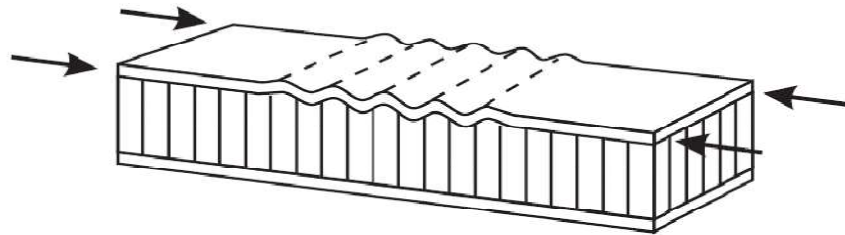


Figure (1.10) Flambement localisé « wrinkling » [18].

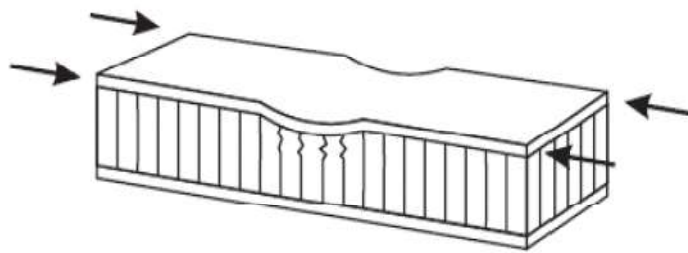


Figure (1.11) Flambement localisé « dampling » [18].

1.5.7 Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive, entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types:

- Dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- Dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- Dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Figure. 1.12 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

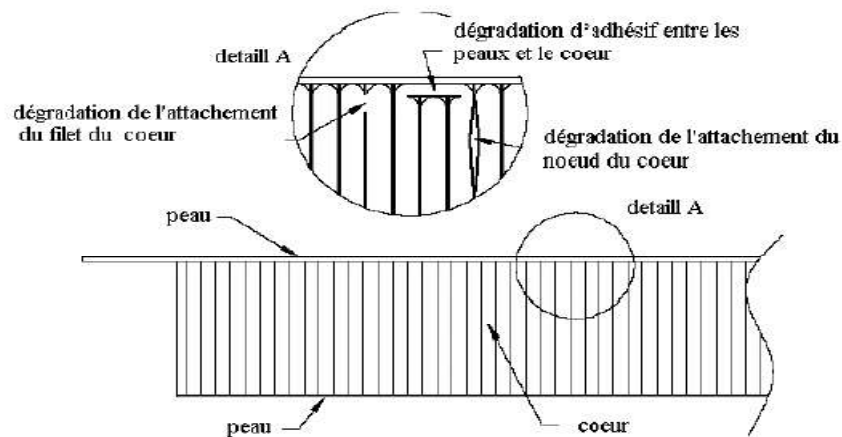


Figure (1.12) Type de dégradation de l'adhésif.

1.6 Théorie des plaques sandwiches

Un matériau sandwich est constitué (figure 1.11) d'un matériau de faible masse volumique (cœur) sur lequel sont collées des couches (les peaux) à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse, les actions mécaniques d'une peau à l'autre. Les peaux peuvent être constituées par des stratifiés ou par des matériaux métalliques d'épaisseur h_1 (peau inférieure) et d'épaisseur h_2 (peau supérieure).

L'épaisseur de l'âme sera notée h_c et l'épaisseur totale du sandwich H ($H = h_1 + h_c + h_2$). En chaque point de la structure sandwich, le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan (x, y) soit le plan moyen.

1.6.1 Hypothèses de la théorie des matériaux sandwiches

La théorie des matériaux sandwiches est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ($h_c \gg h_1, h_2$).
- Les déplacements du cœur u_c et v_c suivant les directions x et y sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- Les déplacements u et v suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse w est indépendant de la variable z : la déformation ε_{zz} est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz}, σ_{yz} : les contraintes σ_{xx} et σ_{yy}, σ_{xy} et σ_{zz} sont négligées.

- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz} et τ_{yz} sont négligées dans les peaux.
- Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

1.7 Techniques d'assemblages des matériaux sandwiches

1.7.1 Collage de peau sur l'âme :

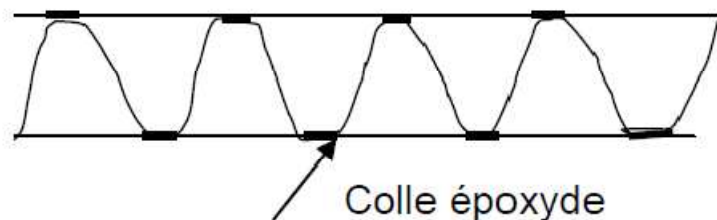
Pour que les structures sandwiches jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme – peaux de manière à répartir les efforts entre âme et peaux.

L'assemblage est réalisé selon la (Figure 1.13) par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

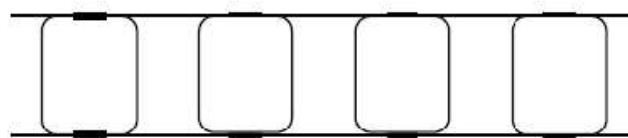
1.7.2 Technique de pliage :

Après mise en œuvre les panneaux sandwichs peuvent être formés par pliage comme il est indiqué sur la (Figure 1.14).

On commence par dégarnir une bande de l'un des revêtements en suivant l'axe de la pliure et sur une largeur qui est fonction de l'épaisseur de la plaque et l'angle de pliage souhaité, ensuite on plie et on maintient l'angle dans la position choisie.



(a) : collage de tôle ondulée ou raidisseurs ω sur tôle



(b) : panneaux avec tubes carrés

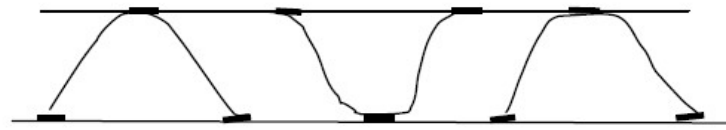
(c) : panneaux avec ω inversés

Figure (1.13) panneaux réalisés par collage à partir de profils divers

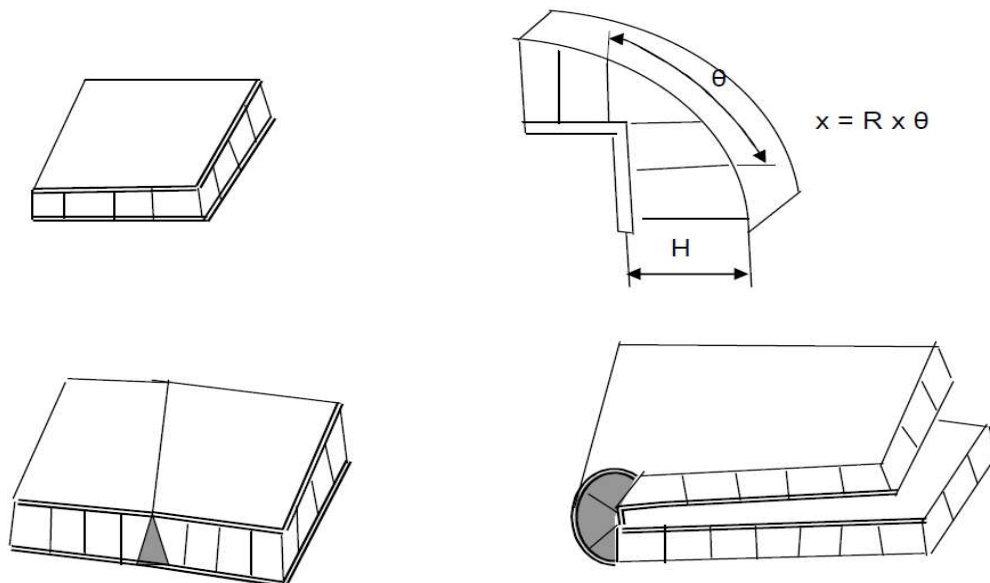


Figure (1.14) Pliage de panneaux sandwichs.

1.8 Intérêt des structures sandwichs

L'intérêt principal des structures sandwichs, par opposition aux composites traditionnels dits monolithique, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de 100 kg m^{-3} . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. Ainsi, l'amélioration de la rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

Les matériaux composites sandwichs disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et

chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

1.9 Domaines d'application des matériaux sandwiches

Les panneaux sandwiches sont de plus en plus utilisés dans la conception des structures minces. Ils trouvent leurs applications dans l'aéronautique, l'automobile, la construction navale et ferroviaire.

1.9.1 Construction aérospatiale

Les portes trappes de train d'atterrissages, carénages divers (entre aile de fuselage, mâts de réacteurs, glissières de volets) sont des pièces secondaires réalisés en panneaux sandwiches et par cocuisson de stratifiés composites (carbone/ époxyde, kevlar /époxyde) sur nida nomex ou aluminiums collés avec des adhésifs époxydes en films.

Les capots des moteurs sont les plus souvent réalisés avec des sandwiches constitués de peaux en carbone / epoxyde collés sur des âmes en nida aluminium.

Afin d'obtenir la résistance à la chaleur nécessaire, on utilise des adhésifs époxydes phénoliques ou polyamides.

Les panneaux acoustiques sont des structures sandwiches dont la peau intérieure, coté moteur est constitué d'une peau perforée sur laquelle est collé un tissu microporeux.

Des nombreuses pièces d'hélicoptères sont constituées de pièces monolithiques ou de sandwiches avec peaux en composites collées sur nida [18].

Dans les domaines astronautique et d'armement, on a besoin de tenue à la chaleur et aux variations thermiques encore plus élevées. Les réflecteurs solaires sont en peaux de carbone/epoxyde et l'âme en nida nomex.

1.9.2 Construction automobile et ferroviaire

Les matériaux sandwiches sont également utilisés et assemblés par collage dans la construction de camions, d'autobus, dans ce domaine on peut utiliser des peaux en stratifié verre/polyester et d'âme en mousse polystyrène expansé.

Le métro et tramways, demandant des démarrages fréquents, constituent un bon marché pour les matériaux sandwiches. Les portes d'accès sont en panneaux sandwiches avec des peaux en composites verre/ polyester ou en aluminium collées par des adhésifs intérieurs sont aussi en panneaux sandwiches avec âme en nida aluminium ou nomex.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwiches, ainsi que les différents modes d'endommagements. Le chapitre suivant va porter sur la présentation des matériaux à gradient de propriétés « FGM » tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois qui régissent ce matériau.

Chapitre 2. Matériaux à gradient de propriétés

2.1 Introduction

Dans les structures multicouches classiques, des couches homogènes sont collées les unes aux autres pour améliorer les performances (mécaniques, thermiques, acoustiques,...) de la Structure (plaques sandwiches, structures renforcées par matériaux composites,...). L'inconvénient, de cette démarche est de créer des concentrations des contraintes au niveau des interfaces entre les couches qui peuvent conduire à des délaminages, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques d'une couche à l'autre.

La solution d'une transition continue des propriétés, par un gradient de composition, permet d'atténuer ces singularités par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : *Functionally Graded Material* "F.G.M"). Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques.

2.2 Concept des matériaux FGM

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit la première fois dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Les FGM peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, etc.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM dans certains cas.

En conséquence, les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composés stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort. Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de FGM ont été édités (par exemple, [19])

2.3 Idée générale

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé " la recherche sur la technologie de base pour développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. A cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- *Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;*
- *Ténacité du matériau coté basse température ;*
- *Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.*

Pour répondre à un tel cahier de charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (Coté haute températures) et des métaux (Coté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000 K (Température de surface) et à un gradient de température de 1000 K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

1. Le système SIC/C par C.V.D (Chemical Vapor Deposition ou dépôt chimique en phase vapeur) ;
2. Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres ;
3. Le système TIB2/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température ;
4. Et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/ (zro2-Y2O3) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'application des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur, optique, etc....

On trouve une littérature très importante sur l'utilisation de ce matériau. Cependant, l'utilisation des structures en FGM dans les environnements avec de grands changements de température exige la connaissance des déformations.

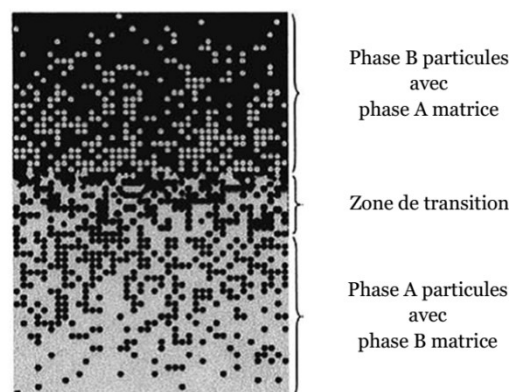


Figure (2.1) Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées

2.4 Méthodes d'élaboration des FGM

L'obtention des qualités désirées nécessite de plus l'intervention de techniques sophistiquées et subtiles comme l'utilisation de lasers, de plasmas, l'implantation ionique, de dépôts en phase vapeurs, etc.

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient évalués peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et la transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification).

Les processus de mélange graduel peuvent être classés suivant ses constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation durant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaires de progression technologiquement et économiquement durables. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produisent un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement, le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit adapter aux FGM :

1. *Des conditions de procédure choisie pour ne pas altérer ou détruire le gradient en mode non contrôlé.*
2. *Prêter attention à tout rétrécissement inégal du FGM pendant la consolidation.*

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de co-sédimentation de poudres en milieu proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de particule. En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de sédimentation.

L'existence de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-dessous :

2.4.1 Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non-aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (doctor-Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (figure. 2.2). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant le plastifiant et les autres ajouts, mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Les liants (Plastifiants et dé flocculant) doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [20]; soit par empilage de couches élaborés séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression.

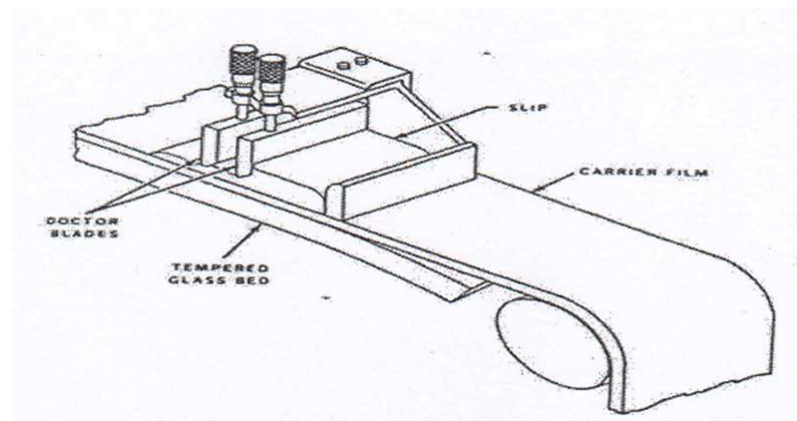


Figure (2.2) Principe de la méthode coulage en bande.

2.4.2 Coulage Séquentiel en Barbotine (*Slip Casting*)

Le coulage en barbotine (*Slip Casting*) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles :

- *Formation du tesson ou "prise » ;*
- *Consolidation du tesson ou "raffermissement".*

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine ; cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- *du pouvoir de succion de la plate (coulage classique) ;*
- *Ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).*

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

2.4.3 Dépôt par *Électrophorèse*

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que on appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèses) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Dès lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux à gradients évalués peuvent être obtenu

tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co . Une installation générale de ce principe est illustrée sur la figure I-7.

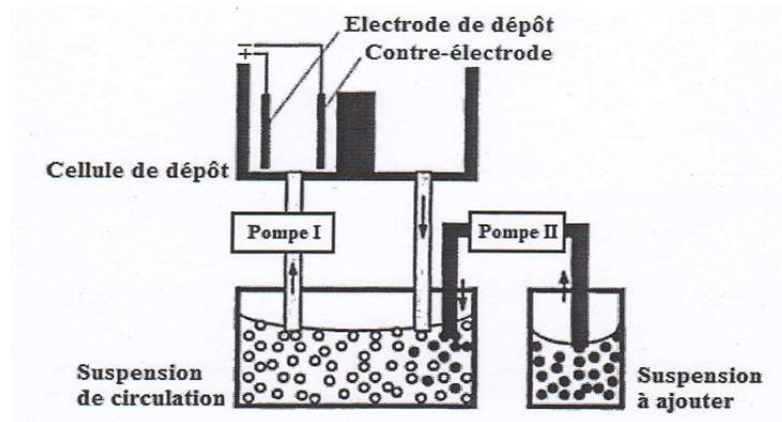


Figure (2.3) Vue schématique de l'installation d'EPD pour la production des matériaux

2.4.4 Compaction Sèche Des Poudres :

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [21].

2.4.5 Projection Plasma :

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieure à $100\ \mu\text{m}$, environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment $11000\ ^\circ\text{C}$ et la vitesse $1000\text{--}1500\ \text{m/s}$. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé. Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure, à la corrosion ainsi que l'isolation thermique et électrique.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative. Ichikawa a employé les poudres mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le silicium (SiC) pour former un matériau thermoélectrique transporteur concentration-gradué avec une

microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est schématiquement montrée sur la figure 2.4.

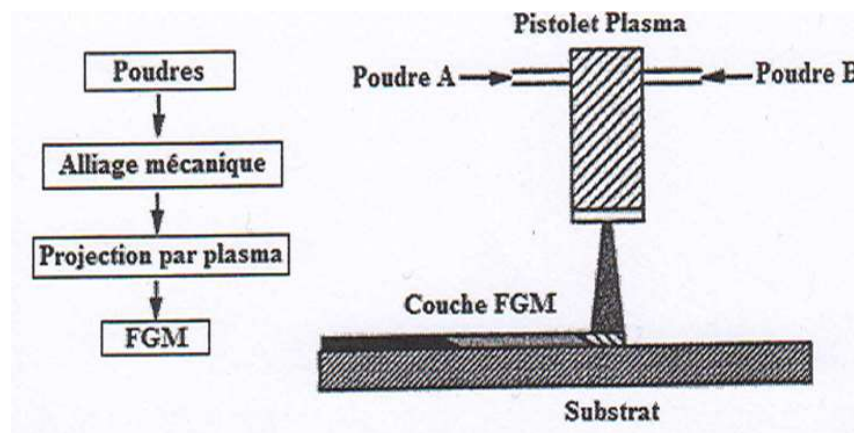


Figure (2.4) Projection par plasma pour former un matériau thermoélectrique gradué.
(La composition est graduée dans la direction plane)

2.4.6 Frittage En Infiltration :

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est fabriquée une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique. Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapports aux autres.

2.5 Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure 2.7. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

2.6 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Généralement les FGM sont fabriqués par deux ou plusieurs phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace ; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structures par la distribution de propriétés correspondantes. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase varie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives des FGM changent le long de cette direction.

Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les modèles FGM :

1. *Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assurée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure 2.8 – a) ;*
3. *Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure 2.8– b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur.*

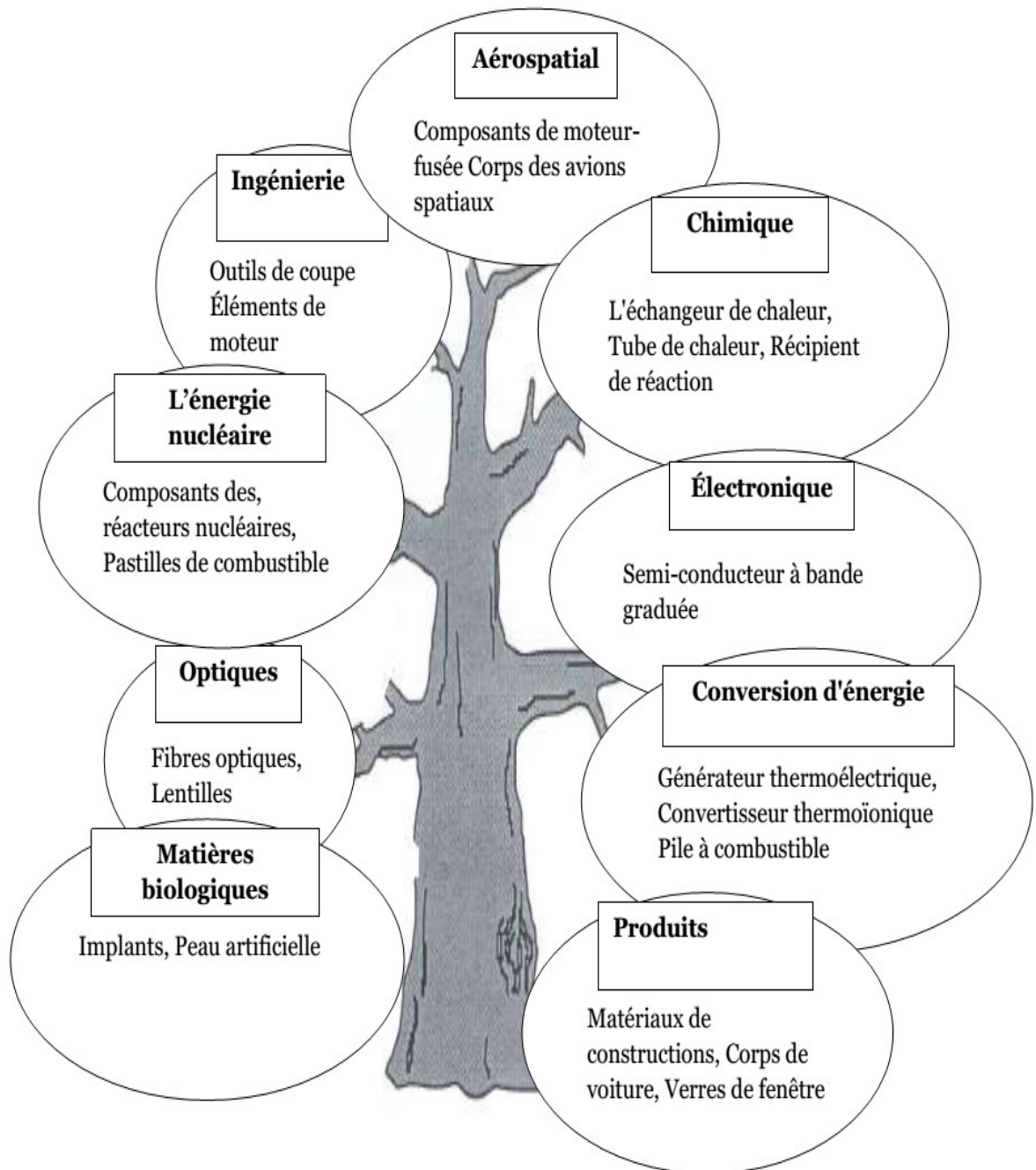


Figure (2.5) Principaux domaines d'application des FGM.

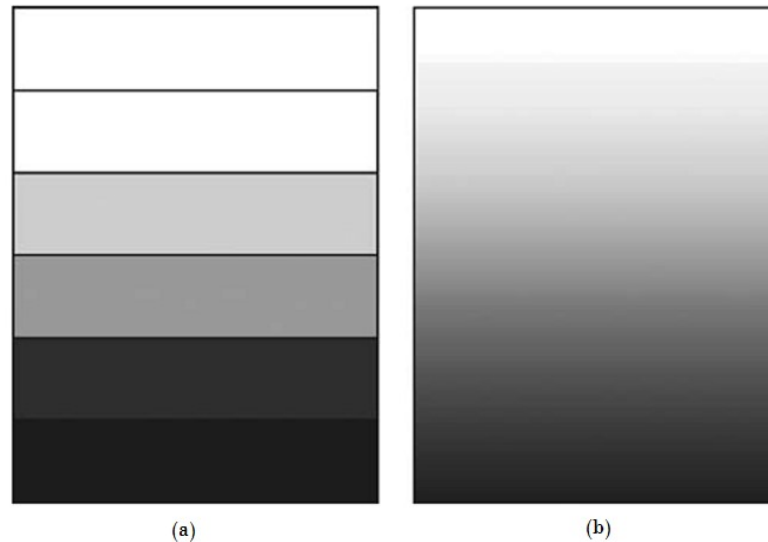


Figure (2.6) Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

2.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multiphase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés à la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [22], Les propriétés effectives des matériaux en FGM, comme module de Young, peuvent alors être exprimées comme suit :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i * V_i \quad (2.1)$$

Avec

P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , et

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (2.2)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions volumiques. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

2.7.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^p \quad (2.3)$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées pour un mélange de céramique et métal par la loi suivante [23]

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) * V(z) \quad (2.4)$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure et de la surface supérieure de la plaque FGM.

La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure 2.9. Il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $1 < p$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $1 > p$

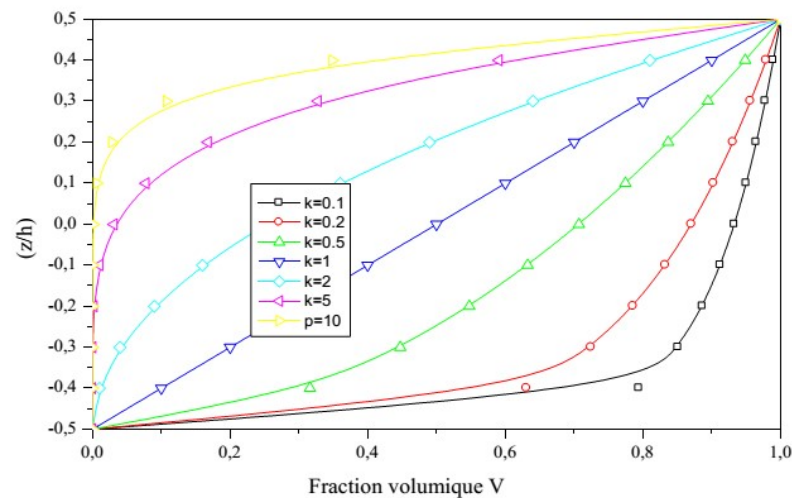


Figure (2.7) Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

2.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Deux fonctions de loi de puissance sont utilisées pour définir la fraction volumique de la plaque, afin d'assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z+\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (2.5a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z+\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^p, \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.5b)$$

Le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) * E_1 + [1 + V_1(z)] * E_2, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (2.6a)$$

$$E(z) = V_2(z) * E_1 + [1 + V_2(z)] * E_2, \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.6b)$$

La figure 2.10 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (2.5a) et (2.5b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

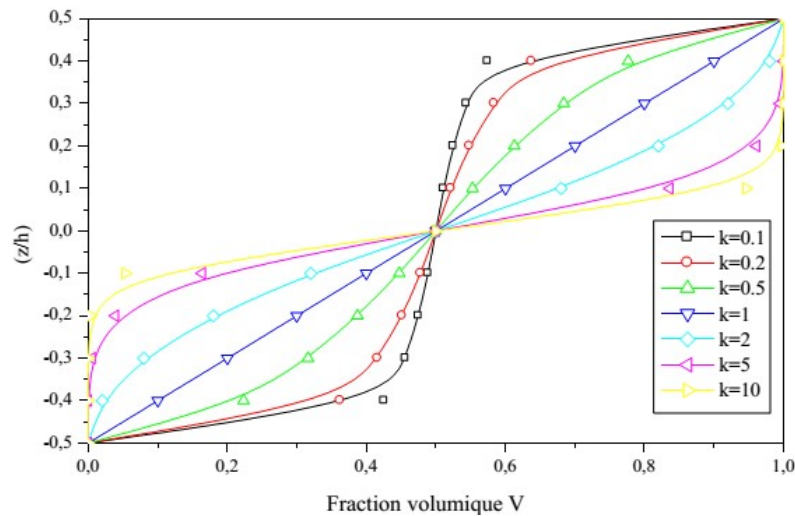


Figure (2.8) Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

2.7.3 Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme.

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (2.7a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} * \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (2.7b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure 2.11.

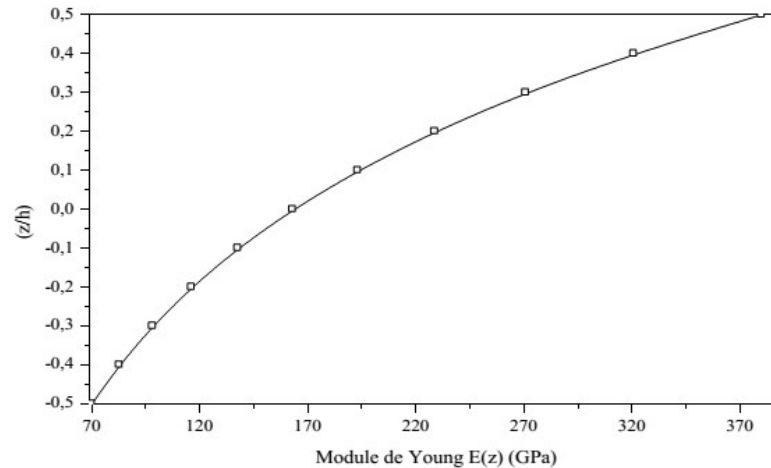


Figure (2.9) Variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

2.7.4 Gradient de porosité des matériaux FGM

Le gradient de porosité des matériaux fonctionnellement gradués est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec le changement de la position spatiale dans le matériau composite. Le diagramme schématisé du gradient de porosité typique d'un matériau fonctionnellement gradué est représenté sur la figure 2.10. Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'elles entendent remplacer consiste en une porosité à gradation fonctionnelle, laquelle faciliterait également l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant. Cela est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain. Les matériaux à gradient de porosité sont produits par dépôt de poudre avec un mélange varié de formes et de tailles de particules différentes, ce qui aiderait à produire la porosité variable nécessaire en fonction de la forme et de la taille des pores. Les matériaux à gradient de porosité peuvent être un gradient de densité de porosité ou un gradient

de taille de pores. La densité de porosité est produite lorsque la densité de porosité change en fonction de la position spatiale à travers le volume du matériau.

2.8 Définition d'une porosité

Selon le glossaire international d'hydrologie, la porosité peut être définie comme étant la propriété d'un milieu, d'un sol ou d'une roche de comporter des pores, c'est à dire des vides interstitiels interconnectés ou non. Elle peut être exprimée comme étant le rapport du volume de ces vides au volume total du milieu. La porosité est donc définie à la fois comme une propriété caractéristique d'un milieu poreux et comme un paramètre qui l'exprime quantitativement (rapport de volumes, sans dimension).

D'après cette définition, il est possible de se représenter le défaut de porosité dans un matériau composite comme étant de très petites cavités emprisonnant à priori de la matière gazeuse (tâches noires sur la figure 2.10 (a)).

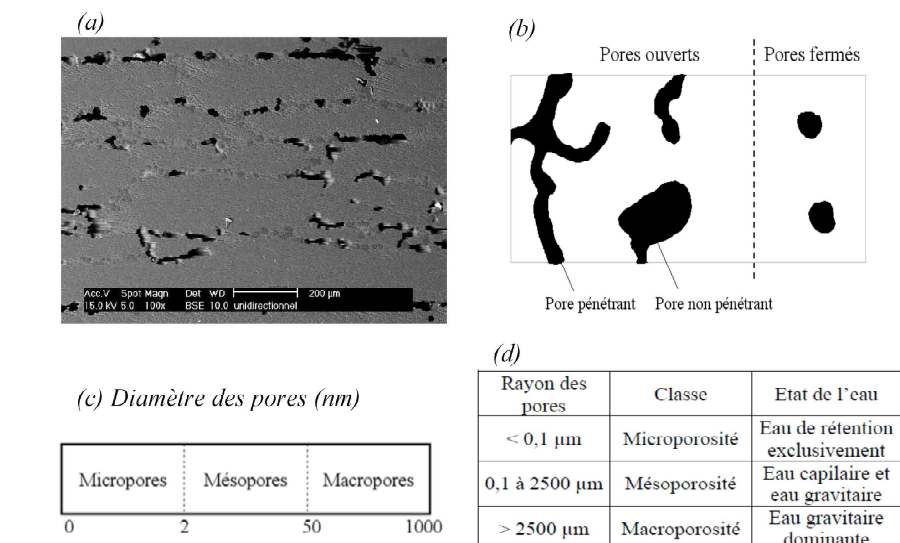


Figure (2.10) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores.

Schoeller [Schoeller H., 1955], distingue deux catégories de pores représentés sur la Figure 2.10 (b) :

- les porosités ouvertes composées de vides inters communicants connectés à la partie extérieure du matériau.
- les porosités fermées, isolées à l' intérieur du matériau et ne permettant aucune perméabilité. Les pores pénétrants sont des pores ouverts qui ont la particularité de relier au moins deux faces du matériau poreux.

Les nombreuses applications des matériaux poreux font appel à des tailles de pores qui peuvent varier de l'échelle atomique à l'échelle millimétrique. L'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) a recommandé la nomenclature relative à la taille des pores présentée à la Figure 2.10(c) [Schaefer D.W., 1994]. En se référant à la gamme des tailles moyennes des interstices d'un milieu poreux et aux états physiques de l'eau contenue en leur sein, une seconde classification des porosités avait préalablement été proposée [Schoeller H., 1955]. Celle-ci définit une micropore (ou pore matricielle) comme une cavité de diamètre inférieur à $0,1 \mu\text{m}$ et une macropore (ou porosité structurale) comme une cavité de diamètre supérieur à $2,5\text{mm}$. Les mésoporosités (ou porosité texturale ou capillaire) sont donc les interstices de diamètre intermédiaire compris entre $0,1 \mu\text{m}$ et $2,5 \text{mm}$ (Figure 2.10 (d)).

2.8.2 Causes d'apparition de la porosité

Causes mécaniques

La création de porosité par emprisonnement mécanique d'air lors de la conception de la pièce est la cause la plus facile à comprendre intuitivement. Les deux exemples suivants illustrent ce type de création :

Le premier concerne l'emprisonnement de poches d'air dans la résine durant sa phase de fabrication (malaxage, etc...) ou durant l'imprégnation du renfort. Ce deuxième point est largement développé par de nombreux auteurs travaillant sur la mise en œuvre des composites par RTM ou par infusion (RLI, RFI...). L'intégralité de ces travaux expliquent la formation lors du moulage par LCM de deux types de porosités : les macros porosités observées entre les mèches et les micros porosités, observées au sein même des mèches.

causes thermodynamiques

L'observation du diagramme de phase de l'eau montre qu'une bulle de vapeur dans la phase liquide se forme soit en augmentant la température localement dans le liquide [Divinis N., 2005], soit en provoquant une rapide décompression [Payvar P., 1987]. Ces deux paramètres favorisent en effet les nucléations homogène et hétérogène des germes initiateurs de bulle.

Au sein de la résine, les molécules de gaz diffusent au hasard et finissent par se rencontrer d'autant plus facilement que leur concentration est élevée. Les molécules diffusantes, à l'état de monomère s' additionnent donc successivement pour former des

agglomérats qui ont une taille suffisante pour être qualifiés de germes (entre 50 et 100 molécules pour une espèce chimique à faible masse molaire comme l'eau [Kingery W.D., 1975]).

2.9 Quantification de la porosité

Les difficultés d'observation et de quantification des porosités dans leur ensemble est un des facteurs limitant pour l'étude de leur formation et de leur influence. Ceci est vrai pour tous les types de matériaux composites : les matériaux composites organiques, céramiques ou métalliques. La recherche bibliographique sur ce point a mis en évidence de nombreuses méthodes d'analyse de la porosité. Cependant, seules quelques unes peuvent être utilisées.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion d'un matériau FGM. Dans un premier temps, nous avons présenté l'historique de la fabrication des FGM dont les premiers pas de la naissance du FGM. Et puis en est passé à décrire les différentes méthodes modernes d'usinage à savoir la méthode d'injection des poudres. Après nous avons cité les propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM, et à la fin nous sommes terminés par la présentation des différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau FGM (Ex. module d'Young) suivant l'épaisseur de la plaque, ces lois peuvent être de puissance, exponentielle ou même sigmoïde, ainsi que le gradient de porosité des matériaux FGM.

Chapitre 3. Théories des plaques

3.1 Introduction

Afin de résoudre les problèmes des plaques en FGM dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer.

C'est en 1888 que Love utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love) (*CPT : Classical plate theory*). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) (*FSDT : The first-order shear deformation plate theory*) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921) [24], Reissner (1945) [25] et Uflyand (1948) [26]. Ensuite, des théories d'ordre supérieur (*HSDT : High-order shear deformation plate theory*) sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. Il existe aussi la théorie basée sur l'élasticité tridimensionnelle qui ne fait aucune hypothèse restrictive sur les déplacements de la plaque.

Nous présentons dans ce chapitre quelques modèles des théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

3.2 Différents modèles de plaque

Par modèle de plaque, on entend un modèle dans lequel on effectue une approximation de l'estimation des variables du champ de déplacement – généralement sur l'épaisseur de la structure – destinée à modéliser le comportement d'une plaque – le plus souvent multicouche –. Il n'est pas rare de rencontrer d'autres définitions d'un modèle de plaque, par exemple, Carrera [27], définit un modèle de plaque comme un modèle dans lequel le degré d'interpolation au travers de l'épaisseur est au moins d'un degré inférieur à celui des autres directions.

Parmi les modèles de plaque, on distingue deux grandes familles, les modèles *Equivalent Single Layer* (ESL – modèle couche équivalente) et les modèles *Layer-Wise* (LW – par couche). Les modèles ESL expriment chaque composante du champ de déplacement en fonction de variables définies sur un plan de référence, décrit par les coordonnées x et y dans le plan, et fonction de z la direction normale au plan x ; y traduit ce qui se passe dans l'épaisseur.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles de Love-Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux auteurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés. Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

3.2.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff

Ce modèle est la généralisation pour des matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff. Cette théorie ne tient pas compte du cisaillement transverse et suppose que les déplacements de membrane, en tout point de la plaque, sont uniquement dépendants des déplacements de membrane et des dérivées de la flèche.

Le champ de déplacement associé est présenté dans l'équation (3.3). La figure 3.1 illustre l'état déformé d'une structure monocouche avec le modèle de Love-Kirchhoff : la section de la poutre déformée reste orthogonale à l'axe neutre, les contraintes et déformations de cisaillement transverse sont nulles. Cette formulation a tendance à sous-estimer les flèches et sur-estimer les fréquences propres des structures modélisées, cette erreur étant encore plus grande pour les stratifiés fortement anisotropes. Cependant, ce modèle permet de décrire correctement le comportement de plaques simples fortement élancées ou avec une épaisseur

faible par rapport à la longueur d'onde de flexion, d'où son appellation de "plaques minces".

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.3b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.3c)$$

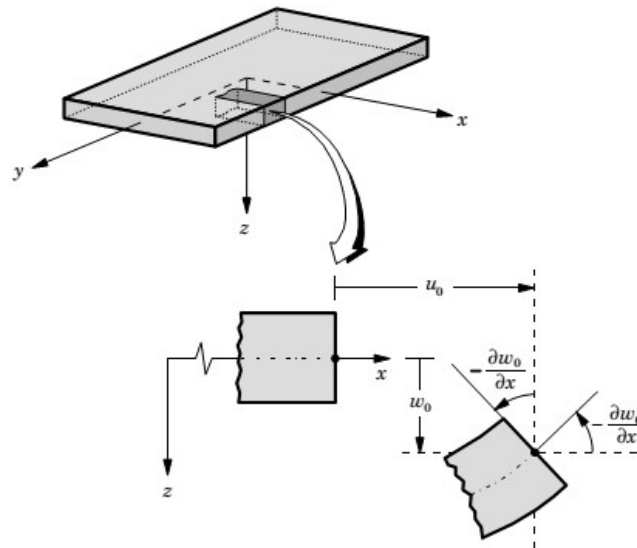


Figure (3.1) Plaque de Love Kirchhoff [28].

Ce modèle a été utilisé par plusieurs chercheurs pour analyser le comportement des plaques. Feldman et Aboudi [29] ont étudié le flambement élastique de plaque en FGM soumise à une charge de compression uniaxiale en utilisant une combinaison micromécanique et des approches structurales. Ils ont donné une solution analytique de la charge de flambement d'une plaque en FGM avec diverses conditions aux limites des équations gouvernantes dérivées par la théorie classique CPT. Javaheri et Eslami [30], [31] utilisent la théorie classique pour étudier le flambement des plaques en FGM sous quatre types de charge thermique et des charges de compression. Basé sur la théorie classique, Kiani et al [32] présente une solution analytique de la température critique de flambement des plaques encastées sur fondation élastique soumise à trois types des charges thermiques.

Ghannadpour et al [29] ont examinés aussi le flambement thermique des plaques en FGM en utilisant la théorie classique (CPT). Cependant, la charge de flambement a été calculée la méthode des bandes finies au lieu de la solution de Navier. Le flambement des plaques en FGM soumise à une compression non uniforme a été analysé par Mahdavian [30] en utilisant la théorie classique et la solution de Fourier. Mohammadi et al [31] ont utilisés la

méthode de Levy pour étudier le flambement des plaques en FGM avec deux bords opposés simplement appuyés et les deux autres sous conditions aux limites arbitraire pour résoudre les équations gouvernantes dérivées par la théorie classique.

Alinia et Ghannadpour [32] ont utilisés la théorie classique avec les hypothèses de von - Karman pour étudier la réponse non linéaire des plaques en FGM soumise à des pressions transversales. Par le principe de minimisation de l'énergie potentielle, les auteurs ont obtenu une solution analytique pour une plaque simplement appuyée.

La vibration libre des plaques en FGM avec diverse condition aux limites sur fondation élastique a été analysé par Chakraverty et Pradhan [33] en utilisant la théorie classique et la méthode de Rayleigh – Ritz. Les mêmes auteurs [34] ont confirmé leur précédent travail par la prise en considération de l'effet d'un environnement thermique.

La théorie classique des plaques a été aussi utilisée pour analyser le comportement des plaques circulaires et des coques.

3.2.2 *Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre*

Aussi appelé modèle de Mindlin-Reissner ou encore "théorie des plaques épaisses", ce modèle pose pour hypothèse une déformation de cisaillement transverse constante au travers de l'épaisseur de la plaque, le déplacement d'un point de la plaque dépend cette fois de u , v , des dérivées de la flèche w et des cisaillements. L'équation (3.4) présente le champ de déplacement associé à ce modèle. Celui-ci, développé par Reissner [25], fut le premier modèle de plaque prenant en compte les contraintes de cisaillement transverse ; Mindlin [35] développa la théorie de déformation en cisaillement au premier ordre basé sur les déplacements.

Le plus souvent, le champ de déplacement lié à la FSDT est écrit en fonction des rotations $\theta(x; y) = \theta_0(x; y) - \theta_1(x; y)$ $w_0(x; y)$. Il est donc commun de rencontrer le champ de déplacement associé sous la forme suivante

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (3.4a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (3.4b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.4c)$$

Où u_0 , v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations dues à la flexion suivant x et y .

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a été utilisée par Lanhe [36] et Bouazza et al. [37] Ont donné une solution analytique de flambement thermique des plaques en FGM simplement appuyée sous deux types de chargement thermique en utilisant la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) et la solution de Navier.

Cette théorie a été utilisée par Yaghoobi et Yaghoobi [38] pour analyser le flambement des plaques sandwiches en FGM sur fondation élastique sous chargement thermique et mécanique.

Des solutions analytiques de la vibration libres par la méthode de Levy des plaques sur fondation élastique ont été données par Hosseini-Hashemi et al [39]. Ils ont confirmé leurs précédent travail par la prise en compte de l'effet de couplage entre les déplacements en plan et transverse [40].

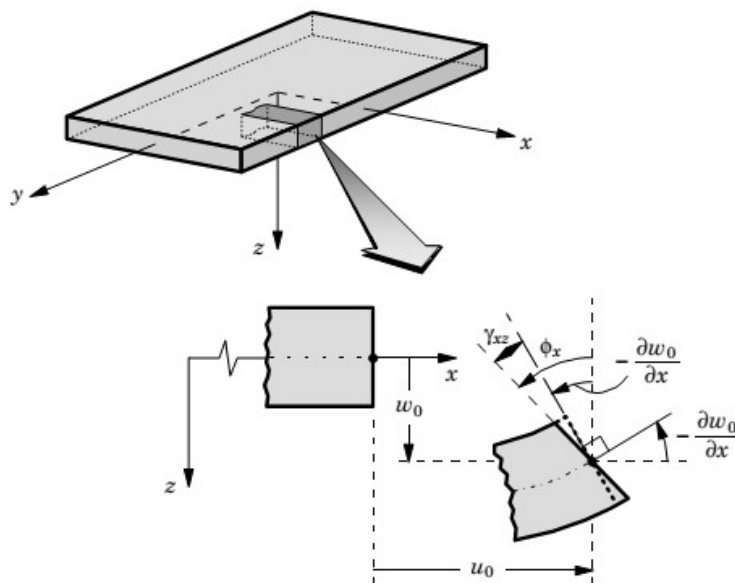


Figure (3.2) *Plaque de Reissner-Mindlin* [28].

Mohammadi et al. [41] Découple les cinq équations de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) en deux équations indépendantes. Ensuite la méthode de Levy a été utilisée pour obtenir la charge de flambement des plaques en FGM sous chargement en plan. Cette approche a été aussi employée par Saidi et Jomehzadeh [42] pour dériver par la méthode de Levy la flèche et les contraintes des plaques en FGM soumise à un chargement transverse. Yaghoobi et Torabi ont adapté cette approche pour obtenir la charge de flambement des plaques en FGM sur fondation élastique sous chargements thermiques [43].

Comme précisé précédemment, la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) nécessite un facteur de correction du cisaillement transversal. Pour dépasser cette insuffisance, Nguyen et al [44] ; ont adoptés les équations d'équilibre pour calculer les contraintes de cisaillement transversales et les forces de cisaillement. Les résultats de l'analyse de la flexion statique des plaques en FGM simplement appuyées et des panneaux sandwich en FGM encastre indique que la valeur du facteur de correction des plaques en FGM n'est pas le même comme dans les plaques homogènes.

Baser sur la surface neutre, la théorie du premier ordre de cisaillement a été adopté par Singha et al pour étudier la flexion non linéaire des plaques en FGM sous pression transversale en utilisant la méthode des éléments finis. Dans ce cas, les contraintes de cisaillement sont calculées à partir des équations d'équilibre, tandis que l'expression du facteur de correction est obtenue par la méthode énergétique [45].

Park et Kim [46] ont choisis la théorie du premier ordre de cisaillement avec les hypothèses de van – Karman pour étudier le post flambement et la vibration des plaques en FGM sous chargement thermique par la méthode des éléments finis.

3.2.3 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé

Une fois introduits dans les modèles du premier ordre, les facteurs de correction du cisaillement transversal ont permis de résoudre des problèmes de structures multicouches mais leurs évaluations dépendent malheureusement du nombre de stratifications c.à.d. du problème à résoudre. Pour écarter à jamais ce type de contrainte, des théories d'ordre élevé ont été introduites au début des années 70. La première théorie a été proposée en 1969 par Whitney, qui a supposé un champ de déplacement d'ordre supérieur à trois. Elle a donné des résultats précis mais fût abandonnée en raison de sa complexité théorique ; elle exige en effet

un grand nombre de paramètres. D'autres théories sont apparues par la suite, avec des formalismes différents selon le domaine d'application.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans Reddy [47] ; Kant et Swaminathan [48].

Le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque de coordonnées (x, y, z) peut être écrit comme suit :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi(z) \theta_x \quad (3.5a)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi(z) \theta_y \quad (3.5b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (3.5c)$$

Où u, v, w sont les déplacements suivant les directions x, y et z respectivement, u_0, v_0 et w_0 sont les déplacements d'un point situé dans le plan médian, θ_x et θ_y sont les rotations dues à la flexion suivant X et Y respectivement. $\psi(z)$ Représente la fonction de forme pour déterminer la répartition des déformations de cisailment transversales et les contraintes à travers l'épaisseur.

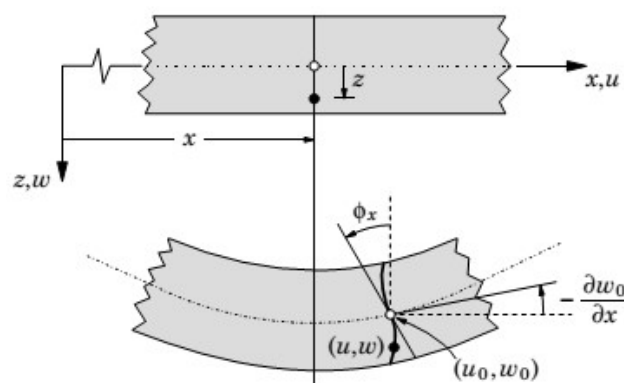


Figure (3.3) Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques [28].

Selon l'expression de la fonction de cisailment $\psi(z)$, quelques modèles d'ordre élevés se sont distingués dans la littérature. Nous citons en particulier :

L'approche de Reddy [47] - [49] - [28] : théorie des plaques de troisième ordre en cisaillement (TSDPT) $\psi(z)$ est donné comme suit :

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^3} \right) \quad (3.6)$$

La théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdale (SSDPT) de Touratier [50] et de Zenkour et Alghamdi [51] est donnée comme suit :

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \quad (3.7)$$

En outre, la théorie des plaques de déformation de cisaillement exponentielle (ESDPT) de Karama [52] est donnée comme suit :

$$\psi(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (3.8)$$

Avec h : l'épaisseur de la plaque.

La théorie des plaques de troisième ordre de cisaillement (TSDPT) est la théorie d'ordre élevé la plus utilisée due à sa simplicité. Cette théorie a été adoptée par Saidi et al. [53] pour dériver des solutions analytiques pour la déflexion et les contraintes des plaques en FG soumises à des charges transversales par la méthode de Levy. Thaï et Kim [54] ont reformulé la TSDT basée sur la surface neutre, ont dérivée par la solution de Levy la charge de flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique.

Nguyen et Pham [55] ont étudié le comportement post flambement des plaques FG reposant sur une fondation élastique. Des solutions analytiques pour la charge de flambement et la température de flambement des plaques FG sous sollicitations mécaniques et thermiques ont été obtenues en utilisant la TSDT et la méthode de Galerkin.

3.2.4 Théorie raffinée de déformation des plaques :

Shimpi [56] a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT : *Refined Plate Theory*). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode et qu'elle ne contient que deux variables qui donne seulement quatre inconnus à trouvés au lieu des cinq dans le cas des autres théories d'ordre élevés. En plus, cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque. Aussi, elle présente beaucoup de similitudes

avec la théorie classique des plaques quant aux équations d'équilibres, les conditions aux limites et les expressions des moments.

Ait Atmane et al. [57] ont adaptée une théorie raffinée pour étudier la flexion des plaques FGM. Thai et Kim [[58] - [59]] et Hadji et al. [60] ont utilisés la RPT, à l'étude du flambement des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.

Bouderba et al. [61] Ont étudiés la réponse en flexion thermomécanique des plaques FG sandwichs reposants sur fondation élastique en utilisant une théorie raffinée de cisaillement trigonométrique.

3.2.5 *Approche par couche*

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface pour les matériaux composites conventionnels. Ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés [47] - [62] - [63] - [64]. Le multicouche est subdivise en sous structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couches). On applique à chaque sous structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur, imposant un champ de déplacement vérifiant la continuité aux interfaces entre les différentes couches. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (l'ordre des équations de comportement dépend du nombre de couche), mais ils permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan.

D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classes en deux groupes :

- *Les modèles couches discrètes ou chaque couche est considéré comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacements ou en contraintes aux interfaces.*
- *Les modèles zig-zag ou la cinématique satisfait à priori les conditions de contact est indépendante du nombre de couches (Figures. 3.4 et 3.5)*

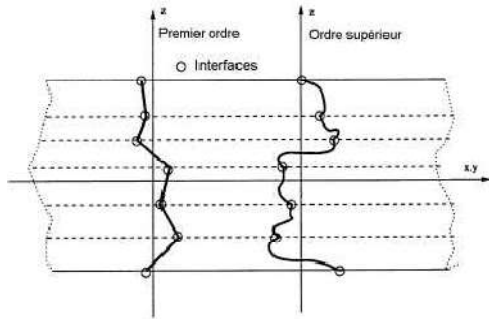


Figure (3.4) Champs de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique. [65]

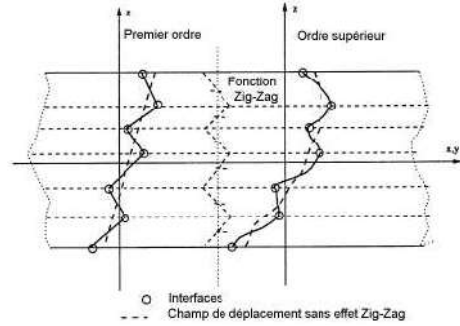


Figure (3.5) Champs de déplacements des modèles zig-zag, approche cinématique. [65]

3.2.6 Les modèles zig-zag

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre [66]. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure.3.6). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée.

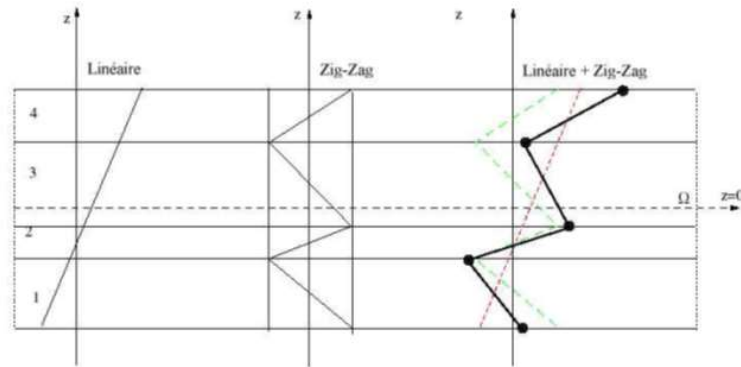


Figure (3.6) Champs de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre. [65].

L'avantage principal du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la distorsion de la normale de la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, et ce sans augmenter pour autant le nombre et l'ordre des équations fondamentales de la théorie du premier ordre. Le recours à des coefficients de correction pour le cisaillement transverse est évité.

En se basant sur ce concept plusieurs auteurs ont réalisé des améliorations significatives pour le modèle zig-zag [65] - [67] - [68] - [69]. L'amélioration principale est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. On superpose le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre supérieur (souvent cubique) (voir Figure.3.7).

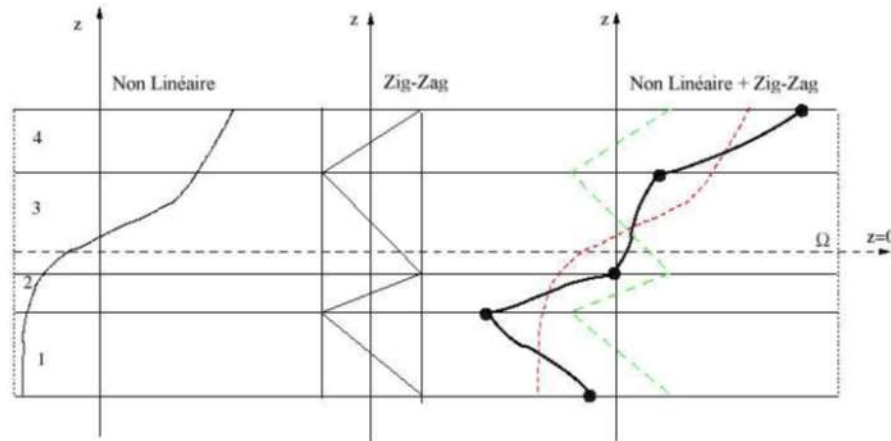


Figure (3.7) Champs de déplacements des modèles zig-zag d'ordre supérieur. [65].

Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieure et inférieure des plaques pour réduire le nombre de paramètres.

Dans les travaux de Ossadzow [70] et Karama [71], la fonction zig-zag est ajoutée à la fonction "sinus" de déplacement pour raffiner les effets de cisaillement.

Afaq et al. [64] Combine le modèle exponentiel avec l'effet zig-zag pour une cinématique plus riche.

Le modèle zig-zag assure un bon compromis entre la précision des solutions et le coût de calcul. Cependant quand l'éclatement diminue, le calcul des contraintes de cisaillement transverse devient moins précis [69].

3.2.7 Modèles couches discrètes

Les modèles couches discrètes adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche que les modèles de plaque d'ordre supérieur ou zig-zag puisqu'ils proposent une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale (voir Figure. 3.4). En fait, avec les modèles couches discrètes, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques (objets 2D) couplés par des efforts d'interface. Les conditions de

continuité aux interfaces sont assurées. Le nombre de paramètres inconnus dépend du nombre de couche de la plaque composite.

Dans les travaux de [72] - [73], on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, les travaux de [74] - [75] - [76] utilisent une approximation des champs de contraintes par couche ou une mixte contrainte cinématique. Ainsi [74] utilise un champ de contrainte dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces.

Dans [75], le champ de contrainte est construit sous la forme d'un produit de fonctions à variables séparées, par couche, à partir de l'équilibre des forces et moments. Les contraintes planes sont supposées constantes suivant l'épaisseur. Dans [76], les fonctions de contraintes sont utilisées par couche pour déterminer les contraintes inter laminaires. Elles sont approximées de façon polynomiale dans l'épaisseur.

Nous passons à présent à une famille de modèles couches discrètes particulières, les modèles multi particulières. Le premier travail semble être celui de Pagano qui propose le modèle local dans [77]. Le modèle local a été construit à partir de la formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner et d'une approximation polynomiale des champs de contraintes par couche.

Les polynômes sont du premier degré pour les contraintes membranaires, quadratique pour les contraintes de cisaillement et donc cubique pour les contraintes normales.

La formulation variationnelle d'Hellinger-Reissner restreinte aux approximations de ces champs de contraintes conduit à une cinématique du multicouches à $7n$ champs en $(x; y)$, n étant le nombre de couches de la plaque. Ces champs cinématiques contiennent des composantes correspondantes à des moments du second ordre qui n'ont pas un sens physique très clair.

La formulation mixte d'Hellinger-Reissner permet de déduire le comportement élastique linéaire généralisé du modèle. Ce modèle pose quelques difficultés au niveau des

conditions aux limites et reste assez lourd compte tenu du nombre élevée de champs cinématiques intervenants. Ce modèle a été le point de départ pour un ensemble de travaux menés à l'ENPC dont l'objectif est de proposer une série de simplifications permettant d'alléger tout en conservant un bon niveau de prédictibilité [65].

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit les différentes théories des plaques à savoir l'approche monocouche équivalente, l'approche par couche. Nous concluons aussi que l'approche monocouche équivalente est plus appropriée pour les matériaux FGM, car elle évite les changements brusques dans les caractéristiques mécaniques, contrairement aux composites conventionnels où le délaminage peut poser problème. Donc on a eu recours au modèle monocouche équivalent pour les plaques pour différentes théories d'ordre élevé ou la prise en compte du cisaillement transversal est nécessaire pour une étude plus exacte .

Chapitre 4. Formulation théorique

4.1 Introduction

L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Ce chapitre est consacré à la modélisation du problème du flambement des plaques sandwichs poreuse en FGM.

Les formulations théoriques sont basées sur une théorie raffinée de déformation en cisaillement du troisième ordre (RTSDT). La théorie proposée, est basée sur l'hypothèse que les déplacements axiale et transversale sont constitués d'une partie de flexion et une autre de cisaillement de telle sorte que la composante de flexion ne contribue pas dans les efforts de cisaillement et de même, la composante de cisaillement ne contribue pas dans les moments de flexions, Contrairement aux autres théories, le nombre des inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement.

4.2 Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwichs en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z) comme le montre la figure 4.1. Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à $z = \pm h/2$, et les bords de la plaque sont Parallèles aux axes x et y .

La plaque sandwichs est composée de trois couches élastiques : " couche 1", " couche 2" et " couche 3" du bas vers le haut de la plaque (Figure 4.1). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la plaque sont notées par : $h_0 = -h/2, h_1, h_2, h_3 = h/2$ respectivement. Le volume et la surface supérieure, sont notés par V et Ω : respectivement. Le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la plaque est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-1-2", "1-1-3" et ainsi de suite.



Figure (4.1) Système de coordonnées et numérotation des couches

La fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur. Deux formes de distribution de la porosité sont considérées dans cette étude. Une distribution uniforme (4.2) et la deuxième non uniforme (4.3)

$$\begin{cases} V^{(1)} = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^p, & z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)} = 1, & z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)} = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^p, & z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} E^1(z) = E_m + (E_c - E_m)V^1 - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \\ E^3(z) = E_m + (E_c - E_m)V^3 - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} E^1(z) = E_m + (E_c - E_m)V^1 - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left[1 - \frac{|2z - (h_0 + h_1)|}{h_1 - h_0} \right] \\ E^3(z) = E_m + (E_c - E_m)V^3 - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left[1 - \frac{|2z - (h_3 + h_2)|}{h_3 - h_2} \right] \end{cases} \quad (4.3)$$

Où

$P^{(n)}$ est la propriété de matérielle effective de la couche n . P_c et P_m correspondent à la propriété des faces inférieure et supérieure respectivement de la couche 1 ($h_0 \leq z \leq h_1$), et vice versa pour la couche 3 ($h_2 \leq z \leq h_3$), selon la fraction de volume $V^{(n)}$, ($n = 1, 2, 3$). On Note que P_c et P_m sont, respectivement, les propriétés correspondantes à la céramique et au métal de la plaque sandwich FGM. Dans cette étude le coefficient de poisson de la plaque est supposé constant. Cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young [78,79].

4.3 Théorie des plaques raffinée pour les FGM

Contrairement aux autres théories, le nombre des inconnues dans la théorie raffinée (RPT) actuelle est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement [47] - [50] - [51] - [52], le nombre d'inconnus est cinq. La théorie présentée est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement, et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur en satisfaisant les conditions des surfaces libres.

4.3.1 Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT)

Les hypothèses de la RPT sont les suivantes :

Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, ces déplacements impliqués sont infinitésimaux.

Le déplacement transversal w comprend deux composantes : w_b due à la flexion et w_s due au cisaillement transverse. Ces composantes sont des fonctions des coordonnées x et y seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4.7)$$

La contrainte normale transverse σ_z est négligeable par rapport aux contraintes σ_x et σ_y .

Le déplacement U suivant la direction x et V suivant la direction y sont constitués de trois composantes : d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$\begin{cases} U = u_0 + u_b + u_s \\ V = v_0 + v_b + v_s \end{cases} \quad (4.8)$$

Les composants de flexion u_b et v_b sont considérées semblables aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques. Par conséquent, l'expression de u_b et v_b peut être donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \\ v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \end{cases} \quad (4.9)$$

Les composantes de cisaillement u_s et v_s donnent lieu, en relation avec w_s , aux variations paraboliques des déformations de cisaillement γ_{xz} , γ_{yz} et des contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} à travers l'épaisseur de la plaque de telle façon que les contraintes de cisaillement τ_{xz} , τ_{yz} seront nulles sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, l'expression de u_s et v_s peut être donnée comme suit :

$$\begin{cases} u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{cases} \quad (4.10)$$

4.3.2 Cinématique et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations (4.7) – (4.10).

$$\begin{cases} U(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ V(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ W(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (4.11a)$$

Avec

$$f(z) = z - \psi(z) \text{ et } \psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^3}\right) \quad (4.11b)$$

Les déformations associées aux déplacements de l'équation (4.11a) sont données comme suit

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s \\ \epsilon_y = \epsilon_y^0 + zk_y^b + f(z)k_y^s \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^b + f(z)k_{xy}^s \\ \gamma_{yz} = g(z) \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \\ \epsilon_z = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Avec

$$\begin{cases} \epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \epsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad k_{xy}^b = -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial xy}, \quad k_{xy}^s = -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial xy} \\ \gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ g(z) = 1 - f'(z) \text{ et } f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \end{cases} \quad (4.13)$$

Pour les matériaux en FGM, élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4.14a)$$

Et

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4.14b)$$

Où : $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ sont les composantes de la contrainte et de la déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation (4.2), les coefficients de rigidité Q_{ij} sont exprimés comme suit

$$\begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (4.15)$$

4.3.3 Flambement des plaques sandwiches en matériaux FGM avec diverses conditions aux bords

Il sera considéré dans cette partie une plaque sandwich en FGM, avec les faces externes (peaux) en FGM et cœur homogène en céramique. Les propriétés matérielles effectives, sont exprimées par la loi de mélange suivante :

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (4.16)$$

La fraction volumique dans la plaque est assurée par une loi de puissance suivant l'équation (4.1).

Équations gouvernantes

L'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$Ue = \frac{1}{2} \int [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (4.17)$$

En remplaçant les équations (4.12) et (4.14) dans l'équation (4.17) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la plaque, l'énergie de déformation de la plaque peut être écrite comme :

$$Ue = \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + M_x^b k_x^b + M_y^b k_y^b + M_{xy}^b k_{xy}^b + M_x^s k_x^s + M_y^s k_y^s + M_{xy}^s k_{xy}^s + S_{yz}^s \gamma_{yz}^s + S_{xz}^s \gamma_{xz}^s \right] dx dy \quad (4.18)$$

Où les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz \\
(M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz \\
(M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_h^h (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) f dz \\
(S_{xy}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{hn}^{hn+1} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) g dz
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Substituant l'équation (4.14) dans l'équation (4.19) et en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque, les forces et moments résultants sont donnés comme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{4.21a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}, k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}, k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\} \tag{4.21b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{4.21c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{4.21d}$$

Ou Les composantes de rigidité A_{ij}, B_{ij} , etc , sont définis comme :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^S & D_{11}^S & H_{11}^S \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^S & D_{12}^S & H_{12}^S \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^S & D_{66}^S & H_{66}^S \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^3 \int_h^{hn+1} Q_{11}^{(n)} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ v^{(n)} \\ \frac{1-v^{(n)}}{2} \end{array} \right\} dz \quad (4.22a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^S, D_{22}^S, H_{22}^S) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^S, D_{11}^S, H_{11}^S), Q_{11}^{(n)} = \frac{E(z)}{1-v^2} \quad (4.22b)$$

$$A_{44}^S = A_{55}^S = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{hn+1} \frac{E(z)}{2(1+v)} [g(z)]^2 dz \quad (4.22c)$$

Les équations d'équilibres de la plaque sandwich FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe des travaux virtuels sous la forme analytique suivante :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} (\sigma \delta \varepsilon) dx dy dz - \int_{\Omega} \bar{N} \delta W dx dy = 0 \quad (4.23)$$

avec

$$\bar{N} = \left[N_x^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 (w_b + w_s)}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.24)$$

Où δ indique la variation suivant x et y

En remplaçant l'équation (4.19) dans l'équation (4.23) et en intégrant par parties, en rassemblant les coefficients $\delta u, \delta v, \delta w_b$ et δw_s , les équations d'équilibres pour la plaque sandwich FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v &= \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b &= \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \\ \delta w_s &= \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Équations (4.25) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_s, v_s, w_b, w_s) en remplaçant les forces résultantes de l'équation (4.21). Les équations d'équilibre (4.25) prennent la forme :

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \\ - B_{11}^S \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^S + 2B_{66}^S) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.26a)$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} - B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (4.26b)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} = 0 \quad (4.26c)$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + B_{66}^s) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} = 0 \quad (4.26d)$$

Solution exacte pour les plaques sandwiches FGM

Pour une solution analytique des équations (4.26), la méthode des variables séparées est utilisée pour une plaque sandwich rectangulaire en FGM sous diverses conditions aux bords.

- Encastré (C) :

$$u = v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } x = 0 \text{ et } y = 0, b \quad (4.27a)$$

- Simplement appuyé (S) :

$$v = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial y} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad \text{Pour } x = 0, a \quad (4.27b)$$

$$u = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{Pour } y = 0, b \quad (4.27c)$$

Les fonctions des déplacements qui satisfont les équations des conditions aux limites (4.27) sont développées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} X'_m(x) Y_n(y) \\ V_{mn} X_m(x) Y'_n(y) \\ W_{bmn} X_m(x) Y_n(y) \\ W_{smn} X_m(x) Y_n(y) \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Ou U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} et W_{smn} sont des paramètres à déterminer. Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ données dans le tableau (4.1) sont proposés par Sobhy [80] pour satisfaire les diverses conditions aux limites dans les équations (4.27) et (4.28) et $\lambda = m\pi/a$, $\mu = n\pi/b$.

Tableau (4.1) Fonctions admissibles $X_m(x)$ et $Y_n(y)$

Conditions aux bords					Fonctions X_m et Y_n	
Notation	$x = 0$	$y = 0$	$x = a$	$y = b$	$X_m(x)$	$Y_n(y)$
SSSS	S	S	S	S	$\sin(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CSCS	C	S	C	S	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin(\mu y)$
CCCC	C	C	C	C	$\sin^2(\lambda x)$	$\sin^2(\mu y)$
FCFC	F	C	F	C	$\cos^2(\lambda x) [\sin^2(\lambda x) + 1]$	$\sin^2(\mu y)$

Substituant les équations (4.28) dans les équations d'équilibres (4.26) et en multipliant chaque équation par la fonction propre correspondante puis en intégrant sur le domaine de la solution, Nous pouvons obtenir, après quelques manipulations mathématiques, les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Équation (4.29) présente un système aux valeurs propres pour le problème de flambement des plaques sandwiches en FGM :

$$([K] - [N])\{\Delta\} = \{0\} \quad (4.30)$$

Où $\{\Delta\}$ représente le vecteur de colonne des inconnus :

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bn}, W_{sn}\} \quad (4.31)$$

Dans lequel :

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} X_m''' Y_n + A_{66} X_m' Y_n'') X_m' Y_n dx dy \\
a_{12} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} + A_{66}) X_m' Y_n'' X_m' Y_n dx dy \\
a_{13} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m'' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m' Y_n''] X_m' Y_n dx dy \\
a_{14} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m' Y_n''] X_m' Y_n dx dy \\
a_{21} &= \int_0^a \int_0^b (A_{11} + A_{66}) X_n'' Y_m' X_m' Y_n dx dy \\
a_{22} &= \int_0^a \int_0^b (A_{22} X_m Y_n''' + A_{66} X_m'' Y_n') X_m Y_n dx dy \\
a_{23} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m Y_n dx dy \\
a_{24} &= - \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m Y_n dx dy \\
a_{31} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11} X_m''' Y_n + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n''] X_m Y_n dx dy \\
a_{32} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22} X_m Y_n''' + (B_{12} + 2B_{66}) X_m'' Y_n'] X_m Y_n dx dy \\
a_{33} &= \int_0^a \int_0^b -[B_{22} X_m''' Y_n + 2(D_{12} + 2D_{66}) X_m'' Y_n' + D_{22} X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{34} &= \int_0^a \int_0^b -[D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{41} &= \int_0^a \int_0^b [B_{11}^s X_m''' Y_n + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n''] X_m Y_n dx dy \\
a_{42} &= \int_0^a \int_0^b [B_{22}^s X_m Y_n''' + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) X_m'' Y_n'] X_m Y_n dx dy \\
a_{43} &= \int_0^a \int_0^b -[D_{11}^s X_m''' Y_n + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) X_m'' Y_n' + D_{22}^s X_m Y_n'''] X_m Y_n dx dy \\
a_{44} &= \int_0^a \int_0^b - \left([H_{11}^s X_m''' Y_n + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) X_m'' Y_n' + H_{22}^s X_m Y_n'''] \right. \\
&\quad \left. + A_{55}^s X_m Y_n + A_{44}^s X_m Y_n'' \right) X_m Y_n dx dy \\
k &= N_{cr} \int_0^a \int_0^b (\gamma_1 X_m'' Y_n + \gamma_2 X_m Y_n'') X_m Y_n dx dy \tag{4.32}
\end{aligned}$$

En supposant qu'il existe un rapport entre les forces de compression de telle façon que $N_x^0 = \gamma_1 N_{cr}$, $N_y^0 = \gamma_2 N_{cr}$, $N_{xy}^0 = 0$.

4.4 Types de plaques sandwich

On note que l'âme de la plaque non symétrique est entièrement en métal tandis que les peaux supérieure et inférieure de la plaque sont riches en céramique.

Plusieurs types de plaques sandwich sont considérées dans cette étude :

La plaque sandwiches en FGM (1-2-2) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de l'âme est identique à l'épaisseur de la peau supérieure tandis qu'elle est le double de l'épaisseur de la peau inférieure. Nous avons Ainsi

$$h_1 = \frac{-3h}{10}, h_2 = \frac{h}{10}$$

La plaque sandwiches en FGM (1-1-3) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de l'âme est identique à l'épaisseur de la face inférieure et un tiers de l'épaisseur de la face supérieure Ainsi

$$h_1 = \frac{-3h}{10}, h_2 = \frac{-h}{10}$$

La plaque sandwiches en FGM (2-1-4) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de la face inférieure est le double de l'épaisseur de l'âme, or que de l'épaisseur de la face supérieure

$$h_1 = \frac{-3h}{14}, h_2 = \frac{-h}{14}$$

La plaque sandwiches en FGM (2-1-3) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de la face inférieure est le double de l'épaisseur de l'âme, or que de l'épaisseur de la face supérieure est triple de celle de l'âme.

$$h_1 = \frac{-h}{6}, h_2 = 0$$

La plaque sandwiches en FGM (4-1-3) :

C'est une plaque non symétrique dont l'épaisseur de l'âme est un quart de l'épaisseur de la face inférieure, cependant l'épaisseur de la face supérieure est triple de celle de l'âme.

$$h_2 = 0, h_3 = \frac{h}{8}$$

La plaque sandwiches en FGM (3-1-4) :

C'est une plaque non symétrique dont de l'épaisseur de l'âme est un quart de l'épaisseur de la face supérieure, alors que de l'épaisseur de la face inférieure est triple de celle de l'âme.

$$h_1 = \frac{-h}{8}, h_2 = 0.$$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une solution analytique générale pour le flambement des plaques sandwiches en FGM, en prenant en compte différentes conditions aux limites. La formulation théorique repose sur une théorie raffinée de déformation en cisaillement (RTSDT). Contrairement aux autres théories, cette théorie utilise uniquement quatre fonctions inconnues, tandis que les autres théories de déformation en cisaillement en utilisent cinq ou plus. La théorie présentée ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et fournit une description trigonométrique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en satisfaisant la condition de contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres. Les résultats présentés dans le chapitre suivant permettent de mettre en évidence clairement les avantages de cette théorie en les comparant avec les résultats obtenus par d'autres théories.

Chapitre 5. Validation des résultats

5.1 Introduction

L'intérêt de ce chapitre est de présenter les résultats numériques de l'analyse du flambement sous diverse condition aux limites des plaques sandwichs poreuse en FGM en utilisant une théorie raffinée. On suppose que les propriétés matérielles ; tel que le module de Young de la plaque sandwich varient sans interruption à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. Et que la porosité dans la plaques sandwichs est distribuée a travers l'épaisseur des plaque selon deux formes ; uniforme et non uniforme. Plusieurs configurations de plaques sandwichs symétriques et non symétriques sont utilisées.

5.2 Flambement des plaques sandwichs en FGM avec diverses conditions aux bords

Dans cette partie, nous présentons et nous discutons plusieurs exemples numériques pour vérifier l'exactitude de la présente théorie et nous étudions les effets de (1) l'indice puissance, (2) rapport d'épaisseur des couches, (3) types d'appuis, (4) l'effet des déformations de cisaillement sur la charge critique de flambement des plaques sandwichs en FGM. Les cinq configurations de couches suivantes sont utilisées pour les plaques sandwichs en FGM :

- 1- Configuration 1-0-1 : composée de deux couches de même épaisseur sans cœur.
- 2- Configuration 2-1-2 : dont l'épaisseur du cœur est la moitié de l'épaisseur des peaux.
- 3- Configuration 1-1-1 : l'épaisseur du cœur est le même que l'épaisseur des peaux.

4- Configuration 2-2-1 : l'épaisseur du cœur égale l'épaisseur de la peau inférieur et le double de celle de la peau supérieur.

5- Configuration 1-2-1 : dans cette configuration, l'épaisseur du cœur est le double de l'épaisseur des peaux.

Pour la plaque sandwich en FGM, Les propriétés matérielles utilisées dans cette partie sont :

Céramique (P_1 , alumine, Al_2O_3) $E_c = 380GPa, \nu = 0.3$.

Métal (P_2 , Aluminium, Al) $E_m = 70GPa, \nu = 0.3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes des charges de flambement adimensionnelles défini comme : $\bar{N} = \frac{Na^2}{100h^3E_0}$

5.3 Validation des résultats

Pour vérifier l'exactitude de cette théorie raffinée des plaques à quatre variables, des comparaisons sont faites entre les résultats obtenus à partir de la théorie utilisée et ceux obtenus par El Meiche [81], Zenkour [82] et Thai [83]. Comme indiqué dans les tableaux (5.5) – (5.6). On peut voir que les résultats de cette théorie sont en bon accord avec les résultats publiés pour des plaques carrées en FGM simplement appuyées soumise à une charge de compression uniaxiale et biaxiale. Et identiques avec les résultats de la théorie TSDT.

Tableau (5.2) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées soumise à une compression uniaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = 0a/h = 10$)

P	Théorie	Configuration des plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT [81]	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055	13.0055
	SSDT [82]	13.0061	13.0061	13.0061	13.0061	13.0061
	TSDT [82]	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
	FSDT [82]	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	NFSDT [83]	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045	13.0045
	Présente	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
0.5	HSDT [81]	7.3638	7.9405	8.4365	8.8103	9.2176
	SSDT [82]	7.3657	7.9420	8.4371	8.8104	9.2167
	TSDT [82]	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
	FSDT [82]	7.3373	7.9132	8.4103	8.7867	9.1952
	NFSDT [83]	7.3634	7.9403	8.4361	8.8095	9.2162
	Présente	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
1	HSDT [81]	5.1663	5.8394	6.4645	6.9495	7.5072
	SSDT [82]	5.1685	5.8412	6.4654	6.9498	7.5063
	TSDT [82]	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
	FSDT [82]	5.1424	5.8138	6.4389	6.9257	7.4837
	NFSDT [83]	5.1648	5.8387	6.4641	6.9485	7.5056
	Présente	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
5	HSDT [81]	2.6568	3.0414	3.5787	4.1116	4.7346
	SSDT [82]	2.6601	3.0441	3.5806	4.1129	4.7349
	TSDT [82]	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
	FSDT [82]	2.6384	3.0225	3.5596	4.0929	4.7148
	NFSDT [83]	2.6415	3.0282	3.5710	4.1024	4.7305
	Présente	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
10	HSDT [81]	2.4857	2.7450	3.1937	3.7069	4.2796
	SSDT [82]	2.4893	2.7484	3.1946	3.1457	4.3818
	TSDT [82]	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799
	FSDT [82]	2.4690	2.7263	3.1752	3.6889	4.2604
	NFSDT [83]	2.4666	2.7223	3.1795	3.6901	4.2728
	Présente	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799

À partir des résultats présentés dans ces tableaux, On constate que la charge critique de flambement diminué lorsque l'indice de puissance p augmente qui est due à la diminution de la quantité de céramique et l'augmentation de métal ce qui influe sur la rigidité de la plaque sandwich. En général, les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes valeurs des charges de flambement. La configuration 1-2-1 a donné la grande valeur de la charge critique de flambement et la petite charge est obtenue par la configuration 1-0-1.

Tableau (5.3) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression Biaxiale ($\gamma_1 = -1, \gamma_2 = -1, a/h = 10.$)

P	Théorie	Configuration des plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
0	HSDT [81]	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028	6.5028
	SSDT [82]	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030	6.5030
	TSDT [82]	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025
	FSDT [82]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	NFSDT [83]	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022	6.5022
	Présente	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025	6.5025
0.5	HSDT [81]	3.68219	3.97042	4.21823	4.40499	4.60841
	SSDT [82]	3.6828	3.9710	4.2186	4.4052	4.6084
	TSDT [82]	3.6822	3.9704	4.2182	4.4050	4.6084
	FSDT [82]	3.6687	3.9566	4.2052	4.3934	4.5976
	NFSDT [83]	3.6817	3.9702	4.2181	4.4047	4.6081
	Présente	3.6822	3.9704	4.2182	4.4050	4.6084
1	HSDT [81]	2.58357	2.92003	3.23237	3.47472	3.75328
	SSDT [82]	2.5842	2.9206	3.2327	3.4749	3.7531
	TSDT [82]	2.5836	2.9200	3.2324	3.4747	3.7533
	FSDT [82]	2.5712	2.9069	3.2195	3.4629	3.7418
	NFSDT [83]	2.5824	2.9193	3.2320	3.4742	3.7528
	Présente	2.5836	2.9200	3.2324	3.4747	3.7533
5	HSDT [81]	1.32910	1.52129	1.78978	2.05605	2.36734
	SSDT [82]	1.3300	1.5220	1.7903	2.0564	2.3674
	TSDT [82]	1.3291	1.5213	1.7898	2.0561	2.3673
	FSDT [82]	1.3192	1.5113	1.7798	2.0464	2.3574
	NFSDT [83]	1.3208	1.5141	1.7855	2.0512	2.3652
	Présente	1.3291	1.5213	1.7898	2.0561	2.3673
10	HSDT [81]	1.24363	1.37316	1.59736	1.85376	2.13995
	SSDT [82]	1.2448	1.3742	1.5973	1.8538	2.1400
	TSDT [82]	1.2436	1.3732	1.5974	1.8538	2.1400
	FSDT [82]	1.2345	1.3631	1.5876	1.8445	2.1302
	NFSDT [83]	1.2333	1.3612	1.5897	1.8450	2.1364
	Présente	1.2436	1.3732	1.5974	1.8538	2.1400

L'influence de type d'appuis sur la charge critique de flambement des plaques soumises à une compression uniaxiale et biaxiale est montrée dans les deux tableaux 5.4 et 5.5 respectivement. On remarque que. Les plaques sandwichs simplement appuyées donne la plus faible valeur par rapports aux autres conditions aux bords ce qui signifié que le changement de type d'appuis influe sur la réponse mécanique en flambement de la plaque sandwich en FGM. La charge critique de flambement uniaxiale est le double de celui de la charge biaxiale dans le cas des plaques simplement appuyées et encastré sur les quatre bords quelle que soit la valeur de l'indice de puissance de la fraction volumique p .

Tableau (5.4) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression uniaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$.

Condition aux limites	P	Configuration des Plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050	13.0050
	0.5	7.3644	7.9408	8.4365	8.8100	9.2168
	1	5.1671	5.8401	6.4647	6.9494	7.5066
	2	3.5563	4.1639	4.8086	5.3465	5.9870
	5	2.6582	3.0426	3.5796	4.1121	4.7347
	10	2.4873	2.7463	3.1947	3.7075	4.2799
CSCS	0	20.9112	20.9112	20.9112	20.9112	20.9112
	0.5	12.0059	12.9419	13.7369	14.3275	14.9776
	1	8.4757	9.5789	10.5904	11.3650	12.2617
	2	5.8598	6.8682	7.9216	8.7893	9.8281
	5	4.3777	5.0373	5.9236	6.7892	7.8071
	10	4.0757	4.5484	5.2938	6.1292	7.0692
CCCC	0	31.8526	31.8526	31.8526	31.8526	31.8526
	0.5	18.4746	19.9104	21.1191	22.0069	22.9922
	1	13.1026	14.8075	16.3558	17.5293	18.8959
	2	9.0896	10.6625	12.2861	13.6103	15.2022
	5	6.7881	7.8425	9.2191	10.5474	12.1170
	10	6.2959	7.0833	8.2473	9.5315	10.9860
FCFC	0	39.3928	39.3928	39.3928	39.3928	39.3928
	0.5	23.0064	24.7906	26.2832	27.3710	28.5852
	1	16.3684	18.4978	20.4188	21.8644	23.5547
	2	11.3821	13.3593	15.3832	17.0225	18.9992
	5	8.4979	9.8457	11.5709	13.2217	15.1789
	10	7.8610	8.8942	10.3587	11.9566	13.7746

La figure (5.1) représente la variation de la charge critique de flambement adimensionnelle des différentes configurations des plaques sandwichs sous chargement de compression biaxiale en fonction de l'indice de fraction volumique p . Le rapport d'épaisseur de la plaque a/h est pris égal à 10. On peut voir que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance p conduit à une réduction de la charge de flambement. Cela est dû au fait que les grandes valeurs de l'indice de puissance p correspondent à un faible pourcentage de la quantité de céramique dans la plaque sandwich. Autrement dit, l'augmentation de l'indice de puissance p réduit la rigidité de la plaque en raison de la grande quantité de métal par rapport à la quantité de céramique, et, par conséquent, une réduction de la charge de critique de flambement.

Tableau (5.5) Charge critique de flambement des plaques sandwichs carrées en FGM soumise à une compression biaxiale avec diverses conditions aux bords, $a/h = 10$.

Condition aux limites	P	Configuration des Plaques				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1
SSSS	0	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	0.5	3.68219	3.97042	4.21823	4.40499	4.60841
	1	2.58357	2.92003	3.23237	3.47472	3.75328
	2	1.60717	1.69383	2.02885	2.30445	2.65496
	5	1.32910	1.52129	1.78978	2.05605	2.36734
	10	1.24363	1.37316	1.59736	1.85376	2.13995
CSCS	0	11.94927	11.94927	11.94927	11.94927	11.94927
	0.5	6.86052	7.39534	7.84968	8.18715	8.55862
	1	4.84324	5.47368	6.05167	6.49426	7.00669
	2	2.61783	3.20192	3.82967	4.34035	4.99190
	5	2.50157	2.87848	3.38493	3.87952	4.46119
	10	2.50157	2.87848	3.38493	3.87952	4.46119
CCCC	0	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628
	0.5	9.23731	9.95521	10.55957	11.00346	11.49610
	1	6.55128	7.40374	8.17789	8.76467	9.44795
	2	4.54481	5.33127	6.14303	6.80515	7.60111
	5	3.39405	3.92127	4.60953	5.27370	6.05849
	10	3.14794	3.54165	4.12366	4.76577	5.49299
FCFC	0	18.61078	18.61078	18.61078	18.61078	18.61078
	0.5	10.86918	11.71211	12.41728	12.93116	13.50482
	1	7.73312	8.73910	9.64666	10.32963	11.12819
	2	5.37739	6.31149	7.26766	8.04214	8.97599
	5	4.01476	4.65151	5.46657	6.24648	7.17115
	10	3.7139	4.2020	4.8939	5.6488	6.5077

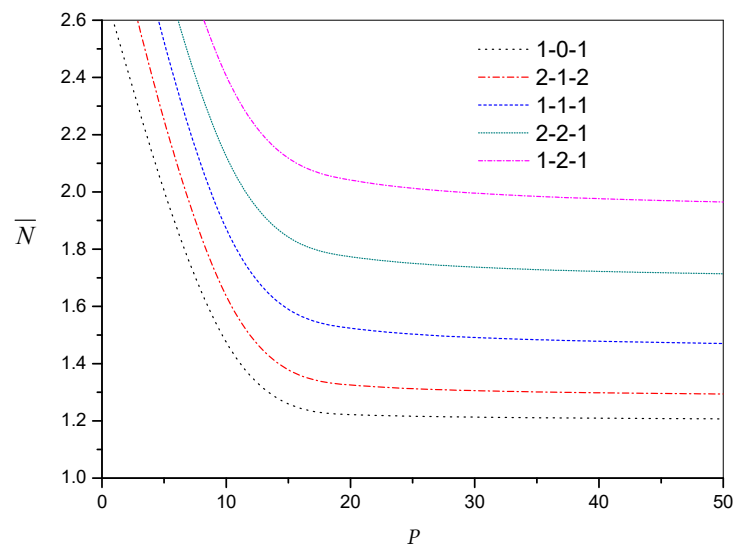


Figure (5.1) Effet de l'indice de puissance p sur la charge critique de flambement \bar{N} des plaques carrées sous chargement de compression biaxial ($\gamma_1 = \gamma_2 = -1, a = 10h$).

Les tableaux (5.6)-(5.13) montrent la variation de la charge critique de flambement des plaques sandwiches soumise à un chargement biaxiale et uniaxiale, pour deux conditions d'appuis, simplement appuyées et encastres. Ces résultats sont calculés en variant l'indice de puissance de 0, 0.5, 1, 2.5 et 10 et l'indice de porosité pour les deux forme de distribution (uniforme et non uniforme) prend les valeurs 0, 0.1 et 0.20 et le rapport a/h est pris égal à 10.

Tableau (5.6) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwiches carrées en FGM simplement appuyées soumise à une compression biaxiale (Porosité uniforme)

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	0.1	6.11746	6.12764	6.14220	6.16965	6.17785	6.16965
	0.2	5.73245	5.75248	5.78120	5.83529	5.85223	5.83529
0.5	0	3.68219	3.97042	4.21823	4.40499	4.60841	4.40499
	0.1	3.29489	3.58948	3.85054	4.05691	4.27676	4.05691
	0.2	2.90721	3.20759	3.48163	3.70576	3.94386	3.70576
1	0	2.58357	2.92003	3.23237	3.47472	3.75328	3.47472
	0.1	2.19391	2.53542	2.86071	3.11689	3.41812	3.11689
	0.2	1.80335	2.14940	2.48752	2.75472	3.08156	2.75472
2	0	1.77817	2.08196	2.40429	2.67323	2.99348	2.67323
	0.1	1.60717	1.69383	2.02885	2.30445	2.65496	2.30445
	0.2	1.43590	1.30369	1.65148	1.92959	2.31488	1.92959
5	0	1.32910	1.52129	1.78978	2.05605	2.36734	2.05605
	0.1	0.93752	1.13074	1.41128	1.67621	2.02588	1.67621
	0.2	0.54328	0.73742	1.03040	1.28792	1.68267	1.28792
10	0	1.24363	1.37316	1.59736	1.85376	2.13995	1.85376
	0.1	0.85434	0.98240	1.21798	1.46959	1.79740	1.46959
	0.2	0.46244	0.58844	0.83598	1.07568	1.45302	1.07568

Tableau (5.7) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwiches carrées en FGM encastre soumise à une compression biaxiale (Porosité uniforme).

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628
	0.1	14.98328	15.03340	15.08107	15.14489	15.17481	15.14489
	0.2	14.04027	14.13871	14.23190	14.35809	14.41774	14.35809
0.5	0	9.23731	9.95521	10.55957	11.00346	11.49610	11.00346
	0.1	8.28094	9.02701	9.67162	10.16545	10.70426	10.16545
	0.2	7.32230	8.09313	8.77637	9.31637	9.90496	9.31637
1	0	6.55128	7.40374	8.17789	8.76467	9.44795	8.76467
	0.1	5.58058	6.45325	7.26595	7.89090	8.63502	7.89090
	0.2	4.60427	5.49399	6.34446	7.00150	7.81353	7.00150
2	0	4.54481	5.33127	6.14303	6.80515	7.60111	6.80515
	0.1	4.11691	4.35871	5.20747	5.89199	6.76755	5.89199
	0.2	3.68736	3.37323	4.25963	4.95688	5.92419	4.95688
5	0	3.39405	3.92127	4.60953	5.27370	6.05849	5.27370
	0.1	2.41143	2.93326	3.65443	4.32213	5.20641	4.32213
	0.2	1.41175	1.92699	2.68377	3.34013	4.34315	3.34013

10	0	3.14794	3.54165	4.12366	4.76577	5.49299	4.76577
	0.1	2.17960	2.55225	3.16286	3.79995	4.63397	3.79995
	0.2	1.19496	1.54177	2.18479	2.79918	3.76309	2.79918

Tableau (5.8) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwiches carrées en FGM simplement appuyées soumise à une compression biaxiale (Porosité non uniforme).

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248	6.50248
	0.1	6.11746	6.32781	6.33003	6.34349	6.34365	6.34349
	0.2	5.73245	6.15307	6.15741	6.18414	6.18457	6.18414
0.5	0	3.68219	3.97042	4.21823	4.40499	4.60841	4.40499
	0.1	3.29489	3.79284	4.04208	4.23857	4.44603	4.23857
	0.2	2.90721	3.61506	3.86564	4.07143	4.28334	4.07143
1	0	2.58357	2.92003	3.23237	3.47472	3.75328	3.47472
	0.1	2.19391	2.74072	3.05426	3.30358	3.58914	3.30358
	0.2	1.80335	2.56109	2.87578	3.13143	3.42464	3.13143
2	0	1.77817	2.08196	2.40429	2.67323	2.99348	2.67323
	0.1	1.60717	1.90099	2.22433	2.49682	2.82766	2.49682
	0.2	1.43590	1.71957	2.04390	2.31901	2.66144	2.31901
5	0	1.32910	1.52129	1.78978	2.05605	2.36734	2.05605
	0.1	0.93752	1.33922	1.60833	1.87438	2.20005	1.87438
	0.2	0.54328	1.15654	1.42632	1.69080	2.03232	1.69080
10	0	1.24363	1.37316	1.59736	1.85376	2.13995	1.85376
	0.1	0.85434	1.19102	1.41550	1.67007	1.97212	1.67007
	0.2	0.46244	1.00820	1.23302	1.48418	1.80383	1.48418

Tableau (5.9) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwiches carrées en FGM encastre soumise à une compression biaxiale (Porosité non uniforme).

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628	15.92628
	0.1	14.98328	15.55511	15.52452	15.55511	15.56075	15.55511
	0.2	14.04027	15.18266	15.12179	15.18266	15.19381	15.18266
0.5	0	9.23731	9.95521	10.55957	11.00346	11.49610	11.00346
	0.1	8.28094	9.52485	10.13659	10.60479	11.11024	10.60479
	0.2	7.32230	9.09325	9.71185	10.20354	10.72251	10.20354
1	0	6.55128	7.40374	8.17789	8.76467	9.44795	8.76467
	0.1	5.58058	6.96288	7.74311	8.34872	9.05152	8.34872
	0.2	4.60427	6.52010	7.30604	7.92917	8.65296	7.92917
2	0	4.54481	5.33127	6.14303	6.80515	7.60111	6.80515
	0.1	4.11691	4.88009	5.69671	6.37030	7.19439	6.37030
	0.2	3.68736	4.42611	5.24749	5.93043	6.78524	5.93043
5	0	3.39405	3.92127	4.60953	5.27370	6.05849	5.27370
	0.1	2.41143	3.46311	4.15381	4.82064	5.64258	4.82064
	0.2	1.41175	3.00106	3.6944	4.36071	5.22390	4.36071
10	0	3.14794	3.54165	4.12366	4.76577	5.49299	4.76577
	0.1	2.17960	3.08309	3.66527	4.30609	5.07366	4.30609
	0.2	1.19496	2.62010	3.20286	3.83857	4.65140	3.83857

Tableau (5.10) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwiches carrées en FGM simplement appuyées soumise à une compression uniaxiale (Porosité uniforme)

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495
	0.1	12.23492	12.25529	12.28439	12.33929	12.35571	12.33929
	0.2	11.46489	11.50496	11.56240	11.67058	11.70446	11.67058
0.5	0	7.36437	7.94084	8.43645	8.80997	9.21681	8.80997
	0.1	6.58977	7.17895	7.70107	8.11382	8.55353	8.11382
	0.2	5.81441	6.41517	6.96325	7.41152	7.88773	7.41152
1	0	5.16713	5.84006	6.46474	6.94944	7.50656	6.94944
	0.1	4.38782	5.07085	5.72143	6.23377	6.83624	6.23377
	0.2	3.60671	4.29881	4.97504	5.50944	6.16311	5.50944
2	0	3.55635	4.16392	4.80858	5.34645	5.98697	5.34645
	0.1	2.77272	3.38766	4.05770	4.60890	5.30993	4.60890
	0.2	1.98566	2.60737	3.30297	3.85917	4.62976	3.85917
5	0	2.65821	3.04257	3.57956	4.11209	4.73469	4.11209
	0.1	1.87505	2.26149	2.82256	3.35243	4.05176	3.35243
	0.2	1.08657	1.47484	2.06080	2.57585	3.36535	2.57585
10	0	2.48727	2.74632	3.19471	3.70752	4.27991	3.70752
	0.1	1.70868	1.96479	2.43595	2.93918	3.59480	2.93918
	0.2	0.92489	1.17687	1.67195	2.1513	2.90603	2.1513

Tableau (5.11) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwiches carrées en FGM encastre soumise à une compression uniaxiale (Porosité uniforme).

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	31.85256	31.85256	31.85256	31.85256	31.85256	31.85256
	0.1	29.96655	30.06680	30.16215	30.28978	30.34962	30.28978
	0.2	28.08054	28.27743	28.46379	28.71618	28.83549	28.71618
0.5	0	18.47463	19.91042	21.11913	20.33090	22.99221	22.00692
	0.1	16.56188	18.05402	19.34324	18.63274	21.40852	20.33090
	0.2	14.64461	16.18626	17.55274	17.52933	19.80992	18.63274
1	0	13.10256	14.80747	16.35578	15.78180	18.89590	17.52933
	0.1	11.16116	12.90651	14.53190	14.00300	17.27005	15.78180
	0.2	9.20853	10.98797	12.68892	13.61030	15.62706	14.00300
2	0	9.08962	10.66253	12.28606	11.78398	15.20222	13.61030
	0.1	7.12125	8.71741	10.41493	11.78398	13.53510	11.78398
	0.2	5.13101	6.74646	8.51925	9.91377	11.84838	9.91377
5	0	6.78810	7.84254	9.21907	10.54740	12.11698	10.54740
	0.1	4.82286	5.86653	7.30886	8.64426	10.41282	8.64426
	0.2	2.82351	3.85398	5.36754	6.68027	8.68630	6.68027
10	0	6.29588	7.08330	8.24732	9.53154	10.98598	9.53154
	0.1	4.35920	5.10449	6.32571	7.59990	9.26794	7.59990
	0.2	2.38991	3.08354	4.36959	5.59835	7.52618	5.59835

Tableau (5.12) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM e simplement appuyées soumise à une compression uniaxiale (Porosité non uniforme).

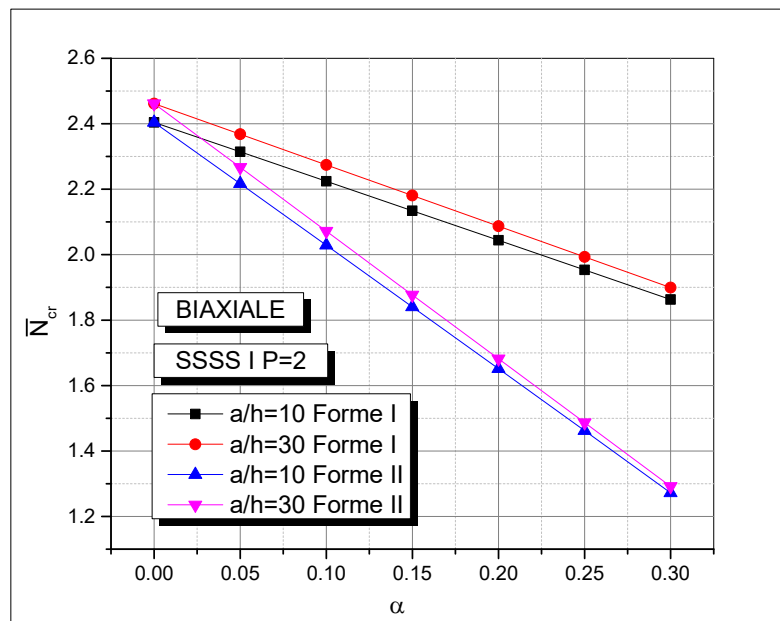
p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495	13.00495
	0.1	12.66737	12.65562	12.28439	12.28439	12.35571	12.28439
	0.2	12.32977	12.30613	11.56240	11.56240	11.70446	11.56240
0.5	0	7.36437	7.94084	8.43645	8.43645	9.21681	8.43645
	0.1	7.02579	7.58569	7.70107	7.70107	8.55353	7.70107
	0.2	6.68712	7.23011	6.96325	6.96325	7.88773	6.96325
1	0	5.16713	5.84006	6.46474	6.46474	7.50656	6.46474
	0.1	4.82679	5.48143	5.72143	5.72143	6.83624	5.72143
	0.2	4.48619	5.12218	4.97504	4.97504	6.16311	4.97504
2	0	3.55635	4.16392	4.80858	4.80858	5.98697	4.80858
	0.1	3.21434	3.80197	4.05770	4.05770	5.30993	4.05770
	0.2	2.87180	3.43914	3.30297	3.30297	4.62976	3.30297
5	0	2.65821	3.04257	3.57956	3.57956	4.73469	3.57956
	0.1	2.31654	2.67843	2.82256	2.82256	4.05176	2.82256
	0.2	1.9741	2.31309	2.06080	2.06080	3.36535	2.06080
10	0	2.48727	2.74632	3.19471	3.19471	4.27991	3.19471
	0.1	2.14746	2.38205	2.43595	2.43595	3.59480	2.43595
	0.2	1.80708	2.01641	1.67195	1.67195	2.90603	1.67195

Tableau (5.13) Charge critique de flambement des plaques poreuses sandwichs carrées en FGM encastre soumise à une compression uniaxiale (Porosité non uniforme).

p	α	1-0-1	2-1-2	1-1-1	2-2-1	1-2-1	1-2-2
0	0	31.85256	31.85256	31.85256	31.85256	31.85256	31.85256
	0.1	31.02325	31.02516	31.04905	31.11021	31.12151	31.11021
	0.2	30.19388	30.19698	30.24358	30.36533	30.38762	30.36533
0.5	0	18.47463	19.91042	20.27318	22.00692	22.99221	22.00692
	0.1	17.63973	19.04971	21.11913	21.20957	22.22049	21.20957
	0.2	16.80430	18.18650	19.42370	20.40708	21.44502	20.40708
1	0	13.10256	14.80747	16.35578	17.52933	18.89590	17.52933
	0.1	12.25708	13.92576	15.48621	16.69744	18.10305	16.69744
	0.2	11.40998	13.04020	14.61208	15.85833	17.30593	15.85833
2	0	9.08962	10.66253	12.28606	13.61030	15.20222	13.61030
	0.1	8.23382	9.76018	11.39343	12.74060	14.38878	12.74060
	0.2	7.37473	8.85222	10.49497	11.86085	13.57047	11.86085
5	0	6.78810	7.84254	9.21907	10.54740	12.11698	10.54740
	0.1	5.93455	6.92623	8.30762	9.64129	11.28515	9.64129
	0.2	5.07641	6.00212	7.38886	8.72141	10.44781	8.72141
10	0	6.29588	7.08330	8.24732	9.53154	10.98598	9.53154
	0.1	5.45376	6.16618	7.33054	8.61219	10.14731	8.61219
	0.2	4.60818	5.24020	6.40571	7.67715	9.30280	7.67715

La comparaison des résultats des tableaux (5.6)-(5.13) montre que la charge critique de flambement obtenu dans le cas de la distribution non uniforme de porosité sont plus élevées que celle obtenus dans le cas distribution uniforme de porosité et cela quelque soit le type d'appuis et le type de chargement (uniaxiale et bixiale).

L'influence du coefficient de porosité sur la charge critique de flambement d'une plaque sandwich FG carrée (1-1-1) est tracée dans la figures 5.2. Le coefficient de porosité a un effet important sur la réponse de la plaque, principalement pour le modèle de distribution uniforme, où l'augmentation du coefficient de porosité diminue les charges critiques de flambement. L'existence des pores entraîne un changement important dans les propriétés du matériau telles que le module de Young. Ainsi, l'augmentation des porosités diminue la rigidité de la plaque. La variation des charges critiques de flambage adimensionnelle pour la valeur de chargement uniaxial est toujours supérieure à celle du chargement biaxial.



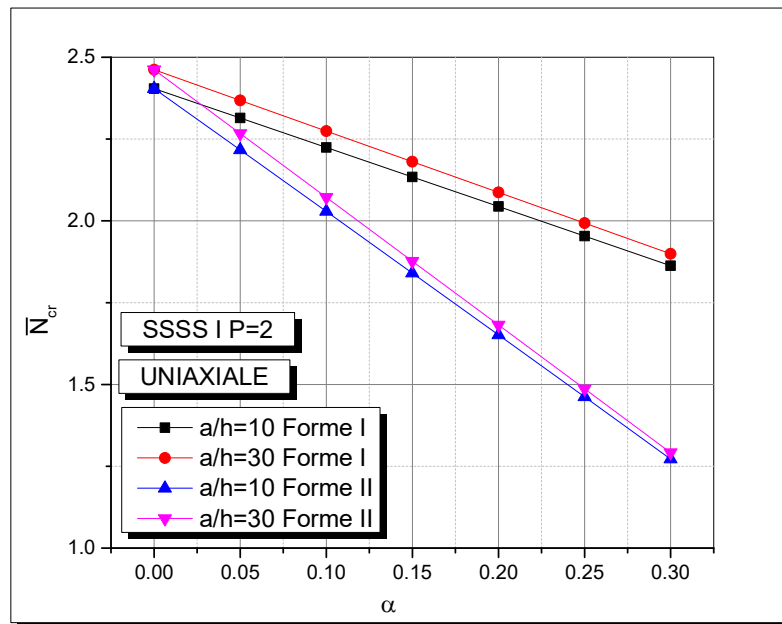
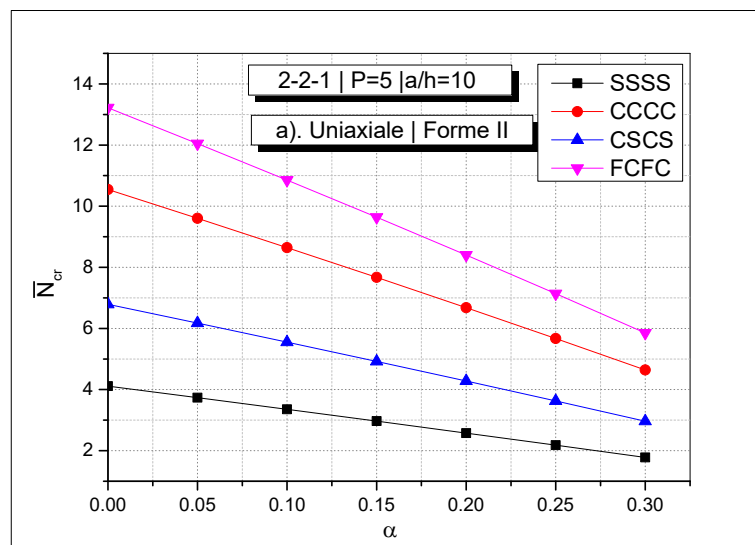


Figure (5.2) Effet du coefficient de porosité sur la charge critique de flambement adimensionnelle d'une plaque sandwich carrée en FG ($p = 2, a/h = 10,30$).

L'effet des conditions aux limites sur la variation de la charge critique de flambement d'une plaque sandwich 2-2-1 soumise a un chargement biaxial et uniaxial, quatre conditions aux limites (SSSS ; CCCC, CSCS et FCFC) sont considère, figure 5.3. On observe que les plaques les plus durs et les plus souples correspondent à ceux de FCFC et SSSS, respectivement. Pour les conditions aux limites CSCS et CCCC, les résultats prennent des valeurs intermédiaires. Par ailleurs, l'augmentation du taux de porosité induit une réduction significative de la charge de flambement adimensionnelle.



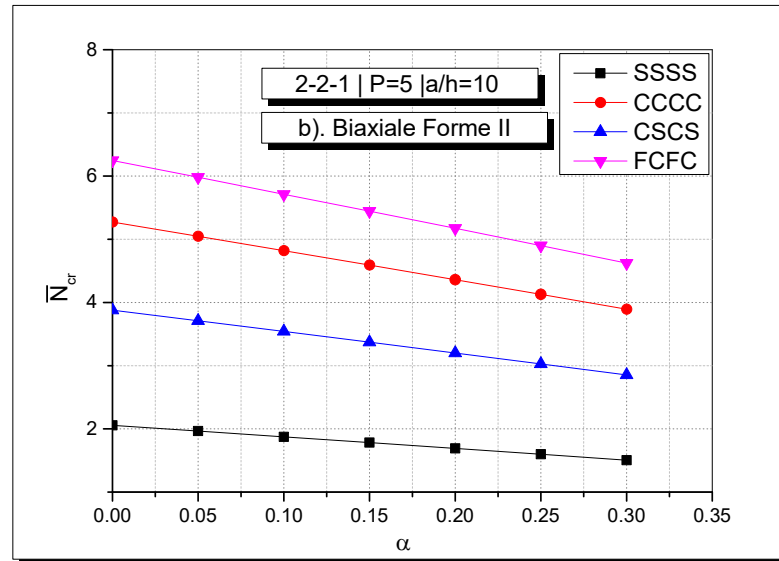


Figure (5.3) Effet des conditions d'appuis sur la charge critique de flambement \bar{N} de la plaque (2-2-1) sous chargement de compression uniaxial et biaxiale ($p = 5$) et ($a/h = 10$)

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse du flambement sous diverses conditions aux bords des plaques sandwichs poreuse en FGM en utilisant une théorie raffinée. L'effet de deux formes de distribution de la porosité sur la charge critique de flambement des plaques sandwichs en FGM sous divers condition d'appuis a été analysé, dans ce chapitre. Les résultats numériques de la charge critique de flambement des plaques sandwichs poreuses fonctionnellement graduées ont été présentés et discutés.

Conclusion générale

Les structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine de recherche très vaste et des applications immenses tant il est possible de modifier à volonté leur composition et leur architecture pour obtenir de ces matériaux les propriétés recherchées. La conception et l'élaboration de ces matériaux nécessitent le développement d'outils d'analyse adaptés à leurs spécificités géométriques et matérielles.

L'objectif de ce travail est l'étude du flambement des plaques sandwiches poreuses en FGM avec diverses conditions aux bords. Dans cette étude, les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur de la plaque seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM). Les équations d'équilibres ont été trouvées en utilisant le principe d'énergie des travaux virtuels. La méthode des variables séparés est utilisée pour la résolution des équations d'équilibres. Les charges critiques de flambement ont été trouvées en résolvant un système de valeur propre. Une étude comparative des résultats obtenues en utilisant cette théorie de cisaillement raffinée avec les résultats qui existe dans la littérature permis de dégager plusieurs points :

Les comparaisons des résultats des charges critiques de flambement montrent que les charges critiques de cette théorie raffinée avec les résultats obtenus par les théories de cisaillement sont presque identiques.

- ✓ Les plaques entièrement en céramique donnent les plus grandes charges critiques de flambement.
- ✓ Les charges critiques de flambement diminué avec la diminution de la rigidité du matériau qui est due à la diminution du pourcentage de céramique et l'augmentation de la quantité de métal, et aussi de l'épaisseur du cœur.
- ✓ La charge critique de flambement uniaxial est le double de celui de la charge biaxial dans le cas des plaques simplement appuyées et encastré sur les quatre bords quelle que soit la valeur de l'indice de puissance p de la fraction volumique.

- ✓ Les plaques les plus durs et les plus souples correspondent à ceux de FCFC et SSSS, respectivement. Pour la plaque sandwich FGM avec des conditions aux limites intermédiaires, les résultats prennent des valeurs intermédiaires.
- ✓ L'augmentation du coefficient de porosité diminue les charges critiques de flambement. L'existence des pores entraîne un changement important dans les propriétés du matériau. Ainsi, l'augmentation des porosités diminue la rigidité de la plaque.

En perspective, il est prévu d'appliquer ce modèle d'ordre élevé à deux variables pour le calcul de différentes formes de structures épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement (vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte les changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutives dû à la température. La prise en compte de l'effet de la température sur le flambement des plaques ; utilisation de la théorie raffinée pour résoudre le problème statique et de vibration des plaques sandwichs poreuse avec diverse condition aux limites.

Références

- [1] M. Savoia et J. Reddy, «Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plates,» *Int. J. Solids Structures*, vol. 5, n° 132, pp. 593-608, 1995.
- [2] M. Houari, «Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances,» 2011.
- [3] J. Reddy, «Analysis of functionally graded plates,» *Int J Num Methods Eng*, vol. 47, p. 663–684, 2000.
- [4] G. N. Praveen et J. N. Reddy, «Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 3357-3376, 1998.
- [5] J. N. Reddy et C. Chin, «Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates,» *Journal of Thermal Stresses*, vol. 21, pp. 593-626, 1998.
- [6] C. T. L. K. Y. a. R. J. N. Loy, «Vibration of functionally graded cylindrical shells,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, pp. 309-323, 1999.
- [7] Z.-Q. Cheng et R. C. Batra, «Deflection relationships between the homogeneous plate theory and different functionally graded plate theories,» *Arch Mech*, vol. 52, p. 143–158, 2000.
- [8] Z.-Q. Cheng et R. C. Batra, «Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate,» *Composites Part B*, vol. 31, n° 11, p. 97–106, 2000.
- [9] J. Woo et S. Meguid, «Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells,» *Int J Solids Struct*, vol. 38, p. 7409–21, 2001.
- [10] R. Shimpi et H. Patel, «A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis,» *Int J Solids Struct*, vol. 43, n° 122, p. 6783–99, 2006.
- [11] P. H. Shimpi RP, «Free vibrations of plate using two variable refined plate theory,» *J Sound Vib*, vol. 296, n° 1(4–5), p. 979–99, 2006.
- [12] Mechab, H. Ait Atmane, A. Tounsi, H. Belhadj et E. Adda bedia, «A two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates,» *Acta Mech Sin*, vol. 26, n° 16, p. 941, 2010.
- [13] M. Houari, S. Benyoucef, I. Mechab, A. Tounsi et E. Adda bedia, «wo variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates,» *J Therm Stresses*, vol. 34, p. 315–34, 2011.
- [14] H. G. Allen, *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Oxford: Pergamon Press, 1969.
- [15] M. Sudharsan, *Structural Design and Analysis of a Lightweight Composite Sandwich space Radiator Panel*, Coimbatore, India: Phd thesis, Bharathiar University, 2003.

-
- [16] J. M. Berthelot, Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures, 4^{ème} éd., 1996.
- [17] Gognard, «collage des métaux généralités et caractéristiques,» *Techniques de l'ingénieur*, 2000.
- [18] C. Hexcel, «HexWeb tm honeycomb sandwich design technology.» 2004. [En ligne]. Available: <http://www.hexcel.composite.com>.
- [19] F. Watari, A. Yokoyama, F. Saso, M. Uo et T. Kawasaki, «Fabrication and properties of functionally graded dental implant.» *Composites, Part B: Engineering*, vol. 28, pp. 5-11, 1997.
- [20] R. E. Mistler, «high strength substrates produced by multiple layer casting technique,» *Am. Ceram. Soc. Bull.*, vol. 52, n° 1N, pp. 850-54, 1973.
- [21] A. Bishop, C. Lin, M. Navaratnam, Rawlings, D. R et M. Chane, «a functionally graded material produced by a powder metallurgical process,» *journal of materials science letters*, 1993.
- [22] H. Shen, *Functionally Graded Materials - Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009.
- [23] G. Bao et L. Wang, «Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, ;» *Int. J. Solids Structures*, vol. 32, n° 119, p. 2853–2871, 1995.
- [24] S. Timoshenko, «On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars,» *Philosophical Magazine*, vol. 41, n° 146, p. 744–746, 1921.
- [25] E. Reissner, «The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates,» *J. Appl. Mech*, vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [26] Y. Uflyand, «The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates,» vol. 12, p. 287–300., 1948.
- [27] E. Carrera, «Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells,» *Archives of Computational Methods in Engineering*, p. 87–140, 2002.
- [28] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, Boca Raton: CRC Press, 2007.
- [29] S. Ghannadpour, H. Ovesy et M. Nassirnia, «Buckling analysis of functionally graded plates under thermal loadings using the finite strip method,» *Comput Struct*, vol. 93, n° 19, p. 108–109, 2012.
- [30] M. Mahdavian, «Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading,» *J Solid Mech*, vol. 1, n° 13, p. 213–25, 2009.
- [31] M. Mohammadi, A. Saidi et E. Jomehzadeh, «Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates,» *Appl Compos Mater*, vol. 17, n° 12, p. 81–93., 2010.
-

-
- [32] M. Alinia et S. Ghannadpour, «Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates,» *Compos Struct*, vol. 88, n° 13, p. 354–9, 2009.
- [33] S. Chakraverty et K. Pradhan, «Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method,» *Int J Appl Mech*, vol. 6, n° 14, 2014.
- [34] S. Chakraverty et K. Pradhan, «Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions,» *Aerosp Sci Technol*, vol. 36, p. 132–56, 2014.
- [35] R. D. Mindlin, «Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31–38., 1951.
- [36] W. Lanhe, «Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate,» *Compos Struct*, vol. 64, n° 12, p. 211–8, 2004.
- [37] M. Bouazza, A. Tounsi, E. Adda-Bedia et A. Megueni, «Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates,» *An analytical approach. Comput Mater Sci*, vol. 49, n° 14, p. 865–70, 2010.
- [38] H. Yaghoobi et P. Yaghoobi, «Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions,» *an analytical approach. Meccanica*, vol. 48, n° 18, p. 2019–35., 2013.
- [39] S. Hosseini-Hashemi, H. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan et M. Omid, «Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory,» *Appl Math Model*, vol. 34, n° 15, p. 1276–91, 2010.
- [40] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee et S. Atashipour, «A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates,» *Int J Mech Sci*, vol. 53, n° 11, p. 11–22, 2011.
- [41] M. Mohammadi, A. Saidi et E. Jomehzadeh, « A novel analytical approach for the buckling analysis of moderately thick functionally graded rectangular plates with two simply-supported opposite edges,» *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*, vol. 224, n° 19, p. 1831–41, 2010.
- [42] A. Saidi et E. Jomehzadeh, «On the analytical approach for the bending/stretching of linearly elastic functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported,» *Proc Inst Mech Eng, Part C: J Mech Eng Sci*, vol. 223, n° 19, 2009.
- [43] H. Yaghoobi et M. Torabi, «Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions,» *J Therm Stresses*, vol. 36, n° 19, p. 869–94, 2013.
- [44] T. Nguyen, K. Sab et G. Bonnet, «First-order shear deformation plate models for functionally graded materials,» *Compos Struct*, vol. 83, n° 11, p. 25–36, 2008.
-

-
- [45] M. Singha, T. Prakash et M. Ganapathi, «Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load,» *Finite Elem Anal Des*, vol. 47, n° 14, p. 453–60., 2011.
- [46] J. Park et J. Kim, «Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates,» *J Sound Vib*, vol. 289, p. 77–93., 2006.
- [47] J. N. Reddy, «A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates,» *ASME J. Appl. Mech*, vol. 51, n° 14, p. 745–752, 1984.
- [48] T. Kant et K. Swaminathan, «Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory,» *Composite Structure*, vol. 56, n° 14, pp. 329-344, 2002.
- [49] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*, Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [50] M. Touratier, «An efficient standard plate theory,» *Vols. 1 sur 229*, n° 18, pp. 901,916, 1991.
- [51] M. A. Zenkour et A. N. Alghamdi, «Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads,» *Mech. Adv. Mater.Struct.*, vol. 17, p. 419–432, 2010.
- [52] M. Karama, K. S. Afaq et S. Mistou, «Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity,» *Int. J. Solids Structures*, vol. 40, n° 16, pp. 1525-1546, 2003.
- [53] A. Saidi, M. Bodaghi et S. Atashipour, «Levy-type solution for bendingstretching of thick functionally graded rectangular plates based on thirdorder shear deformation theory,» *Mech Adv Mater Struct*, vol. 19, n° 18, p. 577–89, 2012.
- [54] H. Thai et S. Kim, «Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation,» *Int J Mech Sci*, vol. 75, p. 34–44, 2013.
- [55] D. Nguyen et H. Pham, «Nonlinear postbuckling of symmetric S-FGM plates resting on elastic foundations using higher order shear deformation plate theory in thermal environments,» *Compos Struct*, vol. 100, p. 566–74, 2013.
- [56] R. Shimpi, «Refined plate theory and its variants,» *ALAA Journal*, p. 137–146, 2002.
- [57] H. Ait Atmane, A. Tounsi, I. Mechab et E. Adda Bedia, «Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory,» *Int. J. Mech. Mater. Design*, vol. 6, n° 12, pp. 113-121, 2010.
- [58] H.-T. Thai et S.-E. Kim, «Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory,» *International Journal of Mechanical Sciences*, p. 626–633, 2010.

-
- [59] H.-T. Thai et S.-E. Kim, «Levy-type solution for buckling analysis of orthotropic plates based on two variable refined plate theory,» *Composite Structures*, p. 1738–1746, 2011.
- [60] L. Hadji, H. Atmane, A. Tounsi, I. Mechab et E. Adda Bedia, «Free vibration of functionally graded sandwich plates using four-variable refined plate theory,» *Applied Mathematics and Mechanics*, p. 925–942, 2011.
- [61] B. Boudierba, M. Houari et A. Tounsi, «Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations,» *Steel and Composite Structures*, vol. 14, n° 11, pp. 85-104, 2013.
- [62] A. Chabot, Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches., ENPC: PhD thesis, 1997.
- [63] E. Carrera, «An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates,» *Composite structures*, vol. 50, pp. 183-198, 2000.
- [64] K. Afaq, M. Karama et S. Mistou, «Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches,» *In Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pp. 289-292, March 2003 2003.
- [65] V. Nguyen, Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques, : Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004.
- [66] M. Di Sciuva, «An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pp. 589-596, 1987.
- [67] E. Carrera et A. Ciuffreda, «A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems,» *Composite Structures*, vol. 69, p. 271–293, 2004.
- [68] M. Cho et R. R. Parmerter, «Efficient higher order composite plate theory for general lamination configuration,» *ALAA Journal*, vol. 31, p. 1299–1306, 1993.
- [69] U. Icardi, «Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations,» *Composites Part B : Engineering*, vol. 32, n° 14, pp. 343–354, 2001.
- [70] A. K. Noor et W. Burton, «Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates,» *Composite Structures*, vol. 11, p. 183–204, 1989.
- [71] M. Karama, B. Abou Harb, S. Mistou et S. Caperaa, «Bending, buckling and free vibration of laminated composite with a transverse shear stress continuity model,» *Composite Part B : Engineering*, vol. 29, n° 13, p. 223–234, 1998.
- [72] J. N. Reddy, «A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates,» *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pp. 173-180, 1987.
-

-
- [73] M. Tahani et A. Nosier, «Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate,» *Material and Design*, vol. 24, pp. 647- 658 , 2003.
- [74] J. G. Ren, «A new theory of laminated plate,» *Composite Science and Technology*, vol. 26, pp. 225-239 , 1986.
- [75] C. Kassapoglou et P. Lagace, «Closed form solutions for the interlaminar stress field in angle-ply and cross-ply laminates,» *Journal of Composite Materials*, vol. 27, pp. 292-308 , 1987.
- [76] W. Yin, «Interlaminar stress analysis of composite laminates using a sublaminar/layer model,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 31, n° 111, pp. 1549-1564 , 1994.
- [77] N. Pagano, «Stress fields in composite laminates,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, p. 385 , 1978.
- [78] P. Marur, *Fracture Behaviour of Functionally Graded Materials*, Alabama: : Auburn University, 1999. .
- [79] F. Delale et F. Erdogan, « The crack problem for a nonhomogeneous plane,» vol. 50, n° 11 , pp. 609 – 614, 1983.
- [80] M. Sobhy, «Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions,» vol. 99, p. 76–87, 2013.
- [81] N. El Meiche , A. Tounsi, N. Ziane , I. Mechab et E. Adda Bedia, «A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, n° 14, pp. 237-247, 2011.
- [82] A. Zenkour, «A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2-Buckling and free vibration,» *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, n° 18-19, pp. 5243-5258, 2005.
- [83] H.-T. Thai, T.-K. Nguyen et T. Vo, «Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first- order shear deformation theory,» *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 45, pp. 211-225, 2014.