

III.1. Introduction

La méthode PERT est une méthode de gestion de projet visant à prévoir les propriétés d'un projet en termes de temps, délais et coûts. Elle permet d'évaluer la durée de réalisation d'un projet complexe et de détecter les parties de ce projet ne supportant aucun retard.

Son principe est de découper un projet en un ensemble d'actions appelées tâches.

Ce chapitre consiste en une explication de réseau de PERT. Puis nous définissons comment fait la structure de réseau de PERT.

III.2. Présentation la méthode PERT

La méthode PERT est une méthode de gestion de projet visant à prévoir les propriétés d'un projet en termes de temps, délais et coûts.

PERT (Program Evaluation and Review Technique (Eng) Technique d'Évaluation et d'Examen de Programme (Fr) est issu de la marine américaine et date de la fin des années 50

Son principe est de découper un projet en un ensemble d'actions appelées tâches et de les représenter sous forme graphique selon un graphe de dépendances.

Grâce à la chronologie et l'interdépendance de chacune des tâches, on structure ainsi l'ensemble du projet et on peut alors planifier la réalisation de chacune des tâches les unes par rapport aux autres, afin de minimiser les délais, ainsi que réduire l'impact des retards lors de l'exécution des différentes tâches.

Afin de finaliser la mise en œuvre de la méthode PERT, un certain nombre d'activités doivent être menées à bien : [7]

- Définir de manière précise le projet ;
- Définir un responsable de projet auquel on rendra compte et qui prendra les décisions importantes ;
- Analyser le projet par grands groupes de tâches, puis détailler certaines tâches si besoin est ;
- Définir très précisément les tâches et déterminer leur durée ;
- Rechercher les coûts correspondants, ce qui peut éventuellement remettre en cause certaines tâches ;
- Mettre en œuvre les tâches selon la chronologie décidée ;
- Effectuer des contrôles périodiques pour vérifier que le système ne dérive pas ; si c'est le cas, prendre les dispositions nécessaires – quitte à revoir la planification selon la méthode PERT – afin de minimiser les conséquences.

III.3. Concepts généraux

III.3.1. Représentation

La méthode PERT permet de représenter la planification de la réalisation d'un projet suivant un graphe de dépendances. [7]

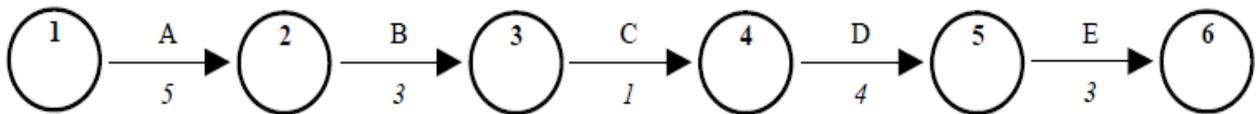


Figure III.1 : représentation PERT d'un projet

III.3.2. Définitions

III.3.2.1. Tâche

Une tâche est le déroulement dans le temps d'une action ; elle permet au projet d'avancer vers son état final.

On attribue une lettre à chaque tâche afin d'alléger le schéma. La tâche a des propriétés d'ordre temporel qui qualifient le temps de réalisation : la durée, exprimée en minutes ou bien heures, jours, semaines, mois, etc.

Exprimée via la méthode PERT, une tâche est représentée par une flèche, précisée par son nom et sa durée. [7]

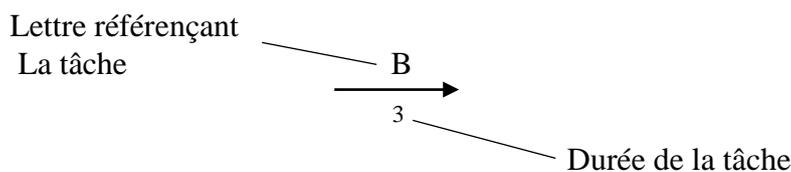


Figure III.2 : représentation d'une tâche

Une tâche ne peut être représentée qu'une seule fois ; inversement, une flèche ne peut représenter qu'une seule tâche. La longueur, la courbure et la forme des flèches sont sans signification particulière.

III.3.2.2. Étape

Une étape indique le début et/ou la fin d'une tâche. On numérote les étapes afin de clarifier le schéma.

L'étape a des propriétés d'ordre temporel : dates au plus tôt et au plus tard, exprimées en minutes, heures, etc. 1.

Exprimée via la méthode PERT, une étape est représentée par un rond, découpé en 3 zones, précisé par son numéro, ainsi que ses dates au plus tôt et au plus tard.

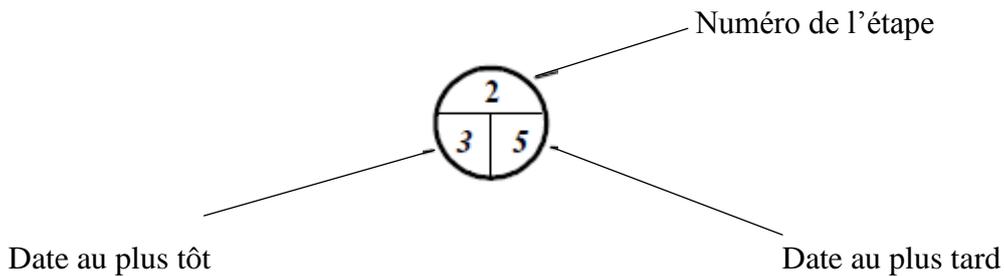


Figure III.3 : représentation d'une étape

La date au plus tôt est le délai minimum, depuis le début du projet, nécessaire pour atteindre l'étape considérée.

La date au plus tard est la date maximum, depuis le début du projet, à laquelle doit être atteinte l'étape considérée pour que le délai de l'ensemble du projet ne soit pas modifié.

III.3.2.3. Réseau

Un réseau est l'ensemble des tâches et des étapes formant l'intégralité de la planification du projet (on parle aussi de diagramme PERT).

Deux tâches qui se succèdent immédiatement dans le temps sont représentées par deux flèches qui se suivent, séparées par une étape.

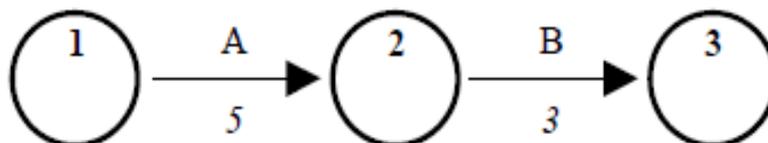


Figure III.4 : représentation d'un réseau PERT

III.3.2.4. Règles de représentation graphique

Un réseau possède toujours une et une seule étape de début ainsi qu'une et une seule étape de fin. Toute tâche a au moins une étape de début et au moins une étape de fin ; une tâche ne peut démarrer que si la tâche qui la précède est terminée.

On ne peut pas avoir deux tâches différentes qui ont à la fois même étape de début et même étape de fin. Deux tâches qui commencent en même temps et s'exécutent en même temps sont dites simultanées, et sont représentées chacune par une flèche dont le point de départ est une seule et même étape. [7]

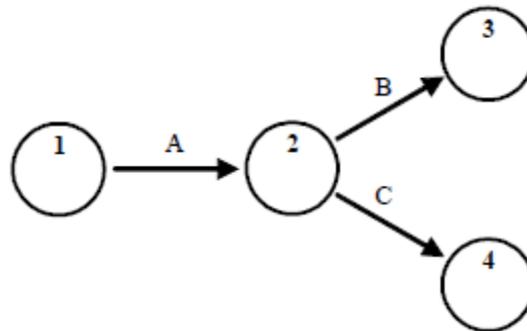


Figure III.5 : exemple d'une représentation de tâches simultanées

Les tâches B et C sont simultanées et suivent la tâche A : B et C ne pourront débuter que lorsque A sera complètement achevée.

Deux tâches qui s'exécutent en même temps et s'achèvent en même temps, sont dites convergentes et sont représentées chacune par une flèche dont le point d'arrivée est une seule et même étape.

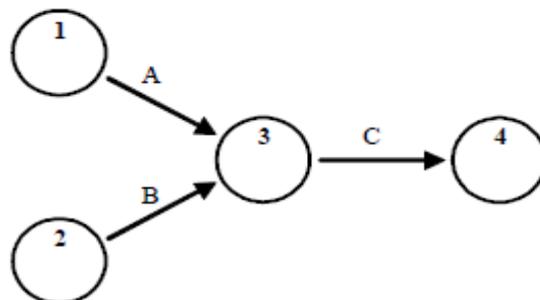


Figure III.6 : exemple d'une représentation de tâches convergentes

Les tâches A et B sont convergentes et précèdent la tâche C : C ne pourra débuter que lorsqu'A et B seront complètement achevées.

III.4. Modélisation d'un exemple

III.4.1. Construction d'un réseau PERT

La construction d'un réseau PERT, et son exploitation, supposent d'effectuer les opérations suivantes : [8]

- Établir une liste précise des tâches ;
- Déterminer les tâches antérieures (ainsi que les tâches postérieures éventuellement) ;
- Construire les graphes partiels ;
- Regrouper les graphes partiels ;
- Construire le réseau ;

III.4.1.1. Établir une liste précise des tâches

On considère la liste des 12 tâches suivantes, numérotées d'A à L. La durée estimée de chaque tâche est indiquée[7]

Tâche	Durée
A	3
B	1
C	5
D	6
E	4
F	2
G	9
H	5
I	8
J	2
K	3
L	7

Tableau III.1 : liste des tâches et durée respective

III.4.1.2. Déterminer les tâches antérieures

L'analyse du projet et de l'ensemble des tâches le constituant nous amène à définir les relations chronologiques d'antériorité des tâches ; ces résultats sont regroupés dans le tableau suivant, dans la colonne tâche(s) antérieure(s) :

Tâche(s) antérieure(s)	Tâche	Durée
aucune	A	3
A	B	1
A	C	5
B	D	6
B	E	4
C, I, D	F	2
E, F	G	9
aucune	H	5
H	I	8
H	J	2
I	K	3
J, K	L	7

Tableau III.2 : liste des tâches et des tâches antérieures

Par simple déduction, on en déduit les valeurs de la colonne tâche(s) postérieure(s)

Tâche(s) antérieures	tache	Tâche(s) postérieures	Durée
aucune	A	B, C	3
A	B	D, E	1
A	C	F	5
B	D	F	6
B	E	G	4
C, I, D	F	G	2
E, F	G	aucune	9
aucune	H	I, J	5
H	I	K	8
H	J	L	2
I	K	L	3
J, K	L	aucune	7

Tableau III.3 : liste des tâches, tâches antérieures et tâches postérieures

III.4.1.3. Construire les graphes partiels

Un graphe partiel est la représentation d'une partie du réseau PERT final. On peut définir 2 niveaux distincts de graphes partiels :

- Le niveau tâche(s) antérieure(s) / tâche courante ;
- Le niveau tâche(s) antérieure(s) / tâche courante / tâche(s) postérieure(s)

- On procède donc à l'élaboration d'un ensemble de diagrammes très simples ; puis on assemble au fur et à mesure ces différents diagrammes, pour arriver ainsi au réseau final. Les graphes partiels de niveau tâche(s) antérieure(s) / tâche courante sont les suivants : [7]

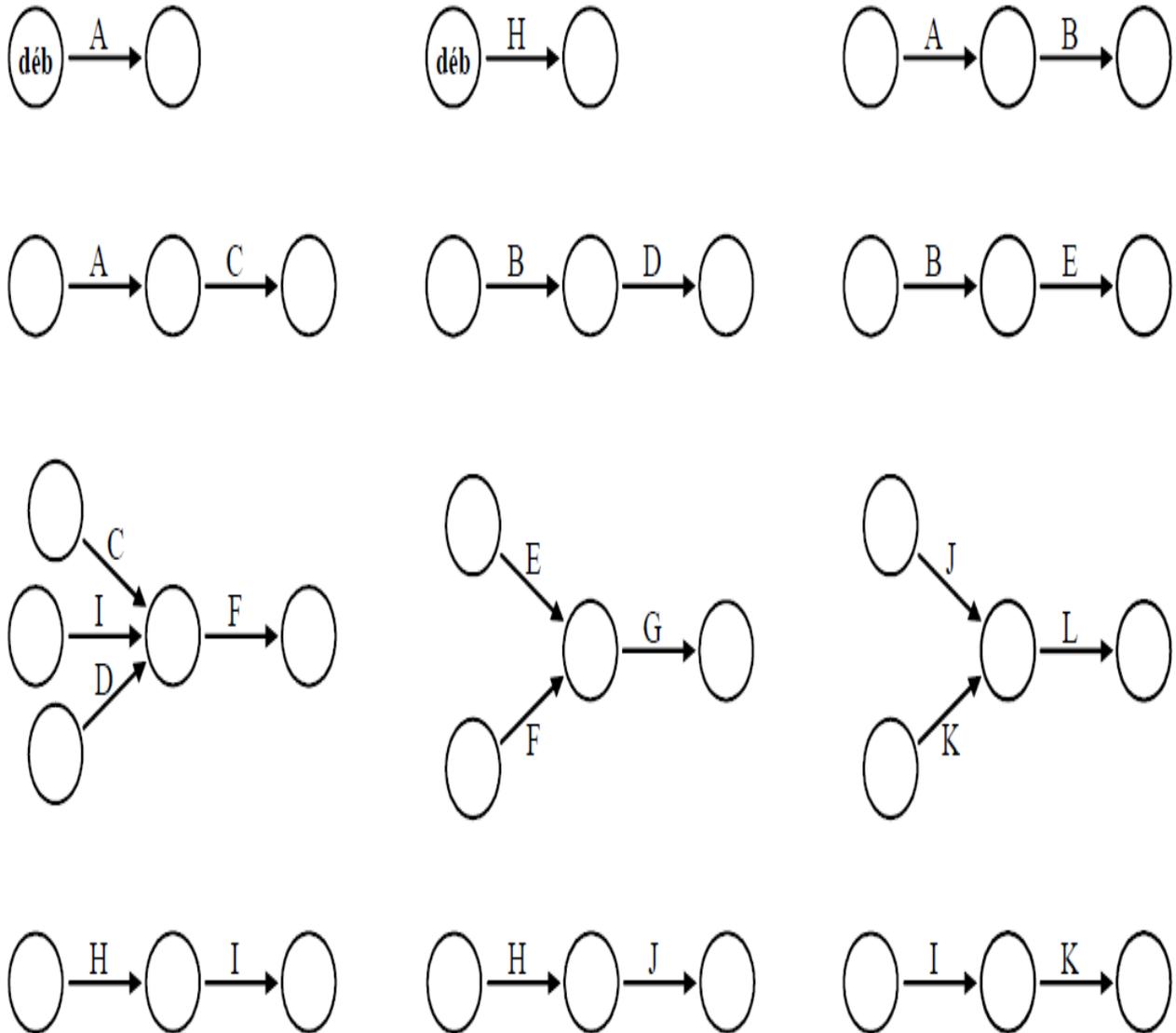


Figure III.7 : ensemble des graphes partiels niveau tâche(s) antérieure(s) / tâche courante

Les graphes partiels de niveau tâche(s) antérieure(s) / tâche courante / tâche(s) postérieure(s) sont les suivants :

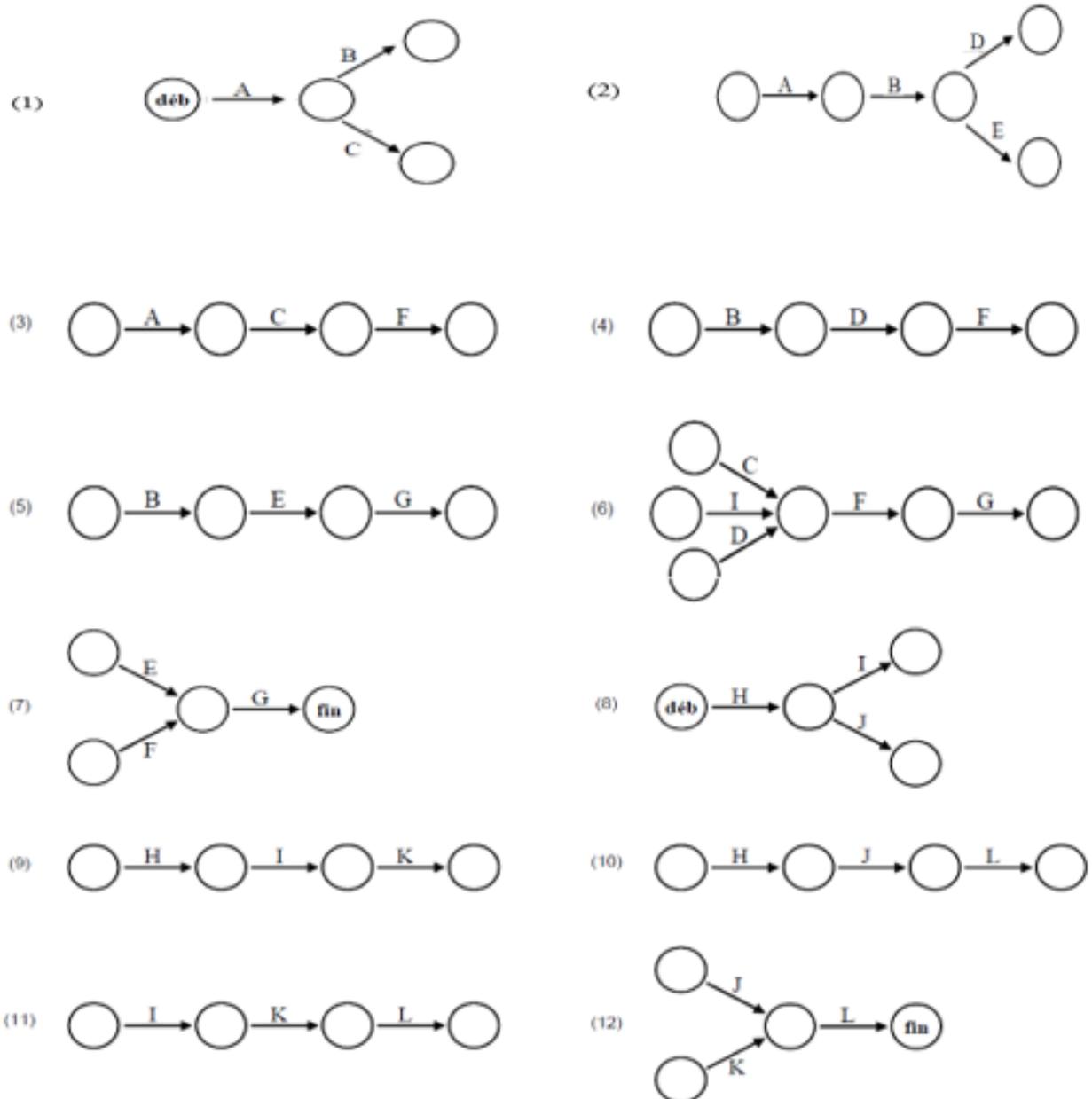


Figure III.8 : ensemble des graphes partiels niveau tâche(s) antérieure(s) / tâche courante / tâche(s) postérieure(s)

III.4.1.4. Regrouper les graphes partiels

Ensuite, on regroupe les graphes partiels au fur et à mesure : [7]

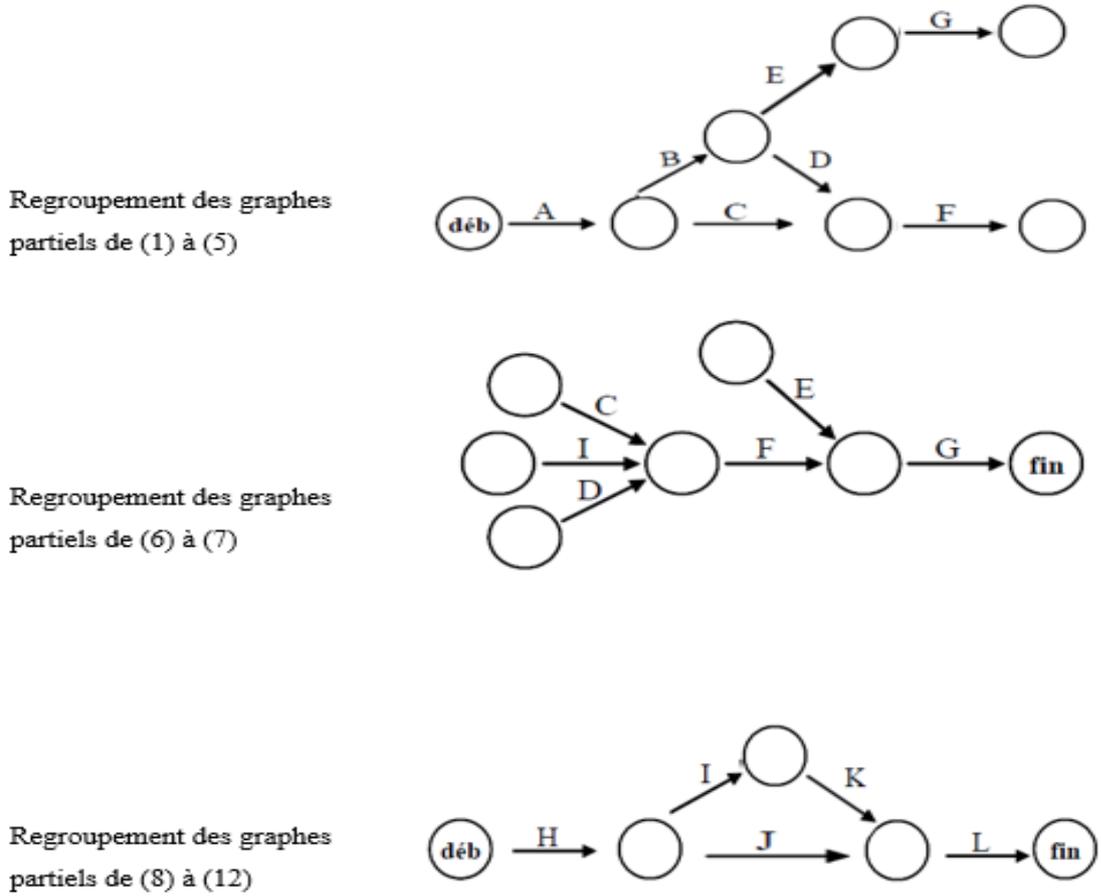


Figure III.9 : regroupement des graphes partiels (1)

III.4.1.5. Construire le réseau

Le regroupement de tous les graphes partiels nous permet d'obtenir le réseau PERT.

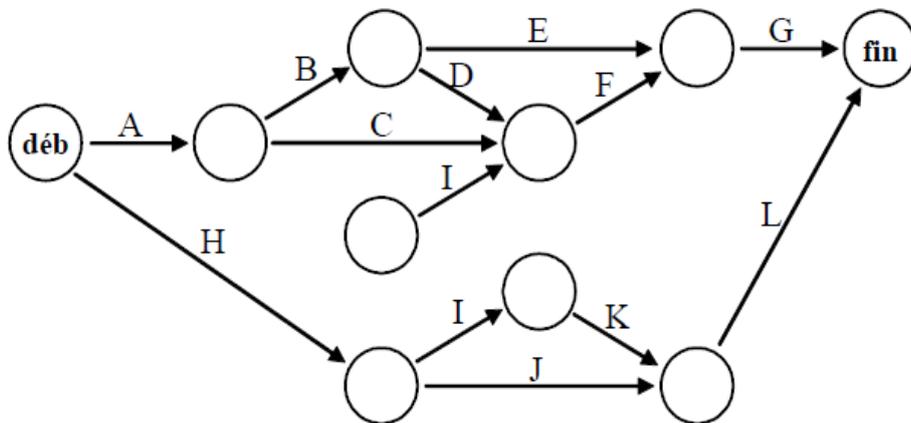


Figure III.10 : regroupement des graphes partiels (2)

On peut voir que l'on se retrouve ici confronté à un problème concernant la tâche I. En effet, celle-ci précède les tâches F et K. En revanche la tâche K est précédée uniquement de la tâche I (et pas de C et D), alors que la tâche F est précédée des tâches I, mais aussi D et C.

Si l'on faisait abstraction de ce problème, on aurait alors une étape, à laquelle C, D et I amènent et de laquelle F et K en repartent. Or ceci est incorrect car cela signifierait alors que K précède aussi C et D en plus de I ! Pour résoudre ce problème on va donc utiliser une tâche fictive.

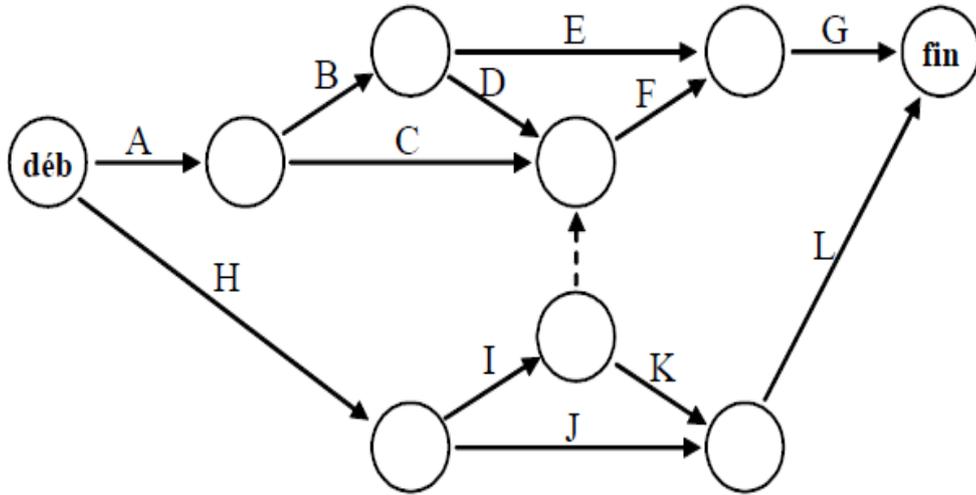


Figure III.11 : rajout d'une tâche fictive

La tâche fictive permet de spécifier que F précède I en plus de C et D, et par contre que K précède I uniquement.

On obtient alors le réseau complet suivant :

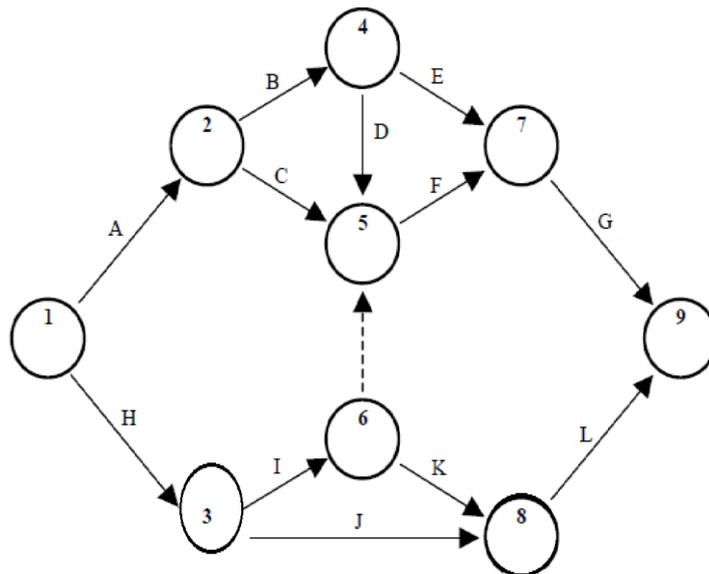


Figure III.12 : réseau PERT

III.4.2. Exploitation du réseau PERT

Par « exploitation » on entend les informations temporelles obtenues grâce à la méthode PERT, comme notamment la détermination de la durée totale du projet à réaliser. [8]

III.4.2.1. Calcul des dates « au plus tôt »

On commence tout d'abord par calculer les dates au plus tôt. Pour une étape donnée, cette information détermine à quelle date minimum depuis le début du projet sera atteinte, au plus tôt, l'étape considérée. Pour ce faire, on se base sur l'estimation de la durée des tâches. On part de l'étape de début, pour laquelle la date au plus tôt est initialisée à 0, et on parcourt le réseau en suivant l'agencement des tâches déterminé auparavant. Deux méthodes de calcul existent alors selon que l'étape considérée est atteinte par 1 ou par plusieurs tâches : [8]

- 1 tâche : il n'y a qu'un seul chemin possible pour atteindre l'étape ; la date au plus tôt vaut la date au plus tôt antérieure à laquelle on rajoute la durée de la tâche liant les 2 étapes :

$$to0 = to1 + \text{durée1}$$



Figure III.13 : calcul de la date « au plus tôt » dans le cas d'une seule tâche

- Plusieurs tâches : il y a plusieurs chemins possibles pour atteindre l'étape.

On applique le procédé décrit ci-dessus (pour 1 tâche) pour chacune des tâches antérieures ;

La date au plus tôt vaut alors le maximum parmi ces résultats :

$$to0 = \text{Max} ((to1 + \text{durée1}); (to2 + \text{durée2}); \dots)$$

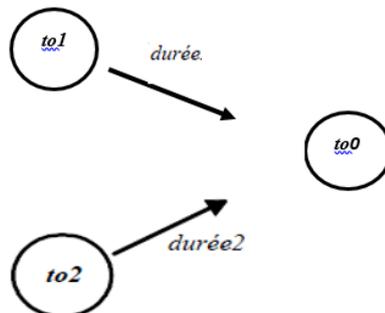


Figure III.14 : calcul de la date « au plus tôt » dans le cas de plusieurs tâches

III.4.2.2. Calcul des dates « au plus tard »

On poursuit avec le calcul des dates au plus tard. Pour une étape donnée, cette information détermine à quelle date maximum, depuis le début du projet, doit être atteinte, au plus tard, l'étape considérée, afin que le délai de l'ensemble du projet ne soit pas modifié.

Pour ce faire, on se base sur l'estimation de la durée des tâches. On part de l'étape de fin, pour laquelle la date au plus tard est initialisée à la même valeur que la date au plus tôt déterminée précédemment, et on parcourt le réseau en suivant l'agencement inverse des tâches 1.

Là encore, il existe deux méthodes de calcul selon que 1 ou plusieurs tâches partent de l'étape considérée : [8]

- 1 tâche : il n'y a qu'un seul chemin possible pour partir de l'étape ;

La date au plus tard vaut la date au plus tard « précédente » (la postérieure dans l'agencement des tâches) à laquelle on retranche la durée de la tâche liant les 2 étapes :

$$ta0 = ta1 - \text{durée1}$$

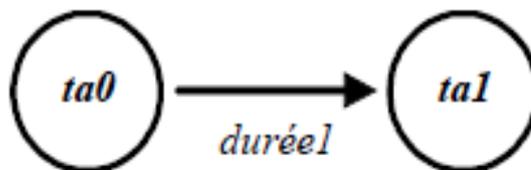


Figure III.15 : calcul de la date « au plus tard » dans le cas d'une seule tâche

- Plusieurs tâches : il y a plusieurs chemins possibles qui partent de l'étape.

On applique le procédé décrit ci-dessus (pour 1 tâche) pour chacune des tâches « précédentes » ; la date au plus tard vaut alors le minimum parmi ces résultats :

$$ta0 = \text{Min}((ta1 - \text{durée1}) ; (ta2 - \text{durée2}) ; \dots)$$

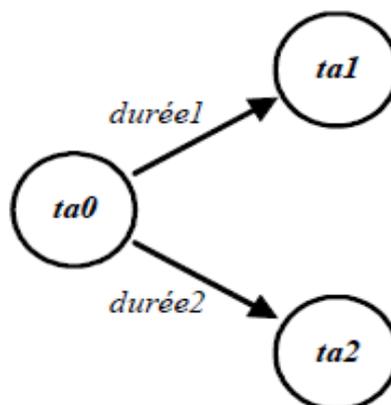


Figure III.16 : calcul de la date « au plus tard » dans le cas de plusieurs tâches

III.4.2.3. Calcul des marges

Certaines tâches bénéficient d'une latence variable dans leur aboutissement sans pour autant remettre en cause la date d'achèvement du projet. Cette période de latence est appelée marge. L'évaluation quantitative de ces marges (appelées aussi battements) permet d'optimiser la gestion du projet. En effet, l'analyse de ces marges permet d'aménager le déroulement de certaines tâches selon des critères autres que temporels : coûts 1, plan de charge de l'entreprise 2, goulets d'étranglements 3, ...

La marge relative à une tâche se détermine en considérant la valeur des dates au plus tôt et au plus tard des étapes entourant la tâche. La marge vaut alors la date au plus tard de l'étape postérieure à laquelle on retranche la date au plus tôt de l'étape antérieure ainsi que la durée de la tâche elle-même : $\text{marge} = (ta2 - to1) - \text{durée}$ [8]

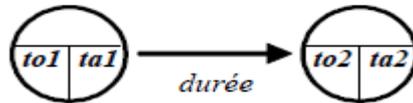


Figure III.17 : calcul de la marge relative à une tâche

Les tâches ayant une marge nulle ne bénéficient donc d'aucune latence dans leur exécution leur permettant de ne pas retarder le projet.

L'ensemble de ces tâches permet de déterminer le chemin critique.

III.4.2.4. Détermination du chemin critique

Le chemin critique indique quelles sont les tâches à successivement observer au cours de la mise en œuvre du projet afin de surveiller les éventuels retards. Le but est de détecter les dérives et d'agir alors rapidement en conséquence afin de minimiser leur impact sur la durée de l'ensemble du projet.

On parle de « chemin » car il part de l'étape initiale et mène à l'étape finale via une suite de différentes tâches.

Il est dit « critique » car tout retard pris sur l'une des tâches constituant ce chemin aura une incidence directe sur la date d'achèvement du projet ; celui-ci sera retardé d'autant que la tâche est elle-même retardée.

Pour savoir quel est le chemin critique et donc aussi quelles tâches observer, il suffit de répertorier toutes les tâches ayant une marge nulle. La mise en avant de ces tâches détermine d'elle-même le chemin critique. [9]

Les tâches ayant une marge nulle sont : F, G, H et I

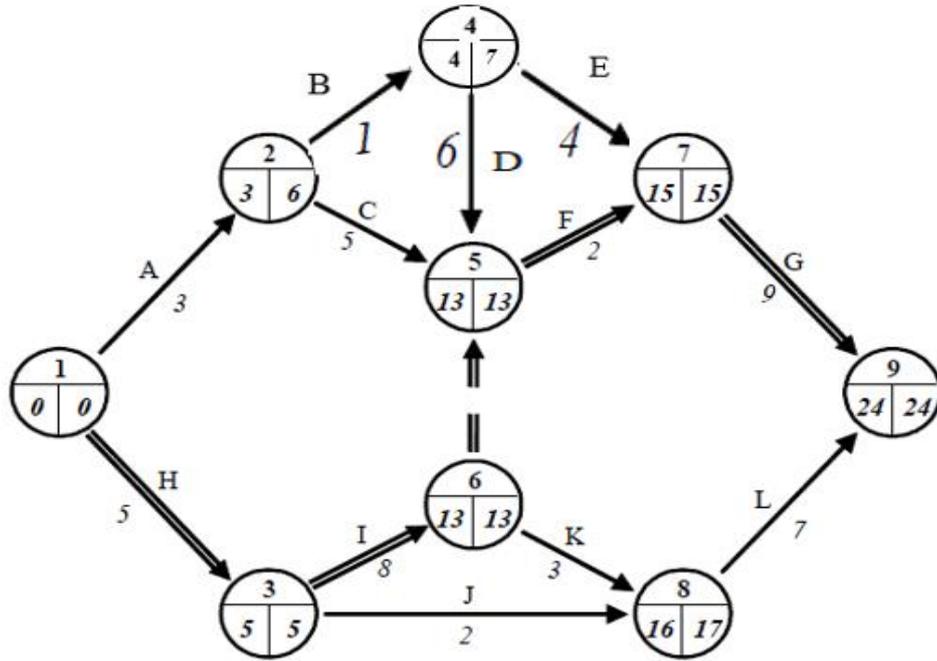


Figure III.18 : détermination du chemin critique

III.4.3. Planification du projet

Grâce à tous les éléments déterminés précédemment, on va pouvoir créer un planning du projet en prenant en compte l'ensemble de l'environnement de réalisation (week-ends, jours fériés, congés, nombre d'heures travaillées par jour, par semaine, ...).

Il existe une méthode, aboutisse sensible à un résultat similaire mais qui peuvent aussi se compléter. Il s'agit de diagramme de PERT. [7]

III.4.3.1. Élaboration du tableau d'avancement des tâches

Pour l'élaboration du diagramme de Pert, on utilise l'approche cartésienne. On commence par construire le tableau de gestion d'avancement des tâches ; celui-ci reprend, dans un premier temps, les informations de tâche(s) antérieure(s) / tâche courante. Puis il va nous permettre de définir des niveaux d'antériorité au sein de l'ensemble des tâches du projet. Enfin, il nous permettra de mettre en place le planning.

		il faut avoir réalisé la ou les tâche(s) :											
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Pour réaliser la tâche :	A												
	B	x											
	C	x											
	D		x										
	E		x										
	F			x	x					x			
	G					x	x						
	H												
	I								x				
	J								x				
	K									x			
	L										x	x	

Tableau III.4 : gestion d’avancement des tâches (0)

On précise les rapports d’antériorité en renseignant le tableau suivant la règle Pour réaliser la tâche ... il faut avoir réalisé la ou les tâche(s) Puis on détermine le nombre de tâches antérieures à la tâche considérée et on indique donc dans la colonne n1 le nombre de croix de chacune des lignes. Une valeur de 0 spécifie donc que la tâche concernée n’a pas ou plus de tâches antérieures qui n’ont pas été exécutées, et qu’elle peut donc démarrer. [7]

		il faut avoir réalisé la ou les tâche(s) :												n1
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
Pour réaliser la tâche :	A													0
	B	x												1
	C	x												1
	D		x											1
	E		x											1
	F			x	x					x				3
	G					x	x							2
	H													0
	I								x					1
	J								x					1
	K									x				1
	L										x	x		2

Tableau III.5 : gestion d’avancement des tâches (1)

Ici, les tâches A et H n’ont pas d’antécédents, elles pourront donc démarrer au niveau d’antériorité n1.

Ensuite, ayant déterminé quelles sont les tâches pouvant démarrer à ce niveau d’antériorité, on va éliminer celles-ci du tableau en barrant les colonnes correspondantes. On va alors introduire le niveau d’antériorité suivant, et réitérer le processus de comptage de tâches antérieures ; et ce ainsi de suite jusqu’à avoir traité toutes les tâches.

		il faut avoir réalisé la ou les tâche(s) :												n1	n2	
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L			
Pour réaliser la tâche :	B	x													1	0
	C	x													1	0
	D		x												1	1
	E		x												1	1
	F			x	x						x				3	3
	G					x	x								2	2
	H														0	
	I									x					1	0
	J									x					1	0
	K										x				1	1
	L											x	x		2	2

Tableau III.6 : gestion d’avancement des tâches (2)

Les tâches B, C, I et J démarrent au niveau n2.

		Les tâches B, C, I et J démarrent au niveau n2												n1	n2	n3	
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L				
Pour réaliser la tâche :	A														0		
	B	x													1	0	
	C	x													1	0	
	D		x												1	1	0
	E		x												1	1	0
	F			x	x					x					3	3	1
	G					x	x								2	2	2
	H														0		
	I									x					1	0	
	J									x					1	0	
	K										x				1	1	0
	L											x	x		2	2	1

Tableau III.7 : gestion d’avancement des tâches (3)

Les tâches D, E, et K démarrent au niveau n3.

		il faut avoir réalisé la ou les tâche(s) :												n1	n2	n3	n4	
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L					
Pour réaliser la tâche :	A														0			
	B	x													1	0		
	C	x													1	0		
	D		x												1	1	0	
	E		x												1	1	0	
	F			x	x					x					3	3	1	0
	G					x	x								2	2	2	1
	H														0			
	I									x					1	0		
	J									x					1	0		
	K										x				1	1	0	
	L											x	x		2	2	1	0

Tableau III.8 : gestion d’avancement des tâches (4)

Les tâches F et la démarrent au niveau n4.

		il faut avoir réalisé la ou les tâche(s) :											n1	n2	n3	n4	n5	
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L					
Pour réaliser la tâche :	B	x												1	0			
	C	x												1	0			
	D		x											1	1	0		
	E		x											1	1	0		
	F			x	x					x				3	3	1	0	
	G					x	x							2	2	2	1	0
	H													0				
	I									x				1	0			
	J									x				1	0			
	K										x			1	1	0		
	L											x	x	2	2	1	0	

Tableau III.9 : gestion d’avancement des tâches (5)

La tâche G démarre au niveau n5 final. Il se construit simplement en suivant les différents niveaux du tableau d’avancement des tâches ; on procède niveau par niveau, en traitant chacune des tâches prenant fin au niveau considéré (indication 0 dans le tableau d’avancement).

Le résumé de l’avancement des tâches est le suivant :

Niveau	Tâche(s)
n1	A, H
n2	B, C, I, J
n3	D, E, K
n4	F, L
n5	G

Tableau III.10 : résumé de la gestion d’avancement des tâches

III.4.3.2. Création du planning selon le diagramme de PERT

Le diagramme de PERT détermine l’agencement de chacune des tâches en fonction les unes des autres. On représente chaque tâche par un bloc contenant les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que la répercussion des marges sur ces dates. [7]

date début	Date début + durée tâche = date_au_plus_tôt
Lettre de la tâche Durée tâche	
date début + marge	Date début + durée tâche +marge = date_au_plus_tard

Figure III.19 : schéma d'un bloc du diagramme Pert

Le diagramme se construit alors en utilisant les mêmes informations que pour construire le diagramme de Gantt. On suit le tableau d'agencement des tâches, chaque niveau réapparaît donc en vertical.

III.5. Conclusion

L'obtention du planning par la méthode PERT suivie des diagrammes de Pert permet donc de connaître à un moment donné précis quelles sont les tâches effectuées, les tâches en cours, et les tâches à venir.

On peut ainsi suivre l'avancement des opérations et déterminer si un retard a été pris, si celui-ci aura une répercussion, et quel sera quantitativement cette répercussion.