

III.1. Introduction

Pour la recherche des pulsations propres et déformées modales des lignes d'arbres non ramifiées (système mécanique conservatif) à partir de l'algorithme de Rutishauser, les conditions aux limites nous amènent à considérer trois situations dans lesquelles les lignes d'arbres non ramifiées peuvent se trouver, il s'agit : du cas libre aux deux extrémités (Libre-Libre), du cas encastré d'un côté et libre de l'autre (Encastré-Libre) et du cas encastré des deux côtés (Encastré-Encastré). Par conséquent, nous allons essayer de déterminer les pulsations propres et déformées modales d'une ligne d'arbre non ramifiée dans ces trois types de configuration, en vue d'une étude comparative des cas, mais aussi examiner la pertinence et l'exactitude des résultats fournis par le programme Ruthis en les comparant à ceux obtenus par l'analyse modale pour le cas libre-libre. Après cela nous aborderons la notion de vitesse dangereuses et du phénomène de résonance qui ne peuvent être analysé qu'après avoir trouvé les paramètres vibratoires (fréquences propres et modes propres).

III.2. Application du programme Ruthis

Nous prenons à titre d'exemple pour l'application, une ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques donc 4 d.d.l (système mécanique conservatif non forcé). Pour examiner la pertinence et l'exactitude des résultats fournis par le programme Ruthis et les comparés à ceux obtenus par l'analyse modale pour les conditions aux limites libre-libre.

III.2.1. Description de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 d.d.l

Comme nous avons défini précédemment, les lignes d'arbre non ramifiées sont soit des machines ou des installations industrielles dont ses composants mécaniques sont disposés sur un même axe horizontal (groupe compresseur) ou vertical (une centrifugeuse). Ainsi leurs modélisations pour la recherche des pulsations propres et des déformées modales seront réduit à des modèles équivalents constitués de disques I_i , reliés entre eux par des ressorts de torsion sans masse, de rigidité torsionnelle K_i , comme indiqué sur la Figure **III.1** de notre exemple à 4 disques libre aux extrémités (cas libre-libre).

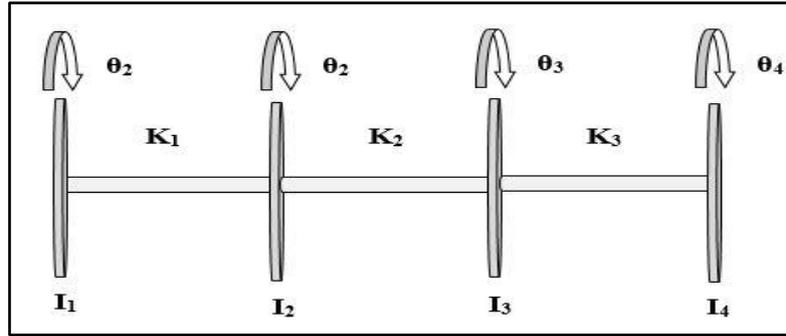


Figure III.1 : Ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques

❖ *Les données physiques : inerties et rigidités torsionnelle de la ligne d'arbre à 4 disques*

Disque N ⁰	Inertie (I _i) N . m . S ²	Arbre N ⁰	Rigidité torsionnelle (K _i) N . m / rad
1	1	1	1
2	2	2	1
3	1	3	1
4	1		

Tableau III.1 : Inerties et rigidités torsionnelle de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques

❖ *Les Equations du mouvement*

En s'appuyant sur le système d'équations du mouvement différentielles du second ordre (l'équation II.47) qui découlent de l'application des équations de Lagrange (l'équation II.17), le système d'équations du mouvement de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques est :

$$\begin{cases}
 I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 - k_1 \theta_2 = 0 \\
 I_2 \ddot{\theta}_2 + (k_1 + k_2) \theta_2 - k_1 \theta_1 - k_2 \theta_3 = 0 \\
 I_3 \ddot{\theta}_3 + (k_2 + k_3) \theta_3 - k_2 \theta_2 - k_3 \theta_4 = 0 \\
 I_4 \ddot{\theta}_4 - k_3 \theta_3 + k_3 \theta_4 = 0
 \end{cases}
 \quad \text{III.1}$$

L'équation (III.1) sous forme matricielle condensé nous conduit à :

$$[I] (\ddot{\theta}) + [k] (\theta) = 0 \quad \text{III.2}$$

$$\text{Avec : } [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}, [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) & -\mathbf{k}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_3 & \mathbf{k}_3 \end{bmatrix}.$$

III.2.2. Calcul des pulsations propres et des déformées modales par le programme Ruthis issu de l'algorithme de Rutishauser

1) Description de l'Organigramme détaillé du programme Ruthis issu de l'algorithme de Rutishauser

A) Lecture des données :

Les noms des variables utilisées sont :

N nombre de disques du schéma équivalent,

EPSI valeur permettant de contrôler la convergence de la suite matricielle de Rutishauser,

INERT (I) moment d'inertie, par rapport à son axe, du disque i (N valeurs à lire ; unité :N. m . S²),

RAID (I) rigidité torsionnelle du tronçon séparant les disques i et i+ 1 (N - 1 valeurs à lire ; unité :N. m. s²)

B) Calcul des éléments C et α de la matrice [C]

Les éléments C de la diagonale principale de la matrice [C], sont rangés dans le tableau C (I) puis dans le tableau D (I) afin d'être conservés jusqu'au test de convergence.

Les éléments α , situés au-dessus de la diagonale principale de la matrice [C], sont rangés dans le tableau ALPHA (I).

C) Calcul des valeurs propres, test de convergence et test d'arrêt

Les différentes séquences de calcul apparaissent dans l'ordre suivant au cours d'une itération.

- Calcul des éléments C et α de la nouvelle matrice [C] de la suite matricielle de Rutishauser,
- Calcul de la variation relative des éléments C entre cette itération et la précédente,
- Rangement dans la tableau D des éléments C de cette itération, en vue du calcul de la variation relative des éléments c au cours de la prochaine itération,
- Test de convergence sur la variation relative des éléments C,

Les termes C_i situés sur la diagonale principale, ne seront strictement égaux aux valeurs propres qu'après un nombre infini d'itérations.

La précision désirée pour le calcul des pulsations propres est telle qu'il suffit d'examiner la variation de la différence entre l'élément C_i , calculé à l'itération l , et le même élément, calculé à l'itération $l+1$.

Le test de convergence ou d'arrêt peut être formulé de la façon suivante :

$$Q = \frac{S_1}{S_2} < \epsilon$$

Avec

$$S_1 = \sum_{i=1}^{I=N} |C_i^l - C_i^{l+1}|$$

C_i^l Élément C_i , à l'itération l

$$S_2 = \sum_{i=1}^{I=N} C_i^{l+1}$$

En prenant $\epsilon = 10^{-8}$, les valeurs propres de la matrice sont obtenues avec suffisamment de précision pour calculer les pulsations propres des lignes d'arbres.

➤ Test de sécurité sur le nombre d'itérations (nous considérons que 100 itérations suffisent généralement).

Noms des variables utilisées :

Nb nombre d'itérations.

A élément b de la matrice [R]

B élément β de la matrice [S]

$$S_1 = \sum_{i=1}^{I=N} |C_i^l - C_i^{l+1}|$$

avec C_i^l élément C_i , à l'itération l

$$S_2 = \sum_{i=1}^{I=N} C_i^{l+1}$$

D) Calcul des pulsations propres

Les valeurs propres recherchées sont les éléments du tableau C (I) lorsque le test de convergence est satisfait. Les valeurs propres apparaissent par ordre décroissant : C (1) est la plus grande, C (N) est la plus petite. Les systèmes à N disques étudiés sont libres à leurs deux extrémités.

Il n'existe donc que N- 1 pulsations propres différentes de zéro. C (N) est théoriquement nulle, sa valeur finale est un élément permettant d'évaluer la précision des calculs.

Noms des variables utilisées :

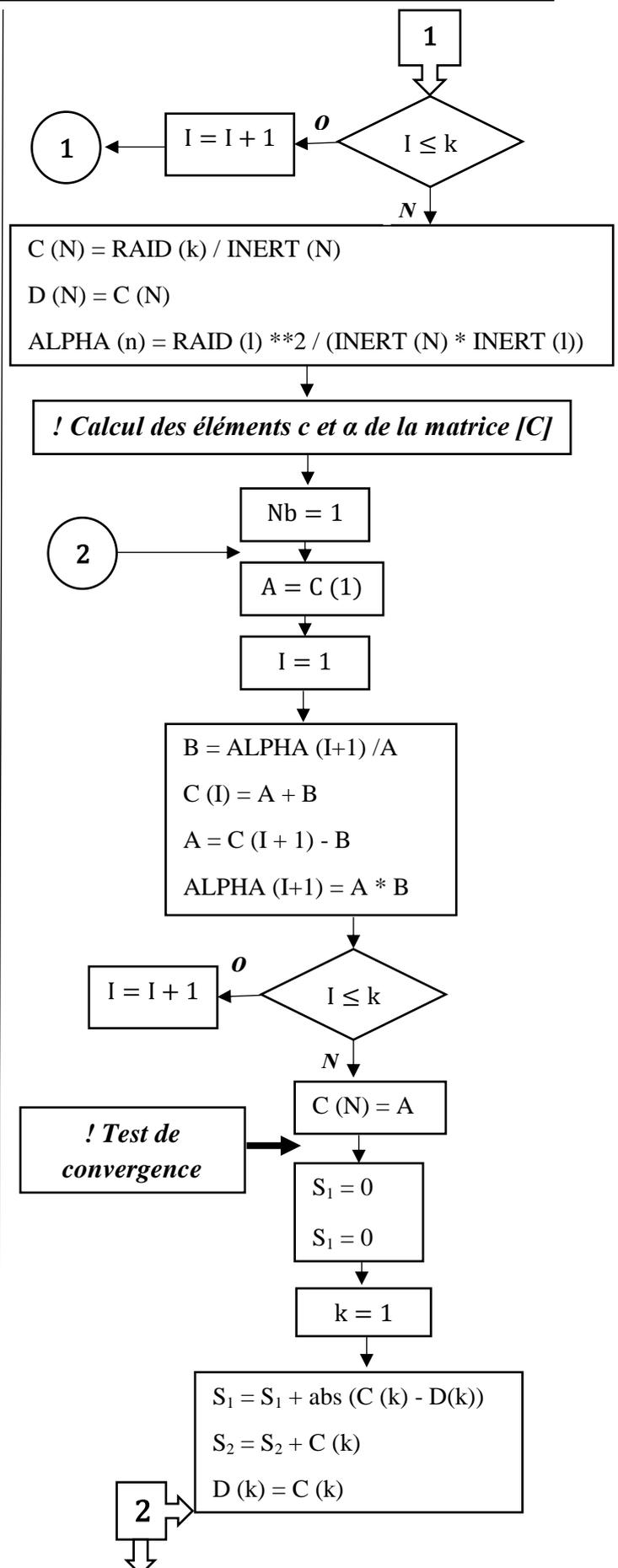
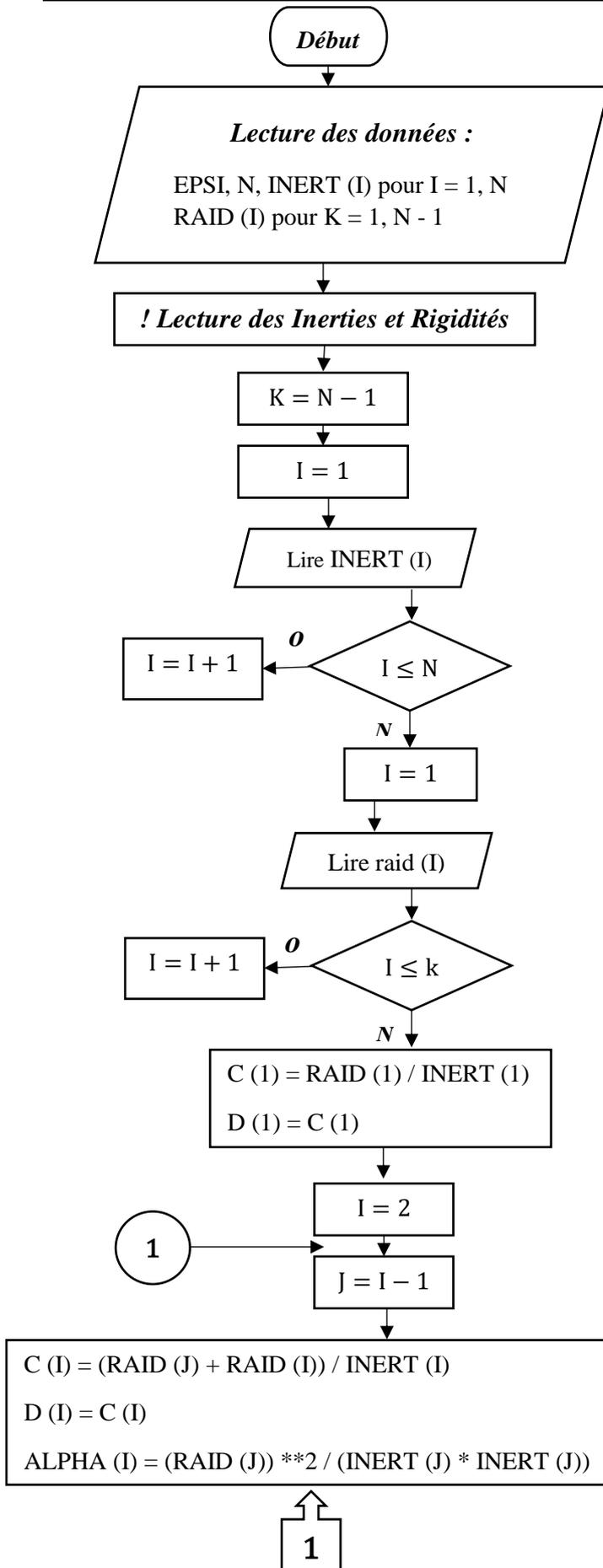
OM (J) (rad/s) pulsation propre qui correspond au mode N-J

E) Calcul des déformées modales

Le nom de la variable utilisée est :

X (I, J) amplitude relative du disque I au mode numéro J. ou encore composante i du vecteur propre associé à la valeur propre donnant le mode j. ^[4]

Ces différentes étapes sont représentées sur l'organigramme de la figure **III.2**



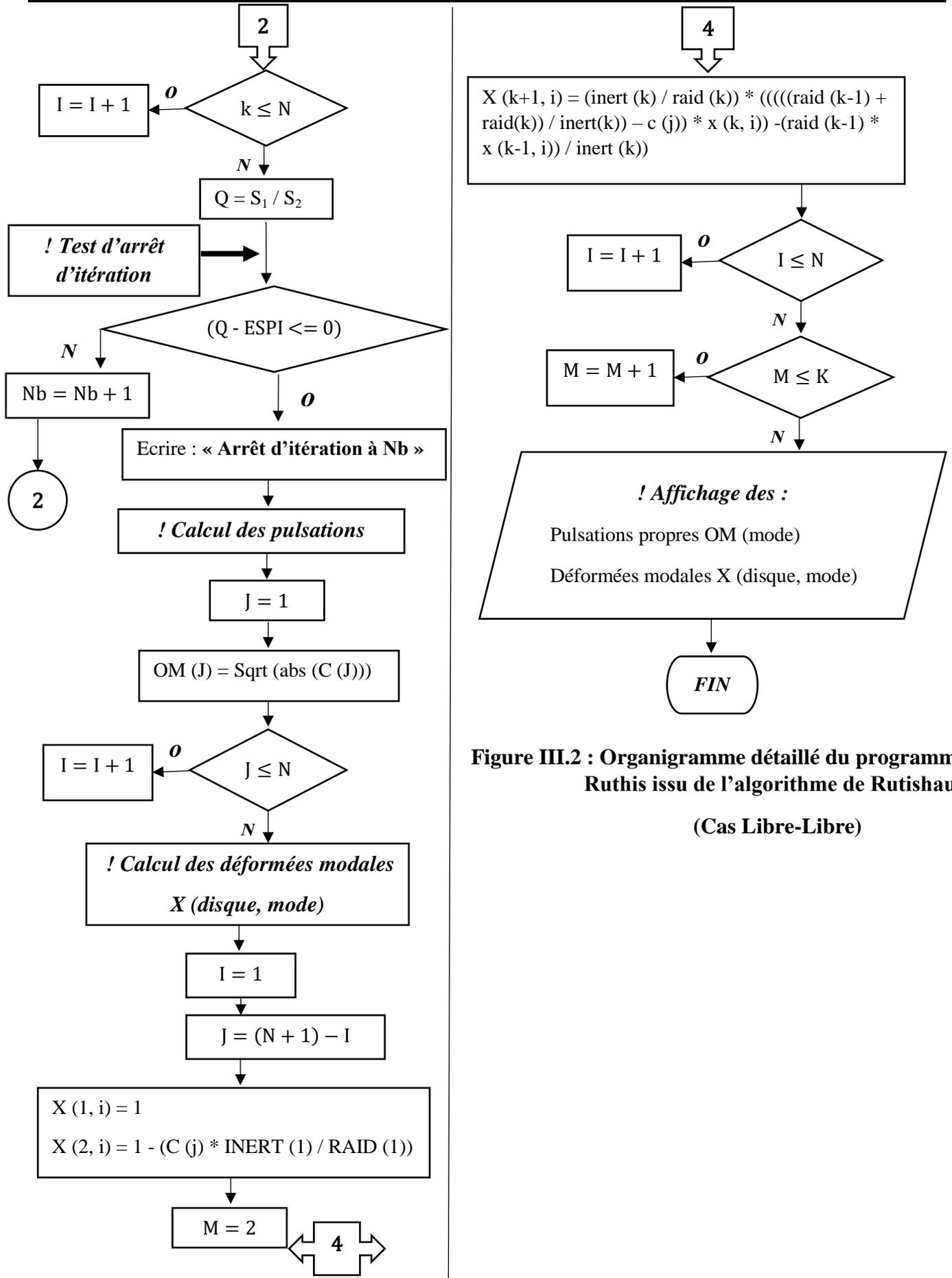


Figure III.2 : Organigramme détaillé du programme Ruthis issu de l’algorithme de Rutishauser (Cas Libre-Libre)

2) Les résultats du programme Ruthis

Les pulsations propres obtenues par la recherche des valeurs propres de la matrice aux pulsations, par le programme Ruthis sont données dans le tableau **III.2**.

La ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques ($N = 4$) étudiés est libre à ses deux extrémités (cas libre-libre), donc il n'existe donc que $N - 1$ pulsations propres différentes de zéro.

$C(N)$ est théoriquement nulle, sa valeur finale est un élément permettant d'évaluer la précision des calculs.

N ⁰ du mode (i)	Pulsation propre $\omega_i = OM(i)$ rad/s
1	0.7405
2	1.2637
3	1.6895
4	0.0000

Tableau III.2 : Pulsations propres de la ligne d'arbre non ramifiée Figure III.1

Les amplitudes relatives (ou composantes des vecteurs propres de la matrice aux pulsations) pour les quatre modes sont indiquées dans le tableau **III.3** ci-dessus de la ligne d'arbre non ramifiée Figure **III.1**.

Disque N ⁰	Amplitude relative $\theta(I, J)$ en rad		
	Mode N ⁰ 1	Mode N ⁰ 2	Mode N ⁰ 3
	$\omega = 0.7405$ rad/s	$\omega = 1.2637$ rad/s	$\omega = 1.6895$ rad/s
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.4516	-0.5969	-1.8546
3	-0.5921	-0.2872	5.8793
4	-1.3111	0.4811	-3.1700

Tableau III.3 : Amplitude relative $X(I, J)$ de la ligne d'arbre non ramifiée Figure III.1

III.2.3. Calcul des pulsations propres et des déformées modale par Analyse modale

La recherche de pulsations propres et déformées modales par l'analyse modale s'effectue en :

- ❖ Calculant les valeurs propres $\lambda = \omega^2$ en posant $\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$,
- ❖ Une fois Toutes les pulsations propres " ω_i " ayant été déterminées, les modes propres " U_i " (déformées modales) peuvent être évalués par l'équation $([K] - \omega^2 [M])(U_i) = 0$. Il s'agit

simplement de réinjecter les pulsations propres dans cette équation. La pulsation ω_i et le vecteur propre $\{U_i\}$ définissent le mode propre (i).

Sur Matlab les deux opérations ci-dessus exécutent avec l'instruction :

$$\gg [\mathbf{Vecpro}, \mathbf{Valpro}] = \mathbf{eig}(\mathbf{K}, \mathbf{I}) \quad \text{III.3}$$

Avec : **Vecpro** Matrice des modes propres,

Valpro Matrice diagonale des valeurs propres,

K Matrice de rigidité,

I Matrice d'inertie.

❖ Les résultats de l'analyse modale

Dans les deux tableaux qui suivent (tableau III.4, tableau III.5) sont ranger respectivement, les pulsations propres et des déformées modale issus de l'analyse modale.

N ⁰ du mode (i)	Pulsation propre $\omega_i = \mathbf{OM}(i)$ rad/s
1	0.7405
2	1.2637
3	1.6896
4	0.000

Tableau III.4 : Pulsations propres de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques par l'analyse modale

Disque N ⁰	Amplitude relative X (I, J)		
	Mode N ⁰ 1 $\omega = 0.7405$ rad/s	Mode N ⁰ 2 $\omega = 1.2637$ rad/s	Mode N ⁰ 3 $\omega = 1.6896$ rad/s
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.4516	-0.5970	-1.8546
3	-0.5921	-0.2873	5.8794
4	-1.3111	0.4812	-3.1701

Tableau III.5 : Amplitude relative X (I, J) de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques par l'analyse modale

III.2.4. Études comparative des résultats issus des deux méthodes

Le tableau III.6 regroupe les pulsations propres provenant de l'application de programme Ruthis et de l'analyse modale, ce qui nous permet d'observer et de remarquer que les valeurs des pulsations propres des différents modes propres émanant des deux méthodes de calcul sont pratiquement les mêmes.

Pulsation propre $\omega_i = OM(i)$ rad/s		
N ^o du mode (i)	Programme Ruthis	Analyse modale
1	0.7405	0.7405
2	1.2637	1.2637
3	1.6895	1.6896
4	0.0000	0.0000

Tableau III.6 : Pulsations propres de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques émanant du Programme Ruthis et de l'analyse modale

Les déformées modales (amplitudes relatives) des différents modes propres issues de l'application des deux méthodes sont données au tableau III.7

Programme Ruthis			
Disque N ^o	Amplitude relative X (I, J)		
	Mode N ^o 1 $\omega = 0.7405$ rad/s	Mode N ^o 2 $\omega = 1.2637$ rad/s	Mode N ^o 3 $\omega = 1.6895$ rad/s
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.4516	-0.5969	-1.8546
3	-0.5921	-0.2872	5.8793
4	-1.3111	0.4811	-3.1700

Analyse modale			
Disque N ^o	Amplitude relative X (I, J)		
	Mode N ^o 1 $\omega = 0.7405$ rad/s	Mode N ^o 2 $\omega = 1.237$ rad/s	Mode N ^o 3 $\omega = 1.6996$ rad/s
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.4516	-0.5970	-1.8546
3	-0.5921	-0.2873	5.8794
4	-1.3111	0.4812	-3.1701

Tableau III.7 : Amplitude relative X (I, J) de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques émanant du Programme Ruthis et de l'analyse modale

Les résultats du tableau III.7 sont représentés sur le graphe de la figure III.3.

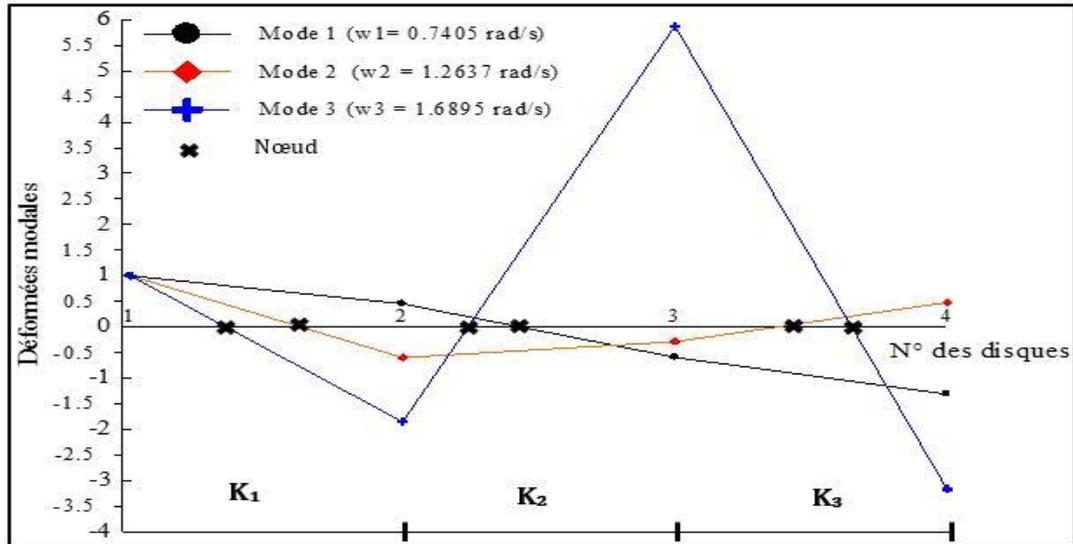


Figure III.3 : Déformées modales des trois modes de la ligne d'arbre non ramifiée à 4 disques

III.2.5. Conclusion de l'étude comparative des deux méthodes de calcul

Cette étude comparative des deux méthodes de calcul nous a permis de mettre en évidence la pertinence et la précision des résultats provenant du programme Ruthis établi à partir de l'algorithme de Rutishauser. A noter aussi que lorsque le nombre d.d.l est très important, avec l'analyse modale la précision des résultats n'est pas garantie contrairement au programme Ruthis.

Les graphes des déformées modales (Figure III.3) nous permet de constate que plus on tend vers les modes supérieurs plus il y'a des nœuds de vibrations qui se forment sur la ligne d'arbre.

III.3. Application du programme sur une installation de production d'air comprimé études de cas

Selon les trois types de configuration (libre-libre, encastré-libre, et encastré-encastré) dans laquelle peuvent être modélisées les machines ou les installations de type ligne d'arbre non ramifiée en fonction des conditions aux extrémités, nous amène aux calculs les pulsations propres et des déformées modale à partir du programme Ruthis d'une installation de production d'air comprimé (Figure III.4), en fonction de la configuration des conditions aux extrémités.

III.3.1. Description de l'installation de production d'air comprimé

L'installation est constituée par :

C : compresseur d'air bicylindre (qui tourne à 425 tr/min),

I : 1^{er} manivelle

II : 2^e manivelle

V : volant + accouplement élastique à petite vitesse Flex acier type 28 BSAL,

III : volant + demi-accouplement

IV : demi-accouplement

R : réducteur à engrenages,

V : roue réducteur + arbre

IX : pignon réducteur + arbre

A : accouplement élastique à grande vitesse Flex acier type 9 TL2,

VI : demi-accouplement

VII : demi-accouplement

M : moteur électrique de 430 KW (qui tourne à 425 tr/min).

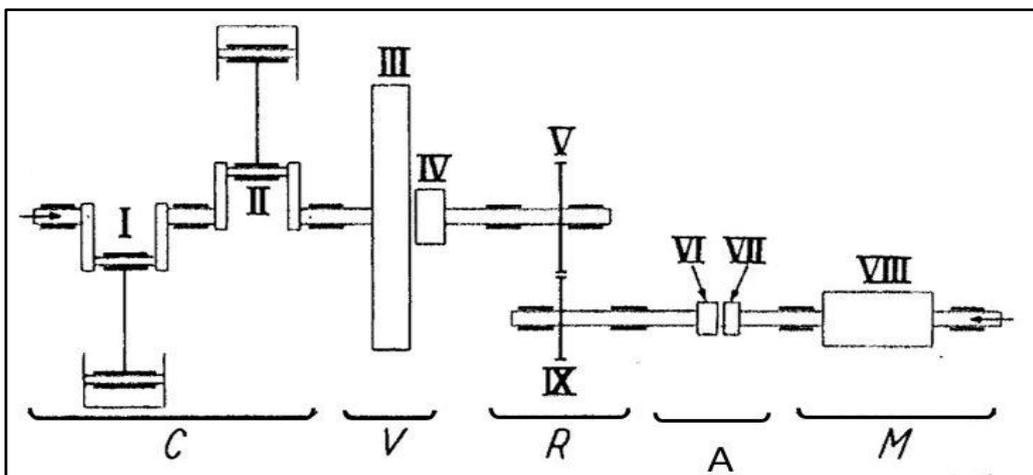


Figure III.4 : Installation de production d'air comprimé

III.3.2. 1^{ère} situation de l'installation : cas libre aux deux extrémités (L-L)

La modélisation de l'installation dans les conditions aux limites libre-libre pour la recherche des pulsations propres et des déformées modales se traduit par un modèle équivalent constitué de $N = 8$ disques à I_i moment d'inertie reliés entre eux par des arbres de torsion $K = N - 1$ sans masse, de rigidité torsionnelle K_i , comme indiqué sur la Figure III.5.

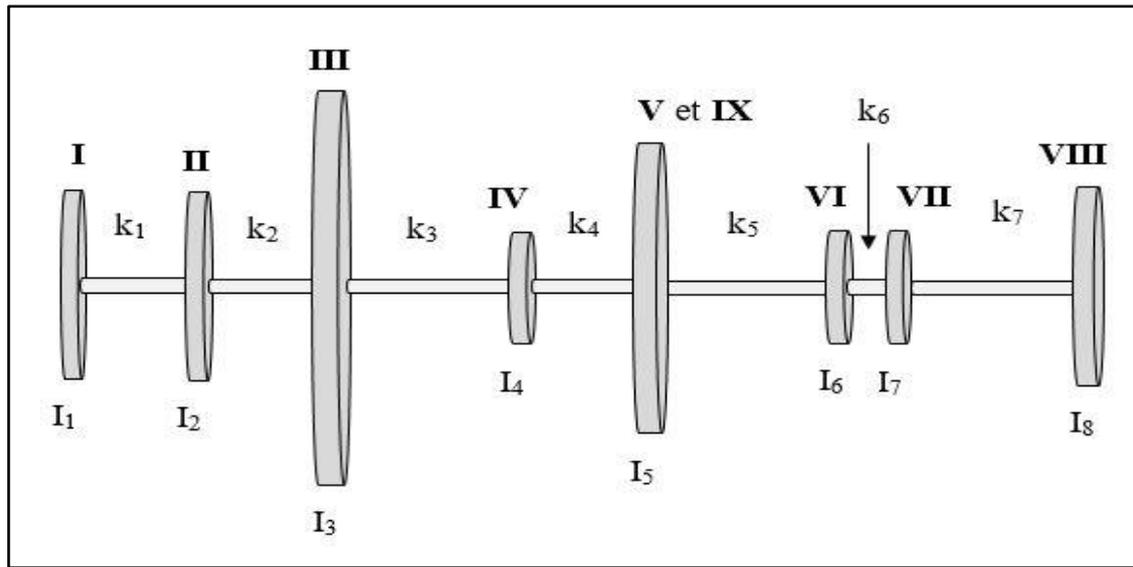


Figure III. 5 : Modèle de l'installation de la Figure III.4 (L-L)

❖ Les paramètres physiques : inerties et rigidités torsionnelle de l'installation (Cas Libre-libre)

Les caractéristiques physiques inerties et rigidités des 8 disques sont données au tableau III.8.

Disque N^0	Inertie (I_i) $N \cdot m \cdot S^2$	Arbre N^0	Rigidité torsionnelle (K_i) $N \cdot m / rad$
1	8.25	1	3.3×10^7
2	8.25	2	2.78×10^7
3	549.5	3	3.6×10^6
4	2.75	4	1.52×10^7
5	20.07	5	5.86×10^7
6	3.51	6	6.41×10^6
7	3.51	7	4.59×10^7
8	115.98		

Tableau III.8 : Inerties et rigidités torsionnelle de la ligne d'arbre non ramifiée (Cas libre-libre)

❖ *Les équations du mouvement et déduction de la matrice d'inertie [I], et rigidité [K]*

Le système d'équations (8 équations) du mouvement de la ligne d'arbre non ramifiée sous forme matricielle condensé est donné par l'équation **III.2**.

$$\text{Avec : } [I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_8 \end{bmatrix} \text{ (matrice d'inertie)}$$

Et la matrice de rigidité :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & (k_4 + k_5) & -k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & (k_5 + k_6) & -k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & (k_6 + k_7) & -k_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & k_8 \end{bmatrix},$$

❖ *Organigramme détaillé du programme Ruthis pour le cas libre aux extrémités*

L'organigramme de calcul détaillé du programme Ruthis de notre installation pour le cas libre aux extrémités (libre-libre), est donné à la figure **III.2**.

❖ *Les résultats du cas libre-libre*

Les deux tableaux (tableau III.9, tableau III.10) présentent respectivement, les pulsations propres et les déformées modales de notre installation de production d'air comprimé dans les conditions aux limites libre-libre.

N ^o du mode i	Pulsation propre $\omega_i = \text{OM}(i)$ rad/s
1	133.597
2	595.615
3	1176.18
4	2710.76
5	3168.13
6	3854.38
7	4665.09

Tableau III.9 : Les pulsations propres $\omega_i = \text{OM}(i)$ pour chaque i mode propres de l'installation (Cas Libre-Libre)

Disque N ^o	Amplitude relative X (I, J)		
	Mode N ^o 1 $\omega_1 = 133.597$ rad/s	Mode N ^o 2 $\omega_2 = 595.615$ rad/s	Mode N ^o 3 $\omega_3 = 1176.18$ rad/s
1	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.99554	0.91131	0.65415
3	0.98497	0.71009	-0.02494
4	-1.78003	-39.29503	-0.00259
5	-2.42915	-46.24785	0.00335
6	-2.58268	-42.43213	0.00331
7	-3.96095	0.69390	0.00036
8	-4.14802	6.69769	-0.00009

Tableau III.10 : Amplitude relative X (I, J) pour chaque i mode propres de l'installation (Cas Libre-Libre)

Les déformées modales des 3 premiers modes de vibrations (tableau III.10) sont représentées sur la figure III.6 en fonction du nombre de disques.

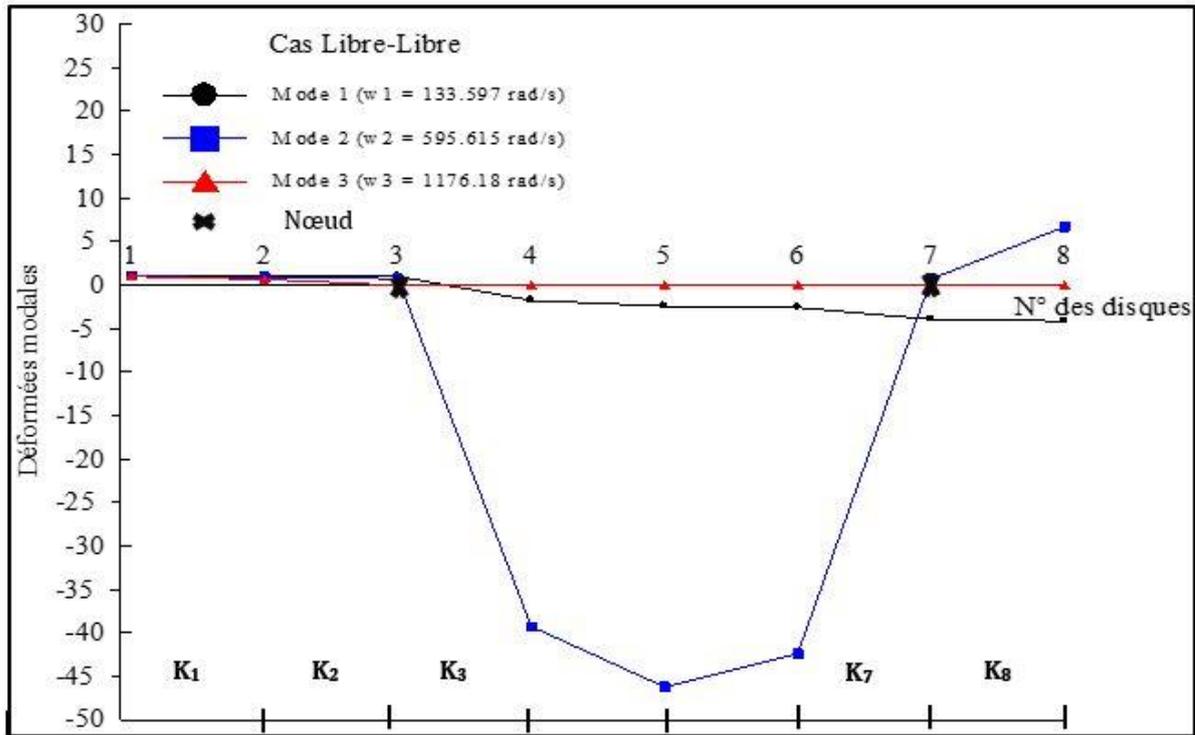


Figure III.6 : Déformées modales des trois premiers modes de la ligne d'arbre (L-L)

❖ Analyse et interprétation des résultats

La figure III.6 dans laquelle sont exposé les déformées modales des trois premiers modes de vibration de la ligne d'arbre non ramifiée, nous permet de remarquer que les amplitudes relatives des disques N° 4, 5, 6 (IV, V, VI), du mode N° 2 ($\omega_2 = 595.615 \text{ rad/s}$) sont très importantes par rapport aux amplitudes des deux autres modes. Ces amplitudes sont celles prélevées au niveau des accouplements et du réducteur. Ainsi, le mode N°2 constitue un état vibratoire à éviter pour notre l'installation, car en plus des déplacements angulaires importants, on constate aussi l'apparition de deux nœuds de vibration. Ces nœuds sont localisés au niveau des arbres 2 et 6. Ces nœuds révèlent les positions où il est susceptible d'avoir une rupture par dépassement de la résistance ou par fatigue.

III.3.3. 2^e situation de l'installation : cas encastré à l'une des extrémités et libre de l'autre (E-L)

Pour la recherche des pulsations propres et des déformées modales, la modélisation de l'installation conduit à un modèle équivalent constitué de $N = 8$ disques à I_i moment d'inertie reliés entre eux par des arbres de torsion $K = N$ sans masse, de rigidité torsionnelle K_i , comme indiqué sur la Figure III.6.

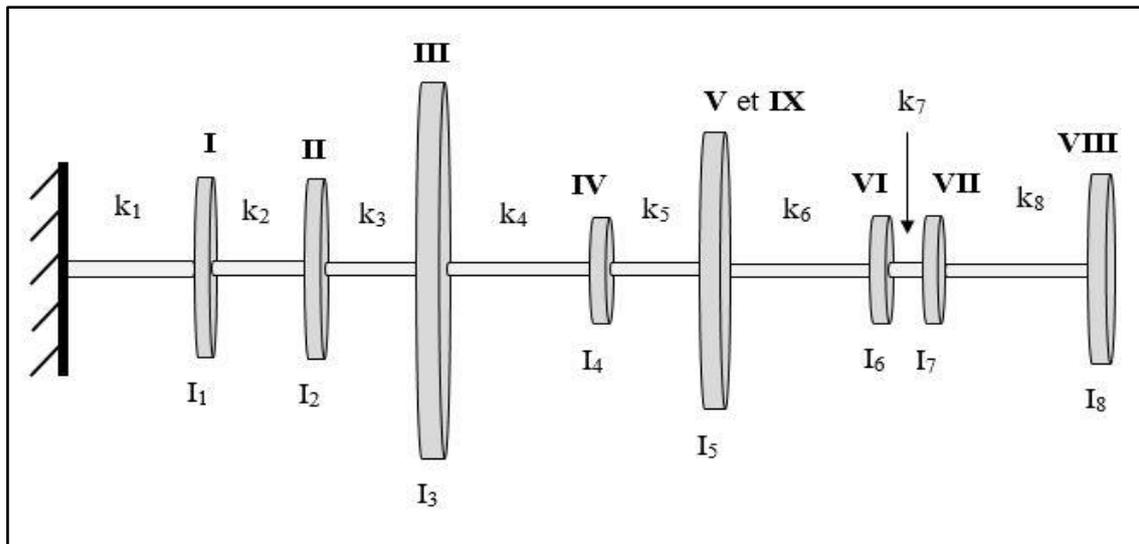


Figure III. 7 : Modèle de l'installation de la Figure III.4 (E-L)

❖ *Les paramètres physiques : inerties et rigidités torsionnelle de l'installation*
(Cas Encastré-Libre)

Les inerties et les rigidités torsionnelle de l'installation sont représentées sur le tableau III.11.

Disque N^0	Inertie (I_i) $N \cdot m \cdot S^2$	Arbre N^0	Rigidité torsionnelle (K_i) $N \cdot m / rad$
1	8.25	1	4.59×10^7
2	8.25	2	3.3×10^7
3	549.5	3	2.78×10^7
4	2.75	4	3.6×10^6
5	20.07	5	1.52×10^7
6	3.51	6	5.86×10^7
7	3.51	7	6.41×10^6
8	115.98	8	4.59×10^7

Tableau III.11 : Inerties et rigidités torsionnelle de la ligne d'arbre non ramifiée
(Cas Encastré-Libre)

❖ *Les équations du mouvement, la matrice d'inertie [I], et de rigidité [K]*

Le même système d'équations du mouvement de la ligne d'arbre non ramifiée sous forme matricielle condensé est établi par la relation **III.2**.

Avec : [I] La matrice diagonale, carrée d'ordre $N = 8$ (8 disques) des inerties, est la même que pour le cas (Libre-libre).

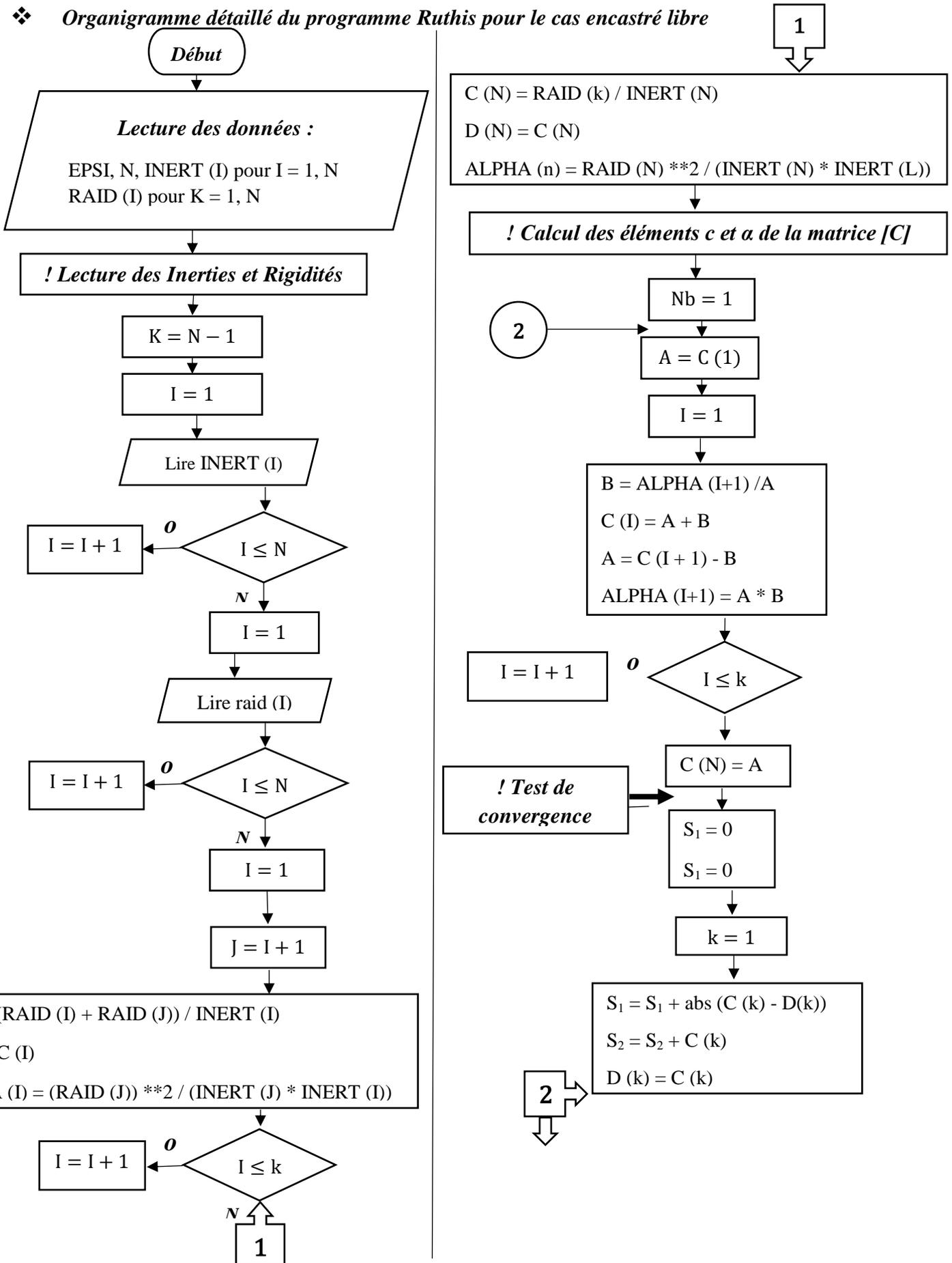
[K] est la matrice de rigidité exprimée sous forme matricielle par la relation suivante :

[K] =

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_2 & (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & (\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) & -\mathbf{k}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_3 & (\mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5) & -\mathbf{k}_4 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_4 & (\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6) & -\mathbf{k}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_5 & (\mathbf{k}_6 + \mathbf{k}_7) & -\mathbf{k}_6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_6 & (\mathbf{k}_7 + \mathbf{k}_8) & -\mathbf{k}_7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_7 & \mathbf{k}_8 \end{bmatrix},$$

La matrice de rigidités [K] $K = N \times N$ n'est pas la même que pour le cas (Libre-libre) en terme de rigidité, cela est dû à la nouvelle rigidité torsionnelle ajouté pour l'encastrement. Mais la matrice [C] découlant des deux matrices [I] et [K] restera une matrice tri-diagonale, par conséquent l'application du programme Ruthis pour la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres est possible. L'organigramme relatant les principales étapes nécessaires pour l'obtention des pulsations propres et des déformées modales dans ce cas est donné par la figure **III.8**.

❖ **Organigramme détaillé du programme Ruthis pour le cas encastré libre**



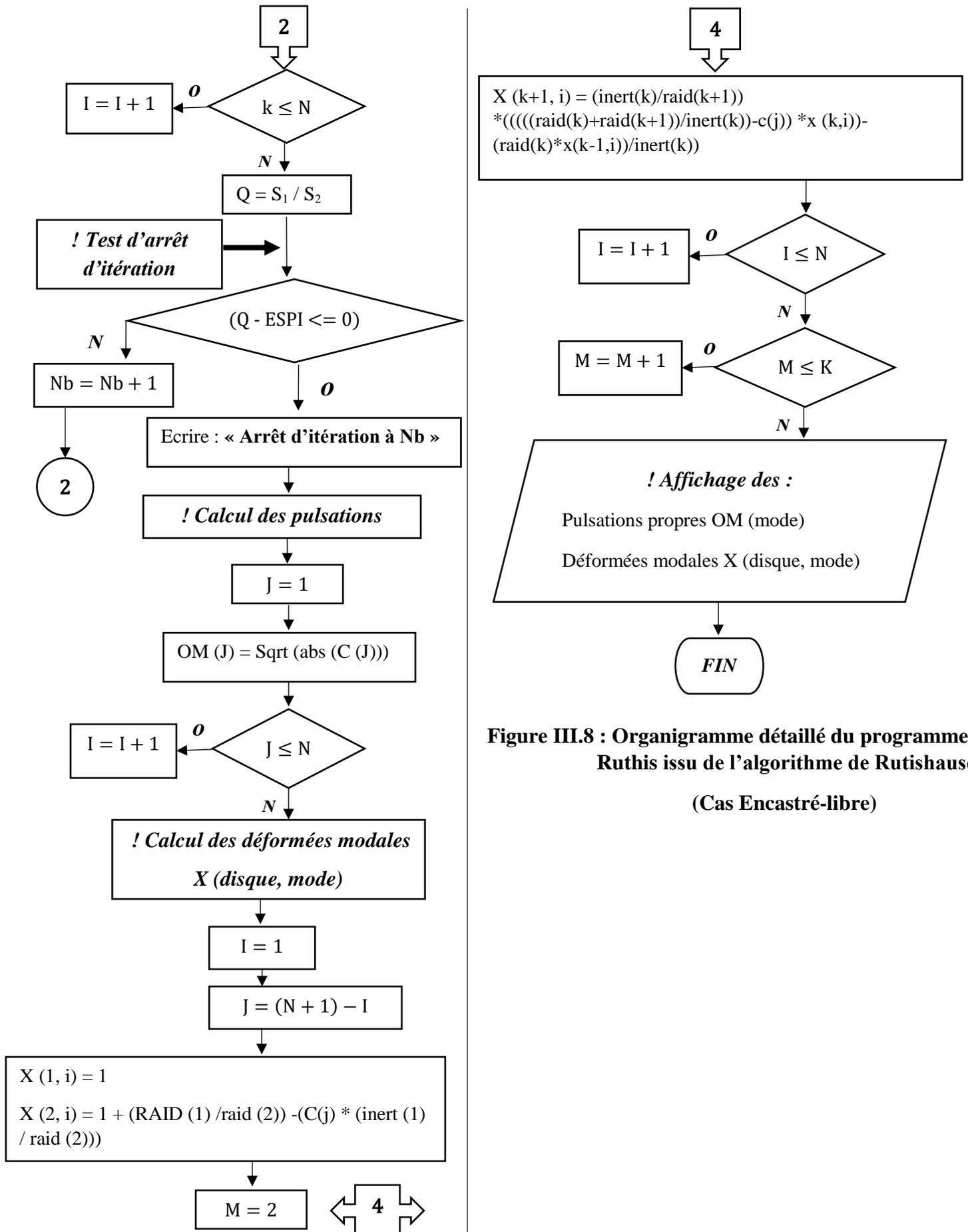


Figure III.8 : Organigramme détaillé du programme Ruthis issu de l’algorithme de Rutishauser (Cas Encastré-libre)

❖ *Les résultats du cas encastré-libre*

Les pulsations propres et les déformées modales de notre installation dans le cas encastré-libre sont portés respectivement sur le tableau **III.12** et **III.13**.

N ⁰ du mode i	Pulsation propre $\omega_i = \text{OM}(i)$ rad/s
1	102.148
2	167.107
3	595.757
4	2084.24
5	2710.76
6	3552.37
7	3854.38
8	4665.09

Tableau III.12 : Les pulsations propres $\omega_i = \text{OM}(i)$ pour chaque i mode propres de l'installation (Cas Encastré-Libre)

Disque N ⁰	Amplitude relative X (I, J) en (rad)		
	Mode N ⁰ 1 $\omega = 102.148$ rad/s	Mode N ⁰ 2 $\omega = 167.107$ rad/s	Mode N ⁰ 3 $\omega = 595.757$ rad/s
1	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.38830	2.38393	2.30218
3	4.02889	4.00696	3.60544
4	10.28116	-0.53887	-181.65715
5	11.74255	-1.61279	-213.87027
6	12.07965	-1.87593	-196.22801
7	15.09239	-4.25282	3.19402
8	15.50108	-4.57567	30.95690

Tableau III.13 : Amplitude relative X (I, J) pour chaque i mode propres de l'installation (Cas Encastré-Libre)

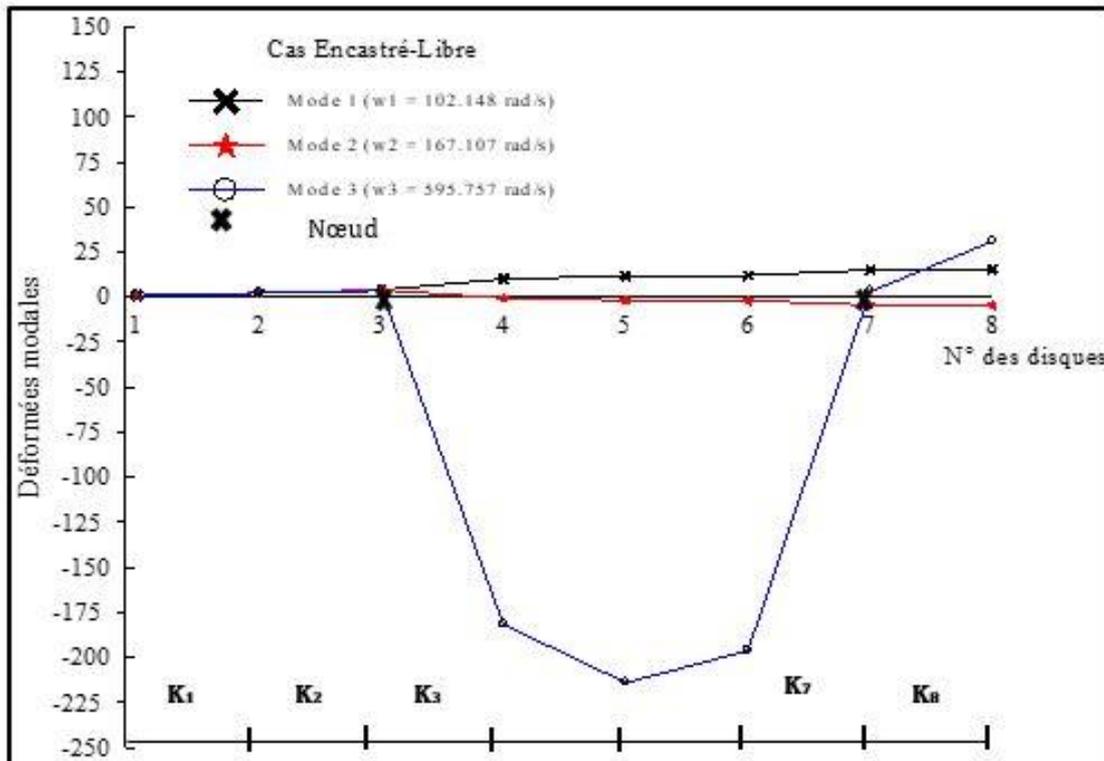


Figure III.10 : Déformées modales des trois premiers modes de la ligne d'arbre (E-L)

❖ Analyse et interprétation des résultats

L'encastrement de la ligne d'arbre sur un côté (cas Encastré-Libre) permet d'avoir les deux premiers modes avec des déformées modales assez acceptable comme on peut le constater à travers la figure III.10 avec des pulsations propres $\omega_1 = 102.148 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 167.107 \text{ rad/s}$ inférieures à la pulsation propre $\omega_2 = 595.615 \text{ rad/s}$ du mode N°2 du cas Libre-libre qui présente des déformées modales très importantes.

L'état de vibration donnant des déformées modales très importantes est celui du mode N°3. Il donne des valeurs plus grandes que celles du mode N°2 dans le cas Libre-libre, mais avec une pulsation propre ($\omega_3 = 595.75 \text{ rad/s}$ (E - L) $\approx \omega_2 = 595.615 \text{ rad/s}$ (L - L)).

Donc on peut en déduire, à partir de ces constatations que la ligne d'arbre non ramifiée dans ce deuxième cas permet d'avoir des modes de vibration avec des déformées modales assez acceptable pour des petites pulsations propres.

III.3.4. 3^e situation de l'installation : cas encasté aux deux extrémités (E-E)

Le modèle équivalent utile pour la détermination des pulsations propres et des déformées modales est constitué dans ce cas de $N = 8$ disques à I_i moment d'inertie reliés entre eux par des arbres au nombre $K = N + 1 = 9$ sans masse, de rigidité torsionnelle K_i , comme indiqué sur la figure III.11.

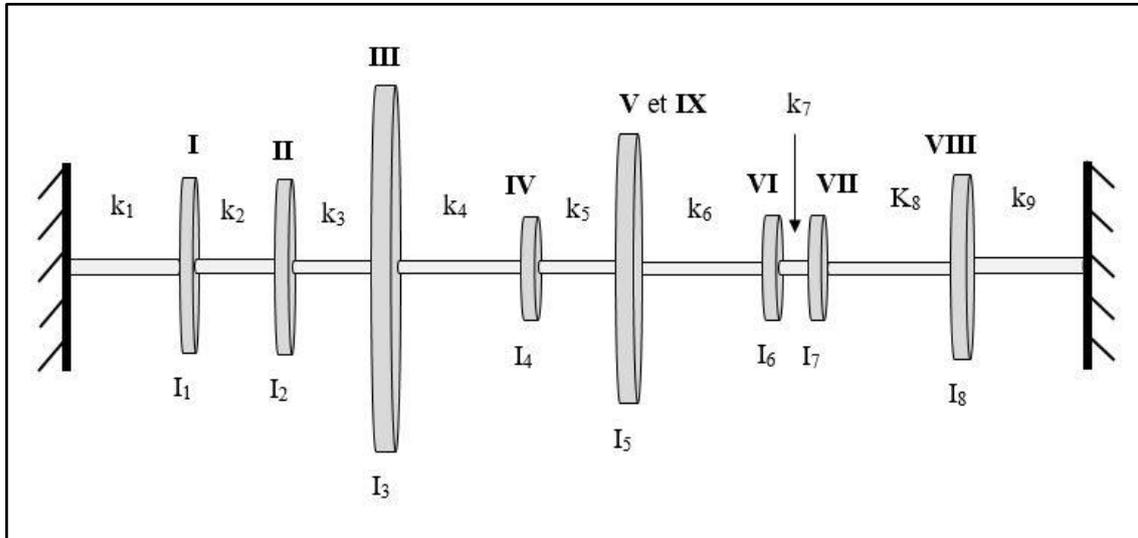


Figure III.11 : Modèle de l'installation de la Figure III.4 (E-E)

❖ *Les paramètres physiques : inerties et rigidités torsionnelle de l'installation (cas encasté-encasté)*

Le tableau III.14 donne les inerties et les rigidités des disques et des arbres.

Disque N^0	Inertie (I_i) $N \cdot m \cdot S^2$	Arbre N^0	Rigidité torsionnelle (K_i) $N \cdot m / rad$
1	8.25	1	4.59×10^7
2	8.25	2	3.3×10^7
3	549.5	3	2.78×10^7
4	2.75	4	3.6×10^6
5	20.07	5	1.52×10^7
6	3.51	6	5.86×10^7
7	3.51	7	6.41×10^6
8	115.98	8	4.59×10^7
		9	4.59×10^7

Tableau III.14 : Inerties et rigidité torsionnelle de la ligne d'arbre non ramifiée (encasté-encasté)

❖ *Les équations du mouvement, la matrice d'inertie [I] et de rigidité [K]*

Les équations du mouvement sont exprimées sous forme matricielle selon l'équation **III.2**.

Avec : La matrice d'inertie $[I]$ d'ordre 8, et la matrice de rigidité donnée par la relation :

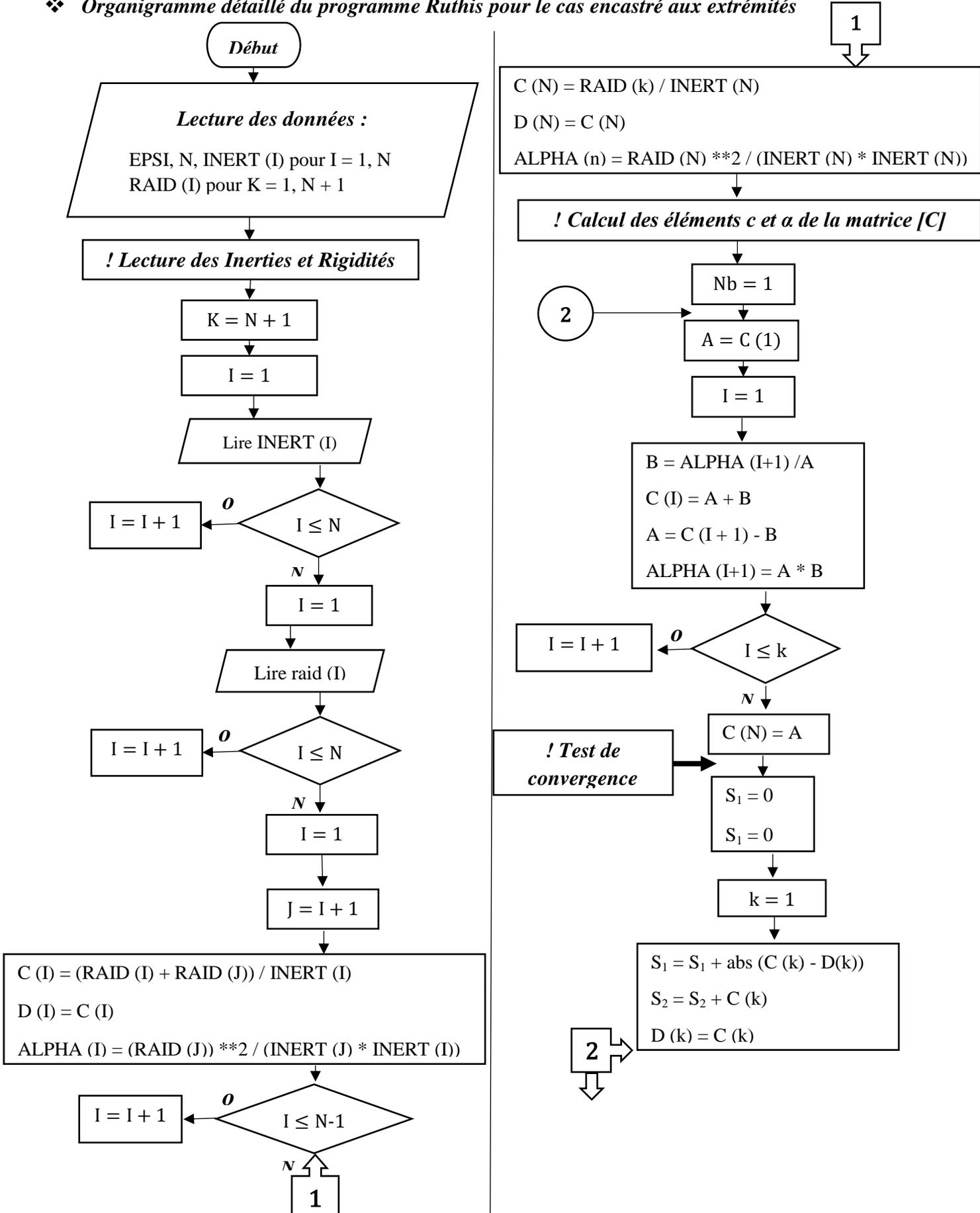
$[K]$

$$= \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & (k_4 + k_5) & -k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & (k_5 + k_6) & -k_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & (k_7 + k_8) & -k_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & (k_8 + k_9) \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité $[K]$ ($K=N+1$) n'est pas la même que pour le cas (Libre-libre) mais similaire à celle du cas Encastré-libre sauf au niveau du dernier élément de la diagonale. Mais comme pour les cas Encastré-libre la matrice $[C]$ découlant des deux matrices $[I]$ et $[K]$ restera une matrice tri-diagonale, par conséquent l'application du programme Ruthis pour la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice $[C]$ est possible.

L'organigramme mettant en évidence le calcul des pulsations propres et des déformées modales dans le cas encastré-encastré est donné par la figure **III.12**.

❖ *Organigramme détaillé du programme Ruthis pour le cas encastré aux extrémités*



❖ *Les résultats du cas encastré-encastré*

Les tableaux III.15 et III.16, expriment les résultats obtenus par notre programme pour les conditions aux limites encastré-encastré.

N ^o du mode i	Pulsation propre $\omega_i = \text{OM}(i)$ rad/s
1	153.508
2	516.490
3	699.434
4	2084.24
5	2710.77
6	3552.37
7	3855.57
8	4665.12

Tableau III.15 : Les pulsations propres $\omega_i = \text{OM}(i)$ pour chaque i mode propres de l'installation (Cas Encastré-Encastré)

Disque N ^o	Amplitude relative $\theta(I, J)$ en rad		
	Mode N ^o 1	Mode N ^o 2	Mode N ^o 3
	$\omega_1 = 153.508$ rad/s	$\omega_2 = 516.490$ rad/s	$\omega_3 = 699.434$ rad/s
1	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.38502	2.32422	2.26861
3	4.01242	3.71214	3.44515
4	2.14729	136.72189	-244.72662
5	1.69639	-163.38399	-281.84387
6	1.56575	-155.37238	-244.24869
7	0.35117	-59.43460	164.87495
8	0.18092	-44.82432	215.84167

Tableau III.16 : Amplitude relative $\theta(I, J)$ pour chaque i mode propres de l'installation (Cas Encastré-Encastré)

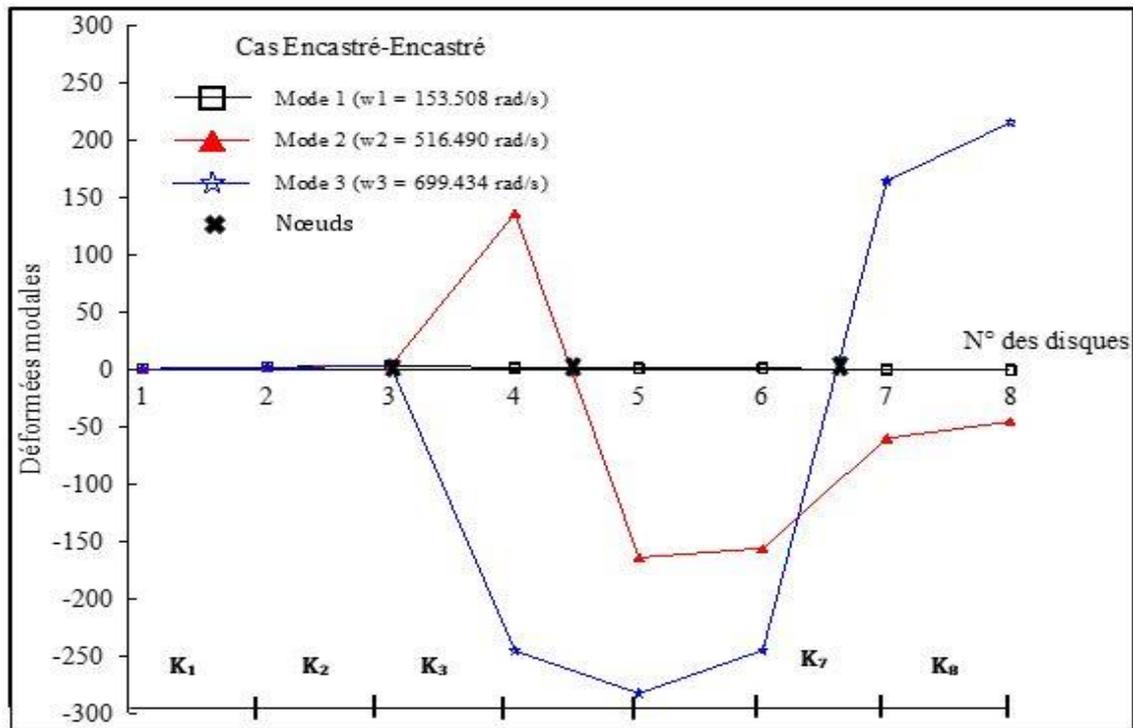


Figure III.13 : Déformées modales des trois premiers modes de la ligne d'arbre (E-E)

❖ Analyse et interprétation des résultats

Les résultats de la figure III.13 montrent que les modes avec de grandes pulsations propres possèdent des déformées modales considérables. Donc c'est une configuration à ne pas adapter pour des installations de types lignes d'arbres non ramifiées évoluant à de grandes vitesses, afin de ne pas conduire à ces modes qui peuvent causer leurs dysfonctionnements voir même leurs destructions.

Par contre pour les installations évoluant à de petites vitesses on peut utiliser la configuration Encasturé-Encasturé comme le montre le tracé des déformées modales du mode N°1 de la figure III.13.

III.3.5. Étude comparative des déformées modales

Les figures III.14, III.15 et III.16 se rapportent à des comparaisons des déformées modales des différentes conditions aux limites pour le mode 1, 2 et 3 de vibration.

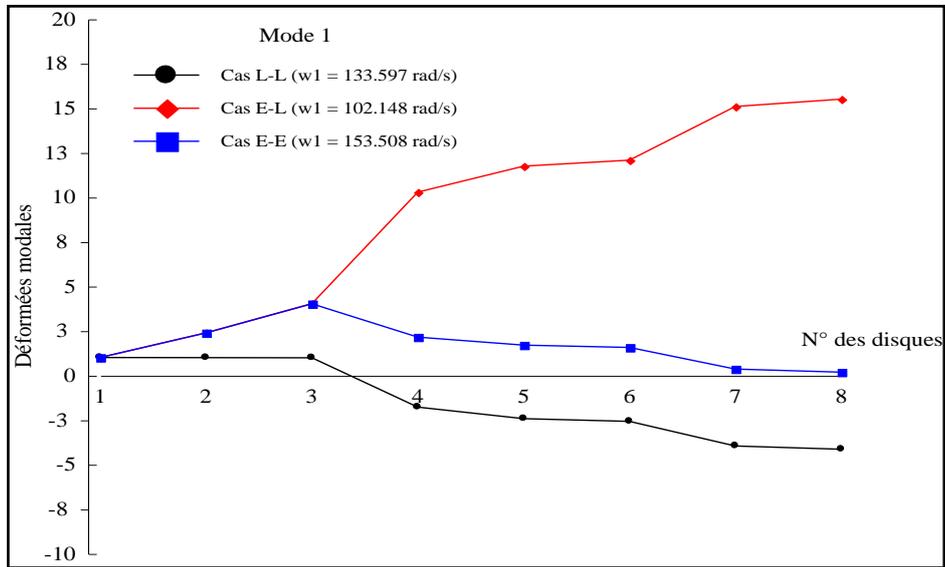


Figure III.14 : Variation des déformées modales du mode 1 pour les différents cas considérés

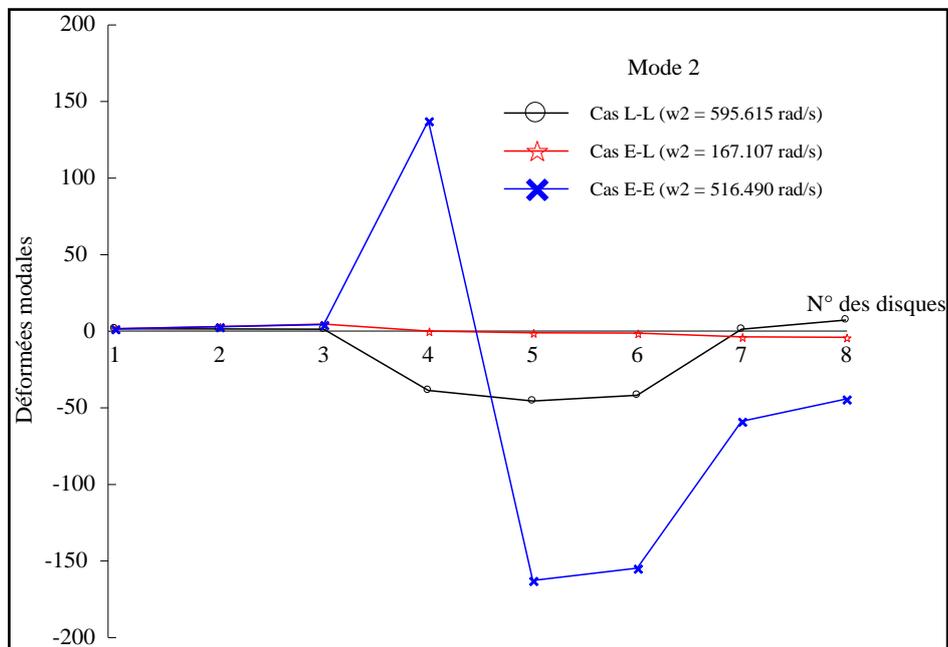


Figure III.15 : Variation des déformées modales du mode 2 pour les différents cas considérés

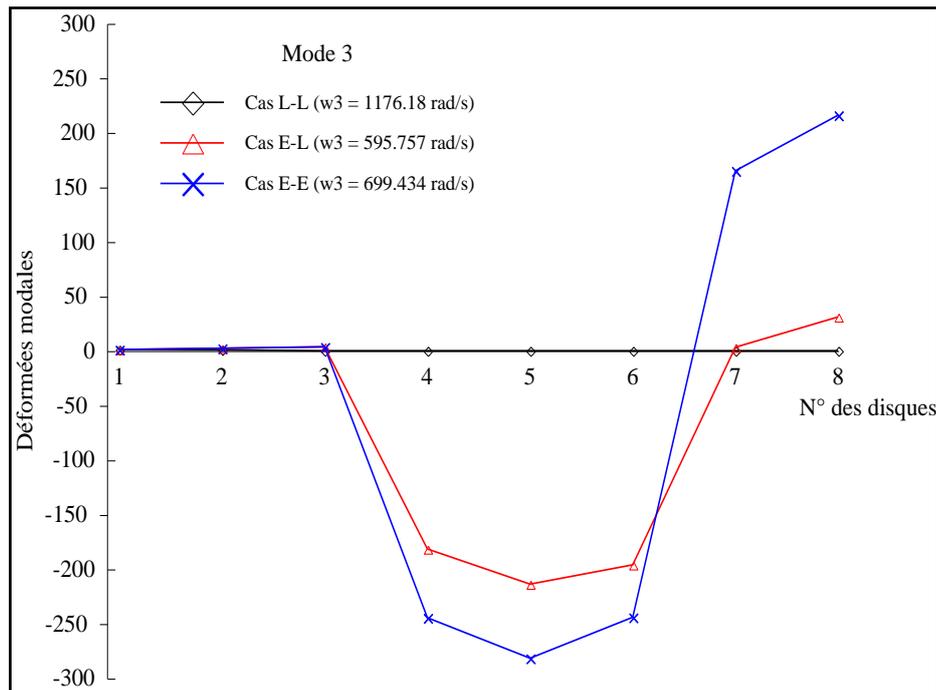


Figure III.16 : Variation des déformées modales du mode 3 pour les différents cas considérés

❖ *Analyse et interprétation des graphes de la Variation des déformées modales des modes pour les différents cas considérés*

Pour le premier mode, le cas E-E donne des amplitudes très faibles par rapport au cas E-L et par rapport au cas L-L qui est distingué par la présence d'un nœud de vibration au niveau de l'arbre 3.

Le mode 2 est caractérisé par des amplitudes très faibles pour la configuration E-L. Ces amplitudes augmentent rapidement si on passe du cas L-L au cas E-E. La configuration L-L est caractérisée par la présence de deux nœuds de vibration au niveau des arbres 2 et 6.

Pour des vitesses de rotations très importantes, le mode 3 présente des amplitudes relatives très faibles dans le cas L-L. Ces amplitudes deviennent très importantes surtout au niveau des disques 4, 5, et 6 dans le cas E-L et au niveau des disques 4, 5, 6, 7 et 8 pour la configuration E-E.

Ainsi, pour des vitesses de rotation au environ de 150 rad/s à 170 rad/s, les déformées modales les plus faibles sont obtenues avec les configurations E-L et E-E.

La configuration L-L donnant de faibles amplitudes est préconisée dans le cas de grandes vitesses de rotation ($\omega_3 = 1176,18$ rad/s soit).

III.3.6. Conclusion

Après avoir démontré par une étude comparative la pertinence et la précision des résultats provenant de notre programme établi à partir de l'algorithme de Rutishauser, on a par la suite adapté le programme Ruthis à calculer les pulsations propres et les déformées modales des lignes d'arbre non ramifiées en fonction des deux autres cas de conditions aux limites (E-L, E-E).

La connaissance des pulsations propres et des sources d'excitation possibles (électromagnétiques, hydrauliques, mécaniques etc.) permet de définir, les vitesses dangereuses (vitesses pour lesquelles les pulsations des harmoniques de l'excitation périodique, d'amplitudes non négligeables, sont égales à l'une des pulsations propres de la ligne d'arbres, phénomène de résonance) dans la plage de fonctionnement de l'installation par l'analyse et l'interprétation des variations des déformées modales. Et lorsqu'une ou plusieurs vitesses dangereuses appartiennent à la plage de fonctionnement, il est nécessaire d'apporter des modifications à la ligne d'arbres, soit pour rejeter les vitesses dangereuses en dehors des points de fonctionnement, soit pour diminuer les amplitudes des oscillations de torsion. Car, ces oscillations sont souvent à l'origine de la destruction des engrenages, des clavettes, des accouplements... et, d'une façon générale, des lignes d'arbres, par dépassement local (au niveau des nœuds) de la limite de fatigue.

Les modifications d'une ligne d'arbres portent dans la plupart des cas sur les rigidités torsionnelle de certains éléments et sur les moments d'inertie des disques. Il arrive des fois que ces modifications ne sont pas suffisantes, compte tenu des limites technologiques, pour éliminer les vitesses dangereuses de la plage de fonctionnement. C'est dans ce contexte que nous avons fait une étude du comportement dynamique d'une installation de production d'air comprimé, en variant les conditions aux limites afin de connaître les pulsations propres des modes propres critiques et d'essayer de les éviter sans avoir à modifier la ligne d'arbre.

