

II.1. Introduction

"Modale" vient de mode, qui signifie en mécanique vibratoire une forme de mouvement ou un état de vibration qui possède une configuration de déplacement particulière. Par exemple le mode principal d'une corde de guitare est le déplacement en ondulation simple, qu'on appelle sinusoïde. Ce mode est indépendant de la force avec laquelle on applique cet effort sur la corde. Si on veut le changer, c'est-à-dire modifier la fréquence (propre) modale (pulsation propre), il faudra changer la longueur, l'épaisseur, la forme, la rigidité, la nature du matériau ou la masse. Il s'agit d'une donnée intrinsèque à l'objet, à la machine ou à la structure son mode propre (déformée modale). On devrait dire ses modes propres car chaque objet (machine ou structure) est évidemment tridimensionnel, bouge dans tous les sens et possède donc de multiples façons de se déformer. Un système possède autant de fréquences propres que de degrés de liberté. À chaque fréquence propre est associé un mode propre de vibration. Si une machine (système) est excitée avec une vibration dont la fréquence est identique à celle de l'un de ses modes propres elle entre en résonance et peut se détruire.

Dans ce chapitre, nous allons introduire et décrire deux méthodes distinctes nous permettant de déduire les paramètres vibratoires modaux, à savoir l'algorithme de Rutishauser, utilisée dans ce travail qui est une méthode itérative (méthodes indirectes) et spécifique à la recherche des pulsations propres et les déformées modales des divers modes de vibrations des lignes d'arbres non ramifiées, et l'analyse modales (considérée comme une méthode directe) utilisée dans des nombreux domaines techniques pour trouver les paramètres vibratoires (fréquences propres, modes propres), cette dernière nous servira de méthode de comparaison.

A noter qu'avant l'application de toutes méthodes permettant de trouver les paramètres vibratoires qui définit le comportement dynamique d'un ou des systèmes passe par la détermination des équations du mouvement qui le caractérise par l'application des lois physiques. Ces lois physiques sont appelées d'une part à des grandeurs vectorielles comme le cas du principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton ou principe d'Alembert), et d'autre part à des grandeurs scalaires avec les équations de Lagrange (l'approche énergétique avec la loi de conservation de l'énergie). Nous allons dans la partie qui suit essayer de voir en détail l'emploi de ces deux types de loi physique cités ci-dessus pour la détermination des équations du mouvement.

II.2. Méthodes de formulation des équations du mouvement à 1 d.d.l et N d.d.l

Une fois la modélisation effectuée et le modèle masse-ressort(-amortisseur) ou disque-ressort(-amortisseur) correspondant du système obtenu, l'équation de mouvement d'un système à 1 d.d.l ou N d.d.l s'obtient assez simplement par diverses méthodes.

II.2.1. Principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton)

Dans le référentiel galiléen de la figure II.1, l'accélération (a) subie par un corps de masse (m) est proportionnelle à la résultante des forces extérieures exercées sur cette masse, et inversement proportionnelle à (m) (2ème loi de Newton). [3]

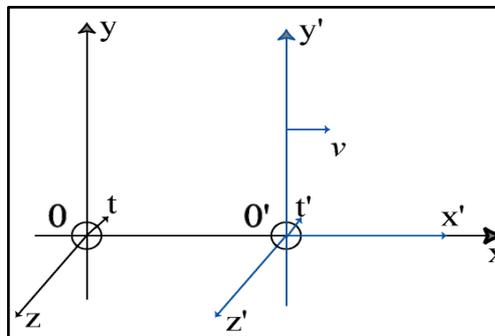


Figure II.1 : Repère galiléen considéré

$$m\ddot{a} = \sum f_{ext} \quad \text{II.1}$$

II.2.1.1. Système à un (1) d.d.l

Le système le plus simple à analyser est le système à un degré de liberté (1 d.d.l) c'est-à-dire un système dont l'état est défini par un seul paramètre [3].

A) Système en translation

L'ensemble masse-ressort-amortisseur de la figure II.2 est en translation selon un axe horizontal et soumis à une force extérieure $F_{ext}(t)$. Le déplacement de la masse est mesuré par coordonnée $X(t)$, dont l'origine correspond à la position de repos du ressort.

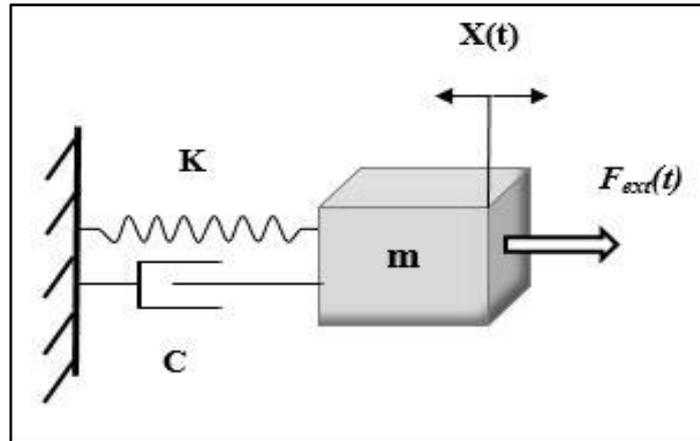


Figure II.2 : Système masse-ressort (-amortisseur) à 1 d.d.l

Les forces s'exerçant sur la masse (m) sont :

- La force d'inertie F_i : $m \ddot{x}(t)$,
- La force de rappel du ressort F_s : $-k x(t)$,
- La force résistante de l'amortisseur F_d : $-c \dot{x}(t)$,
- La force extérieure $F_{ext}(t)$: $f(t)$.

En appliquant l'équation (II.1) On obtient donc les équations de mouvement suivantes :

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = f(t) \quad (\text{Système conservatif}) \quad \text{II.2}$$

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) \quad (\text{Système dissipatif}) \quad \text{II.3}$$

Pour un système libre les équations du mouvement sont des équations différentielles sans second membre $f(t) = 0$.

B) Système en Rotation

Pour un système disque-ressort-amortisseur soumis à un couple $C(t)$ en rotation autour d'un axe (Ox), et le déplacement du disque est mesuré par le coordonnée angulaire $\theta(t)$ (Figure II.2).

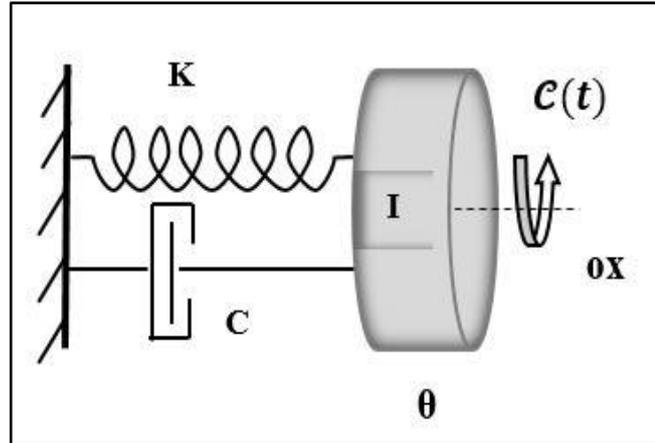


Figure II.2 : Système disque-ressort-amortisseur à 1 d.d.l

Les couples s'exerçant sur le disque de moment d'inertie (I) sont :

- Le couple du ressort : $-k \theta(t)$,
- le couple de l'amortisseur : $-c \dot{\theta}(t)$,
- Le couple extérieur $C(t)$.

En appliquant le théorème du moment dynamique :

$$I_{\text{ox}} \ddot{\theta}(t) = -k\theta - c\dot{\theta} + C(t) \quad \text{II.4}$$

De l'équation (II.4) on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$I_{\text{ox}} \ddot{\theta}(t) + k\theta = C(t) \quad (\text{Système conservatif}) \quad \text{II.5}$$

$$I_{\text{ox}} \ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta} + k\theta = C(t) \quad (\text{Système dissipatif}) \quad \text{II.6}$$

Pour un système libre les équations du mouvement sont des équations différentielles sans second membre $C(t) = 0$.

II.2.1.2. Système à N d.d.l

Le comportement d'un système à n d.d.l. est défini par n variables de position, avec leurs n dérivées premières. Le problème est donc d'ordre n, et entraîne la résolution d'un système de n équations différentielles du second ordre.

A) Système en translation

On choisit un oscillateur formé de trois masses m_1 , m_2 , m_3 , en translation selon la même direction, recevant des forces extérieures $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$. Pour cet exemple (figure II.4) on a choisi un système à 3 d.d.l libre aux deux extrémités, cependant il est possible de rencontrer des systèmes à n d.d.l libre d'un côté et encastré de l'autre ou encastré des deux côtés. Les déplacements $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ des trois masses constituent 3 coordonnées indépendantes qui caractérisent le mouvement de chaque masse.

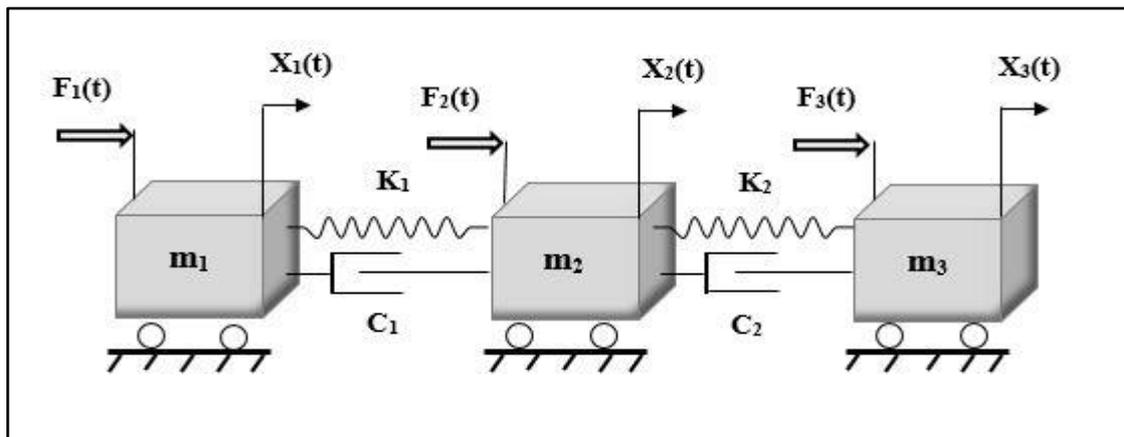


Figure II.4 : Système masse-ressort (-amortisseur) à 3 d.d.l libre-libre

Conformément à la démarche déjà adoptée pour les oscillateurs à 1 DDL :

- On mesure les déplacements $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ par rapport à la position d'équilibre statique ;
- On ne prend en compte que la partie variable des efforts ;
- On applique les théorèmes généraux de la dynamique à chaque masse indépendante.

En isolant successivement chaque masse et en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique.

On obtient :

On écrira ce système d'équation aussi sous une forme plus condensée :

$$\mathbf{M} \{\ddot{\mathbf{x}}\}(\mathbf{t}) + \mathbf{C} \{\dot{\mathbf{x}}\}(\mathbf{t}) + \mathbf{K} \{\mathbf{x}\}(\mathbf{t}) = \{\mathbf{f}\}(\mathbf{t}) \quad \text{II.10}$$

$$\text{Avec : } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & -\mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 & (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) & -\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \text{ et } \{\mathbf{f}\}(\mathbf{t}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{t}) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{t}) \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{t}) \end{Bmatrix}$$

Avec :

M : Matrice de masse, elle est symétrique et diagonale,

C : Matrice d'amortissement visqueux,

K : Matrice de raideur ou de rigidité.

Les matrices **C** et **K** sont des matrices symétriques non diagonales. Les termes hors diagonale réalisent le couplage entre les mouvements des 2 solides.

En généralisant l'équation **II.9** pour un nombre de d.d.l supérieur à 3, l'équation **II.11**, ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{m}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \\ \ddot{\mathbf{x}}_3 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{x}}_n \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & -\mathbf{c}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 & (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) & -\mathbf{c}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 & (\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3) & -\mathbf{c}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_3 & \ddots & -\mathbf{c}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{c}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) & -\mathbf{k}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_3 & \ddots & -\mathbf{k}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_{n-1} & \mathbf{k}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} \quad \text{II.11}$$

B) Système en Rotation

Le système de la figure II.5 est formé de trois disques d'inerties I_1, I_2, I_3 , en rotation selon la même direction, recevant des couples extérieurs $\mathcal{C}_1(t), \mathcal{C}_2(t)$ et $\mathcal{C}_3(t)$. Pour les systèmes en rotation il est possible aussi de rencontrer des systèmes à n d.d.l soit libre d'un côté et encastré de l'autre ou encastré des deux côtés. Les déplacements angulaires $\theta_1(t), \theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$ des trois disques constituent 3 coordonnées indépendantes qui caractérisent le mouvement de chaque disque :

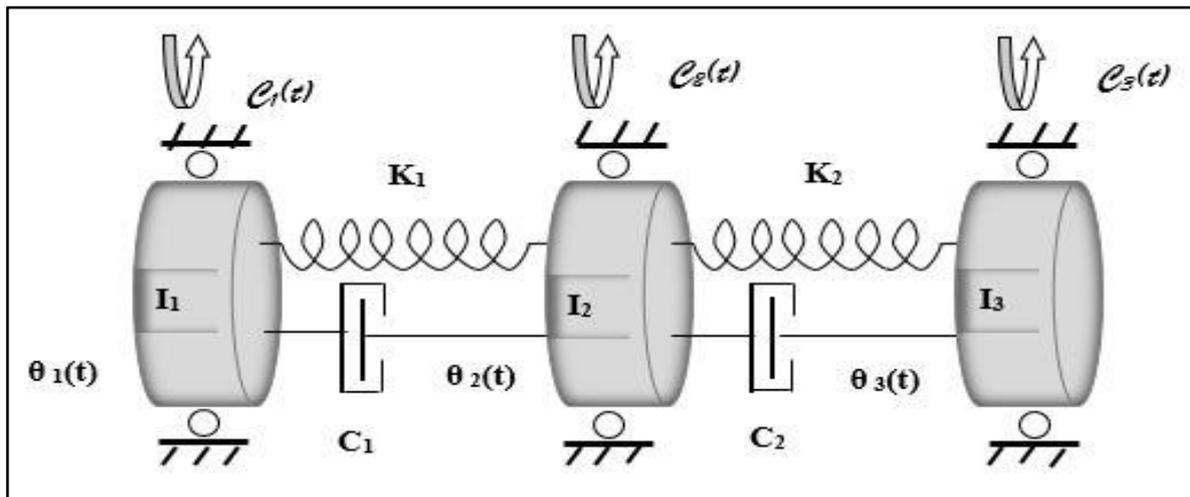


Figure II.4 : Système disque-ressort (-amortisseur) à 3 d.d.l libre-libre.

En appliquant le théorème du moment dynamique sur chaque disque du système on obtient le même type de système d'équations que pour le cas d'un mouvement en translation.

Le système d'équations sous forme matricielle qui en découle est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & -\mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 & (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) & -\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \\ \mathcal{C}_3(t) \end{Bmatrix} \quad \text{II.12}$$

L'équation II.12 condensée nous conduit à :

$$\mathbf{I} \ddot{\theta}(t) + \mathbf{C} \dot{\theta}(t) + \mathbf{K} \theta(t) = \mathcal{C}(t) \quad \text{II.13}$$

$$\text{Avec : } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & -\mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 & (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) & -\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{C}(t) = \begin{Bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \\ \mathcal{C}_3(t) \end{Bmatrix}$$

Avec \mathbf{I} : Matrice d'inertie. C'est une matrice carrée d'ordre n, diagonale et symétrique.

$\mathcal{C}(t)$: Vecteur des couples extérieurs.

II.2.2. Les équations de Lagrange

II.2.2.1. L'approche énergétique avec la loi de conservation de l'énergie

Un système mécanique échange de l'énergie avec le milieu extérieur en recevant un travail W des forces extérieures, et en dissipant une énergie Q , généralement sous forme de chaleur. Son

énergie mécanique interne se répartit entre une énergie cinétique T (due à l'inertie des masses en mouvement), et une énergie potentielle V (due en particulier aux déformations élastiques).^[2]

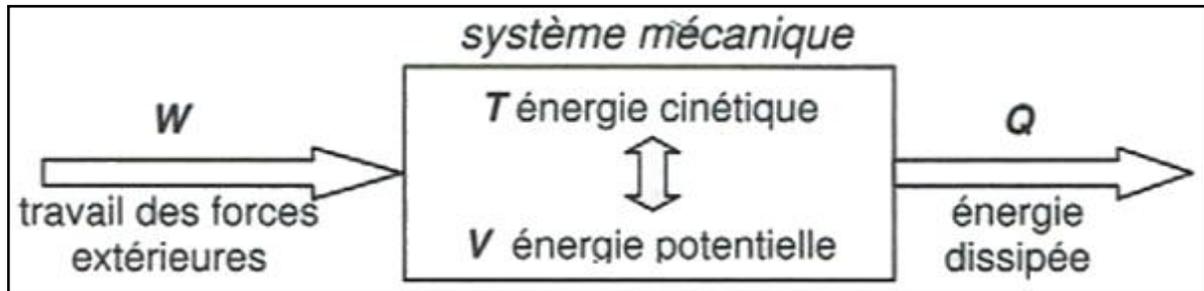


Figure II.6 : Conservation de l'énergie

On note avec un signe positif l'énergie motrice (entrant dans le système), et avec un signe négatif l'énergie réceptrice (sortante).

La loi de conservation de l'énergie de ce système s'écrit :

$$\mathbf{T} + \mathbf{V} = \mathbf{Q} + \mathbf{W} = \mathbf{E} \quad \text{II.14}$$

Ce système constitue un oscillateur si son état évolue de façon périodique ou quasi-périodique, par échanges entre énergie cinétique et énergie potentielle. Les vibrations de l'oscillateur résultent l'un équilibre dynamique entre les forces d'inertie et les forces élastiques de rappel. Les forces extérieures et la dissipation d'énergie, quand elles existent, font modifier l'équilibre du système au cours du temps.^[2]

II.2.2.2. Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange, qui font parties de la mécanique analytique est un outil qui couvre le même champ d'application que le principe fondamental de la dynamique qui est l'un des théorèmes généraux. Mais contrairement au principe fondamental de la dynamique dont la formulation est dans le domaine vectoriel, celle des équations de Lagrange est effectué dans le domaine scalaire. Par ailleurs, la mise en équations se fait de manière automatique alors que, par les théorèmes généraux, il faut sélectionner à la fois les systèmes auxquels on les applique et les théorèmes les mieux adaptés pour éviter une série d'équations inutiles. Avec Lagrange le système considéré est toujours le système global et propose d'obtenir une formulation globale et unique pour tous les problèmes de mécanique.

En s'appuyant sur la loi de conservation d'énergie (l'équation **II.14**), Lagrange propose pour un système en mouvement dont le mouvement est paramétré par n degrés de liberté généralisés (i.e. indépendants) notés q_i , les n équations suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta q_i} = Q_i \quad \text{II.15}$$

Où

$$\begin{cases} \mathbf{L} & \text{est le Lagrangien du système, } \mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V} \\ \mathbf{T} & \text{l'énergie cinétique du système mécanique} \\ \mathbf{V} & \text{l'énergie potentielle (de déformation)} \\ \mathbf{R} & \text{la fonction de dissipation (fonction de Rayleigh)} \\ \frac{\partial \delta W}{\partial \delta q_i} = \mathbf{Q}_i & \text{les forces extérieures généralisées} \end{cases}$$

Les forces extérieures généralisées Q_i sont calculées en dérivant le travail virtuel δW développé par l'ensemble des efforts extérieurs, par rapport au déplacement virtuel δq_i de la coordonnée q_i .

Ainsi :

➤ **L'Énergie cinétique** : $\mathbf{T} = \int_{\text{repos}}^x -\mathbf{f}_{\text{inertie}} \, du$ II.16

- Pour des solides en translation : $\mathbf{T} = \sum \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ II.17

- Pour des solides en rotation : $\mathbf{T} = \sum \frac{1}{2} I_{\text{ox}} \dot{\theta}^2$ II.18

➤ **Energie potentielle** : $\mathbf{v} = \int_{-\infty}^x -\mathbf{f}_{\text{pot}} \, u \, du$ II.19

- Pour des ressorts linéaires en translation : $\mathbf{v} = \sum \frac{1}{2} k x^2 + \text{Cte}$ II.20

- Pour des ressorts linéaires en rotation : $\mathbf{v} = \sum \frac{1}{2} k \theta^2 + \text{Cte}$ II.21

- Pour une masse soumise à la pesanteur : $\mathbf{V} = mgh + \text{Cte}$ II.22

$h = \text{Altitude [mm]}$

Les forces de pesanteur ne sont à prendre en compte que si elles génèrent une force de rappel non constante dans un pendule par exemple.

➤ **Fonction de dissipation** : $\mathbf{R} = \int_{\text{repos}}^x -\mathbf{f}_{\text{rés}} \, du$ II.23

$$- \text{ Pour des amortisseurs visqueux en translation : } \mathbf{R} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{c} \dot{\mathbf{x}}^2 \quad \text{II.24}$$

$$- \text{ Pour des amortisseurs visqueux en rotation } \mathbf{R} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{c} \dot{\boldsymbol{\theta}}^2: \quad \text{II.25}$$

➤ *Travail virtuel des efforts extérieurs*

$$- \text{ Pour des forces extérieures : } \delta W = \sum \mathbf{f}_{\text{rés}} \delta \mathbf{x} \quad \text{II.26}$$

$$- \text{ Pour des couples extérieurs : } \delta W = \sum \mathbf{C}_{\text{ext}} \delta \boldsymbol{\theta} \quad \text{II.27}$$

A) Système à un (1) d.d.l

Pour le même ensemble disque-ressort-amortisseur de la figure II.3 soumis à un couple $\mathcal{C}(t)$ en rotation autour d'un axe (Ox), le déplacement du disque est mesuré par la coordonnée angulaire θ (t) et en appliquant les équations de Lagrange (équation II.15), alors :

- *L'énergie cinétique totale :*

$$\mathbf{T} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{I}_{\text{ox}} \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 \quad \text{II.28}$$

- *L'énergie potentielle de totale est :*

$$\mathbf{V} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta} \quad \text{II.29}$$

➤ Si le système est *conservatif libre* avec l'utilisation des équations de Lagrange II.15 l'équation du mouvement est :

$$\mathbf{I}_{\text{ox}} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{k}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{II.30}$$

- *La fonction de dissipation totale est :*

$$\mathbf{R} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{c} \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{c} \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 \quad \text{II.31}$$

➤ Ainsi si le système est *non conservatif libre* avec l'utilisation des équations de Lagrange II.15, l'équation du mouvement est :

$$\mathbf{I}_{\text{ox}} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{c}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{k}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \text{II.32}$$

- *Le travail virtuel des forces extérieures est :*

$$\delta W = \sum \mathbf{C}_{\text{ext}} \delta \mathbf{x} = \mathbf{C} \delta \mathbf{x} \quad \text{II.33}$$

D'où l'équation du mouvement du système avec l'application des équations de Lagrange II.15 est :

$$\mathbf{I}_{\text{ox}} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{c} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{k} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{C} \quad \text{II.34}$$

B) Système à n d.d.l

La détermination des équations du mouvement du système à 3 d.d.l de la figure II.5 en utilisant les équations de Lagrange s'effectue comme suit :

- *Calcul de l'énergie cinétique totale :*

$$\mathbf{T} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{I}_{\text{ox}} \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{I}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_2^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_3 \dot{\boldsymbol{\theta}}_3^2 \quad \text{II.35}$$

- *Calcul de l'énergie potentielle totale :*

$$\mathbf{V} = \sum \frac{1}{2} \mathbf{k} \boldsymbol{\theta}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{k}_1 (\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{k}_2 (\boldsymbol{\theta}_3 - \boldsymbol{\theta}_2)^2 \quad \text{II.36}$$

➤ Si le système est *conservatif libre* et en utilisant les équations de Lagrange II.15, les équations du mouvement auront la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta}_1 - \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta}_2 = 0 \\ \mathbf{I}_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta}_1 + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \boldsymbol{\theta}_2 - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\theta}_3 = 0 \\ \mathbf{I}_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 + \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\theta}_3 - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\theta}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{II.37}$$

L'équation (II.37) sous forme matricielle condensé nous conduit à :

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{0} \quad \text{II.38}$$

$$\text{Avec : } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

- *Détermination de la fonction de dissipation totale :*

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \mathbf{c}_1 (\dot{\boldsymbol{\theta}}_2 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_1)^2 + \frac{1}{2} \mathbf{k}_2 (\dot{\boldsymbol{\theta}}_3 - \dot{\boldsymbol{\theta}}_2)^2 \quad \text{II.39}$$

➤ Si le système est *non conservatif libre* et avec l'utilisation de l'équation II.15, les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 + \mathbf{c}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 - \mathbf{c}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta}_1 - \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta}_2 = 0 \\ \mathbf{I}_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{c}_1 \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 + (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 - \mathbf{c}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 - \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\theta}_1 + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \boldsymbol{\theta}_2 - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\theta}_3 = 0 \\ \mathbf{I}_3 \ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 + \mathbf{c}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 - \mathbf{c}_2 \dot{\boldsymbol{\theta}}_2 + \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\theta}_3 - \mathbf{k}_2 \boldsymbol{\theta}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{II.40}$$

L'équation (II.40) sous forme matricielle condensée nous conduit à :

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{0} \quad \text{II.41}$$

$$\text{Avec : } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & -\mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 & (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) & -\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}.$$

- Enfin, le travail virtuel des forces extérieures est déterminé de la manière suivante :

$$\delta W = \sum \mathcal{C}_{ext} \delta x = \mathcal{C}_1 \delta x + \mathcal{C}_2 \delta x + \mathcal{C}_3 \delta x \quad \text{II.42}$$

D'où les équations du mouvement du système de la figure II.5 en appliquant les équations de Lagrange (II.15) sont :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 \ddot{\theta}_1 + \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 - \mathbf{c}_2 \dot{\theta}_2 + \mathbf{k}_1 \theta_1 - \mathbf{k}_1 \theta_2 = \mathcal{C}_1(t) \\ \mathbf{I}_2 \ddot{\theta}_2 - \mathbf{c}_1 \dot{\theta}_1 + (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) \dot{\theta}_2 - \mathbf{c}_2 \dot{\theta}_3 - \mathbf{k}_1 \theta_1 + (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \theta_2 - \mathbf{k}_2 \theta_3 = \mathcal{C}_2(t) \\ \mathbf{I}_3 \ddot{\theta}_3 + \mathbf{c}_2 \dot{\theta}_3 - \mathbf{c}_2 \dot{\theta}_2 + \mathbf{k}_2 \theta_3 - \mathbf{k}_2 \theta_2 = \mathcal{C}_3(t) \end{cases} \quad \text{II.43}$$

Ces équations sont identiques à celles obtenues précédemment en appliquant à chaque disque le principe fondamental de la dynamique.

L'équation (II.43) sous forme matricielle condensé nous conduit à :

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) + \mathbf{K} \boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{C}(t) \quad \text{II.44}$$

$$\text{Avec : } \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & -\mathbf{c}_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}_1 & (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) & -\mathbf{c}_2 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{C}(t) = \begin{Bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \\ \mathcal{C}_3(t) \end{Bmatrix}$$

Les équations du mouvement sont formulées par le principe d'équilibre dynamique (principe de d'Alembert) des forces élastiques, d'inertie et d'amortissement d'une part, et des forces dues aux sollicitations extérieures agissantes d'autre part, qui nécessitent une vérification pas à pas de leur mise en équation. Une formulation de ces équations remarquablement simple et systématique est obtenue par les équations de Lagrange.

D'autres méthodes sont utilisées pour la formulation des équations du mouvement, comme le principe des travaux et principe de Hamilton.

II.3. Les méthodes de calcul des pulsations propres et des déformées modales

II.3.1. L'analyse modale

L'analyse modale est un outil élémentaire permettant l'étude et le contrôle de la stabilité d'une structure en dynamique, dans le domaine de l'aviation, du génie mécanique, du génie civil, de l'aéronautique, de l'automobile etc. Cette analyse consiste à déterminer les paramètres vibratoires modaux d'une structure : les fréquences propres, les coefficients d'amortissement et les déformées modales, qui ne peut être obtenu autrement que par expérimentation à partir des mesures effectuées sur la structure en fonctionnement naturel ou en excitation artificielle (sinusoïdale, impact ou aléatoire).^[5]

C'est l'une des raisons pour laquelle l'analyse modale expérimentale est devenue grâce aux progrès de l'informatique et de l'instrumentation, une méthode privilégiée d'investigation dans le domaine de la dynamique des structures. Les méthodes d'analyse modale se divisent en deux grandes familles : les méthodes opérant dans le domaine temporel et celles opérant dans le domaine fréquentiel, ce dernier est le domaine dans lequel nous réaliserons nos études dynamiques sur les lignes d'arbres non ramifiées.

La recherche des paramètres vibratoires pulsations propres et déformées modales qui définit le comportement dynamique d'un système par l'analyse modale s'effectue en suivant ces étapes :

1. Etablir les équations du mouvement (à partir les équations de Lagrange),
2. La détermination de la matrice d'inertie ou de masse $[I]$, la matrice de rigidité $[K]$, et d'amortissement $[C]$ (pour un système dissipatif),
3. Calcul des pulsation propres $W_i^2 = ?$ en posant $|[K] - W^2 [M]| = 0$,

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{K}]$: matrice de rigidité. C'est une matrice symétrique tri-diagonale.

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & -\mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{k}_1 & (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) & -\mathbf{k}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{k}_2 & (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) & -\mathbf{k}_3 & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & (\mathbf{k}_{n-2} + \mathbf{k}_{n-1}) & -\mathbf{k}_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{k}_{n-1} & \mathbf{k}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } (\ddot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_n \end{pmatrix}, (\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_n \end{pmatrix}.$$

2) Établir la matrice $[\mathbf{C}]$

Les déplacements étant proportionnels aux efforts, la solution de cette équation matricielle est de la forme :

$$(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{A}) \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{II.47}$$

$$\text{Avec } (\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

En effet, pour un mode donné tous les disques vibrent en phase et à la même pulsation. En reportant cette solution dans l'équation matricielle, nous obtenons par simplification les valeurs de w^2 par :

$$[1] \mathbf{w}^2 = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] \quad \text{II.48}$$

[1] désigne la matrice unité

En posant : $[\mathbf{C}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$

La matrice [C] est une matrice tri-diagonale et les valeurs propres de ω^2 cherchées sont les valeurs propres de la matrice [C].

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{I_1} & \frac{-k_1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{I_1} & \frac{(k_1 + k_2)}{I_2} & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \frac{(k_2 + k_3)}{I_3} & -k_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{(k_{n-2} + k_{n-1})}{I_{n-1}} & \frac{-k_{n-1}}{I_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k_{n-1}}{I_n} & \frac{k_{n-1}}{I_n} \end{bmatrix}$$

Il existe selon la nature de la matrice [C] plusieurs méthodes pour en rechercher les valeurs propres. Le choix de la méthode de Rutishauser parmi toutes les méthodes s'avère la plus appropriée, car elle présente l'avantage d'être précise et rapidement convergente lorsque les valeurs propres sont éloignées.

3) Former la matrice $[C^0]$ à partir de la matrice [C]

Pour les matrices tri-diagonale leurs termes symétriques par rapport à la diagonale peuvent se voir modifier à condition que leur produit reste le même (constant). Par conséquent la matrice $[C^0]$ définie ci-après a donc les même valeurs propres (w^2) que [C] mais pas les mêmes vecteurs propres qui sont les déformées modales.

$$[C^0] = \begin{bmatrix} c_1^0 & \alpha_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_2^0 & \alpha_3^0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & c_{n-1}^0 & \alpha_n^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_n^0 \end{bmatrix}$$

On remarque que la matrice $[C^0]$ obtenue est une matrice tri-diagonale possédant des 1 sous la diagonale principale.

4) Décomposer la matrice $[C^0]$ en un produit de deux matrices $[R]$ x $[S]$ et déterminer leurs éléments

Gauss a démontré qu'il est possible de décomposer une matrice quasi-triagonale (tri-diagonale) en un produit $[R] \times [S]$ d'une façon unique, si l'une des matrices $[R]$ ou $[S]$ possède des 1 sur sa diagonale principale.

$$[C^0] = \begin{bmatrix} c_1^0 & \alpha_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c_2^0 & \alpha_3^0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & c_{n-1}^0 & \alpha_n^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c_n^0 \end{bmatrix} = \left[[R] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_n \end{bmatrix} \times [S] = \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

Où : $[R]$ une matrice triangulaire inférieure et $[S]$ une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur sa diagonale principale.

Les éléments b_i et β_i des matrices $[R]$ et $[S]$ sont donc obtenus à partir des éléments c_i^0 et α_i^0 de la matrice $[C^0]$ par les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = c_1^0 \rightarrow \beta_2 = \frac{\alpha_2^0}{b_1} \\ b_2 = c_2^0 + \beta_2 \rightarrow \beta_3 = \frac{\alpha_3^0}{b_2} \\ \dots \\ b_n = c_n^0 + \beta_n \rightarrow \beta_n = \frac{\alpha_{n+1}^0}{b_n} \end{array} \right\} \quad \text{II.49}$$

Sous la même condition de Gauss, on peut construire la suite matricielle suivante :

Une fois la matrice [C] obtenue, on la transpose dans la matrice [C⁰] (les matrices ont la même forme)

6) Détermination des valeurs propres (ω^2)

On examine les termes situés au-dessus de la diagonale principale de la matrice [C⁰] ou bien la variation relative des termes de la diagonale principale des deux matrices. Deux cas peuvent se présenter :

- les α_i sont pratiquement nuls (ou la variation relative des termes de la diagonale principale est négligeable), alors les c_i^0 qui apparaissent dans l'ordre décroissant à partir du haut sur la diagonale principale de la matrice de départ [C⁰] sont les valeurs propres (ω^2) et les pulsations propres sont déduites en calculant la racine carrée des valeurs propres.
- les α_i sont différents de zéro (ou la variation relative des termes de la diagonale principale est importante), alors on recommence le même processus de décomposition de la matrice [C] jusqu'à ce que le premier cas soit satisfait.

7) Détermination des déformées modales

Les valeurs propres de la matrice aux pulsations étant connues, il est possible de déterminer les vecteurs propres correspondants. Ces derniers caractérisent les déformées modales (ou les amplitudes relatives des disques) des divers modes de vibration.

La matrice utilisée, pour le calcul des composantes des vecteurs propres est la matrice de départ issue de l'équation II.48.

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{I_1} & \frac{-k_1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{I_1} & \frac{(k_1 + k_2)}{I_2} & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & \frac{(k_2 + k_3)}{I_3} & -k_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{(k_{n-2} + k_{n-1})}{I_{n-1}} & \frac{-k_{n-1}}{I_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-k_{n-1}}{I_n} & \frac{k_{n-1}}{I_n} \end{bmatrix}$$

Les composantes des vecteurs propres étant définies à un coefficient près, il est donc nécessaire de se fixer une composante, par exemple l'amplitude du disque n^0 sera prise égale à 1 rad.

Les composantes des vecteurs propres sont obtenues à partir l'équation :

$$[[\mathbf{C}] - \omega_i^2 [\mathbf{1}]] (\mathbf{X}_i) = (\mathbf{0}) \quad \text{II.52}$$

Avec : ω_i pulsation propre n^0 ,
 [1] matrice unité,

(\mathbf{X}_i) matrice colonne des composantes $x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}$ du vecteur propre associé à la valeur propre ω_i^2 (c'est les composantes j du mode propre i ou encore c'est les amplitudes relatives des j disques au mode numéro i)

(0) matrice colonne composée d'éléments tous nuls.^[4]

Nous obtenons ainsi les n relations suivantes :

$$\text{(Relation 1)} \quad \left(\frac{k_1}{I_1} - \omega_i^2 \right) x_{1,i} - \frac{k_1}{I_1} x_{2,i} = 0 \quad \text{II.53}$$

$$\text{(La } j^{\text{ième}} \text{ relation)} \quad -\frac{k_{j-1}}{I_j} x_{j-1,i} + \left(\frac{k_j + k_{j-1}}{I_j} - \omega_i^2 \right) x_{j,i} - \frac{k_j}{I_j} x_{j+1,i} = 0 \quad \forall j \in [2, n-1] \quad \text{II.54}$$

$$\text{(La } n^{\text{ième}} \text{ relation)} \quad -\frac{k_{n-1}}{I_n} x_{n-1,i} + \left(\frac{k_{n-1}}{I_n} - \omega_i^2 \right) x_{n,i} = 0 \quad \text{II.55}$$

En posant les $x_{1,i} = 1$ rad, nous obtenons :

$$x_{2,i} = \frac{1}{k_1} (\mathbf{k}_1 - I_1 \omega_i^2) \cdot \mathbf{1} \quad \text{II.56}$$

$$x_{j+1,i} = -\frac{1}{k_j} [(\mathbf{x}_{j,i} - \mathbf{x}_{j-1,i}) \mathbf{k}_{j-1} + (\mathbf{k}_j - I_j \omega_i^2) \mathbf{x}_{j,i}] \quad \forall j \in [2, n-1] \quad \text{II.57}$$

La $n^{\text{ième}}$ relation inutilisée est automatiquement vérifiée. Elle permet de contrôler la précision des calculs numériques.

Des exemples d'applications de ces deux méthodes de recherche des pulsations propres et des déformées modales sur les lignes d'arbre non ramifiées seront proposés dans la dernière partie de ce manuscrit (chapitre III).