

**Chapitre III**  
**Analyse statique des plaques en**  
**matériaux composites avancés "FGM"**

## *Chapitre III*

# *Analyse statique des plaques en matériaux composites avancés "FGM"*

### **III.1. Introduction**

**L**e concept des matériaux composites avancés dites à gradient de propriétés (FGM) caractérisé par une propriété sans interruption changeante due à un changement continu de la composition, dans la morphologie et effectivement dans la structure cristalline, représente un saut technologique rapide à travers les différents domaines d'application potentiels, des recherches ont été établis afin de préparer des matériaux de barrière thermique performants à longue durée de vie. Leur but principal est pour l'usage d'améliorer la résistance à l'usure ou à l'oxydation, avoir un matériau blindé léger avec une haute efficacité balistique et peut résister au milieu à haute température. Du fait de l'importance de cette nouvelle classe de matériaux composites, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales des plaques type E-FGM. En effet, plusieurs auteurs ont proposés des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques en matériaux à gradient de propriétés.

L'objectif de notre étude est l'identification du comportement élastique de flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés type E-FGM simplement appuyées, en utilisant une simple théorie raffinée quasi-3D à cinq variables avec un champ de déplacement qui est exprimé en fonction d'une variation trigonométrique. Cette théorie tient en considération à la fois l'effet de la déformation en cisaillement transversal et l'effet d'étirement à travers l'épaisseur des plaques.

### **III.2. Configuration géométrique**

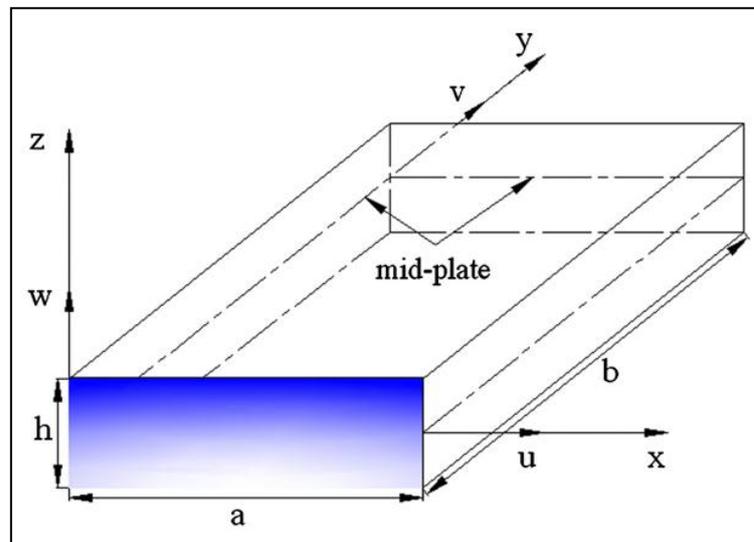
Une plaque rectangulaire de dimensions  $a$  et  $b$  avec une épaisseur uniforme  $h$  constituée d'un matériau à gradient de propriétés (E-FGM) est représentée sur la figure (III.1), dans laquelle le système de coordonnées cartésien rectangulaire  $(x, y, z)$  avec le plan  $z = 0$ , coïncidant avec la surface médiane de la plaque. Le matériau est inhomogène et ses propriétés varient de manière exponentielle dans la direction de l'épaisseur, comme indiqué dans la relation suivante :

$$P(z) = V(z)P_b \quad (III.1)$$

Avec :

$$V(z) = e^{p\left(\frac{z+1}{h}\right)} \quad (III.2)$$

Où  $P_b$  représente la propriété de la surface inférieure de la plaque E-FGM et  $p$  est le paramètre qui définit le profil de variation du matériau le long de l'épaisseur et prend des valeurs supérieures à zéro. Les propriétés matérielles effectives de la plaque, y compris le module de Young  $E$ , le module de cisaillement  $G$ , varient selon l'équation (III.1), par contre le coefficient de Poisson  $\nu$  est supposé être constant.



**Figure III.1 :** Géométrie d'une plaque E-FGM de forme rectangulaire.

### III.3. Champ de déplacement

Une nouvelle théorie de déformation en cisaillement trigonométrique a été développée récemment par Mantari et al [40] pour analyser les plaques isotropes, composites stratifiées et les plaques sandwichs. Les fonctions sinusoïdales sont avantageuses par rapport aux fonctions polynomiales, car elles sont simples à utiliser et précises et peuvent être assurées les conditions aux limites en contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. La présente étude étend cette théorie aux plaques E-FGM, y compris l'étirement de l'épaisseur (théorie quasi-3D). Le champ de déplacement de la théorie quasi-3D trigonométrique en un point quelconque de coordonnées  $(x, y, z)$  dans la plaque est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z) \varphi_z(x, y)
\end{aligned} \tag{III.3}$$

Où  $u_0, v_0, w_0, w_b, w_s$  et  $\varphi_z$  sont les six fonctions de déplacement inconnues du plan médian de la plaque ; le déplacement transversal ( $w$ ) est composé alors de trois composantes, à savoir : de flexion, de cisaillement et de l'étirement, cependant la fonction de cisaillement et leur dérivée est données par :

$$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{III.4a}$$

$$g(z) = 1 - f'(z) = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \tag{III.4b}$$

#### III.4. Champ de déformation

Le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (III.3) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{III.5}$$

Dans le calcul ces équations, on suppose des petites déformations (c'est-à-dire que les déplacements et les rotations sont faibles et respectent la loi de Hooke). Les expressions de déformation linéaires dérivées du modèle de déplacement des équations (III.3), valables pour les plaques minces, moyennement épaisses et épaisses considérées. En remplaçons (III.5) dans (III.3), nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
\varepsilon_z &= g'(z) \varphi_z \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\
\gamma_{yz} &= g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right) \\
\gamma_{xz} &= g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{III.6}$$

La relation linéaire déformation-déplacement peut être réécrite aussi sous la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + z \varepsilon^{(1)} + f(z) \varepsilon^{(2)} \tag{III.7}$$

Avec :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(1)} = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(2)} = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy}^{(2)} = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{III.8a}$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 = g'(z) \varphi_z \tag{III.8b}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = 1 - \frac{df(z)}{dz} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{III.8c}$$

### III.5. Equations constitutives

Considérons des plaques E-FGM sont fabriquées à partir d'un mélange de deux phases matérielles, par exemple, un métal et une céramique comme le montre la figure (III.1) ci-dessus. Ainsi en se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque E-FGM peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre ces

dernières et les déformations, le champ des contraintes peut être exprimé dans ce cas par la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. Les coefficients de rigidité tridimensionnels (3D)  $Q_{ij}$  sont exprimés en fonction des constantes d'ingénieur par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} &= \frac{(1-\nu)E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \\ Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} &= \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

### III.6. Les équations de mouvement

Afin d'établir de façon systématique l'ensemble des équations de mouvement ainsi que les conditions au limites de la présente théorie quasi-3D, le principe des travaux virtuels est appliquée, celui-ci indique que pour tout champ de contrainte en équilibre avec les efforts extérieurs, la somme des efforts internes et externes est nulle pour tout champ virtuel. Le principe des travaux virtuels dans le cas présent peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (\text{III.11})$$

Où  $\delta U$  représente la variation de l'énergie de déformation et  $\delta V$  est la variation de l'énergie potentielle due au chargement extérieur.

La variation de l'énergie de déformation  $\delta U$ , peut être exprimée en fonction des contraintes et des déformations comme :

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{III.12})$$

Soit :

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \quad (\text{III.13})$$

Et l'énergie potentielle :

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA \quad (\text{III.14})$$

Où  $A$  est notée par la surface supérieure de la plaque. Le principe des travaux virtuels peut être réécrit sous une forme :

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA - \int_A q \delta w dA = 0 \quad (\text{III.15})$$

En remplaçant les déformations virtuelles par leurs expressions définies par les équations (III.8) dans l'équation (III.15), ensuite en introduisant les efforts globaux, on obtient la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \int_A \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - P_x \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - P_y \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} + R_z \delta \varphi_z \right. \\ & + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) - 2 M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2 P_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_x \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_z}{\partial x} \right) \\ & \left. + Q_y \left( \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_z}{\partial y} \right) - q \delta (w_b + w_s + g(z) \varphi_z) \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Où  $N$ ,  $M$ ,  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont les résultantes des contraintes par unité de longueur de la plaque définies par :

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\ (P_x, P_y, P_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) f(z) dz \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) g(z) dz \\ R_z &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Et en faisant l'intégration par partie de l'équation (III.16), et ensuite on fait la collection des coefficients  $u_0, v_0, w_0, w_b, w_s, \varphi_z$ , on obtient :

$$\int_A \left[ \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 + \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v_0 - \left( \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q \right) \delta w_b \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) \delta w_s + \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - R_z + g(z)q \right) \delta \varphi_z \right] dA = 0 \quad (III.18)$$

L'équation (III.18) devra être vérifiée quel que soit les déplacements virtuels  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_b, \delta w_s$  et  $\delta \varphi_z$  cinématiquement admissible, on en déduit les équations différentielles d'équilibre du mouvement de la plaque E-FGM associées à la présente théorie de déformation en cisaillement quasi-3D comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\ \delta \varphi_z : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - R_z &= 0 \end{aligned} \quad (III.19)$$

### III.7. Détermination des coefficients de rigidité

En substituant les formulations des déformations-déplacements de l'équation (III.8) et les relations des contraintes-déformations de l'équation (III.9) dans l'équation (III.17), on obtient les expressions qui représentent des résultantes en membrane  $N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^{Tr}$ , en flexion pure  $M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^{Tr}$ , en flexion supplémentaire dû au cisaillement  $P = \{P_x, P_y, P_{xy}\}^{Tr}$ , et en cisaillement pur  $Q = \{Q_x, Q_y\}^{Tr}$  et  $R = \{R_z\}^{Tr}$  :

$$\begin{aligned}
N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - E_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - E_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \varphi_z B_{s_{13}} \\
N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - E_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - E_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \varphi_z B_{s_{23}} \\
N_{xy} &= A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) - E_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
M_x &= B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - F_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - F_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + F_{s_{13}} \varphi_z \\
M_y &= B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - F_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - F_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + F_{s_{23}} \varphi_z \\
M_{xy} &= B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) - F_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
P_x &= E_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{11} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + E_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - F_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H_{s_{13}} \varphi_z \\
P_y &= E_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + E_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - F_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + H_{s_{23}} \varphi_z \\
P_{xy} &= E_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - F_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) - H_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \\
Q_x &= A_{s_{55}} \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\
Q_y &= A_{s_{44}} \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\
R_z &= B_{s_{13}} \frac{\partial u_0}{\partial x} - F_{s_{13}} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - H_{s_{13}} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{s_{23}} \frac{\partial v_0}{\partial y} - F_{s_{23}} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - H_{s_{23}} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + E_{s_{33}} \varphi_z
\end{aligned} \tag{III.20}$$

Où  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , ...etc. représentent les coefficients de rigidité de la plaque, sont définis comme :

$$\left( A_{ij}, B_{ij}, E_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij} \right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left( 1, z, f(z), z^2, zf(z), f^2(z) \right) dz \tag{III.21}$$

$$\left( B_{s_{ij}}, F_{s_{ij}}, H_{s_{ij}}, E_{s_{ij}} \right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left( g'(z), zg'(z), f(z)g'(z), g'^2(z) \right) dz \tag{III.22}$$

$$A_{s_{44}} = A_{s_{55}} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [g(z)]^2 dz \tag{III.23}$$

Ainsi que les expressions des contraintes en fonction des déplacements sont obtenues, en reportant les relations (III.6) et (III.10) dans l'expression (III.9), on obtient :

$$\sigma_x = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[ \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + f(z) \left( \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial w_s}{\partial y^2} \right) + g'(z) \varphi_z \right], \quad (III.24)$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + g'(z) \varphi_z \right], \quad (III.25)$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E(z)}{(1-\nu)(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + f(z) \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{1}{\nu} - 1 \right) g'(z) \varphi_z \right], \quad (III.26)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right], \quad (III.27)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) \quad (III.28)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} g(z) \left( \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \right), \quad (III.29)$$

### III.8. Solution exacte pour une plaque E-FGM simplement appuyée

La recherche de solutions analytiques des problèmes des structures composites multicouches sous diverses conditions aux limites fait appel à la résolution d'équations aux dérivées partielles classiques et linéaires à coefficients constants.

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type d'appuis utilisé. Dans cette partie nous sommes concernés par la solution exacte des équations (III.19) pour une plaque en matériau composites avancés (E-FGM), simplement appuyée. Pour ce cas d'étude, les conditions aux limites pour la présente théorie d'ordre élevé quasi 3-D s'écrivent :

- Les conditions aux limites sur les bords  $x=0$  et  $x=a$  sont exprimées sous la forme suivante:

$$v_0 = w_b = w_s = N_x = M_x = P_x = 0 \quad (\text{III.30})$$

- Les conditions aux limites sur les bords  $y=0$  et  $y=b$  sont exprimées sous la forme suivante:

$$u_0 = w_b = w_s = N_y = M_y = P_y = 0 \quad (\text{III.31})$$

En utilisant la technique de Navier, on peut résoudre le problème du comportement statique des plaques en E-FGM. Elle peut être alors recherchée en écrivant les déplacements  $u_0, v_0, w_b, w_s$  et  $\varphi_z$  sous forme de doubles séries trigonométriques de Fourier, satisfaisant les conditions aux limites des équations (III.30) et (III.31), respectivement.

$$\begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_b(x, y) \\ w_s(x, y) \\ \varphi_z(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \cos \alpha x \sin \beta y \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{zmn} \sin \alpha x \cos \beta y \end{Bmatrix}, \quad (\text{III.32})$$

Où

$$\alpha = m \pi / a, \quad \beta = n \pi / b \quad (\text{III.33})$$

Où  $U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}$  et  $\Phi_{zmn}$  sont les composantes du vecteur déplacement inconnues. La charge transversale ( $q$ ) est également exprimée en fonction d'une double série de Fourier comme suit :

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{III.34})$$

On admet pour le cas d'une charge sinusoïdale que le coefficient  $Q_{mn} = q_0$

En remplaçant les équations (IV.20), (IV.32) et (IV.34) dans l'équation (IV.19), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de la relation suivante :

$$[K] \{\Delta\} = \{q\} \quad (\text{III.35})$$

Avec  $\{\Delta\}$  Est un vecteur déplacement donné par :

$$\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{s_{mn}}, \Phi_{zmn}\}^{Tr} \quad (\text{III.36})$$

$\{q\}$  Est un vecteur de charge donné par :

$$\{q\} = \{0, 0, Q_{mn}, Q_{mn}, 0\}^{Tr} \quad (\text{III.37})$$

$[K]$  Est une matrice des coefficients de rigidité donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

Où :

$$\begin{aligned} k_{11} &= -\alpha^2 A_{11} - \beta^2 A_{66} \\ k_{12} &= -\alpha\beta A_{12} - \alpha\beta A_{66} \\ k_{13} &= 2\alpha\beta^2 B_{66} + \alpha\beta^2 B_{12} + \alpha^3 B_{11} \\ k_{14} &= 2\alpha\beta^2 E_{66} + \alpha^3 E_{11} + \alpha\beta^2 E_{12} \\ k_{15} &= \alpha B s_{13} \\ k_{22} &= -\beta^2 A_{22} - \alpha^2 A_{66} \\ k_{23} &= 2\alpha^2 \beta B_{66} + \beta^3 B_{22} + \alpha^2 \beta B_{12} \\ k_{24} &= \alpha^2 \beta E_{12} + \alpha^2 \beta E_{66} + \beta^3 E_{22} \\ k_{25} &= \beta B s_{23} \\ k_{33} &= -2\alpha^2 \beta^2 D_{12} - \alpha^4 D_{11} - 4\alpha^2 \beta^2 D_{66} - \beta^4 D_{22} - \alpha^4 D_{11} \\ k_{34} &= -\alpha^4 F_{11} - 2\alpha^2 \beta^2 F_{12} - 4\alpha^2 \beta^2 F_{66} - \beta^4 F_{22} \\ k_{35} &= -\alpha^2 F s_{13} - \beta^2 F s_{23} \\ k_{44} &= -4\alpha^2 \beta^2 H_{66} - 2\alpha^2 \beta^2 H_{12} - A s_{44} \beta^2 - \beta^4 H_{22} - \alpha^4 H_{11} \\ k_{45} &= -A s_{55} \alpha^2 - A s_{44} \beta^2 - \alpha^2 H s_{13} - \beta^2 H s_{13} - \beta^2 H s_{23} \\ k_{55} &= -E s_{33} - A s_{55} \alpha^2 - A s_{44} \beta^2 \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

### **III.9. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement statique des plaques en matériaux composites avancés type E-FGM en utilisant une théorie de déformation de cisaillement trigonométrique quasi 3-D à cinq variables. Cette théorie tient en considération l'effet d'étirement de l'épaisseur (déformation normale suivant la direction  $z$  est différent à zéro), néanmoins elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description trigonométrique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque. Les équations de mouvements de la présente théorie sont déterminées en employant le principe des travaux virtuels et par suite les solutions exactes des plaques E-FGM simplement appuyées, ont été obtenues en utilisant la technique de Navier. Les études paramétriques présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en le comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.