

*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun de Tiaret*



*Faculté des Sciences Appliquées
Département de Génie Civil*

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master

*Spécialité : Génie Civil
Option : Génie de la construction*

Présenté par :

*Ghemmaz Karima
Fouirat Sabah*

Sujet du mémoire

*FLAMBEMENT DES PLAQUES (Relation entre les théories CPT et
FSDPT)*

Soutenu publiquement le 30/09/2015 devant le jury composé de :

*Mr Hadji.L
Mr Tlidji Y
Mr Hadj Henni.A
Mr Draich. K
M khelifa.Z*

*President
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur*

Promotion 2014/2015

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je remercie le bon Dieu qui m'a doté de la volonté, du courage et surtout de la patience pour produire ce modeste travail et qui m'a aidé à faire face à toutes les difficultés rencontrées lors de son élaboration.

Je voudrais exprimer mes plus profonds remerciements à mes parents pour leurs encouragements, leur patience et leur amour.

Mes très sincères remerciements à mon directeur de mémoire Mr. Youcef Tlidji de m'avoir encadré et dirigé attentivement mes travaux pendant ce travail.

Je tiens à remercier tous les membres du jury qui ont bien voulu consacrer une partie de leur temps précieux à examiner ce travail.

Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation durant ces années d'études.

Enfin, plus que tous, Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce travail.

ملخص

ان المعادلات الحاكمة لنظريات تشوه القص للصفائح علاقةً أكثر تعقيداً من تلك النظرية الكلاسيكية. وبالتالي فمن المستحسن أن تكون العلاقة الدقيقة بين حلول النظرية الكلاسيكية ونظريات القص بحيث كلما كانت حلول النظرية الكلاسيكية

تاحة. فإنه من الممكن الحصول بسهولة على الحلول المقابلة لنظريات تشوه القص.

في هذه الدراسة، تقدم لمحة عامة عن العلاقات الجبرية لالتواء الصفائح بين حل النظرية الكلاسيكية ونظريات الدرجة الأولى

كلمات بحث: التواء، نظرية القص، علاقة

Résumé

Les équations gouvernantes des théories déformation de cisaillement des plaques sont généralement plus complexes que ceux de la théorie classique des plaques. Par conséquent, il est souhaitable d'avoir des relations exactes entre les solutions de la théorie classique et les théories de cisaillement de sorte que chaque fois que les solutions de la théorie classique sont disponibles, les solutions correspondantes des théories de déformation de cisaillement peuvent être facilement obtenues.

Dans cette étude, un aperçu des relations algébriques pour le flambement des plaques entre la solution de la théorie classique et celle des théories du premier ordre est présenté

Mots clés : Flambement, théorie de cisaillement, relation.

Abstract

Equations governing shear-deformation theories of plates are typically more complicated than those of the classical plate theory. Hence it is desirable to have exact relationships between solutions of the classical plate theory and shear-deformation plate theories so that whenever classical theory solutions are available, the corresponding solutions of a shear-deformation theory can be readily obtained.

In this study, an overview of the algebraic relationships for buckling between the solutions of the classical plate theory and the first - order deformation plate theories is presented

Keywords: buckling; Shear deformation theories; Relationships

Liste des figures

Figure I.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff	5
Figure I.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.....	6
Figure I.3 : Illustration de la plaque de théorie d'ordre élevé.....	7
Figure I.4: matériau orthotrope.....	9
Figure I.5: Matériau transversalement isotrope.....	11
Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff (Reddy 2007).....	14
Figure II.2 : Plaque soumise à une compression biaxiale.....	16
Figure II.3 : Plaque rectangulaire soumise aux différentes conditions de chargement.....	21
Figure III.1 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin (Reddy 2007).....	24
Figure IV.1 : plaque isotrope soumise à une compression biaxiale.....	33

Liste des tableaux

*Tableau IV.1 : pour une plaque carre isotrope soumise à une
compression biaxial.....34*

*Tableau IV.2 : pour une plaque rectangulaire isotrope soumise
à une compression
biaxial.....
.....35*

Liste des notations

E Module de Young

G Module de cisaillement dans le plan (x, y)

ν Coefficient de Poisson

K Paramètre du matériau

a, b, h Dimensions de la plaque

a Longueur de la plaque

b Largeur de la plaque

h Epaisseur de la plaque

u, v, w Les déplacements suivant les directions x, y et z

$w\alpha$ rotation due à la flexion (sans cisaillement)

u_1, u_2, u_3 Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z Les rotations autour des axes x, y et z

$F(z)$ fonction de cisaillement transverse

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ Contraintes normales

$\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ Contraintes de cisaillement

$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ Déformations dans les directions x et y et z

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ Déformations de distorsion

$\delta u, \delta v, \delta w$ Champ virtuel de déplacement

$\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \epsilon_z$ Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$ Champ de déformation transversal virtuel

N Efforts normaux de membrane

N_x, N_y, N_{xy} Efforts normaux

M_x, M_y, M_{xy} Moments de flexion

m, n Nombres de mode entier

Ω_0 La surface de la plaque

∂ Dérivée partielle

i, j Nombres naturels

$q(x, y)$ La charge extérieure

q_0 L'intensité de la charge au centre de la plaque

Q_x, Q_y Effort de cisaillement

SOMMAIRE :

ملخص	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Liste des notations	
Introduction générale.....	1

Chapitre 01: Théories des plaques

I.1. Introduction.....	4
I.2. Définition de plaque.....	4
I.3. Les différentes théories des plaques	5
I.3.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff	5
I.3.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	5
I.3.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé	7
I.3.3.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé	8
I.4. Validité des théories de la plaque	8
I.5. Hypothèses de calcul.....	9
I.6. Les différents Types des matériaux	10
I.6.1. Matériaux orthotropes	10
I.6.1.1. Cas des Plaques Orthotropes.....	10
I.6.2. Matériaux isotropes.....	10
I.6.3. Matériaux transversalement isotropes.....	11
I.7. Les contraintes	11
I.8. Conclusion	12

Chapitre02: Théorie classique de plaque

II.1.Introduction	14
Théorie classique de plaque CPT	14
Flambement des plaques simplement appuyée (solution de Navier)	20
Conclusion.....	22

Chapitre 3:Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

III.1.Introduction	24
III.2. Théories de déformation en cisaillement du premier ordre FSDPT.....	24
III.3.Conclusion.....	29

Chapitre 4 :Résultats et interprétation

IV.1.Introduction.....	31
Relation entre les théories	31
IV.2. Plaque carre soumise à une compression biaxiale	33
IV.3.Résultats numérique	34
IV.4. Plaque rectangulaire soumise à une compression biaxiale	35
IV.5.conclusion	36
Conclusion générale	37

Introduction générale

Introduction générale

Introduction générale

Depuis le début vingtième siècle, l'usage des structure sous la forme des plaques et poutres s'est considérablement développé jusqu'à nos jours que ce soit dans l'industrie automobile, génie civil, transport routier, ferroviaire, et aéronautique.

Les modèles de plaques et de poutres ont été largement étudiés depuis plusieurs années jusqu'à nos jours (Ressiner 1945, Mindlin 1951, Reddy 1997 ce qui donne naissance aux théories dites théories classique de Kirchhoff et théorie de déformation en cisaillement du premier ordre de Mindlin, et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé de Reddy, ces théorie peuvent prendre en compte le cisaillement transverse.

Dans ce travail nous considérons le problème de flambement des plaques et la relation entre les théories de déformation en cisaillement transverse.

Le premier objectif principal de ce travail est de trouver une relation entre la charge de flambement de la théorie classique (CPT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre et théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT).

Le second objectif de ce travail est l'utilisation de cette relations pour calculer la charge de flambement critique d'une plaque carrée et rectangulaire simplement appuyée soumise à une compression biaxiale.

Pour atteindre nos objectifs, ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres.

Un aperçu des différentes théories de plaque sont présentes dans le premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre, le développement mathématique de la théorie classique (CPT) théorie de Kirchhoff est présenté.

Dans Le troisième chapitre, on présente le développement mathématique aboutissant à la relation entre la théorie de premier ordre de déformation en cisaillement.

Le quatrième et dernier chapitre, les différents résultats obtenues par les relations trouver entre FSDPT - CPT, en considérant des plaque isotrope simplement appuyée carrée et

Introduction générale

rectangulaire soumise à une compression biaxiale sont comparé à ceux calcule par Sayyad et Ghugal (2012)

Enfin, ce travail se termine par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus et les perspectives envisagés pour la poursuite de ce travail.

Chapitre 01

Théories des plaques

I.1. Introduction

Les problèmes de stabilité des plaques sont modélisée essentiellement par deux théories ; celle des plaque minces et celle des plaques épaisses.

La théorie de plaques minces énonce par Love sur les hypothèses des Kirchhoff s'inspire de celle des poutres mince de Euler- Bernoulli.

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff ; une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées à cause de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au l'effet de cisaillement est proposé par Reissner en 1945 et Mindlin 1951.

I.2. Définition de plaque

On appelle plaque tout corps cylindriques ou prismatique de hauteur (épaisseur) plus petit en comparaison avec le reste des autres dimensions. En fonction de la configuration du plan, les plaques se distinguent en rectangulaire, circulaire, annulaire, triangulaire etc. si le matériau constituant la plaque ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, alors la plaque est dite isotrope, par contre si les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les plaques sont différentes dans l'une des directions, alors la plaque est dite anisotrope (orthotrope)

I.3. Les différents théories des plaques

I.3.1 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élanement (L/h). La théorie CPT se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff [Kirchhoff 1950], selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation Figure I.1, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse [Cugnoni 2004]

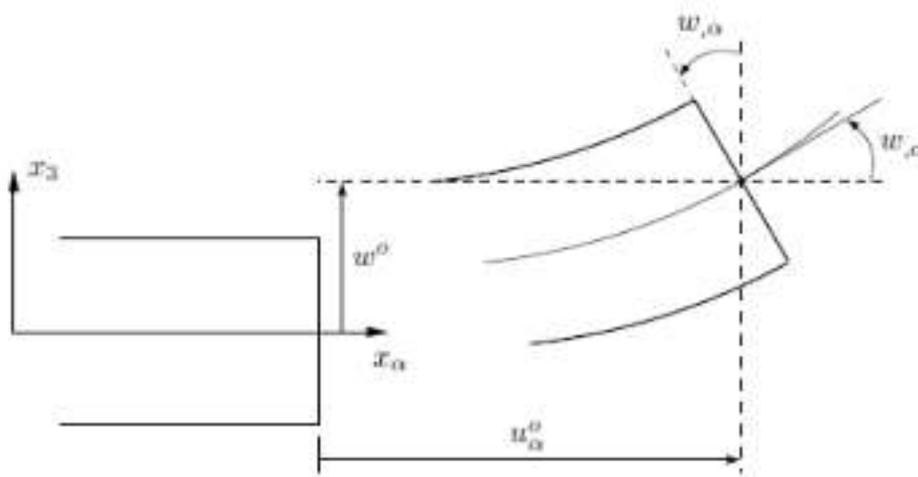


Figure I.1 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

I.3.2. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre

Cette théorie proposée par Mindlin, en 1951, prend en compte les déformations dues à l'effort tranchant et l'effet dû à l'inertie de rotation. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un facteur de

correction. Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDPT) peuvent être référées dans [Reissner -(1945)], [Mindlin -(1951)] qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que [Timoshenko et Woinowsky-Krieger 1959], [Reddy (1997)] et [Reddy (1999)].

L'hypothèse cinématique de Mindlin est la suivante :

-La normale reste droite mais non perpendiculaire à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure I.2).

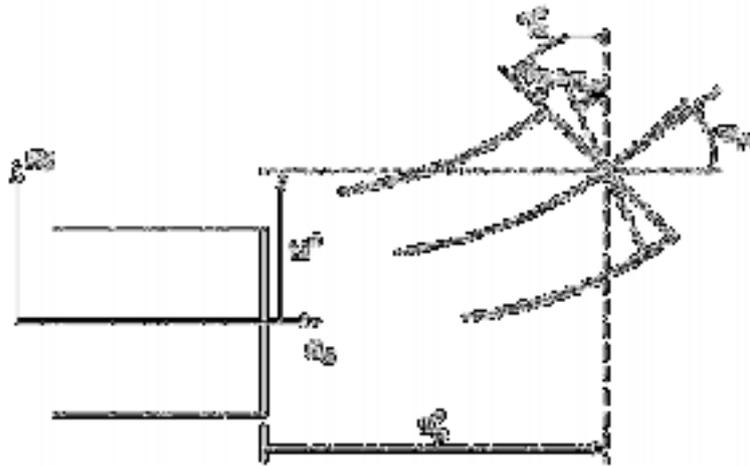


Figure I.2 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin

-Le champ de déplacements de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) = w \end{cases}$$

$$\varnothing x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ et } \varnothing y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

I.3.3. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur à l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques épaisses ou poutres courtes, où la déformation transverse joue un rôle prédominant. La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor [Nguyen 2004], la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans ([Reddy 1984] ; [Kant et Swaminathan 2002])

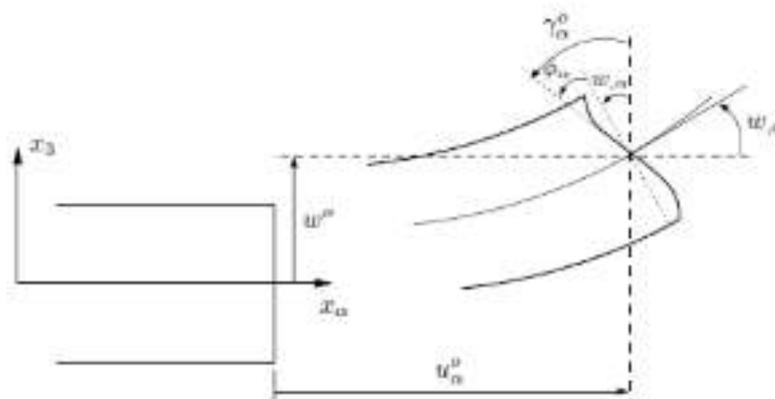


Figure I.3 : Illustration de la plaque de théorie d'ordre élevé

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = u(x, y) - f(z) \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) = v(x, y) - f(z) \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) = w \end{cases}$$

I.3.3.1. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordres élevés qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement $f(z)$. Ces modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement dans l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée.

$F(z)$: est une fonction de cisaillement transverse qui peut prendre plusieurs formes selon la théorie utilisée.

Théorie classique (CPT)

$$f(z) = 0$$

Théorie du premier ordre (FSDPT)

$$f(z) = z$$

Théorie d'ordre élevé (HSDPT)

$$f(z) = z - z^3 \left(\frac{4}{3h^2} \right)$$

I.4. Validité des théories de la plaque

La validité de la théorie des plaques isotropes dépend des caractéristiques géométriques. Les hypothèses de Mindlin seront appliquées Si $4 < L/h < 20$ et celles de Kirchhoff Si $L/h > 20$ où L est une dimension caractéristique dans le plan x, y . Le rôle des déformations de cisaillement transversal dans les plaques orthotropes dépend non seulement des caractéristiques géométrique (L/h), mais également des caractéristique mécanique représentées par le rapport E/KG (ou E est un module caractéristique intervenant dans la flexion, G un module de cisaillement transversal et K un facteur de correction de cisaillement transversal).

I.5.Hypothèses de calcul

Les hypothèses de calcul sont celles d'un solide qui possède un plan moyen et dont l'épaisseur h est faible vis-à-vis des deux autres dimensions. Celles qui sont vérifiées dans cette étude sont les suivantes :

1- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions latérales. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan moyen.

2- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Cette hypothèse permet de supposer que le mouvement de tous les points se trouvant sur la normale au feuillet moyen est le même, c'est-à-dire que : $w(x, y, z) = w(x, y)$.

Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.

On a dans ce cas :

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0$$

3- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.

4- Les contraintes σ_{zz} normales dans la direction transversale sont négligeables par rapport aux composantes de contraintes, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout point z donc $\sigma_{zz}=0$.

5- la plaque est symétrique par rapport à son feuillet moyen lors de sa fabrication.

I.6. Les différents Types des matériaux

I.6.1. Matériaux orthotropes

Sont des matériaux qui possèdent 3 plans de symétrie orthogonaux, ces derniers ont les mêmes propriétés ou caractéristiques mécanique.

Ce qui réduit le nombre des coefficients indépendants à 9

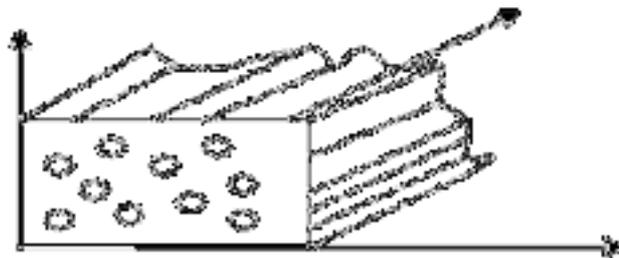


Figure I.4: matériau orthotrope

I.6.1.1. Cas des Plaques Orthotropes

Une plaque orthotrope possède des paramètres de rigidité différents selon deux axes perpendiculaires, ces axes étant parallèle aux bords de la plaque. Il existe plusieurs types d'orthotropie: une orthotropie de géométrie où la géométrie de la plaque entraîne, l'orthotropie à module d'Young constant, une orthotropie de matériau où la plaque possède deux modules d'Young différents selon les deux directions. Les plaques orthotropes en flexion présentent une coïncidence entre les axes d'orthotropie et les directions principales x , y . Pour un état de contrainte plane $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$

La relation entre le tenseur de déformation et le tenseur de contrainte sous forme matricielle est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix}$$

I.6.2. Matériaux isotropes

Matériaux dont les propriétés physiques ou mécaniques sont identiques dans toutes les directions

I.6.3. Matériaux transversalement isotropes

Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope qui comporte un axe ou un plan d'isotropie. Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques.

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients.

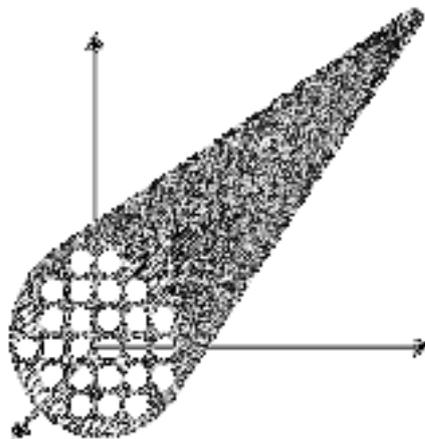


Figure I.5: Matériau transversalement isotrope

I.7. Les contraintes

En se limitant à un comportement élastique linéaire, l'expression des contraintes pour une plaque isotrope peut être déterminée en écrivant la relation qui existe entre les déplacements et les déformations, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix}$$

I.8.Conclusion

La principale limitation de la théorie classique de **love-Kirchhoff** est que l'on néglige les effets dus aux efforts tranchants et à l'inertie de rotation, or dans la pratique les plaques ont des épaisseurs significatives et il devient nécessaire de tenir compte de ces effets pour décrire leur comportement statique ou dynamique. D'autre part, la théorie classique ne peut rendre compte des problèmes de contact incluant des plaques et des problèmes de plaques laminées. Ces limitations ont conduit plusieurs auteurs à proposer des modèles plus raffinés. L'un des premiers fut **Reissner**, suivi par **Mindlin** et par d'autres. Ces nouvelles théories sont généralement obtenues à partir des équations de l'élasticité bidimensionnelle soit par intégration de ces équations sur l'épaisseur, c'est-à-dire le long des fibres de la plaque, soit par des hypothèses, sur les déplacements et les contraintes faites à l'intérieure de la plaque.

Toutes ces théories découplent toujours les effets de flexion et de contrainte plane.

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

Chapitre02

Théorie classique de plaque

II.1.Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le développement mathématique conduisant à l'équation différentielle en moment et la flèche, et la charge de flambement la théorie classique des plaques CPT de Love-Kirchhoff.

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour la détermination des équations d'équilibre et les conditions aux limites de la théorie classique.

Théorie classique de plaque CPT

La théorie classique des plaques minces (CPT) se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation (figure II.1), ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse.

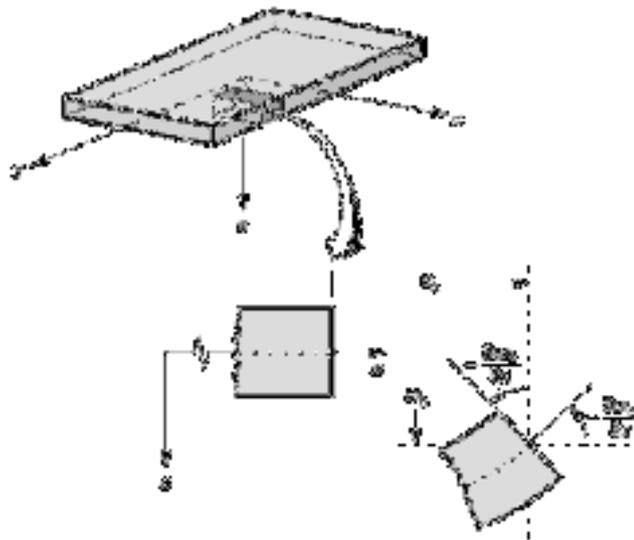


Figure II.1 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff.

Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels,

Le champ de déplacement, dans le cas de la flexion pure est donné par

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x, y, z) = z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x, y, z) = w \end{cases} \quad (\text{II .1})$$

Les déformations associées aux champs de déplacement sont

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{cases} \quad (\text{II .2})$$

Avec ϵ_{xx} et ϵ_{yy} sont déformations normales et γ_{xy} est déformations de cisaillement

L'énergie de déformations U

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right] dx dy \quad (\text{II .3})$$

$$\delta U = - \int \left(M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial xy} \right) dx dy \quad (\text{II .4})$$

Avec

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \quad (\text{II .5})$$

Notons que les énergies des déformations associées aux déformations de cisaillement transversal sont nulle dans la théorie de Kirchhoff.

L'énergie potentielle de forces externe V est donné par les forces agissant sur limite de la plaque et la courbure, en supposant des petites rotations.

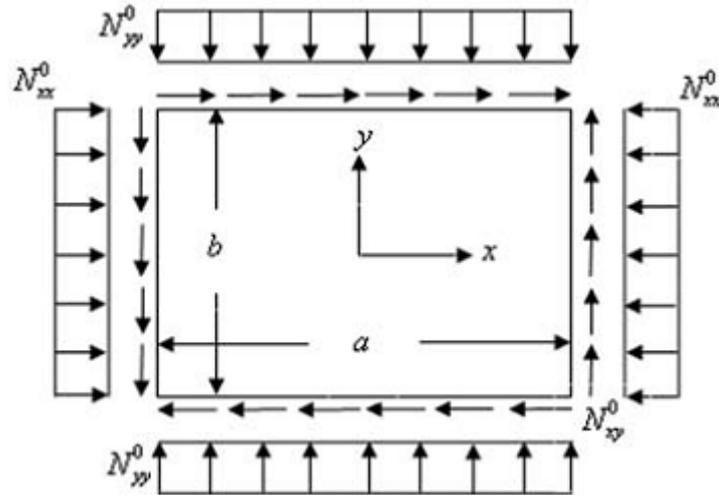


Figure II.2 : Plaque soumise à une compression biaxiale.

$$V = -\frac{1}{2} \iint \left(N_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) dx dy \quad (\text{II} .6)$$

$$\delta V = - \iint \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) dx dy (\text{II} .7)$$

L'intégration Eq. (II.7) par des parties nous obtenons

$$\delta V = \iint \left(N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w dx dy - \oint \left[N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} n_x + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} n_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} n_x + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} n_y \right] \delta w ds \quad (\text{II} .8)$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit

$$\delta W = \delta U + \delta V = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{aligned} & - \int \left(M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big) \delta w \, dx dy - \oint_{\Gamma} \left[(M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial x} + (M_{xy} n_x + \right. \\ & M_{yy} n_y) \frac{\partial \delta w}{\partial y} \Big] ds + \oint_{\Gamma} \left[(M_{xx,x} + M_{xy,y}) n_x + (M_{yy,y} + M_{xy,x}) n_y - \right. \\ & \left. (N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} n_x + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} n_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} n_x + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} n_y) \right] \delta w ds = 0 \quad (\text{II.9}) \end{aligned}$$

où une virgule suivie d'indice dénote la différenciation par rapport aux indices, par exemple, $M_{xx,x} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x}$, et ainsi de suite, et (n_x, n_y) désigner les cosinus directeurs de l'unité normale sur la limite Γ , un cercle sur le signe de l'intégrale signifie l'intégration sur la limite totale, s est la coordonnée mesurée le long de Γ . Si l'unité vecteur normal n est orienté à un angle θ de l'axe des x positif, alors $n_x = \cos\theta$ et $n_y = \sin\theta$. Comme δw est arbitraire dans Γ et il est indépendant de $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ sur Γ , il en résulte que

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Conditions aux limites

De l'équation (II.9) on trouve :

Soit $\delta w = 0$ où $Q_x n_x + Q_y n_y = 0$

$$(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} n_x + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} n_y + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} n_x + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} n_y)$$

Soit $\frac{\partial \delta w}{\partial x} = 0$ ou $M_{xx} n_x + M_{xy} n_y = 0$

Soit $\frac{\partial \delta w}{\partial y} = 0$ ou $M_{xy}n_x + M_{yy}n_y = 0$

Avec Q_x, Q_y sont les force de cisaillement donnée par $Q_x = M_{xx,x} + M_{xy,y}$ et $Q_y = M_{yy,y} + M_{xy,x}$

Équation d'équilibre en termes de la flèche

Supposons une plaque isotrope et obéi à la loi de Hook, les relations contrainte - déformation sont données par

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{xx} + \mu\epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{yy} + \mu\epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Avec

E : Module de Young, G : Module de cisaillement, μ coefficient de Poisson .

Remplaçons les expressions des contraintes dans l'équation (II.5), on trouve

$$\begin{cases} M_{xx} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{Avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Substituant les expressions des moments dans (II.10), on trouve l'équation gouvernante

$$D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.13})$$

On terme de l'opérateur Laplace on a

$$D\nabla^4 w = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.14})$$

Pour $N_{xx} = -k_1 N$, $N_{yy} = -k_2 N$ et $N_{xy} = 0$ L'équation (II.14) devient

$$D\nabla^4 w = -N \left[k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (\text{II.15})$$

Pour $k_1 = k_2 = 1$

L'équation (II.15) devient

$$D\nabla^4 w = -N\nabla^2 w \quad (\text{II.16})$$

Utilisons la somme des moments

$$M = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{(1+\mu)} = -D\nabla^2 w \quad (\text{II.17})$$

$$\nabla^2 M = N\nabla^2 w \quad (\text{II.18})$$

$$\nabla^2 w = -\frac{M}{D} \quad (\text{II.19})$$

Flambement des plaques simplement appuyée (solution de Navier)

La flèche d'une plaque rectangulaire simplement appuis peut être représentée par la double série de Fourier comme suit

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{II.20})$$

L'équation (II .15)

$$\begin{aligned} & -D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] w_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} N \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] w_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Alors

$$-D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 - N \left[k_1 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] = 0 \quad (\text{II.22})$$

Donc

$$N = \frac{D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2}{\left[k_1 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]} \quad (\text{II.23})$$

Pour chaque choix de m et n correspond à une valeur unique de N , la charge critique de flambement est la petite valeur de N .

La plaque est soumise aux conditions de chargement montre dans la figure II.3.

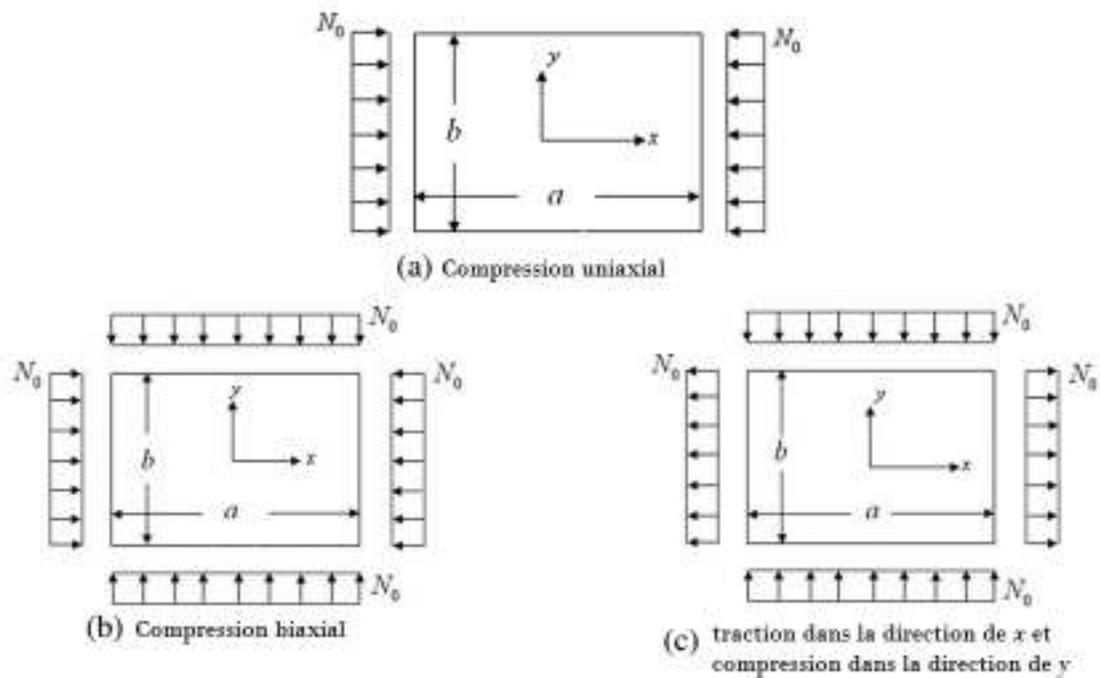


Figure II.3 : Plaque rectangulaire soumise aux différentes conditions de chargement.

Pour une compression biaxiale $k_1 = k_2 = 1$

$$N = \frac{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (\text{II.24})$$

Pour une compression uniaxiale $k_1 = 1, k_2 = 0$

$$N = \frac{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]} \quad (\text{II.25})$$

Pour une traction dans la direction x et une compression dans la direction y

$$k_1 = -1, k_2 = 1.$$

$$N = \frac{D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]} \quad (\text{II.26})$$

Conclusion

Dans ce chapitre des équations différentielles entre le moment et la flèche et la charge critique la théorie classique (CPT) a été développée.

Ces équation seront utilisées dans le dernier chapitre pour développe la relation entre la charge critique de flambement de théorie de déformation en cisaillement du premier ordre et la théorie classique.

Chapitre 03

Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

III.1.Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le développement mathématique conduisant à l'équation différentielle en moment et la flèche, et la charge de flambement la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDPT.

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour la détermination des équations d'équilibre et les conditions aux limites de la théorie FSDPT.

III.2. Théories de déformation en cisaillement du premier ordre FSDPT

Le champ des déplacements de la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé FSDPT est

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = z\varphi_x \\ u_2(x, y, z) = z\varphi_y \\ u_3(x, y, z) = w \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Avec φ_x et φ_y sont des rotations autour des axes y et x respectivement.

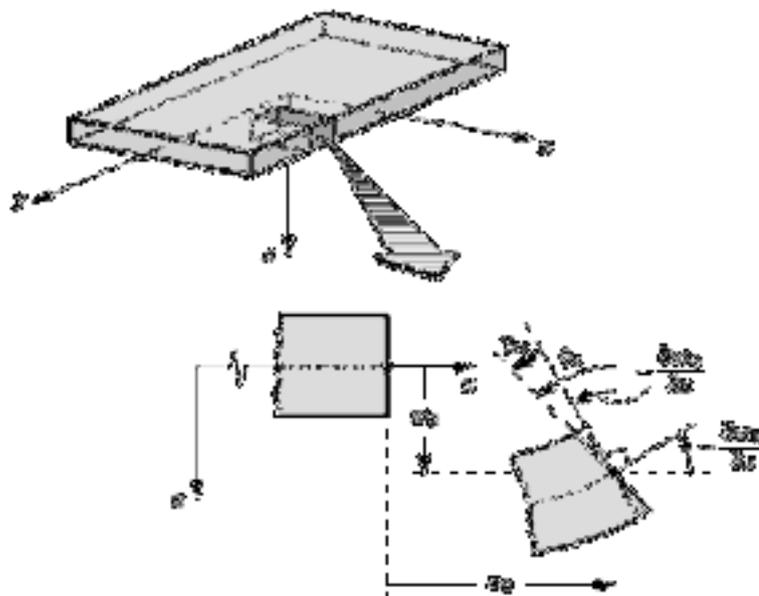


Figure III.1 : Illustration de la plaque de Reissner-Mindlin.

Chapitre 03 Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

Les déformations associées aux champs de déplacement sont

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = z \frac{\partial \phi x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = z \frac{\partial \phi y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \phi x}{\partial y} + \frac{\partial \phi y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = \left(\phi x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = \left(\phi y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Le principe des travaux virtuels devient

$$\begin{aligned} \delta w = \int_{\Omega_0} \left[M_{xx} \frac{\partial \delta \phi x}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \delta \phi y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \delta \phi x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi y}{\partial x} \right) + Q_x \left(\delta \phi x + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. Q_y \left(\delta \phi y + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) - \left(N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \delta w \right] dA = 0 \quad (\text{III.3}) \end{aligned}$$

avec

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = D \left(\frac{\partial \phi x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi y}{\partial y} \right) \quad (\text{III.4.a})$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz = D \left(\frac{\partial \phi y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi x}{\partial x} \right) \quad (\text{III.4.b})$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz = D \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \phi x}{\partial y} + \frac{\partial \phi y}{\partial x} \right) \quad (\text{III.4.c})$$

$$Q_x = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\phi x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{III.4.d})$$

$$Q_y = K_s \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\phi y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{III.4.e})$$

Chapitre 03 Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

Avec K_s facteur de correction de cisaillement ; utilisé pour l'hypothèse des contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres. Ce facteur dépend du coefficient de Poisson et pris égale 5/6.

En Intégrant par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
 & - \iint [M_{xx,x} + M_{xy} - Q_x] \delta\phi_x dx dy - \iint [M_{yy,y} + M_{xy} - Q_y] \delta\phi_y dx dy - \\
 & \iint [Q_{x,x} + Q_{y,y} - N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}] \delta w dx dy + \oint [(Q_n \delta w + \\
 & M_{nn} \delta\phi_n + M_{ns} \delta\phi_s)] ds = 0
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + Q_x = 0 \\
 & - \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + Q_y = 0 \\
 & - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Les conditions aux limites impliquent de spécifier

w ou Q_n

ϕ_n ou M_{nn} (III.7)

ϕ_s ou M_{ns}

Chapitre 03 Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

Les conditions aux limites pour la théorie de Mindlin sont données ci-dessous.

Bord libre

$$Q_n = K_s Gh \left(\phi_n + \frac{\partial w}{\partial n} \right) = 0$$

$$M_{nn} = D \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial n} + \frac{\partial \phi_s}{\partial s} \right) = 0$$

$$M_{nn} = D \frac{(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial s} + \frac{\partial \phi_s}{\partial n} \right) = 0$$

Bord simplement appuyée

$$w = 0; M_{nn} = 0; \phi_s = 0; M_{ns} = 0$$

Bord encastré

$$w = 0; \phi_s = 0; \phi_n = 0$$

Supposons une plaque isotrope et obéi à la loi de Hook, les relations contrainte - déformation sont données par

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{xx} + \mu \epsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{yy} + \mu \epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \sigma_{xz} = G \gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz} \\ \sigma_{yz} = G \gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Chapitre 03 Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

Avec E module de Young et μ coefficient de Poisson. G module de cisaillement

Les équations d'équilibre peuvent être exprimées en déplacements (w , ϕ_x et ϕ_y), par la substitution des expressions des forces et des moments dans (III.6). On obtient

$$-\frac{D(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+\mu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - \frac{K_s E h}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) = 0$$

$$-\frac{D(1-\mu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) - \frac{D(1+\mu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - \frac{K_s E h}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$-\frac{K_s E h}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

Introduisons la somme des moments

$$M = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1+\nu} = D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \quad (\text{III.10})$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$D(1-\nu) \nabla^2 \phi_x - (1-\nu) \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{K_s E h}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = 0$$

$$D(1-\nu) \nabla^2 \phi_y - (1-\nu) \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{K_s E h}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$-\frac{K_s E h}{2(1+\nu)} \left(\nabla^2 w_0 + \frac{M}{D} \right) = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Pour $N_{xx} = N$, $N_{yy} = N$ et $N_{xy} = 0$ l'équation (III.11) devient

Chapitre 03 Théories de déformation en cisaillement du premier ordre

$$D(1 - \nu)\nabla^2\phi_x - (1 - \nu)\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{K_s E h}{(1 + \nu)}\left(\frac{\partial w_o}{\partial x} + \phi_x\right) = 0$$

$$D(1 - \nu)\nabla^2\phi_y - (1 - \nu)\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{K_s E h}{(1 + \nu)}\left(\frac{\partial w_o}{\partial y} + \phi_y\right) = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$-\frac{K_s E h}{2(1 + \nu)}\left(\nabla^2 w + \frac{M}{D}\right) = N\nabla^2 w$$

En vue des équations (III .4 .a et III .4 .b) on trouve

$$\nabla^2 M = N\nabla^2 w$$

$$\nabla^2 \left(w - \frac{M}{k_s G h}\right) = -\frac{M}{D}$$

III.3.Conclusion

Des équations différentielles entre le moment et la flèche, et la charge critique de la théorie déformation en cisaillement du premier ordre ont été obtenue dans ce chapitre.

Le chapitre suivant, nous utilisons les différentes équations pour trouver une relation entre la charge critique de flambement et de la théorie déformation en cisaillement du premier ordre et celle de de la théorie classique pour une plaque isotrope simplement appuyée soumise à une compression biaxiale.

Chapitre 4

Résultats et interprétation

IV.1.Introduction

Le flambement des plaques basée sur la théorie de Kirchhoff et Mindlin pour différent type de chargement et de condition aux limites a été étudié par plusieurs recherches. Ces travaux ont été publiés dans des livres sur les plaques comme ceux de Timoshenko [1975], Huang [1988], et Reddy [1999a, 2007]. Des solutions analytiques pour certains cas de la plaque ont été données.

Dans ce chapitre, nous présentons la démarche suivie pour trouver une relation entre la charge de flambement de la théorie de cisaillement du premier ordre à celle de la théorie classique (FSDPT – CPT) pour une plaque simplement appuyée soumise à une compression biaxiale. En considérant différentes formes de plaque isotrope. Afin de vérifier cette relation des résultats sont présentés et comparés avec ceux de la littérature.

Relation entre les théories

Dans cette partie les exposants K et M réfèrent aux quantités de théories de plaques de Kirchhoff et Mindlin, respectivement

$$\nabla^2 w^K = -\frac{M^K}{D} \quad (IV.1)$$

$$\nabla^2 M^K = N^K \nabla^2 w^K \quad (IV.2)$$

$$\nabla^2 \left(w^M - \frac{M^M}{k_s Gh} \right) = -\frac{M^M}{D} \quad (IV.3)$$

$$\nabla^2 M^M = N^M \nabla^2 w^M \quad (IV.4)$$

À partir des équations (IV.1) et (IV.2) on trouve

$$\left(\nabla^2 + \frac{N^k}{D} \right) \nabla^2 w^k = 0 \quad (IV.5)$$

Et les équations (IV.3) et (IV.4) ; on trouve

$$(\nabla^2 + \lambda^M) \nabla^2 w^M = 0 \quad (IV.6)$$

Avec

$$\lambda^M = \frac{N^M}{D \left[1 - \left(\frac{N^M}{k_s Gh} \right) \right]} \quad (IV.7)$$

Les conditions aux limites pour une plaque simplement appuyées sont

$$\text{CPT : } w^K = 0 \text{ et } M^K = \nabla^2 w^K = 0 \quad (IV.8)$$

$$\text{FSDPT : } w^M = 0 \text{ et } M^M = \nabla^2 w^M = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Comparons les équations (IV.5) et (IV.6) et en vus des conditions aux limites (IV.8) et (IV.9) on trouve

$$\lambda^M = \frac{N^K}{D} \quad (\text{IV.10})$$

$$N^M = \left[\frac{N^K}{1 + \left(\frac{N^K}{k_s Gh} \right)} \right] \quad (\text{IV.11})$$

Cette relation donne la charge de flambement N^M (Théorie de cisaillement du premier ordre) d'une plaque simplement appuyée en fonction de la charge de flambement N^K (Théorie classique).

IV.2. Plaque carre soumise à une compression biaxiale

Considérons une plaque carre simplement appuyée soumise à une compression biaxiale de valeurs identiques sur les deux côtés.

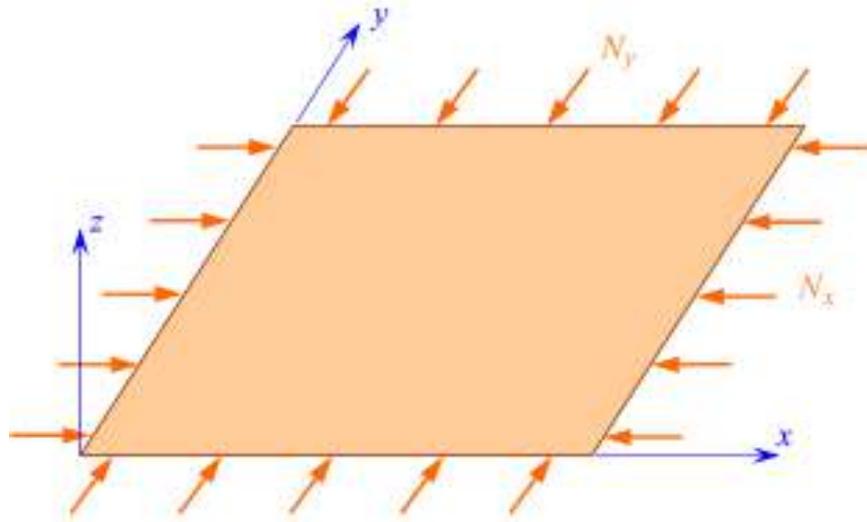


Figure IV.1 : plaque isotrope soumise à une compression biaxiale

IV.3. Résultats numérique

Les résultats obtenus par l'équation (IV.11) sont comparés avec les résultats obtenus par Sayyad et Ghugal (2012). Les résultats numériques sont présentés sous forme d'une charge critique de flambement adimensionnelle $\bar{N}_{cr} = \frac{N a^2}{E h^3}$. Les caractéristiques suivantes $E=210$ GPa, $\mu=0.3$ et $k=5/6$ (FSDPT) sont utilisées.

Dans Le tableau suivant sont représentent les résultats de la charge critique du flambement d'une plaque carrée simplement appuyée, pour différent rapport (a/h) . On remarque clairement que les résultats données par la relation ((IV.11) sont identique à ceux de Sayyad et Ghugal (2012).

Tableau IV.1 : \bar{N}_{cr} pour une plaque carre isotrope soumise à une compression biaxiale.

Mode (m, n)	Théorie	a/h				
		5	10	20	50	100
(1, 1)	CPT ^a	1.8076	1.8076	1.8076	1.8076	1.8076
	FSDPT ^a	1.4749	1.7111	1.7825	1.8035	1.8065
	FSDPT ^b	1.4749	1.7111	1.7825	1.8036	1.8066

a : Sayyad et Ghugal (2012)

b : résultats par l'équation (IV.11)

IV.4. Plaque rectangulaire soumise à une compression biaxiale

Dans la partie précédente, une comparaison a été faite entre les charge critique de flambement trouves par la relation (IV.11) et les résultats donnes par Sayyad et Ghugal (2012) pour une plaque carrée puisque les auteurs ont étudié seulement le cas des plaques carrées isotrope simplement appuyée. Afin de vérifier les résultats donne par la relation (IV.11) d'une plaque rectangulaire simplement appuyée soumise à une compression biaxiale. Dans cette partie, les résultats sont comparés avec les résultats de Reddy (2007). La charge critique de flambement est présentée sous forme adimensionnelle $\bar{N}_{cr} = \frac{N b^2}{D \pi^2}$. Les caractéristiques suivante, sont utilisées $E=210$ GPa, $\mu=0.25$ et $k=5/6$ (FSDPT).

Les résultats de la charge critique du flambement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée sont représentés dans le tableau (IV.2), pour diffèrent rapport (a/h) et (a/b).

Les résultats trouvés par l'équation (IV.11) sont identique aux résultats présentés par

Tableau IV.2 : \overline{N}_{cr} pour une plaque rectangulaire isotrope soumise à une compression biaxiale

Mode (m, n)	a/b	b/h	Théorie		
			CPT ^c	FSDPT ^c	FSDPT ^b
(1, 1)	0.5	10	5.000	4.418	4.418
		20	5.000	4.841	4.841
		100	5.000	4.993	4.993
	1.5	10	1.444	1.391	1.391
		20	1.444	1.431	1.431
		100	1.444	1.444	1.444
	3	10	1.111	1.079	1.079
		20	1.111	1.103	1.103
		100	1.111	1.111	1.111

b : résultats par l'équation (IV.11)
c : Reddy (2007)

IV.5.conclusion

Dans ce chapitre, une relation entre la charge critique de flambement de la théorie classique et la théorie du premier ordre de cisaillement a été donnée. Quelques exemples de calcul de charge critique de flambement d'une plaque isotrope simplement appuyée soumise à une compression biaxiale ont été présentés.

Les résultats trouvés par cette relation sont identiques aux résultats de Sayyad et Ghugal (2012) pour des plaques carrées et rectangulaires isotrope simplement appuyée soumise à une compression biaxiale.

Donc, connaissons la charge critique de flambement de la théorie classique (CPT), d'une plaque isotrope simplement appuyée soumise à une compression biaxiale, la relation (IV.11) peut être utilisée pour calculer la charge critique de flambement de la théorie du premier ordre (FSDPT).

Conclusion générale

Dans ce travail, Nous avons déterminé une relation entre la charge critique du flambement de la théorie classique de Love-Kirchhoff (CPT) et charge critique la théorie du premier ordre (FSDPT) d'une plaque isotrope soumise à une compression biaxiale.

En appliquant le principe des travaux virtuels des équations différentielles ont été trouvé. Elles sont utilisées par la suite pour trouver une relation entre les charges critiques de la théorie classique et la théorie de cisaillement du premier ordre.

Cette relation a été utilisée pour calculer la charge critique de flambement de la théorie de cisaillement du premier ordre des plaques carrées et rectangulaire isotrope simplement appuyée soumise à une compression biaxiale. Les résultats trouver par cette relation sont identique à ceux présentés par Sayyad et Ghugal (2012).

Donc, cette relation peut être utilisée pour calculer la théorie la charge critique de flambement de la théorie de cisaillement du premier ordre (FDPST) à partir la charge critique de flambement de la théorie classique (CPT) pour des plaques carrée et rectangulaire isotrope simplement appuyée soumise à une compression biaxiale.

En termes de perspective,

1. Trouver des relations pour d'autres formes de plaque (Circulaire, triangulaire).
2. Généraliser cette relation a différentes sollicitations (compression uniaxiale suivant x ou y, compression en x et traction en y, etc...)
3. Trouver des relations sous d'autres conditions aux limites.
4. Utiliser des plaques en FGM

Référence biobibliographie

[Adim (2013)] «Comportement mécanique en flexion des plaques en matériaux à gradient de propriétés»

[Bakhaled – Khamis (2013)] BAKHALED Med Cherif - KHEMIS Mahmoud
« Résolution de l'équation différentielle (bi-Laplacien) par la solution de CLEBSCH»

[Cugnoni (2004)] J. Cugnoni. «Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, 2004»

[Houari (2011)] HOUARI Mohamed sid ahmed, « Analyse des contraintes thermo-élastique lois des puissances, Thèse de doctora, Université Djillali liabes, sidi belabbes, algerie, 2011»

[Mersli.F (2014)] MORSLI Freiha « Etude et Analyse des Problèmes de Stabilité des Plaques Sandwichs en FGM sous Chargement Thermique »

[BOUZID.F.Z (2014)] BOUZID Fatima Zohra . « Etude de la stabilité des plaques en matériaux a gradient de propriété Sous chargement thermique et mécanique »

[Mindlin (1951)] R.D Mindlin. «Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pages 31-38, 1951»

[Nguyen (2004)] Viet. Tung. Nguyen. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques. Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées, 2004»

[Gjermund. M.K (2012)] Gjermund Mæsel Kolvik « Higher Order Shear Deformation Plate » THESIS for the degré of MASTER OF SCIENCE (Master I Anvendt matematikk og mekanikk)

[Reddy (1984)] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pages 745-752, 1984.

[Reddy (1997)]

Reddy. J. N., Wang. C. M., Lee. K. H.

Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. International Journal of Solids and Structures 34 (26), 3373-338, 1997.

[Reddy (1999)]

J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic

plates. Taylor & Francis, Philadelphia, 1999.

[Reissner (1945)]

Reissner. E. The effect of transverse shears

deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., vol. 12, pages 69/77, 1945.

[Reissner (1975)]

E. Reissner, On transverse bending of

plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures ; 25 (5) : 495-502, 1975.

[Uflyand (1948)]

[Kant et Swaminathan (2002)]

[Timoshenko (1959)]

S.P. Timoshenko., S. Woinowsky-Krieger,

Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959

[Topdar(2003)]

P. Topdar, A. H. Sheikh and N. Dhang.

Finite element Analysis of composite and Sandwich Plates Using a Continuous Inter-Laminar Shear Stress Model. J. Sandwich Structures and Materials, Vol. 5 July 2003.

[Woinowsky-Krieger 1959]