

Matière : Elasticité

Niveau : 3^{ème} année Génie Mécanique (CM)

Chapitre 1 : Notation et rappels mathématiques

1.1- Notation indicielle :

a- Convention de l'indice muet :

$$\text{Soit } \sigma_{ij} \text{ une matrice carrée : } \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

La trace de la matrice σ_{ij} est la somme des éléments de la diagonale principale, alors on peut écrire :

$$\text{tr } \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \dots + \sigma_{nn} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}$$

pour des raisons de simplification et de condensation de long développements, on écrit :

$$\text{tr } \sigma_{ij} = \sigma_{ii} \quad i = 1, n$$

Dans cette expression l'indice i , répété deux fois, prend successivement toutes les valeurs possibles, c'est un **indice muet** et sa répétition implique une sommation.

$$\text{Soient } \vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ deux vecteurs de l'espace Euclidien à 3 dimensions : } \begin{cases} \vec{A} = (x_1 & x_2 & x_3)^t \\ \vec{B} = (y_1 & y_2 & y_3)^t \end{cases}$$

Le produit scalaire de ces deux vecteurs peut être écrit selon : $\vec{A} \bullet \vec{B} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = x_i y_i$

De même que précédemment, l'indice i répété deux fois implique une sommation.

Notons que a_{ii} est dite contraction des éléments a_{ij} et $x_i y_i$ est dit le produit contracté des éléments x_i et y_i .

b- Convention d'Einstein : Soit $(\vec{e}_i, i=1, n)$ une base d'un espace Euclidien de dimension n , la décomposition d'un vecteur \vec{V} sur cette base est notée : $\vec{V} = \sum_{i=1}^n v^i \vec{e}_i$

On peut écrire : $\vec{V} = v^i \vec{e}_i$, alors l'indice i répété, placé une fois en haut et une fois en bas, signifie qu'il faut faire une sommation (convention d'Einstein).

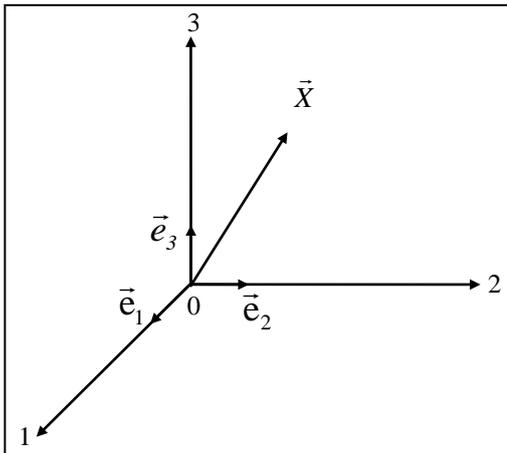
1.2- Le Delta de Krönecker et le symbole de permutation :

a- Delta de Krönecker : On entend par le Delta de Krönecker l'opérateur mathématique ou la matrice pour la quelle ses éléments sont donnés par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b- Symbole de permutation : Avant d'exprimer le symbole de permutation, on donne une définition du déterminant de trois vecteurs.

Soient \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 les vecteurs unités portés respectivement par des axes 1, 2 et 3 du repère de référence 0123.



Tout vecteur peut être exprimé linéairement et d'une façon unique en fonction des vecteurs unités comme suit :

$$\vec{X} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

Si nous considérons, dans ce repère, trois vecteurs \vec{X}, \vec{Y} et \vec{Z} , le déterminant étant le nombre noté $D(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ qui vérifie les égalités suivantes :

$$D(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = -D(\vec{Y}, \vec{X}, \vec{Z})$$

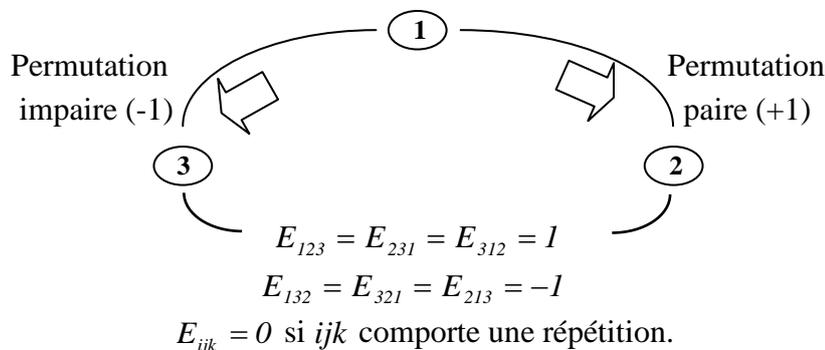
$$D(\vec{X}_1 + \vec{X}_2, \vec{Y}, \vec{Z}) = D(\vec{X}_1, \vec{Y}, \vec{Z}) + D(\vec{X}_2, \vec{Y}, \vec{Z})$$

$$D(\alpha \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \alpha D(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

$$D(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$$

De la troisième égalité, on peut écrire : $D(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = D(x_i \vec{e}_i, y_j \vec{e}_j, z_k \vec{e}_k) = x_i y_j z_k D(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$

En posant $D(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = E_{ijk}$, on définit le symbole E_{ijk} dit de permutation.



1.3- Tenseurs d'ordre ≤ 2 :

a- Tenseur d'ordre zéro ou scalaire : est un être mathématique déterminé par un nombre unique appelé **scalaire**.

Exp. : longueur d'un segment, volume, masse, masse volumique, température, etc.

b- Tenseur d'ordre un ou vecteur : est un être mathématique déterminé par un nombre positif ou nul, une direction et un sens ; il est appelé **vecteur**. Le nombre est dit module ou norme du vecteur.

Exp. : vitesse, accélération, force, gradient de température, etc.

c- Tenseur d'ordre 2 : Un tenseur du second ordre est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{X} de l'espace Euclidien un vecteur \vec{Y} de ce même espace, soit : $\vec{Y} = \bar{\bar{L}}(\vec{X})$.

Si l'espace Euclidien considéré étant à trois dimensions, la relation entre les vecteurs \vec{X} et \vec{Y} peut être exprimée par :

$$\begin{cases} y_1 = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + l_{13} x_3 \\ y_2 = l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + l_{23} x_3 \\ y_3 = l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + l_{33} x_3 \end{cases}$$

D'une manière compacte, on peut écrire : $y_i = l_{ij} x_j$.

C'est l'équation d'un système linéaire, alors le vecteur \vec{Y} est relié au vecteur \vec{X} par la **matrice** $\bar{\bar{L}}$ (tenseur d'ordre 2) à neuf composantes dans un espace Euclidien à trois dimensions.

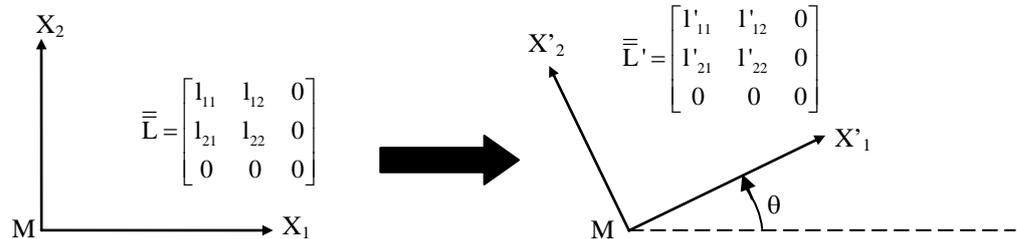
Exp. : tenseur de contraintes, tenseur de déformations, conductivité électrique, etc.

c.1- *Décomposition canonique d'un tenseur du second ordre en parties symétrique et antisymétrique* : On appelle partie symétrique de $\bar{\bar{L}}$ (ou partie paire) le tenseur $\bar{\bar{L}}_s$ défini par :

$$\bar{\bar{L}}_s = \frac{1}{2}(\bar{\bar{L}} + \bar{\bar{L}}^t)$$

et partie antisymétrique (ou partie impaire) le tenseur $\bar{\bar{L}}_a$ défini par : $\bar{\bar{L}}_a = \frac{1}{2}(\bar{\bar{L}} - \bar{\bar{L}}^t)$.

c.2- *Changement de base (transformation d'axes)* : La transformation d'axes la plus couramment rencontrée est la rotation. À cet effet, nous considérons le passage par rotation d'angle θ d'un système à deux axes vers un autre système à deux axes ayant la même origine. Le premier étant MX_1X_2 et le second $MX'_1X'_2$.



Les composantes de la nouvelle matrice $\bar{\bar{L}}'$ peuvent être exprimées en fonction des composantes de la matrice $\bar{\bar{L}}$, soit :

$$l'_{11} = \frac{l_{11} + l_{22}}{2} + \frac{l_{11} - l_{22}}{2} \cos 2\theta + l_{12} \sin 2\theta$$

$$l'_{22} = \frac{l_{11} + l_{22}}{2} - \frac{l_{11} - l_{22}}{2} \cos 2\theta - l_{12} \sin 2\theta$$

$$l'_{12} = -\frac{l_{11} - l_{22}}{2} \sin 2\theta + l_{12} \cos 2\theta$$

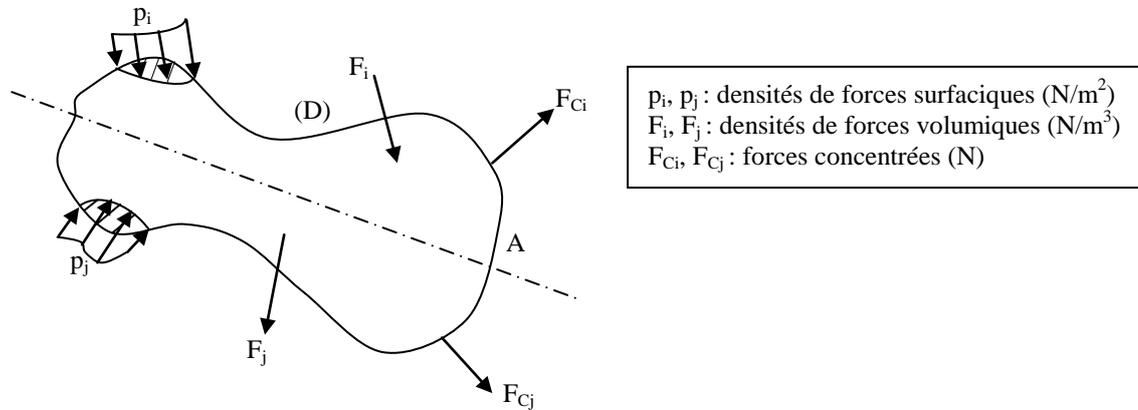
Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\bar{\bar{L}}' = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre 2 : Tenseur des contraintes

2.1- Vecteur-contrainte et convention de signes :

Soit un système matériel (D), au repos ou en mouvement, de surface limite A et occupant un volume V à la date t.



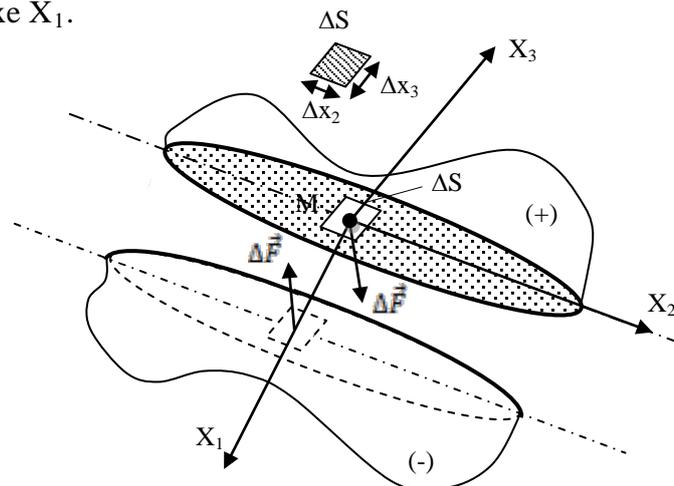
Les forces extérieures à (D) sont de deux sortes :

- forces volumiques (poids, force centrifuge, etc.),
- forces surfaciques (force de frottement).

L'étude des matériaux révèle qu'il existe des forces d'attraction et de répulsion intermoléculaires, forces qui sont en équilibre et qui maintiennent un certain espacement entre les molécules. Sous l'action de sollicitations externes cet équilibre est modifié, ce qui engendre la déformation du matériau. Ces forces engendrées par l'action de ces sollicitations sont appelées des forces internes. Le matériau doit être suffisamment résistant pour supporter l'action des forces internes sans se détériorer.

Nous nous contenterons de faire l'analyse des forces internes sur un élément infinitésimal mais suffisamment grand pour satisfaire les hypothèses de continuité, d'homogénéité et d'isotropie.

Pour déterminer les forces internes en un point (M), sectionnons le corps (D) selon un plan normal, par exemple, à l'axe X_1 .



Dans la section de la partie (+), des forces internes agissent en tout point et varient en intensité et en direction d'un point à l'autre. Divisons cette surface en un grand nombre de petites surfaces et examinons, en particulier, la zone ΔS qui entoure le point M.

On peut admettre qu'une force interne $\Delta \vec{F}$ agit sur l'élément de surface $\Delta S = \Delta x_2 \Delta x_3$; cette force a une direction et une intensité qui dépendent de l'état d'équilibre global qui existe entre les forces internes et les forces externes.

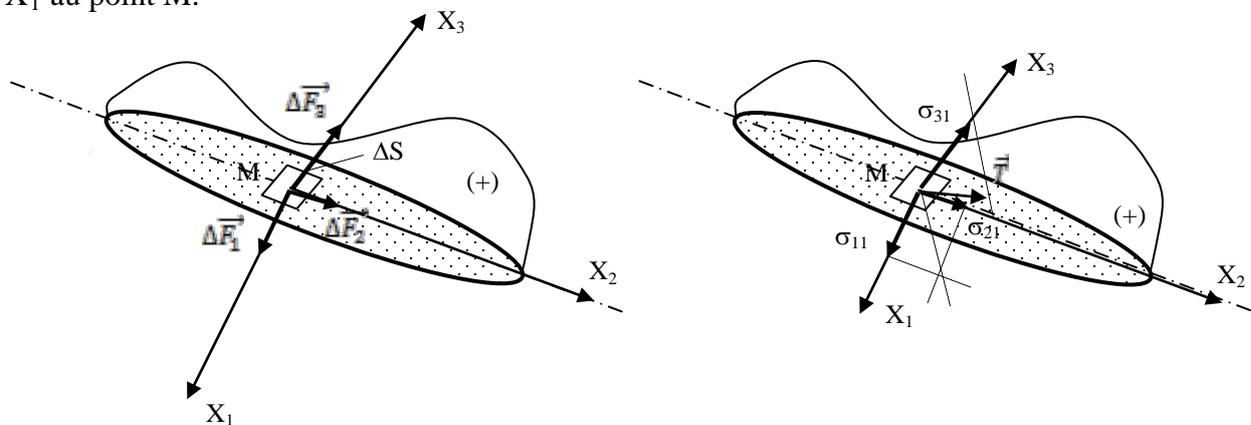
Selon le principe de Newton (l'action = la réaction), la réaction à la force $\Delta\vec{F}$ se trouve appliquée sur le même plan de la partie opposée (-) mais agissant dans la direction opposée avec la même intensité. On assume que la relation $\Delta\vec{F}/\Delta S$ tend vers une valeur limite quand $\Delta S \rightarrow 0$; cette valeur limite est définie comme étant le vecteur-contrainte :

$$\vec{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta S}$$

Le vecteur \vec{T} est fonction que du point M et du vecteur \vec{n} à l'instant t ; nous pouvons l'écrire ainsi :

$$\vec{T}(M, \vec{n}, t) \rightarrow \vec{T}(M, \vec{n})$$

Décomposons le vecteur $\Delta\vec{F}$ selon le système d'axes de référence ; nous obtenons : $\Delta F_1\vec{e}_1$, $\Delta F_2\vec{e}_2$ et $\Delta F_3\vec{e}_3$. L'intensité moyenne de chacune de ces composantes, par unité de surface, est donc : $\Delta\vec{F}_1/\Delta S$, $\Delta\vec{F}_2/\Delta S$, $\Delta\vec{F}_3/\Delta S$. Si ΔS tend vers zéro, ces trois rapports tendent vers des limites qu'on définit comme étant les composantes de contrainte qui agissent sur la face normale à l'axe X_1 au point M.



La signification physique liée au premier rapport $\Delta\vec{F}_1/\Delta S$ est différente de celle relative aux deux autres puisque, dans ce cas, la force interne agit dans la direction normale à la face considérée. On appelle ce premier rapport contrainte normale. Dans les deux autres cas, la force agit parallèlement à la face, et on appelle contrainte tangentielle chacune de ces deux autres composantes. Alors, on peut écrire :

$$\sigma_{11} = \vec{T} \cdot \vec{e}_1 \quad \sigma_{21} = \vec{T} \cdot \vec{e}_2 \quad \sigma_{31} = \vec{T} \cdot \vec{e}_3$$

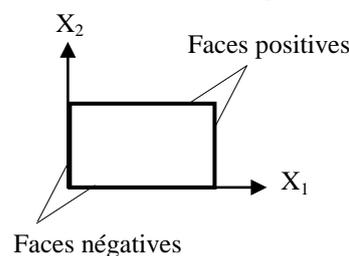
Si le même raisonnement sera adopté selon les axes X_2 et X_3 , on peut associer aux trois faces normales aux axes X_1 , X_2 et X_3 respectivement les vecteurs \vec{T}_1 , \vec{T}_2 et \vec{T}_3 .

Les contraintes associées à ces trois vecteurs-contrainte peuvent être écrites comme suit :

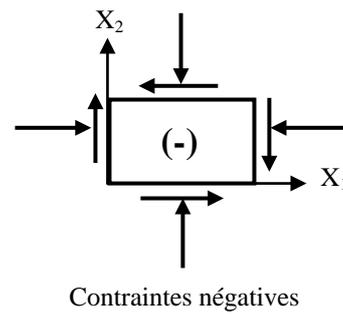
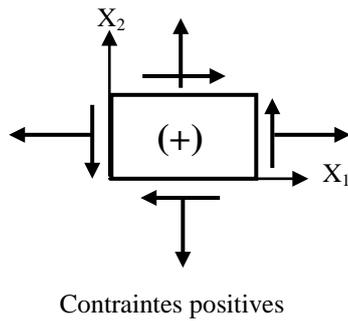
$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \vec{T}_1 \cdot \vec{e}_1 & \sigma_{21} &= \vec{T}_1 \cdot \vec{e}_2 & \sigma_{31} &= \vec{T}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \sigma_{12} &= \vec{T}_2 \cdot \vec{e}_1 & \sigma_{22} &= \vec{T}_2 \cdot \vec{e}_2 & \sigma_{32} &= \vec{T}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \sigma_{13} &= \vec{T}_3 \cdot \vec{e}_1 & \sigma_{23} &= \vec{T}_3 \cdot \vec{e}_2 & \sigma_{33} &= \vec{T}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Un terme de σ_{ij} représente la composante selon la direction i et sur la facette de normale j.

- Une face est positive lorsque sa normale est dirigée dans le sens positif d'un axe.



- Une contrainte est positive lorsqu'elle agit dans le sens positif d'un axe, sur une face positive, ou dans le sens négatif d'un axe, sur une face négative.



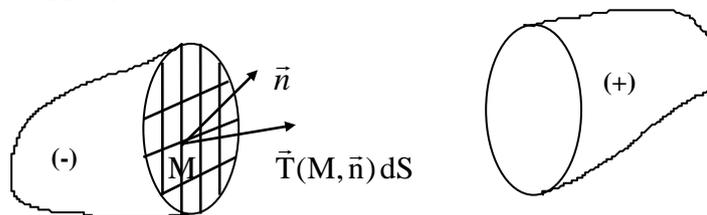
- Pour les mécaniciens, la contrainte est positive en traction et elle est négative en compression.

2.2- Méthode de Cauchy (Orientation de facette) :

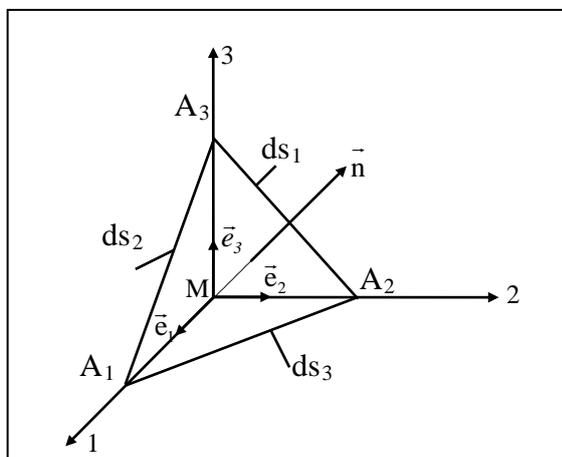
Le vecteur-contrainte dépend linéairement de l'orientation de la facette par le tenseur Euclidien σ_{ij} , soit : $t_i = \sigma_{ij} n_j$

On désigne souvent sous le nom de facette le plan tangent en un point $M \in \Delta S$ muni de la normale sortante.

On postule qu'en un point M quelconque intérieur au volume V de (D) et à travers une aire élémentaire dS de normale \vec{n} , les seuls efforts intérieurs entre les particules sont des efforts de contact. Les efforts exercés par les particules infiniment voisines du côté positif (+) sur les particules infiniment voisines de dS du côté négatif (-) sont supposés représentables par une force élémentaire $\vec{T}(M, \vec{n}) dS$ appliquée en M.



On démontre la dépendance linéaire de $\vec{T}(M, \vec{n})$ en fonction de \vec{n} par le raisonnement dit du petit tétraèdre.



Avec n_1, n_2 et n_3 sont les cosinus directeurs du vecteur normal \vec{n} à la facette inclinée.

Soit $A_1A_2A_3$ d'aire élémentaire dS, on peut écrire :

$$ds_1 = n_1 dS$$

$$ds_2 = n_2 dS$$

$$ds_3 = n_3 dS$$

Les facettes $MA_1A_2, MA_1A_3, MA_2A_3$ et $A_1A_2A_3$ ont pour normales respectives :

$$-\vec{e}_3(0,0,-1)$$

$$-\vec{e}_2(0,-1,0)$$

$$-\vec{e}_1(-1,0,0)$$

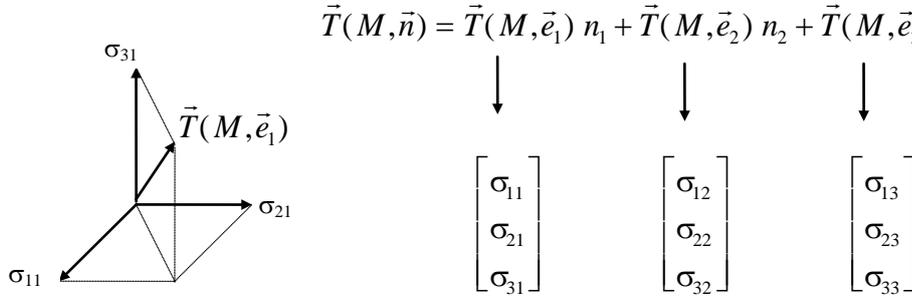
$$\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$$

En écrivant l'équation d'équilibre du point de vue de la résultante globale des efforts au contour, c'est à dire sur les facettes MA_1A_2 , MA_1A_3 , MA_2A_3 et $A_1A_2A_3$ et en négligeant les autres forces, on obtient :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) dS + \vec{T}(M, -\vec{e}_1) ds_1 + \vec{T}(M, -\vec{e}_2) ds_2 + \vec{T}(M, -\vec{e}_3) ds_3 = 0$$

et comme $\vec{T}(M, \vec{n}) = -\vec{T}(M, -\vec{n})$, alors :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) dS = \vec{T}(M, \vec{e}_1) n_1 dS + \vec{T}(M, \vec{e}_2) n_2 dS + \vec{T}(M, \vec{e}_3) n_3 dS$$



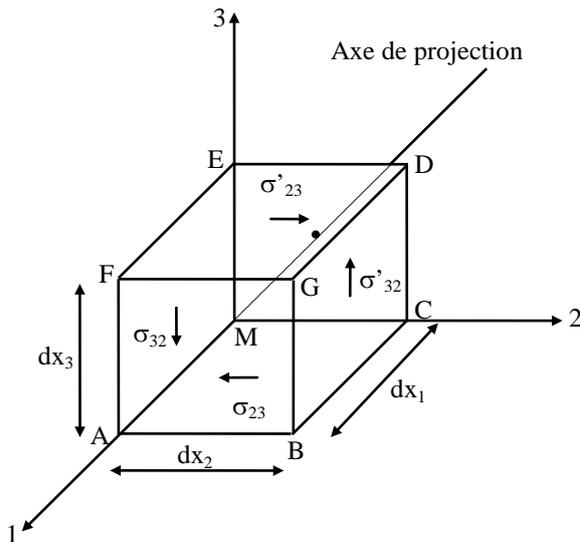
Les σ_{ij} représentent les composantes des vecteurs-contrainte. Si les t_i sont les composantes du vecteur-contrainte associé à la facette de normale \vec{n} , on peut exprimer la relation suivante :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

2.3- Symétrie du tenseur de contraintes et équations d'équilibre :

La symétrie des composantes σ_{ij} et les équations d'équilibre statique ou dynamique sont déterminées par le raisonnement dit du petit "parallélépipède".



Notons que sur deux facettes parallèles séparées par une distance infinitésimale, les intensités des contraintes correspondantes ne sont pas nécessairement les mêmes.

L'équilibre des moments autour de l'axe de projection passant par le centre du parallélépipède donne :

$$\sum_i M_i = 0 \quad [+ \uparrow]$$

$$[\sigma_{32} + \sigma'_{32}] dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} -$$

$$[\sigma_{23} + \sigma'_{23}] dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} = 0$$

avec $\sigma'_{32} = \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} dx_2$

$\sigma'_{23} = \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} dx_3$

En remplaçant σ'_{23} et σ'_{32} par leurs équations respectives, on obtient :

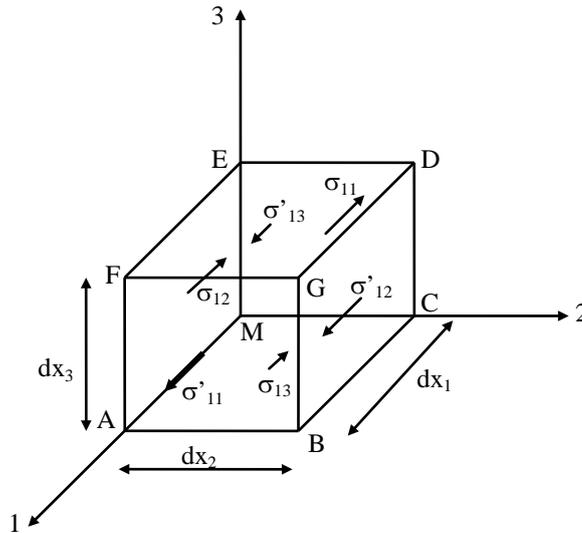
$$\sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23}$$

Ce qui conduit après avoir écrit les deux autres équations d'équilibre des moments selon les deux directions 2 et 3, à formuler que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Par conséquent, nous concluons que le tenseur des contraintes est symétrique.

Nous allons maintenant exprimer les équations d'équilibre dynamique. Considérons le même parallélépipède et notons que des forces volumiques et des forces d'inertie agissent sur ce volume élémentaire. Ecrivons l'équation d'équilibre dynamique selon la direction 1.



$$[\sigma'_{11} - \sigma_{11}] dx_2 dx_3 + [\sigma'_{12} - \sigma_{12}] dx_1 dx_3 + [\sigma'_{13} - \sigma_{13}] dx_1 dx_2 + \rho (f_1 - \gamma_1) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\text{or } \sigma'_{11} = \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$$

$$\sigma'_{12} = \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2$$

$$\sigma'_{13} = \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3$$

Ainsi, nous obtenons l'équation d'équilibre dynamique selon l'axe 1 :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho (f_1 - \gamma_1) = 0$$

En statique le vecteur-accelération vaut 0 et les équations d'équilibre statique selon les trois axes sont résumées dans la formule suivante :

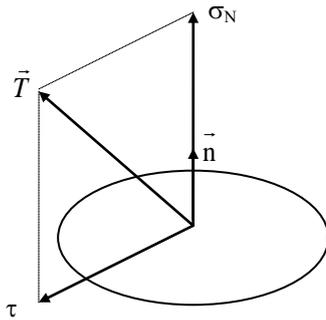
$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

Parfois le vecteur exprimant les forces volumiques intègre les unités de la masse volumique et par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

2.4- Contrainte normale et contrainte tangentielle :

On considère une facette représentée comme suit :



Les composantes σ_N et τ du vecteur-contrainte \vec{T} sont respectivement la contrainte normale et la contrainte tangentielle pour la facette considérée. La contrainte normale est portée par la direction de la normale \vec{n} et la contrainte tangentielle est portée par le plan de la facette.

La contrainte normale peut être écrite selon :

$$\sigma_N = \vec{T} \cdot \vec{n} = t_i n_i$$

La contrainte tangentielle est donnée selon :

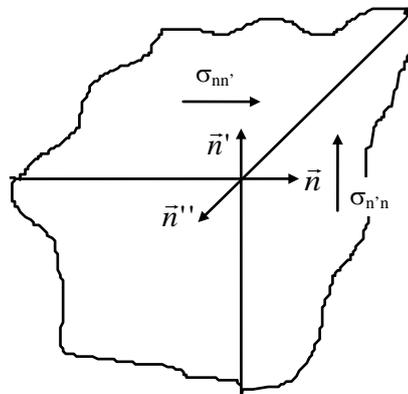
$$|\tau| = \sqrt{\vec{T}^2 - \sigma_N^2}$$

La contrainte tangentielle est aussi appelée contrainte de cisaillement. Lorsque la contrainte tangentielle est nulle, la direction portant \vec{n} est dite direction principale.

2.5- Réciprocité des contraintes :

L'interprétation des composantes du tenseur σ_{ij} et sa symétrie permettent d'énoncer la propriété connue sous le nom de réciprocité des contraintes.

Considérons deux facettes orthogonales quelconques de normales respectives \vec{n} et \vec{n}' . Les directions de ces normales et la direction de l'intersection des ces deux facettes définissent un trièdre permettant de construire une base orthonormée $(\vec{n}, \vec{n}', \vec{n}'')$.



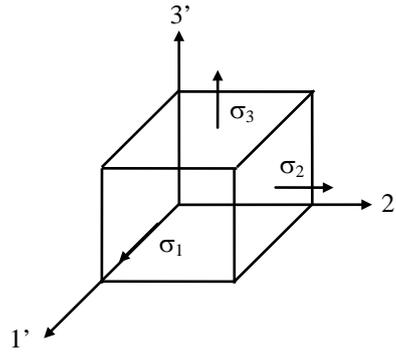
Pour ces deux contraintes tangentielles et d'après la symétrie du tenseur de contraintes, on peut écrire : $\sigma_{nn'} = \sigma_{n'n}$. Ceci traduit que la composante selon \vec{n}' de $(\sigma_{n'n})$ sur la facette de normale \vec{n} est égale à la composante selon \vec{n} de $(\sigma_{nn'})$ sur la facette de normale \vec{n}' et exprime l'égalité entre les composantes algébriques de ces contraintes sur les deux facettes et que les vecteurs associés à ces composantes qui sont portés par \vec{n} et \vec{n}' sont tous deux convergents vers l'intersection des facettes. Cette propriété de réciprocité restera valable même pour des facettes non nécessairement orthogonales entre elles.

2.6- Contraintes principales et directions principales :

La matrice du tenseur de contraintes étant symétrique ; il existe trois directions

orthogonales entre elles telle que la matrice σ_{ij} dans une base prise suivant ces directions est diagonale. Le tenseur σ'_{ij} est donné selon :

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



Les contraintes σ_1 , σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales et les directions correspondantes $1'$, $2'$ et $3'$ à ce tenseur sont dites principales. D'une manière générale et du point de vue mathématique, les contraintes principales sont les valeurs propres de la matrice σ_{ij} et les directions principales sont les vecteurs propres.

On exprime maintenant les équations qui permettent de déterminer les contraintes principales et directions principales.

a- Contraintes principales : L'équation permettant de déterminer les contraintes principales est donnée selon :

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à σ . Ainsi, nous obtenons :

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

où I_1 , I_2 et I_3 sont les invariants du tenseur de contraintes et qui valent :

$$I_1 = \text{tr } \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} + \sigma_{ij}\sigma_{ij})$$

$$I_3 = \det \sigma_{ij} = E_{ijk} \sigma_{i1} \sigma_{j2} \sigma_{k3} = \frac{\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}}{3}$$

Cas particulier : Si nous considérons un repère principal, les invariants sont donnés selon :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Si la résolution de l'équation du 3^{ème} degré donne une racine double, on dit que le tenseur des contraintes est cylindrique.

Si la résolution aboutit à une solution triple, on dit que le tenseur des contraintes est sphérique.

b- Directions principales : Les vecteurs \vec{T} et \vec{n} sont colinéaires, alors on peut écrire :

$$t_i = \sigma_i n_i = \sigma_i \delta_{ij} n_j$$

$$\text{or } t_i = \sigma_{ij} n_j$$

De ces deux équations, on obtient : $\sigma_{ij} n_j = \sigma_i \delta_{ij} n_j \Rightarrow \sigma_{ij} n_j - \sigma_i \delta_{ij} n_j = (\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}) n_j = 0$.

Cette équation permet d'écrire un système à trois équations pour chaque contrainte principale, et de déterminer les composantes du vecteur unitaire de la direction principale considérée.

2.7- Tenseur sphérique et déviateur des contraintes :

Il est courant de décomposer le tenseur des contraintes en ses parties sphérique et déviatorique. On définit la contrainte moyenne σ_m comme suit :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

Le tenseur sphérique peut être écrit selon :

$$s_{ij} = \sigma_m \delta_{ij}$$

Les contraintes principales pour ce tenseur sont égales à σ_m . Toutes les directions de l'espace considéré étant principales pour le tenseur sphérique.

La partie déviatorique du tenseur de contraintes est définie selon :

$$d_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

Les contraintes principales pour ce tenseur sont égales à $\sigma_i - \sigma_m$. La trace du tenseur déviateur est nulle et a les mêmes directions principales que le tenseur des contraintes σ_{ij} .

2.8- Représentation de Mohr des contraintes :

L'idée consiste à utiliser une représentation du vecteur-contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ dans un plan d'axes $o\sigma_N$ et $o\tau$ orthogonaux.

Considérons une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dirigée suivant les directions principales de σ_{ij} ; si n_1, n_2 et n_3 sont les composantes du vecteur normal unitaire \vec{n} , nous pouvons écrire le système à trois équations suivant :

$$\begin{cases} \sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 & (I) \\ \sigma_N^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 & (II) \\ I = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 & (III) \end{cases}$$

Le système est Cramérien par rapport à n_1^2, n_2^2 et n_3^2 et sa résolution donne :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \\ n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

Supposons que l'on ait : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Les inégalités nécessaires $n_1^2 \geq 0, n_2^2 \geq 0, n_3^2 \geq 0$ peuvent être écrites selon :

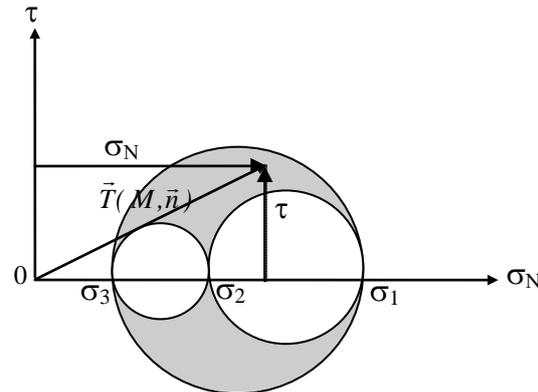
$$\begin{cases} \tau^2 + (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) \geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_3) \leq 0 \\ \tau^2 + (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) \geq 0 \end{cases}$$

De ce système nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{cases}$$

Dans le plan (σ_N, τ) ces équations représentent des cercles $((X-A)^2 + Y^2 \geq R^2)$ schématisés comme suit (pour $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$) :

La zone ombrée représente le domaine admissible. L'extrémité du vecteur-contraînte se trouve à l'intérieur de ce domaine.



Cas particuliers d'état de contraintes :

Si $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $\sigma_1 = \sigma_3$ ou $\sigma_2 = \sigma_3$, l'état de contraintes est représenté par un seul cercle.

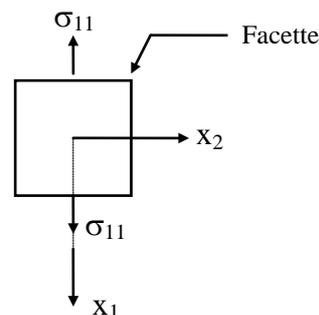
Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, l'état de contraintes est représenté par un point.

2.8- États de contraintes remarquables :

a- État de contraintes uniaxial : C'est l'état que l'on tente de réaliser dans une éprouvette lors d'une expérience de traction ou de compression simple.

Deux contraintes principales sont nulles ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) et $\sigma_1 = \sigma_{11}$ est positive (traction) ou négative (compression).

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

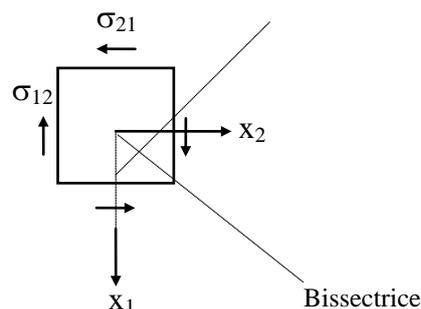


La direction x_1 est principale.

b- État de cisaillement pur : Il existe des cisaillements selon les directions x_1 et x_2 .

Une contrainte principale est nulle $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_{12}$ et $\sigma_2 = -\sigma_{12}$.

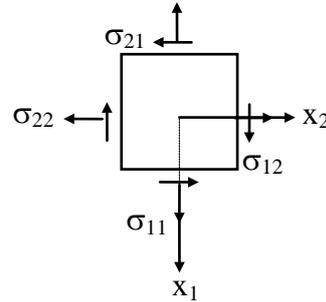
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Les bissectrices des axes x_1 et x_2 sont des directions principales.

c- État plan de contraintes : Il se présente des tractions ou compressions et des cisaillements selon les axes x_1 et x_2 . Une contrainte principale est nulle $\sigma_3 = 0$.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



On doit déterminer deux contraintes principales σ_1 et σ_2 et deux directions principales.

d- État de tension ou de compression hydrostatique : Dans ce cas les trois contraintes principales sont égales ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$) et toutes les directions sont principales.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Chapitre 3 : Tenseur des déformations

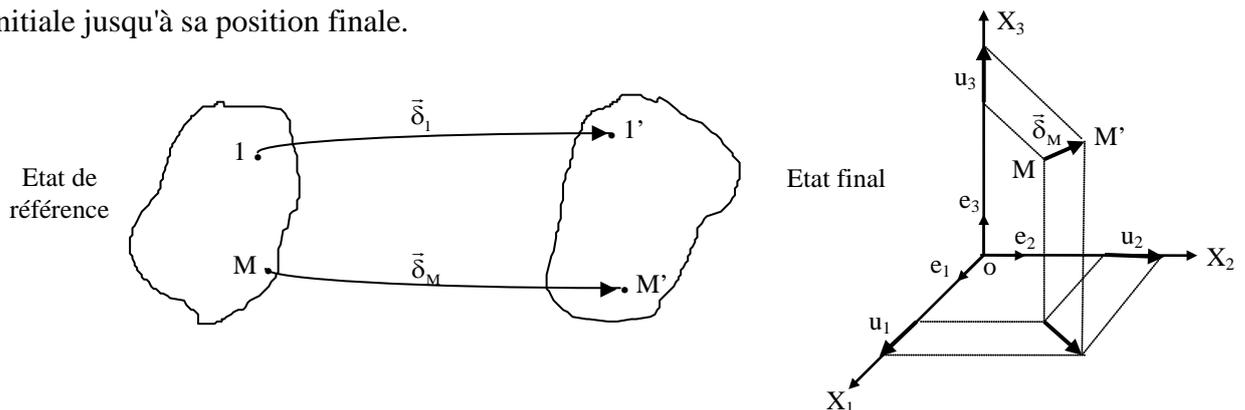
3.1. Définition : Sous l'action de forces extérieures ou de changement de température, un corps déformable réagit de telle sorte que chacun de ses points se déplace dans l'espace.

Ces déplacements peuvent être répartis en deux catégories :

- Mouvement rigide, c'est à dire translation ou rotation ; ces déplacements petits ou grands font l'objet de la cinématique.

- Mouvement relatif d'un point par rapport à un autre du même corps, on dit que le corps s'est déformé. C'est ce type de mouvement auquel nous nous intéressons dans ce chapitre ; à cet effet, nous devons introduire une grandeur dite "la déformation" qui correspond à ce phénomène.

3.2. Déplacements : Soit un corps quelconque lié à un repère $(o, X_1 X_2 X_3)$ qui passe d'un état de référence (état d'équilibre initial) à un état d'équilibre final après l'avoir déformé. On peut représenter par un vecteur $(\bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_M)$ le déplacement de tout point $(1, \dots, M)$ depuis sa position initiale jusqu'à sa position finale.



Nous pouvons décomposer le vecteur qui représente le déplacement du point (M) par rapport au système de référence $(o, X_1 X_2 X_3)$ comme suit :

$$\vec{U}(M) = \bar{\delta}_M = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

Où u_1, u_2 et u_3 sont les composantes du vecteur $\bar{\delta}_M$ et sont fonctions de x_1, x_2 et x_3 ; c'est-à-dire :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$$

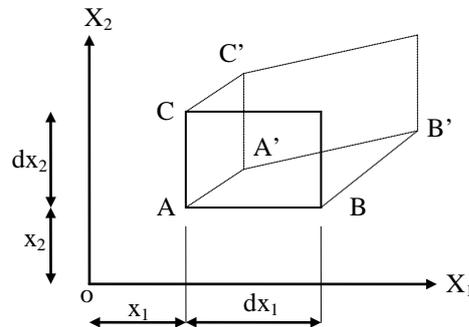
$$u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$$

3.3. Déformations dans un plan : Nous définissons maintenant une grandeur qui traduit adéquatement les mouvements relatifs. Nous supposons un état de déformation uniforme (c'est à dire qu'une ligne droite reste droite après déformation ; ce qui constitue une approximation

raisonnable lorsqu'on considère des points voisins séparés les uns des autres par une distance infinitésimale) et nous nous limitons à l'état plan en ce qui concerne le mouvement.

Etudions la déformation qui se produit autour d'un point A de coordonnées x_1 et x_2 .



Puisque, par définition, la déformation implique des mouvements relatifs, nous devons considérer des points voisins de A. Nous choisissons deux points B et C situés respectivement à des distances dx_1 et dx_2 du point A.

On peut définir la déformation qui se produit autour de A en répondant à deux questions qui sont :

- Quelle variation de longueur affecte les segments AB et AC ?
- Quelle variation d'angle se produit entre les segments AB et AC ?

À noter que la déformation concernant la variation de longueur est dite déformation normale et celle de variation d'angle est dite déformation de cisaillement.

3.3.1. Déformation normale : est la variation relative de longueur d'une ligne donnée, on peut donc écrire :

$$\varepsilon_{11} = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB}$$

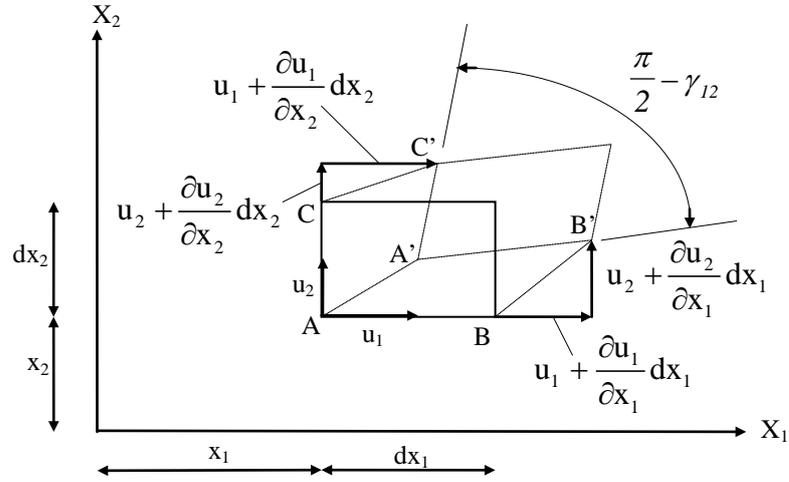
$$\varepsilon_{22} = \lim_{dx_2 \rightarrow 0} \frac{A'C' - AC}{AC}$$

3.3.2. Déformation de cisaillement : est la tangente de l'angle qui représente la variation d'angle entre les deux lignes, on peut écrire :

$$\gamma_{12} = \lim_{\substack{dx_1 \rightarrow 0 \\ dx_2 \rightarrow 0}} \text{tg}(\hat{BAC} - \hat{B'A'C'})$$

3.4. Relation entre déplacements et déformations dans un état plan de déformations : Soient u_1 et u_2 les composantes du vecteur déplacement de A vers A' (selon les axes X_1 et X_2). Les composantes du vecteur déplacement du point B situé initialement à une distance dx_1 de A dans la direction x_1 sont :

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \quad \text{et} \quad u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \quad (\text{Développement en série de Taylor})$$



$$\varepsilon_{11} = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{A'B' - AB}{AB} = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{\left[\left(x_1 + dx_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - (x_1 + u_1) \right] - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \lim_{dx_2 \rightarrow 0} \frac{A'C' - AC}{AC} = \lim_{dx_2 \rightarrow 0} \frac{\left[\left(x_2 + dx_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \right) - (x_2 + u_2) \right] - dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

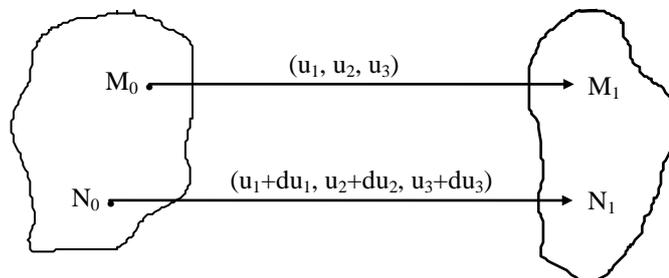
$$\gamma_{12} = \lim_{\substack{dx_1 \rightarrow 0 \\ dx_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{B'A'C'} \right) = \lim_{\substack{dx_1 \rightarrow 0 \\ dx_2 \rightarrow 0}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1(1 + \varepsilon_{11})} - \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2(1 + \varepsilon_{22})} \right) \right] = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Avec : $\varepsilon_{11} \ll 1$ et $\varepsilon_{22} \ll 1$.

Les déformations dépendent des taux de variations des déplacements et non pas des valeurs de ces déplacements.

Soit une particule M occupant à l'état de référence une position M_0 et dans l'état final une position M_1 . Soient u_1 , u_2 et u_3 les composantes du vecteur déplacement M_0M_1 de la particule M. Une particule N voisine de M occupe dans les états initial et final les positions N_0 et N_1 ; son vecteur de déplacement N_0N_1 a pour composantes :

$$u_1 + du_1, \quad u_2 + du_2, \quad u_3 + du_3$$



Le vecteur $d\bar{u}$ est dû aux accroissements (dx_1, dx_2, dx_3) :

$$\begin{cases} u_1 + du_1 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ u_2 + du_2 = u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ u_3 + du_3 = u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_1 + du_1 \\ u_2 + du_2 \\ u_3 + du_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_0 \vec{N}_1 = \vec{M}_0 \vec{M}_1 + \text{grad } \vec{M}_0 \vec{M}_1 \cdot \vec{M}_0 \vec{N}_0$$

$$\text{grad } \vec{M}_0 \vec{M}_1 = [\varepsilon] + [\Omega]$$

Symétrique Antisymétrique

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \text{grad } \vec{M}_0 \vec{M}_1 + \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{M}_0 \vec{M}_1 \right]^t$$

$$[\Omega] = \frac{1}{2} \text{grad } \vec{M}_0 \vec{M}_1 - \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{M}_0 \vec{M}_1 \right]^t$$

$$\vec{N}_0 \vec{N}_1 = \vec{M}_0 \vec{M}_1 + [\Omega] \vec{M}_0 \vec{N}_0 + [\varepsilon] \vec{M}_0 \vec{N}_0$$

Translation
de M_0 à M_1

Rotation autour
du point M_0

Déformation
pure

Nous considérons un repère $(M, X_1 X_2 X_3)$ pour le quel la translation et la rotation sont nulles

(mouvements rigides) ; par conséquent, nous pouvons écrire : $\vec{N}_0 \vec{N}_1 = [\varepsilon] \vec{M}_0 \vec{N}_0$

$$\vec{N}_0 \vec{N}_1 = \begin{cases} du_1 = \varepsilon_{11} dx_1 + \varepsilon_{12} dx_2 + \varepsilon_{13} dx_3 \\ du_2 = \varepsilon_{21} dx_1 + \varepsilon_{22} dx_2 + \varepsilon_{23} dx_3 \\ du_3 = \varepsilon_{31} dx_1 + \varepsilon_{32} dx_2 + \varepsilon_{33} dx_3 \end{cases}$$

$$[\varepsilon] = \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Notons que le tenseur de déformations est symétrique : $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

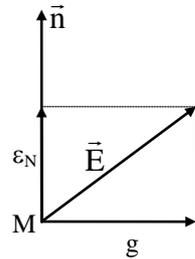
On remarque que : $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$; $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$

et $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)$

Les composantes ε_{ij} ($i = j$) traduisent des variations relatives de longueurs et les composantes ε_{ij} ($i \neq j$) des variations d'angles.

En notation indicielle, on peut écrire : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$.

3.5. Décomposition de la déformation en dilatation et en glissement : Comme pour le vecteur-contrainte, le vecteur-déformation peut être décomposé suivant la direction \vec{n} et la direction tangentielle (normale à \vec{n}).



$$E_i = \varepsilon_{ij} n_j$$

ε_n est appelée dilatation linéaire relative et g le taux de glissement :
$$\begin{cases} \varepsilon_N = n_i \varepsilon_{ij} n_j \\ g^2 = \vec{E}^2 - \varepsilon_N^2 \end{cases}$$

3.6. Dilatations et directions principales : Il existe une base propre dans la quelle la matrice ε_{ij} est diagonale ; c'est à dire :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Les grandeurs ε_1 , ε_2 et ε_3 sont obtenues de l'équation caractéristique suivante :

$$-\varepsilon^3 + D_1 \varepsilon^2 - D_2 \varepsilon + D_3 = 0$$

$$\text{avec : } D_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad D_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad D_3 = \det \varepsilon_{ij}$$

Les directions principales s'obtiennent par : $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_j = 0$.

3.7. Décomposition en parties sphérique et déviatrice : Comme pour le tenseur des contraintes, on peut associer au tenseur de déformations les tenseurs sphérique et déviatorique définis par :

$$\varepsilon_{ij}^s = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \frac{D_1}{3}$$

Pour le tenseur sphérique, toutes les directions sont principales.

$$\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij}$$

Les déformations principales pour ce tenseur sont : $\varepsilon_1 - \varepsilon_m$, $\varepsilon_2 - \varepsilon_m$ et $\varepsilon_3 - \varepsilon_m$; quant aux directions principales sont celles de ε_{ij} .

3.8. Représentation géométrique de l'état de déformation en un point : Pour le tenseur de contraintes, nous avons considéré le cercle de Mohr ; par contre, pour le tenseur de déformation, nous allons considérer l'ellipsoïde de Lamé.

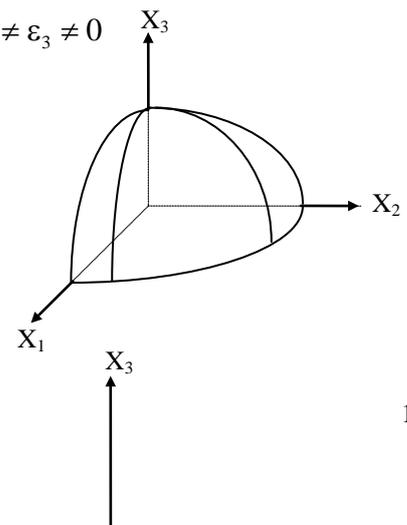
Nous avons le vecteur-déformation exprimé dans un repère principal selon :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_1 = \varepsilon_1 n_1 \\ E_2 = \varepsilon_2 n_2 \\ E_3 = \varepsilon_3 n_3 \end{cases} \quad \text{avec} \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1 = \frac{E_1}{\varepsilon_1}, n_2 = \frac{E_2}{\varepsilon_2}, n_3 = \frac{E_3}{\varepsilon_3} \quad \text{si } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3 \neq 0$$

$$\frac{E_1^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{E_2^2}{\varepsilon_2^2} + \frac{E_3^2}{\varepsilon_3^2} = 1$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde dit ellipsoïde de Lamé de la déformation.



Si une dilatation principale est nulle ; par exemple $\varepsilon_3 = 0$,

$$\text{on a : } n_1^2 + n_2^2 = 1 - n_3^2 \leq 1$$

$$\text{Donc on peut écrire : } \frac{E_1^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{E_2^2}{\varepsilon_2^2} \leq 1$$

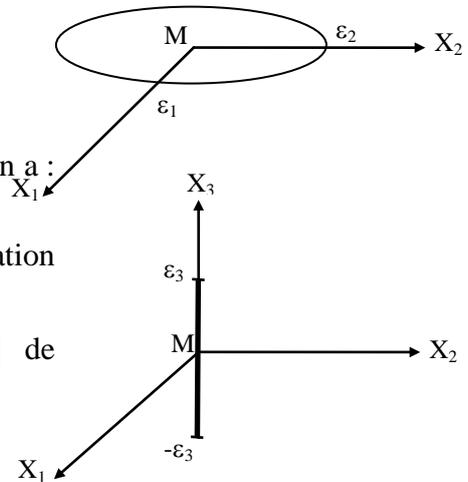
La représentation géométrique est une ellipse.

Si deux dilatations principales sont nulles : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, on a :

$$n_3^2 = 1 - (n_1^2 + n_2^2) \leq 1. \text{ Donc } \frac{E_3^2}{\varepsilon_3^2} \leq 1 \text{ et la représentation}$$

géométrique correspondante est un segment $[-\varepsilon_3, \varepsilon_3]$ de

l'axe x_3 .



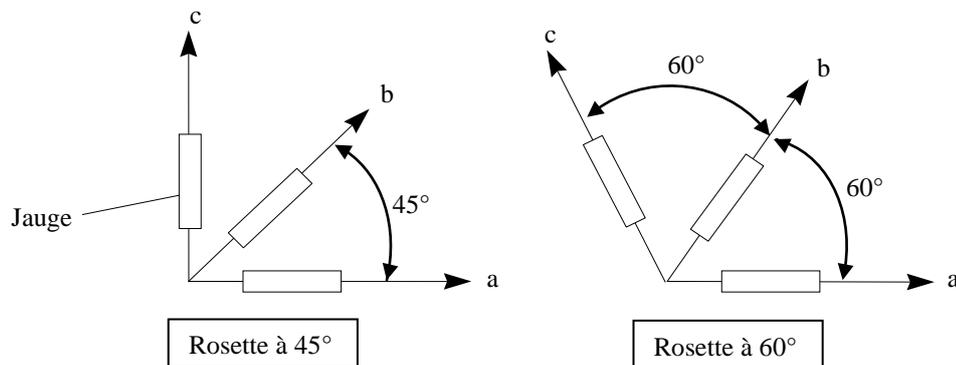
3.9. Mesure des déformations : Contrairement aux contraintes (qu'on ne peut pas mesurer directement), la déformation en un point peut être évaluée expérimentalement.

Une jauge de déformation, collée à la surface sur la quelle on désire mesurer la déformation, suit l'allongement (ou l'accourcissement) du matériau ; on peut ainsi obtenir avec précision la déformation normale selon la direction correspondante (par exemple ε_{11} selon la direction X_1).

Lorsqu'on connaît la direction de la déformation qu'on désire mesurer (en général, on recherche la déformation maximale), une seule jauge suffit. Dans le cas général de déformation dans un plan, il faut mesurer trois déformations pour connaître exactement l'état de déformation en un point : ε_{11} , ε_{22} et ε_{12} .

Une jauge mesure qu'une déformation normale et il n'existe aucune méthode simple qui permet de mesurer une déformation de cisaillement. Cela est toute fois sans conséquences puisque la mesure de trois déformations normales distinctes suffit à fournir tous les renseignements utiles.

On appelle cet ensemble de trois jauges une rosette ; pratiquement, il existe différentes sortes de rosettes celle à 45° , celle à 60° , à 120° , etc.



Nous allons maintenant exprimer l'état de déformation plan en fonction des trois mesures ε_a , ε_b et ε_c en un point considéré.

Nous avons les déformations exprimées dans un autre repère ayant fait une rotation d'un angle θ par rapport au repère de base.

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\theta + \varepsilon_{12} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{22} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} - \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\theta - \varepsilon_{12} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon'_{12} = -\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{12} \cos 2\theta$$

En supposant que l'axe "a" coïncide avec l'axe X_1 ; dans ce cas pour une rosette à 45° l'axe "c" coïncide avec l'axe X_2 . Donc, nous pouvons écrire :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_a \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_c$$

Pour déterminer ε_{12} , on remplace dans ε'_{11} l'angle θ par 45° ; soit :

$$\varepsilon'_{11} = \varepsilon_b = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + 0 + \varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2}$$

Nous pouvons aussi exprimer les dilatations principales comme suit :

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2}\right)^2 + \varepsilon_{12}^2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}{2}}$$

3.10. Equations de compatibilité des déformations : La déformation rapportée à un repère orthonormé est caractérisée par le champ du tenseur symétrique ε_{ij} défini sur le domaine occupé. C'est-à-dire par les six composantes de ε_{ij} fonctions des coordonnées du point considéré.

Etant donné le vecteur de déplacement $\vec{U} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T$ défini en tout point du domaine considéré, nous pouvons construire le tenseur des déformations comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Dans certains problèmes, on pose la question suivante : Est-il possible de se donner des fonctions arbitraires ε_{ij} et d'en déduire les trois fonctions u_i ? La réponse est non.

Pour que le calcul soit possible, les six composantes du tenseur de déformations doivent vérifier les conditions appelées équations de compatibilité ou d'intégrabilité du tenseur de déformations.

Nous avons : $\vec{\text{grad}} \bar{U} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ avec $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

Différentions ω_{ij} par rapport à x_k .

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

On peut aussi écrire : $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right) \right) = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{kj,i}$

Ainsi, on a un système à neuf équations à résoudre. Comme les termes diagonaux du tenseur ω_{ij} sont nulles, il nous reste qu'un système à six équations.

Du point de vue mathématique, ces équations sont résolubles si et seulement si les différentielles sont totales ; c'est à dire les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{kj,i} \right), j = \left(\varepsilon_{ij,j} - \varepsilon_{jj,i} \right), k$$

$$\varepsilon_{jj,ik} = \varepsilon_{ij,jk} + \varepsilon_{kj,ij} - \varepsilon_{ik,jj}$$

Ces équations sont dites de compatibilité ou d'intégrabilité des déformations. Elles peuvent être écrites comme suit :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_1}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_1}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_3}$$

Si ces équations sont vérifiées les $d\omega_{ij}$ sont intégrables ; donc, on peut écrire :

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^{(0)} + \int \left(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{kj,i} \right) dx_k$$

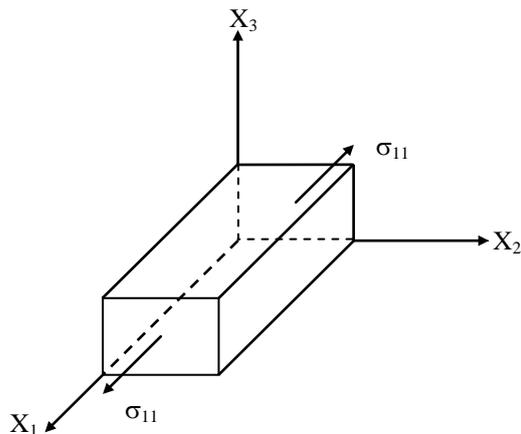
En connaissant les ε_{ij} , on peut déterminer les ω_{ij} , et, par conséquent, les composantes du vecteur déplacement sont : $u_i = u_i(0) + \int (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$.

Chapitre 4 : Lois de comportement

Dans les deux chapitres précédents, nous avons traité les notions de contraintes et de déformations ; aucune relation n'a été établie entre ces deux champs. Les relations écrites sont insuffisantes pour traiter les problèmes pratiques que l'on rencontre. En fait, sous l'action des sollicitations exercées sur un matériau, il devient le siège d'un champ de contraintes et d'un champ de déformations ; ceci implique l'existence d'une relation entre les contraintes et les déformations. Ces relations sont dites lois de comportement ou équations rhéologiques qui dépendent essentiellement du matériau considéré et qui ne peuvent être obtenues ou validées qu'à partir de l'expérience. Aussi, elles contiennent comme paramètres le temps et la température.

4.1. Loi de comportement pour les solides élastiques (Loi de Hooke) :

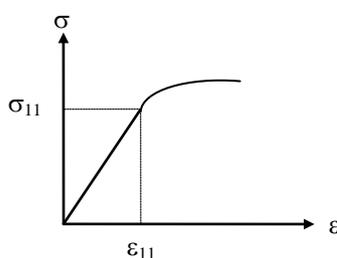
4.1.1. Effets des contraintes normales : Soit un parallélépipède rectangle élémentaire dont les faces sont parallèles aux axes du repère et supposons qu'il est soumis à l'action d'une contrainte normale σ_{11} .



L'expérience a prouvé que dans le cas où le corps est isotrope, les contraintes normales ne déterminent aucune distorsion des angles du parallélépipède considéré. La grandeur de l'extension de l'élément sera donnée par la relation suivante :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

Cette relation traduit la proportionnalité de l'allongement relatif à la contrainte normale.



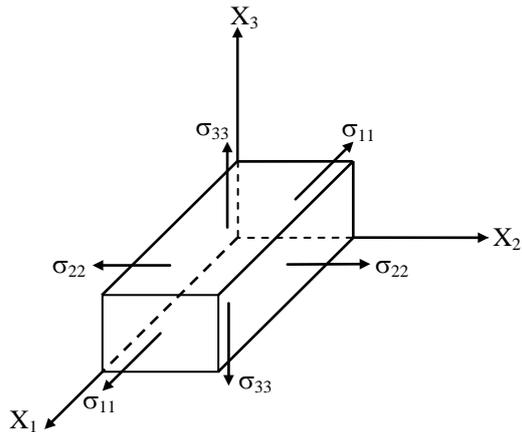
Le coefficient E est dit module d'Young ou module d'élasticité longitudinale ; son unité est le Pascal "Pa".

Expérimentalement, on constate que l'extension de l'élément provoque dans le sens des axes X_2 et X_3 des contractions latérales exprimées par : $\varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$ et $\varepsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$, où ν est une constante relative au matériau appelée coefficient de Poisson.

Le tableau qui suit donne certaines valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson :

Matériau	E (10^9 Pa)	ν
Fer	200	0,24
Cuivre	100	0,33
Plexiglas	2,90	0,40

Si l'élément considéré est soumis à l'action de contraintes normales dans les trois directions de σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} , on retrouve le tableau suivant :



	due à σ_{11}	due à σ_{22}	due à σ_{33}
ε_{11}	$\frac{\sigma_{11}}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_{22}}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_{33}}{E}$
ε_{22}	$-\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$	$\frac{\sigma_{22}}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_{33}}{E}$
ε_{33}	$-\nu \frac{\sigma_{11}}{E}$	$-\nu \frac{\sigma_{22}}{E}$	$\frac{\sigma_{33}}{E}$

La linéarité des relations précédentes, nous permet d'obtenir par superposition les composantes des déformations produites par chacune des contraintes.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \\ \varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \end{cases}$$

Avec : $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$.

4.1.2. Effets des contraintes tangentielles : De même, il a été constaté expérimentalement que les glissements sont liés aux contraintes tangentielles par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \quad \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \quad \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}$$

Donc, d'une manière générale, nous pouvons écrire : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$.

Cette dernière expression admet pour équation duale ce qui suit : $\sigma_{ij} = 2\bar{\mu}\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$; avec $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Les coefficients λ et $\bar{\mu}$ sont dits les coefficients de Lamé et sont exprimés en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson comme suit :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \bar{\mu} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

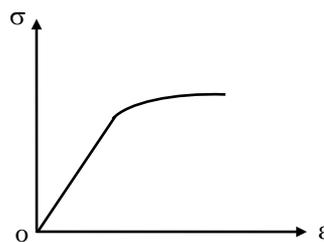
On peut aussi écrire que : $\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\bar{\mu})\varepsilon_{kk} = K\varepsilon_{kk} = \frac{E}{(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}$, où K est appelé module de compression.

4.2. Etudes expérimentales du comportement :

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en compression simples à température constante. Parmi ces essais nous rencontrons :

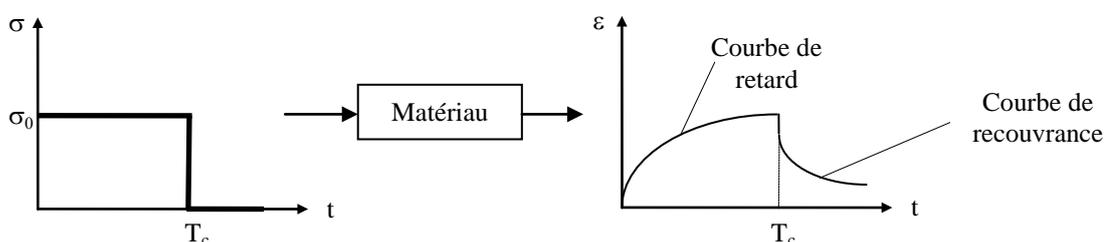
4.2.1. Essai d'érouissage en traction ou compression simples :

C'est l'essai le plus courant où l'éprouvette est soumise à une déformation à vitesse constante. La réponse est représentée par la variation de la contrainte σ en fonction de la déformation ε .



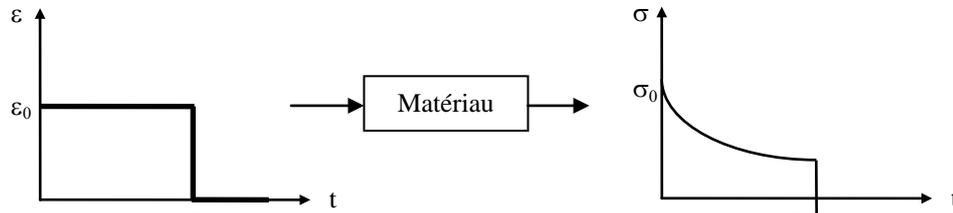
4.2.2. Essai de fluage en traction ou compression simples (expérience du retard) :

L'éprouvette est soumise à un échelon de contrainte σ_0 durant un intervalle de temps T_c . La variation de la déformation au cours du temps est tracée comme l'indique la figure qui suit.



4.2.3. Essai de relaxation en traction ou compression simples :

C'est l'essai dual du précédent. Dans ce cas, l'éprouvette est soumise à un échelon de déformation ; la contrainte évolue dans le temps comme il est indiqué sur la figure suivante :



La contrainte initialement portée à la valeur σ_0 décroît au cours du temps jusqu'à une valeur d'équilibre ; ce phénomène est appelé relaxation de la contrainte.

En pratique, il existe d'autres essais tels que les :

- essais d'écrouissage-relaxation multiples,
- essais cycliques,
- essais de rupture.

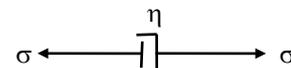
4.3. Modèles analogiques :

Les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses aux sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Les éléments les plus utilisés sont les suivants :

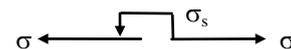
1- Le ressort qui caractérise l'élasticité linéaire :



2- L'amortisseur qui schématise la viscosité linéaire :



3- Le patin qui schématise un seuil de contrainte :



$$-\sigma_s < \sigma < \sigma_s$$

4- La butée qui schématise un seuil de déformation :



$$-\epsilon_s < \epsilon < \epsilon_s$$

Ces éléments peuvent être mis en série ou en parallèle ou en groupements mixtes :

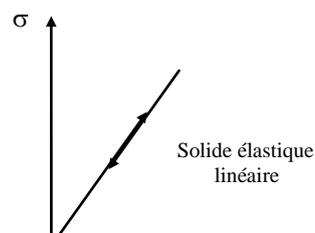
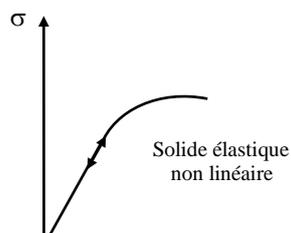
- en série : $\epsilon = \sum \epsilon_i$ et $\sigma = \sigma_i$

- en parallèle : $\sigma = \sum \sigma_i$ et $\epsilon = \epsilon_i$

4.4. Classification rhéologique des matériaux :

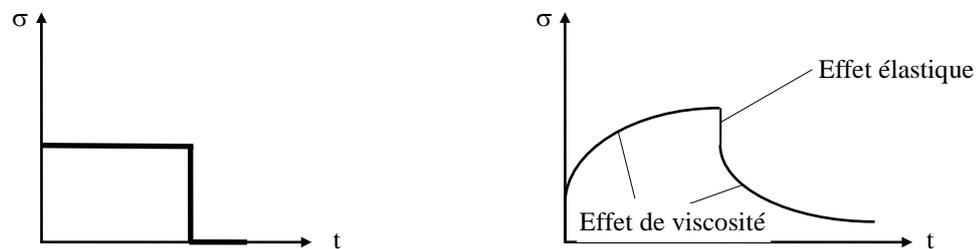
4.4.1. Solides élastiques :

A- Solides parfaitement élastiques : Pour un solide parfaitement élastique (solide de Hooke) si l'on supprime la cause de la contrainte ou de déformation, le solide retrouve instantanément son état initial.

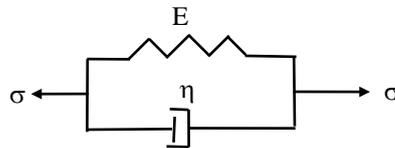


Le modèle analogique correspondant au solide de Hooke est le ressort. C'est le comportement de certains matériaux tels que : les métaux et le béton dont la contrainte subie est inférieure à la limite élastique.

B- Solides viscoélastiques : Le solide viscoélastique présente globalement les caractéristiques du solide parfaitement élastique et l'effet de viscosité qui se traduit par des régimes transitoires.



Le modèle analogique de ce comportement est le modèle de Kelvin-Voigt représenté par un ressort et un amortisseur en parallèle.

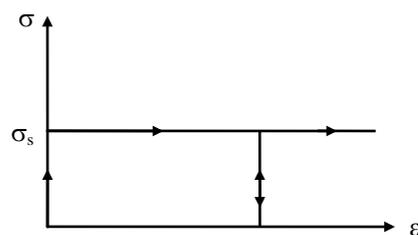


C'est le comportement du caoutchouc par exemple.

4.4.2. Solides plastiques :

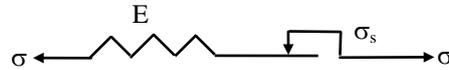
Ce sont des solides qui après cessation des sollicitations présentent des déformations permanentes ou résiduelles.

A- Solides parfaitement plastiques : La déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte σ_s et arbitraire pour cette valeur quelque soit la vitesse de déformation (essai de traction ou compression) ou le temps (essai de retard ou relaxation).



Le modèle analogique est le patin (ou modèle de Saint Venant).

B- Solides élastoplastiques : La déformation est élastique linéaire en deçà du seuil σ_s et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur de contrainte. Le modèle analogique du solide parfaitement plastique est le corps de Prandtl schématisé par un ressort en série avec un patin.

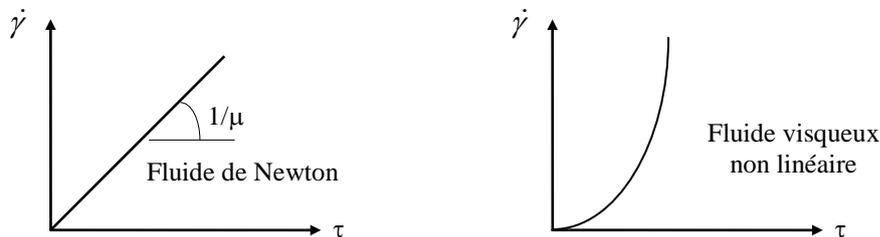


C'est le comportement des aciers à faible teneur de carbone qui présentent un palier sur la courbe d'essai de traction (écrouissage).

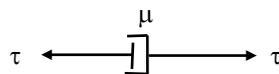
C- Solides viscoplastiques : Ces solides présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations (comme les solides plastiques) mais qui subissent un écoulement fonction du temps sous les sollicitations. C'est le comportement des métaux et alliages à température moyenne et élevée.

4.4.3. Comportement des fluides :

A- Fluides Newtoniens ou parfaitement visqueux : Le modèle linéaire visqueux est l'idéalisation la plus simple de déformation dépendant du temps. Elle consiste à supposer que la vitesse de déformation est proportionnelle à la contrainte.

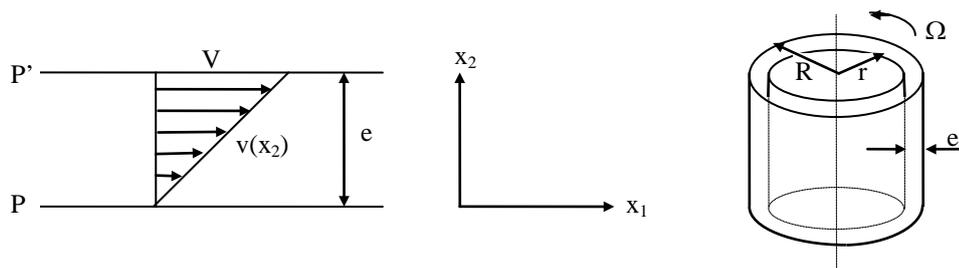


Le modèle analogique correspondant au fluide Newtonien est l'amortisseur linéaire.



Expérience de Couette : Considérons deux cylindres coaxiaux de rayons peu différents ; l'espace annulaire étant rempli du fluide étudié.

Le cylindre extérieur est entraîné par un moteur électrique à vitesse angulaire constante Ω . Si $e \ll r$, on peut développer l'espace annulaire et raisonner sur des plans P et P'.



Le plan P' est animé d'un mouvement de translation de vitesse $V = v(x_2 = e) = \Omega R$ par rapport au plan P maintenu fixe. Sous l'action du frottement, il s'établit dans le fluide un état de mouvement tel que : les couches qui se trouvent en contact avec les plaques ont la même vitesse qu'elles (adhérence) tandis que les couches intermédiaires glissent les unes sur les autres avec des vitesses proportionnelles à leur distance de la paroi fixe.

On définit la contrainte de frottement tangentielle τ par la loi de Newton : $\tau = \mu \frac{\partial v(x_2)}{\partial x_2} = \mu \dot{\gamma}$.

Le gradient $\dot{\gamma}$ est la vitesse de cisaillement et μ est la viscosité dynamique qui est liée à la viscosité cinématique par : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Notons a priori que μ est une constante indépendante de $\dot{\gamma}$.

C'est le cas des liquides usuels et solutions de faible poids moléculaire.

B- Fluides non Newtoniens : On retrouve les fluides :

- dilatants (rhéoépaississants)
- pseudo-plastiques (rhéofluidifiants)
- plastiques (Binghamiens)
- viscoplastiques (Schwedoff).

✓ Pour les fluides dilatants et pseudo-plastiques, on a : $\tau = \mu_a \dot{\gamma}$ avec $\mu_a = f(\dot{\gamma})$ est dite viscosité apparente.

Pour les fluides dilatants, la viscosité augmente avec l'augmentation du gradient. Par contre pour les fluides pseudo-plastiques, elle diminue.

C'est le comportement des ciments, colles, etc.

✓ L'équation rhéologique pour les fluides plastiques et viscoplastiques est donnée selon :

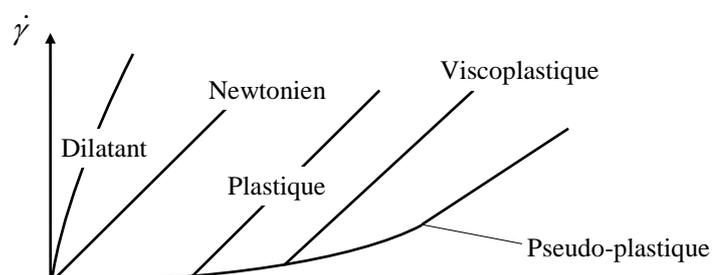
$$\tau = \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma}$$

τ_0 : tension de cisaillement qui correspond à la force minimale pour provoquer l'écoulement,

μ_p : viscosité plastique qui correspond à la pente représentative de la courbe τ en fonction de $\dot{\gamma}$.

C'est le comportement des suspensions de particules solides, boues de forage, etc.

La figure qui suit schématise les différents comportements des fluides.





4.5. Effet du changement de la température sur les déformations :

L'effet de changement de la température sur un matériau peut se manifester de deux façons :

- Par une modification des propriétés du matériau ; par exemple, à des températures élevées, le module d'élasticité E peut diminuer. Cependant, cela requiert un changement de température important (une variation d'une centaine de degrés Celsius n'a que peu de conséquences sauf si elle entraîne une température dont la valeur dépasse la moitié de la température de fusion du matériau).
- Par des déformations thermiques qui varient de façon à peu près linéaire en fonction de T . Pour un matériau isotrope, les déformations thermiques correspondent à des allongements (ou à des raccourcissements pour une diminution de température) égaux dans toutes les directions sans aucune déformation de cisaillement. L'ensemble des déformations thermiques peut être exprimé ainsi :

$$(\varepsilon_{11})_T = (\varepsilon_{22})_T = (\varepsilon_{33})_T = \alpha T$$

Où α est le coefficient de dilatation thermique.

Les relations déformations-contraintes-température peuvent être écrites pour un solide élastique comme suit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha T$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha T$$

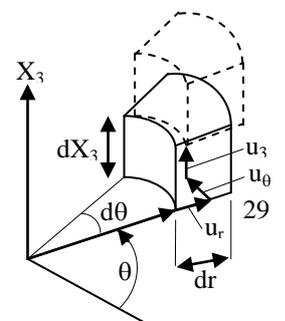
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha T$$

$$(\varepsilon_{12})_T = (\varepsilon_{13})_T = (\varepsilon_{23})_T = 0$$

4.6. Expression des équations en coordonnées cylindriques :

Les équations exprimées en coordonnées cylindriques sont différentes de celles écrites selon les coordonnées cartésiennes. En adoptant la convention habituelle concernant les déplacements (u_r dans la direction radiale, u_θ dans la direction circonférentielle, et u_3 dans la direction X_3), les déformations peuvent être exprimées comme suit :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$



$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad \varepsilon_{\theta 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial X_3} \right) \quad \varepsilon_{r3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial r} \right)$$

Les équations d'équilibre sont données selon les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial X_3} + f_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta 3}}{\partial X_3} + f_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta 3}}{\partial \theta} + \sigma_{r3} \right) + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} + f_3 = 0 \end{cases}$$

Les équations de comportement pour un solide élastique sont exprimées comme suit :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{33})] + \alpha T$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{33})] + \alpha T$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] + \alpha T$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta} \quad \varepsilon_{r3} = \frac{1}{2G} \sigma_{r3} \quad \varepsilon_{\theta 3} = \frac{1}{2G} \sigma_{\theta 3}$$

Pour état plan, on peut écrire :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}] \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}] \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}] \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}] \quad \sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta}$$

Chapitre 5 : Energie de déformation et critères de limite élastique

5-1- Energie potentielle élastique :

Lorsqu'on fait passer un corps élastique d'un état initial (1) à un état final (2) par application d'un ensemble d'actions extérieures, on peut affirmer que le travail des forces extérieures est opposé au travail des forces intérieures. Le principe de conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$dQ + dW_e = dK + dU \longrightarrow \text{Variation de l'énergie interne}$$

\swarrow
*Quantité de la chaleur
fournie par l'extérieur*

\downarrow
*Travail des forces
extérieures*

\searrow
*Variation de l'énergie
cinétique*

En supposant que les sollicitations extérieures sont appliquées progressivement de manière à n'introduire que des déplacements à vitesse très lente ($dK = 0$) et que le frottement est négligeable ($dQ = 0$), on peut écrire :

$$dW_e = dU$$

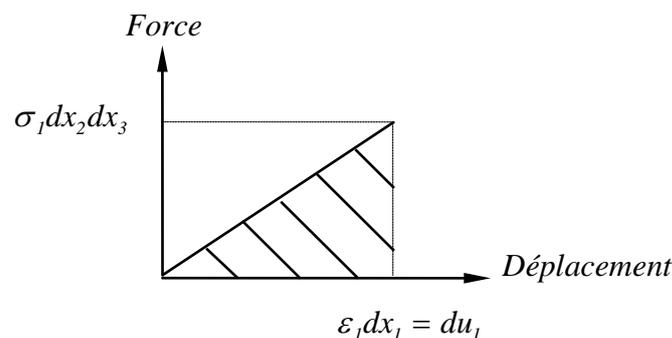
$$dW_e = -dW_i$$

Autrement dit, les sollicitations provoquant au sein d'un milieu des déformations, donc des déplacements. Les contraintes effectuent un certain travail entre les états d'équilibre initial et final, ce travail se libère si les sollicitations cessent et se nomme énergie potentielle élastique.

Théorème de Clapeyron :

Les sollicitations sont supposées des forces concentrées ; le travail de ces forces appliquées à un système élastique lors du passage d'un état d'équilibre (1) à un état d'équilibre (2) est égal à : $W_e = \frac{1}{2} \sum_i F_i u_i$

En considérant un repère principal, l'énergie de déformation pour une facette peut être écrite comme suit : $dW_{i1} = \frac{1}{2} (\sigma_1 dx_2 dx_3) (\varepsilon_1 dx_1) = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 dV$



Pour un parallélépipède élémentaire, le travail effectué est :

$$dW_i = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV$$

$$\frac{dW_i}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

Pour un repère quelconque, l'énergie de déformation peut être exprimée selon :

$$\frac{dW_i}{dV} = \frac{1}{2}[\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23})]$$

Dans un repère principal, et d'après la loi de Hooke généralisée, on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases}$$

En remplaçant ces déformations par leurs expressions dans l'équation de l'énergie, on obtient :

$$\frac{dW_i}{dV} = \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \left(\frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \right) + \sigma_2 \left(\frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \right) + \sigma_3 \left(\frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) \right]$$

$$\frac{dW_i}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

En exprimant ces résultats dans un repère quelconque, on aura :

$$\frac{dW_i}{dV} = \frac{1}{2E} \left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + (1+\nu)(\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{13}\sigma_{31} + \sigma_{23}\sigma_{32}) \right]$$

En dérivant par rapport à σ_{11} et par rapport à σ_{12} , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{11}} \left(\frac{dW_i}{dV} \right) = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \varepsilon_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{12}} \left(\frac{dW_i}{dV} \right) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$

D'une manière générale, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{dW_i}{dV} \right) = \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{dW_i}{dV} \right) = \sigma_{ij}$$

5-2- Critères de limite élastique :

Pour optimiser les dimensions d'une structure, le concepteur doit parfaitement connaître le matériau utilisé, notamment les états limites pour un chargement donné. La connaissance d'un

état limite se traduit par la formulation d'un critère validé à partir d'essais au laboratoire. À travers les différents critères proposés, on peut dégager a priori la classification suivante :

- Critères élémentaires,
- Critères liés au tricercler de Mohr,
- Critères liés à l'énergie,
- Critères liés aux conditions aux limites.

5-2-1- Critères élémentaires :

On définit respectivement σ_e , σ_e' et τ_e les limites élastiques du matériau en traction pure, compression pure et cisaillement pur.

a- Critère de la déformation maximale ou de Saint-Venant : On borne la plus grande dilatation principale. Les déformations extrêmes sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases}$$

Pour une dilatation positive, on doit vérifier : $\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_e$.

Pour une dilatation négative, on doit vérifier : $\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \geq \sigma_e'$.

b- Critère de la contrainte maximale ou de Rankine : On borne la plus grande et la plus petite des contraintes principales :

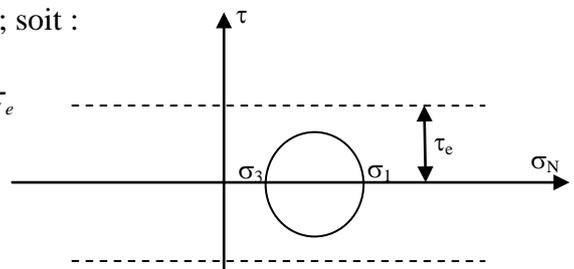
$$\begin{cases} \sigma_1 < \sigma_e \\ \sigma_3 > \sigma_e' \end{cases}$$

5-2-2- Critères liés au tricercler de Mohr :

a- Critère de la contrainte de cisaillement maximale ou de Guest ou de Tresca ou de Mohr : On borne la contrainte tangentielle maximale ; soit :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_e$$

Si on prend : $\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$, on aura : $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_e$



Pour un état plan de contraintes, on doit vérifier : $\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \leq \frac{\sigma_e}{2}$

b- Critère des règles Françaises pour des constructions métalliques en acier : C'est une amélioration des critères précédents basée sur des résultats expérimentaux.

Zone 1 : Droites parallèles

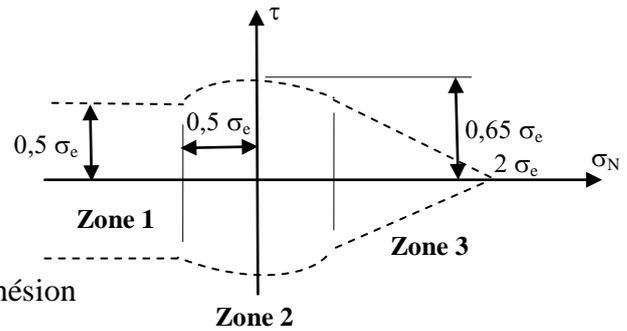
$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_e.$$

Zone 2 : Arcs elliptiques

$$(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - 2,36 \sigma_1 \sigma_3 \leq \sigma_e^2.$$

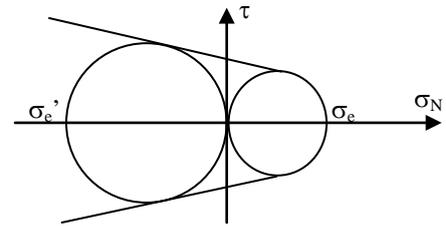
Zone 3 : Droites concourantes au point de décohésion
(ayant une abscisse égale à $2 \sigma_e$)

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{2} \leq \sigma_e.$$



c- Critère de la courbe intrinsèque ou de Mohr-Cauchot : C'est une parabole tangente aux cercles de diamètres σ_e et σ_e' d'équation :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - (\sigma_e + \sigma_e')(\sigma_1 + \sigma_3) \leq -\sigma_e \sigma_e'$$



5-2-3- Critères liés à l'énergie de déformation :

a- Critère de l'énergie totale ou de Beltrami : On borne l'énergie de déformation totale par unité de volume ; soit :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \leq \sigma_e^2$$

Ce critère est valable pour : $|\sigma_e| = |\sigma_e'|$.

b- Critère de Von-Misès : On borne seulement l'énergie de déformation de changement de forme par unité de volume ; soit : $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq 2\sigma_e^2$

Dans un repère quelconque, on vérifie l'inégalité qui suit :

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \leq 2\sigma_e^2$$

Ce critère est valable pour : $|\sigma_e| = |\sigma_e'|$.

5-2-4- Critères liés aux conditions aux limites :

On retrouve les critères du cône de Nadai et du paraboloïde de Stassi d'Alia ; pour ces deux critères si $|\sigma_e| = |\sigma_e'|$, on retrouve le critère de Von-Misès.

- Pour le critère de Nadai : $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + c_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + c_2)^2 = 0$,
où c_1 et c_2 sont des constantes.

- Pour le critère de Stassi d'Alia : $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + c_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + c_2 = 0$,
où c_1 et c_2 sont des constantes.

La représentation géométrique des différents critères peut être reportée comme suit :

